

LAMP3D.
Un modello lagrangiano per lo studio
della dispersione di inquinanti
in acque costiere.

Applicazione al Levante Ligure

Andrea Doglioli

22 Febbraio 2000

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Scopi della tesi

L'utilizzo dei modelli matematici in campo ambientale è attualmente molto diffuso trattandosi di strumenti utili non solo nell'attività di ricerca scientifica, ma anche nella gestione del territorio. Essi trovano applicazione nel campo della protezione dell'ambiente marino, poichè, essendo ormai considerata erronea la convinzione che la capacità autodepurativa del mare sia illimitata, si ritiene oggi importante il controllo degli impatti ambientali dovuti alle attività antropiche. Tuttavia, come è stato sottolineato a proposito dei modelli di qualità dell'aria [14], la modellizzazione, così come il monitoraggio, *non* sono la soluzione dei problemi di inquinamento. Tali studi semmai costituiscono una attività relativamente economica, i cui risultati possono fornire utili informazioni per la messa a punto, assai meno economica, di successive strategie tese al controllo e riduzione degli impatti. Le simulazioni modellistiche consentono di riprodurre in dettaglio le dinamiche dei fenomeni del mondo reale e le loro conseguenze anche su tempi lunghi ed in ciò presentano vantaggi ampiamente riconosciuti rispetto al puro monitoraggio, che, pur costituendo una indispensabile fonte di dati sperimentali, non può che dare informazioni limitate nello spazio e nel tempo. L'utilità delle simulazioni modellistiche, trattandosi, come si è detto, di strumenti, dipende naturalmente non solo dalla validità dell'ideazione e della messa a punto dei modelli, ma anche da un loro

utilizzo attento ed appropriato.

A partire da tali considerazioni, si è intrapreso il lavoro di tesi qui presentato ponendosi un duplice scopo:

- acquisire una conoscenza sufficientemente robusta dei modelli matematici nel campo della idrodinamica costiera e della dispersione di inquinanti;
- maturare esperienza nel campo dell'applicazione e dell'utilizzo di tali modelli.

Per raggiungere questi obbiettivi, si è programmato il lavoro di tesi suddividendolo in due parti: una parte teorica ed una sperimentale. Nella prima fase si è pensato di affiancare allo studio di modelli già noti, l'ideazione e la programmazione di un nuovo modello numerico. La successiva applicazione in situazioni reali del modello ideato, a confronto con un modello commerciale di un noto istituto di ricerca, ha costituito invece la parte sperimentale del lavoro di tesi.

Nel seguito di questo capitolo verranno introdotti in generale i modelli matematici di interesse e i principali vantaggi dei modelli Lagrangiani. Successivamente verrà presentato in maniera sintetica il lavoro svolto.

1.2 I modelli matematici

A differenza dei modelli *fisici*, che riproducono a scala minore in laboratorio un determinato fenomeno (si pensi ad esempio al tunnel del vento o alla vasca idrologica), i modelli *matematici* sono costituiti da un insieme di equazioni matematiche con le quali vengono descritti gli aspetti fisici e chimici del fenomeno.

L'utilità e l'attuale grande sviluppo dei modelli matematici sono stati permessi dalla diffusione di calcolatori sempre più veloci e potenti, che permettono di risolvere numericamente in tempi relativamente brevi le equazioni costituenti un modello matematico.

I modelli matematici possono essere classificati in

- *modelli statistici*, basati su relazioni statistiche semiempiriche fra i dati e le misure disponibili.

- *modelli deterministici*, basati su una descrizione matematica del fenomeno che collega gli effetti (i.e., l'inquinamento dell'acqua) a delle cause (i.e., gli scarichi);

Un esempio di modello statistico è dato da un algoritmo che consente la previsione a breve termine dei livelli di concentrazione di un certo inquinante in una data zona, a partire dalle misure attualmente disponibili, in funzione della passata correlazione tra tali misure e gli andamenti della concentrazione.

Un esempio di modello deterministico può essere un modello di dispersione, in cui i dati in uscita (il campo di concentrazione) vengono calcolati a partire da specifici dati in entrata (le portate degli scarichi, i coefficienti di diffusione, le correnti marine).

La distinzione fatta è solo indicativa: molti modelli di dispersione sono basati su teorie della diffusione statistiche e i risultati prodotti dai modelli deterministici sono spesso convalidati con analisi statistiche.

L'importanza dei modelli deterministici per la dispersione di inquinanti viene riscontrata nelle applicazioni pratiche, poichè, se calibrati attentamente ed usati propriamente, permettono una valutazione precisa della responsabilità di ogni sorgente rispetto ad una determinata area di ricezione. In questo modo essi costituiscono un importante strumento [14] per:

- stabilire i limiti di legge per il controllo degli effluenti e le responsabilità di determinate situazioni di inquinamento;
- valutare il posizionamento di future sorgenti di inquinanti per minimizzarne gli impatti;
- mettere a punto strategie di intervento in caso di incidenti.

1.2.1 I vantaggi e gli svantaggi dei modelli lagrangiani

La simulazione della dispersione tramite le particelle Lagrangiane è stata definita "modellizzazione naturale" [14]. Questi modelli infatti, come vedremo meglio in seguito, non necessitano a differenza dei modelli Euleriani di classi di stabilità artificiali o di coefficienti di diffusione

che sono praticamente impossibili da misurare. Invece le caratteristiche della diffusione sono simulate attribuendo un certo grado di aleatorietà alla dinamica di ciascuna particella, sfruttando la capacità dei computer di generare numeri pseudorandom.

I principali vantaggi di questo approccio possono essere individuati in

- mancanza della diffusione artificiale iniziale nella maglia contenente una sorgente e di errori numerici nella parte avvertiva;
- libertà da assunzioni fisiche restrittive, dato che tutte le incertezze sono combinate nella corretta determinazione delle pseudovelocità;
- possibilità di contrassegnare ciascuna particella con coordinate proprie, un indicatore della sorgente di provenienza, massa, reattività, tipo, taglia, ecc. permettendo il calcolo del decadimento, della distribuzione delle taglie, ecc.;
- possibilità di utilizzare direttamente come dati idrologici ed idrodinamici misure sperimentali.

Potenzialmente questo metodo è superiore sia in accuratezza numerica che in rappresentatività fisica.

Tuttavia necessitano ancora molte ricerche per ottenere i campi idrodinamici necessari a tali modelli a causa della scarsa disponibilità di dati sperimentali e delle poche conoscenze sui processi turbolenti.

1.3 Sintesi del lavoro di tesi

Il lavoro svolto può essere suddiviso essenzialmente in quattro parti:

- messa a punto e test del modello dispersivo bidimensionale euleriano MIKE 21 del Danish Hydraulic Institut;
- ideazione e costruzione di un modello dispersivo bidimensionale a particelle (LAMP2D);
- modificazione del precedente modello finalizzata ad introdurre la dispersione verticale (LAMP3D) e test di efficienza a partire da flussi bidimensionali semplici;

- utilizzazione dei tre diversi modelli per la simulazione dei rilasci continuativi da condotta sottomarina nella zona del Golfo Paradiso e del Golfo del Tigullio (da Sori a Sestri Levante) ed analisi dei risultati.

Tutti i codici di programmazione elaborati in questa tesi sono stati scritti in Fortran utilizzando il compilatore MSFortran5.

Vediamo ora in maggior dettaglio ciascuna delle quattro fasi.

MIKE 21

Col programma commerciale MIKE 21, di proprietà della Regione Liguria ed installato presso il CRAM ENEA di La Spezia, nell'ambito del progetto ENVIREG, si sono eseguite varie simulazioni di campi di corrente e di dispersione di inquinanti al fine di calibrare i diversi parametri utilizzati dal programma mediante confronto con i dati sperimentali disponibili. In accordo con Regione Liguria e ENEA si è acquisita la necessaria familiarità col programma, dapprima frequentando la sede del CRAM a Lerici, e in seguito per mezzo di apposito collegamento in rete (programma Winframe), da una macchina del Dipartimento di Fisica dell'Università di Genova.

Dopo una prima serie di simulazioni svolte con MIKE 21 allo scopo di individuare le potenzialità del programma e comprendere le implicazioni della 'filosofia' del modello, basata sulla cosiddetta "approssimazione in acqua bassa" (utilizzo di grandezze integrate sulla colonna d'acqua), si sono verificati i risultati precedentemente ottenuti da altri ricercatori [5]. In accordo con l'ufficio Ambiente Marino e Costiero della Regione Liguria, si sono poi individuati degli obiettivi di comune interesse che hanno portato al proseguimento, attraverso ampliamenti e modifiche, dei precedenti lavori.

LAMP2D

Il modello LAMP2D¹ è un modello a particelle di diffusione bidimensionale: con esso si utilizza il campo di velocità orizzontale, integrato

¹Lagrangian Assessment for Marine Pollution: 2 Dimensional model

sulla colonna d'acqua, prodotto dal modulo idrodinamico di MIKE 21 per calcolare ad ogni passo temporale lo spostamento dispersivo (avvezione + diffusione) di ciascuna particella. Sono stati preparati alcuni programmi di conversione dei dati prodotti da LAMP2D e da MIKE 21 in modo da rendere più diretti i confronti tra i rispettivi risultati. In particolare si è preparato un programma di grafica (PIXELS) specifico per LAMP2D che rende immediata la comprensione del diverso tipo di approccio fra i due modelli ed un programma per la georeferenziazione delle griglie usate dai modelli.

LAMP3D

La necessità di risultati più realistici e di maggiori dettagli ha in seguito indotto ad introdurre la terza dimensione nel modello precedente, arrivando così a LAMP3D ². Questo programma utilizza i campi bidimensionali di velocità calcolati dal modulo idrodinamico di MIKE 21 per ricavare un profilo verticale di velocità basato sulla approssimazione della spirale di Ekman, introdurre un conseguente campo di velocità verticale in modo da soddisfare la legge di conservazione della massa ed ottenere un profilo verticale teorico per il coefficiente di dispersione. Del programma PIXELS si è creata una nuova versione per la grafica, più adatta ai dati forniti da LAMP3D, che permette di visualizzare le concentrazioni per strati diversi e di fornire animazioni. Il soddisfacente confronto fra i dati prodotti dalle simulazioni di casi semplici con i dati analoghi ottenuti da MIKE 21, ha portato a utilizzare questo programma per lo studio di casi reali.

Studi di situazioni empiriche

La scelta della zona di studio è ricaduta sul tratto di costa ligure compreso tra Sori e Sestri Levante, data non solo la disponibilità di dati oceanografici ed ambientali e di precedenti lavori di modellistica, ma anche il riconosciuto valore ambientale dei fondali del Parco di Portofino e l'importanza economica dell'industria turistica locale. Si sono simulati i rilasci continuativi delle nove condotte fognarie che scaricano in mare nella zona, censite dalla Regione, focalizzando l'attenzione su tre diversi

²Lagrangian Assessment for Marine Pollution: 3 Dimensional model

tipi di inquinanti tipici di questi scarichi: i sedimenti sospesi (conservativo), il BOD₅ (decadente a medio periodo) e i coliformi (decadente a breve periodo).

Si ritiene che il lavoro svolto, oltre a fornire nell'immediato informazioni attendibili sugli impatti ambientali delle condotte a mare nella zona sopra descritta, presenti, in particolare per quanto riguarda la parte di programmazione dei modelli, i presupposti per un significativo sviluppo futuro.

Capitolo 2

Cenni di fluidodinamica generale

Introduzione

Seguendo l'approccio Euleriano, un fluido viene descritto da campi, scalari o vettoriali, (di velocità $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, di densità $\rho(\mathbf{r}, t)$, di pressione $p(\mathbf{r}, t)$, e così via) che ne descrivono punto per punto ed istante per istante lo stato dinamico e termodinamico. Implicita in questo approccio è l'assimilazione di un fluido ad un *continuo*¹.

In genere si considerano i liquidi come fluidi *incompressibili*; pur trattandosi di una semplificazione concettuale, tale definizione si adatta ad un elevato numero di circostanze pratiche: in particolare, l'acqua di mare può rientrare in questa schematizzazione con buona approssimazione per una vasta categoria di fenomeni.

¹Questa concezione, pur essendo in contrasto con le conoscenze della struttura della materia, è perfettamente giustificata dal fatto che le più piccole scale spaziali dei moti di interesse oceanografico sono sempre estremamente grandi rispetto alle scale molecolari.

2.1 Equazioni fondamentali

Lo studio generale dei flussi oceanografici utilizza le seguenti equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 & \text{(eq. continuità)} \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathcal{T} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathcal{R} - \nabla \Phi - \nabla \Phi_m + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v} & \text{(eq. momento)} \\ \frac{dT}{dt} = \kappa_T \nabla^2 T + \frac{Q}{\rho c_\alpha} & \text{(eq. calore)} \\ \frac{ds}{dt} = \kappa_s \nabla^2 s + \frac{\Sigma}{\rho} & \text{(eq. salinità)} \\ \alpha = \alpha(T, \rho, s) & \text{(eq. di stato),} \end{array} \right.$$

dove $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$.

Esaminiamo ora il significato ed i simboli di ciascuna delle precedenti equazioni.

2.1.1 L'equazione di continuità

La *legge di conservazione della massa* stabilisce che, in assenza di sorgenti (positive o negative), la massa che entra in una certa porzione di spazio deve essere pari a quella che ne esce. In forma matematica questo principio assume la forma della *equazione di continuità*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.1)$$

in cui ρ è la densità di massa del fluido e $\mathbf{v} = (u, v, w)$ il campo di velocità. Nel caso di *flussi incompressi* (necessariamente eseguiti dai *fluidi incompressibili*) per i quali durante il moto la densità di ciascuna particella non varia, la (2.1) si semplifica nella forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

2.1.2 L'equazione del momento

L'equazione del momento, scritta nella sua forma generale

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot \mathcal{T} + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot \mathcal{R} - \nabla \Phi - \nabla \Phi_m - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}, \quad (2.2)$$

tiene conto dei seguenti fenomeni:

- gradiente della pressione p ;
- attrito molecolare (\mathcal{T} è il tensore degli sforzi viscosi);
- attrito turbolento (\mathcal{R} è il tensore di Reynolds);
- attrazione gravitazionale terrestre, col geopotenziale Φ ;
- attrazione gravitazionale luni-solare, col potenziale di marea Φ_m ;
- rotazione terrestre con velocità angolare $\boldsymbol{\Omega}$.

Il termine di attrito viscoso $\frac{1}{\rho}\nabla \cdot \mathcal{T}$, in cui \mathcal{T} è il tensore degli sforzi viscosi, per i fluidi *newtoniani* può essere scritto nella forma $\nu \nabla^2 \mathbf{v}$, in cui $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ con μ coefficiente di viscosità dinamica, è detto *coefficiente di viscosità cinematica* del fluido. Il termine di attrito viscoso rende conto della diffusione molecolare del momento.

Il tensore \mathcal{R} , detto di Reynolds o degli sforzi turbolenti, di struttura simile al precedente tensore \mathcal{T} , descrive invece la diffusione di momento dovuta a componenti turbolente del campo di velocità. La sua determinazione presenta difficoltà teoriche non ancora risolte; tuttavia esso viene per semplicità trattato in modo analogo al tensore \mathcal{T} . Esso è quindi espresso in modo semplificato nella forma $\nu_t \nabla^2 \mathbf{v}$, in cui ν_t è detto *coefficiente di viscosità turbolenta* del fluido, col significato di coefficiente di diffusione turbolenta del momento.

Occorre notare che solitamente ν_t è superiore di diversi ordini di grandezza (da 10 a 10^{12} volte) rispetto a ν , che viene pertanto trascurato o inglobato in esso. Inoltre a seconda delle scale di moto considerate, il coefficiente ν_t , deve essere separato in una componente oriz-

zontale ed una verticale, quindi il termine di attrito turbolento nella (2.2) diventa:

$$\nu_t \nabla^2 \mathbf{v} = A_H \nabla_H^2 \mathbf{v} + A_V \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z^2}$$

in cui i due coefficienti A_H e A_V possono differire anche di diversi ordini di grandezza. Nel caso in cui il moto orizzontale si sviluppa su scale assai maggiori di quello verticale, $A_H \gg A_V$.

In mare, il coefficiente verticale A_V varia da 10^{-5} a 10^{-1} m²/s, mentre quello orizzontale A_V è compreso tra 10 e 10^6 m²/s.

Anche lo spessore che si assegna allo strato turbolento dipende dalle scale di flusso; spesso esso viene considerato così esteso da includere tutta la regione occupata dal fluido.

L'attrazione dovuta alla massa terrestre in rotazione viene compresa nella (2.2) col geopotenziale Φ . Esso corrisponde alla somma del potenziale gravitazionale terrestre e del potenziale centrifugo dovuto alla rotazione della Terra stessa. Il geopotenziale è solitamente rappresentato nell'equazione del momento da suo gradiente, l'accelerazione di gravità

$$\mathbf{g}(x, y, z) = -\nabla \Phi.$$

Se la porzione di superficie terrestre interessata si può considerare un piano, l'unica direzione in cui \mathbf{g} varia in modo rilevante è quella verticale; si ha così :

$$\Phi = \int_0^h g(z) dz \quad \text{ovvero} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = g.$$

Il potenziale di marea Φ_m comprende gli effetti dinamici legati ai moti dei vari corpi celesti, fra cui Luna e Sole sono i più importanti, rispetto alla Terra. Comunque nello studio dei moti oceanografici i moti di marea sono spesso omessi, in quanto sono caratterizzati da frequenze ben precise, facilmente identificabili, per cui è relativamente facile sottrarre la marea dal resto dei rimanenti moti per potersi concentrare sugli altri fenomeni.

Il termine $-2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}$ può essere semplificato, se si considerano, come di solito avviene per ragioni di analisi di scala, flussi "quasi orizzontali".

Tenendo allora conto localmente della sola componente verticale della rotazione terrestre si ottiene:

$$-2\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{v} \simeq -2\mathbf{\Omega} \sin \phi \mathbf{k} \wedge \mathbf{v} = -f\mathbf{k} \wedge \mathbf{v},$$

in cui $f = 2\mathbf{\Omega} \sin \phi$ è detto *parametro di Coriolis*. Il vettore $-f\mathbf{k} \wedge \mathbf{v}$ giace sul piano orizzontale ed è ruotato di 90° rispetto ad \mathbf{v} ; nel nostro emisfero l'accelerazione di Coriolis tende a deviare i corpi in movimento verso destra, senza variarne l'energia cinetica.

Oltre all'azione statica della pressione atmosferica (vedi in seguito pag. 15 e seguenti), è necessario considerare anche l'azione dinamica dell'atmosfera sul mare. A causa del carattere turbolento del moto di entrambe i mezzi, accoppiati attraverso una superficie di andamento assai irregolare, come quella libera del mare, si ricorre ad espressioni di natura empirica per descrivere gli aspetti più importanti. La dipendenza dalla quota z della velocità media dello strato atmosferico superficiale è spesso schematizzata dall'andamento logaritmico:

$$\bar{v} = \frac{v_*}{k} \log \frac{z}{z_0},$$

dove v_* è una costante detta *velocità di attrito*, k è la *costante di Von Karman* e z_0 la quota alla quale la velocità si annulla. La relazione intercorrente tra il modulo dello sforzo dovuto al vento sulla superficie marina τ_{wf} e la velocità del vento ad una quota convenzionale di 10 m sul l.m.m.) è di tipo quadratico:

$$\tau_{wf} = \rho_a C_D V_{10}^2,$$

indicando con ρ_a la densità dell'aria e con C_D un *coefficiente di trasciamento* adimensionale opportuno.

Per lo studio di campi di corrente in zona costiera è infine necessario tener conto anche dell'attrito sul fondo.

In canali aperti con flusso uniforme, l'equazione di Chézy,

$$\bar{v} = C\sqrt{hS},$$

mette in relazione la velocità media nella colonna d'acqua \bar{v} con la profondità dell'acqua h e la pendenza del canale S , attraverso il *coefficiente*

di Chézy C . Per flussi turbolenti, si assume che la distribuzione della velocità con la quota sia logaritmica:

$$\frac{(v - \bar{v})C}{\bar{v} \sqrt{8g}} = 2 \log \frac{z}{h} + 0.88.$$

L'equazione di Manning, che pur rimanendo una formula empirica, sembra meglio soddisfare i dati sperimentali, propone:

$$\bar{v} = M R^{\frac{2}{3}} S^{\frac{1}{2}},$$

perciò, paragonando l'equazione di Chézy con quella di Manning, si trova la relazione che lega il *coefficiente di Manning*² con quello di Chézy:

$$C = M h^{\frac{1}{6}}.$$

Il modulo dello sforzo prodotto dall'attrito sul fondo può allora essere espresso nel modo seguente:

$$\tau_{bf} = \frac{g v^2}{C^2}.$$

Concludendo, possiamo riscrivere l'equazione del momento nella forma:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + A_H \nabla_H^2 \mathbf{v} + A_V \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z^2} + \mathbf{g} + \tau_{wf} \times \hat{\mathbf{v}} + \tau_{bf} \times \hat{\mathbf{v}} - f \mathbf{k} \wedge \mathbf{v}. \quad (2.3)$$

2.1.3 L'equazione idrostatica

In condizioni di quiete la precedente equazione (2.3) diventa l'*equazione idrostatica*:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (2.4)$$

Essa permette, noto l'andamento verticale della densità, di calcolare il corrispondente andamento della pressione:

$$p = - \int_0^z g \rho(z) dz + p_0$$

²In alcuni testi il coefficiente di Manning è definito come reciproco di questa formulazione.

dove p_0 è la pressione ad un livello arbitrario $z = 0$; in genere in oceanografia si assume tale livello come la superficie libera del mare, quindi p_0 diventa la pressione atmosferica.

Quando un fluido è in equilibrio, le superfici a geopotenziale, densità e pressione costanti, debbono coincidere; questa condizione implica che la densità del fluido deve risultare una funzione della sola pressione:

$$\rho = \rho(p).$$

Se tale condizione è verificata, almeno approssimativamente, anche se il fluido è in moto, allora si parla di flusso *barotropico*.

La più elementare rappresentazione dell'oceano è quella di un fluido omogeneo di densità costante; in questo caso la (2.4) può essere facilmente integrata ad ottenere un profilo di pressione lineare:

$$p = p_0 - \rho g z. \quad (2.5)$$

In generale la densità dell'acqua marina dipende da una terna di variabili di stato indipendenti, tra cui possiamo scegliere la pressione p , l'entropia η , e la salinità s . In una approssimazione migliore della precedente possiamo quindi assumere che se la scala temporale del fenomeno considerato garantisce il completamento degli scambi diffusivi di calore e salinità, cioè se densità di entropia e salinità possono essere ritenuti costanti su tutto il fluido, allora la densità di massa dipende solo dal valore della pressione e si può scrivere:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{\eta s} \frac{\partial p}{\partial z} \quad \text{o anche} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = c_s^2 \frac{\partial \rho}{\partial z},$$

dove c_s rappresenta la velocità del suono nell'acqua. Supponendo c_s costante, si ottiene immediatamente:

$$-\rho g = c_s^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad \implies \quad \rho = \rho_0 e^{-\left(\frac{g}{c_s^2}\right)z}$$

dove ρ_0 è la densità superficiale. Essendo però

$$H = \frac{c_s^2}{g} \approx 10^4 \div 10^5 \text{ [m]}$$

la variazione percentuale di densità tra superficie e fondo risulta inferiore ai valori reali riscontrati su cui influiscono altri fattori come la stratificazione superficiale.

2.1.4 L'equazione del calore

L'equazione del calore nella forma:

$$\frac{dT}{dt} = \kappa_T \nabla^2 T + \frac{Q}{\rho c_\alpha},$$

viene ottenuta dall'equazione termodinamica nel caso di una trasformazione a volume costante, trascurando le possibili variazioni del calore specifico a volume costante c_α , ed assumendo che la variazione di energia interna di una particella sia attribuibile:

- al flusso di calore χ_T proporzionale al gradiente di temperatura attraverso il *coefficiente di conducibilità termica* $-k_T$, cioè

$$\chi_T = -k_T \nabla T;$$

- ad eventuali sorgenti interne di calore Q .

La costante $\kappa_T = \frac{k_T}{\rho c_\alpha}$ viene detta *diffusività termica molecolare*.

Nel caso di trasformazioni a pressione costante, si possono ottenere formule analoghe con c_P al posto di c_α .

2.1.5 L'equazione della salinità

La salinità viene definita come il rapporto tra la massa dei sali presenti in una certa quantità d'acqua e la massa d'acqua che li contiene ed è espressa in parti per mille. Si ottiene una formula analoga all'equazione del calore ³:

$$\frac{ds}{dt} = \kappa_s \nabla^2 s + \frac{\Sigma}{\rho},$$

in cui Σ rappresenta una eventuale sorgente di salinità e $\kappa_s = \frac{k_s}{\rho}$ il coefficiente di diffusione molecolare.

Sia nell'equazione del calore che in quella della salinità, come già visto per il momento, qualora i flussi diventino turbolenti, i coefficienti di diffusione molecolare vengono sostituiti od inglobati in coefficienti empirici di diffusione turbolenta.

³In questo modo si considera una particella di acqua marina un sistema aperto al flusso di sale.

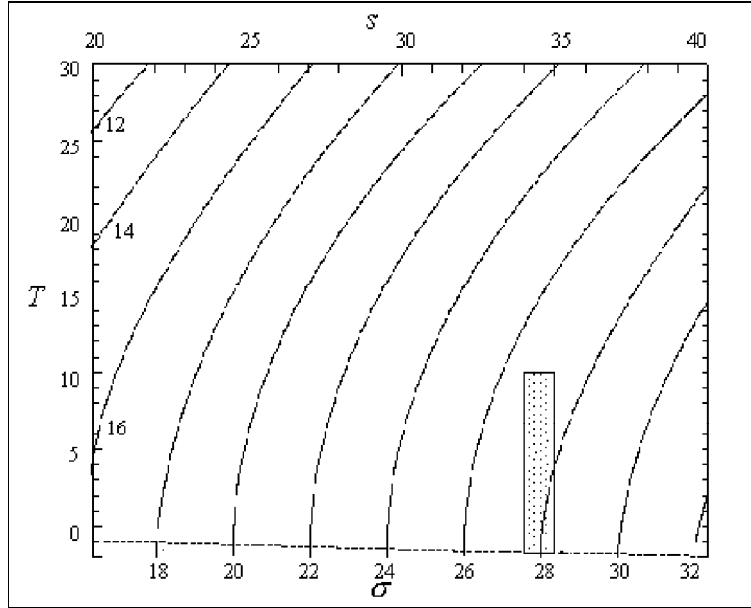


Figura 2.1: Valori della densità dell'acqua, espressi in termini di fattore *sigma-t* ($\sigma_t = [\rho(s, t, p_a) - 1000] \text{ kg m}^{-3}$) in funzione della temperatura T in $^{\circ}\text{C}$ e della salinità s in psu.

2.1.6 L'equazione di stato per l'acqua marina

Come si è detto, per l'acqua marina, nell'equazione di stato il volume specifico α dipende da tre fattori:

- pressione;
- temperatura;
- salinità.

Data la complessità dell'equazione, si utilizza solitamente il grafico temperatura-salinità riportato in Figura 2.1: in esso la regione rettangolare punteggiata rappresenta i valori di circa il 90% dell'acqua oceanica, mentre la linea tratteggiata rappresenta la separazione tra acqua e ghiaccio.

Nell'ipotesi che nei processi considerati le deviazioni di pressione, temperatura e salinità rispetto ad un certo stato di base siano con-

tenute, si può sviluppare la funzione α in serie di Taylor e considerare i soli termini lineari. Differenziando l'equazione

$$\alpha = \alpha(T, p, s),$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} d\alpha &= \left(\frac{\partial \alpha}{\partial T}\right)_{ps} dT + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial p}\right)_{Ts} dp + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s}\right)_{Tp} ds = \\ &= \alpha (a_T dT + a_p dp + a_s ds), \end{aligned} \quad (2.6)$$

in cui i coefficienti

$$a_T = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial T}\right)_{ps}, \quad a_p = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial p}\right)_{Ts}, \quad a_s = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s}\right)_{Tp},$$

vengono chiamati rispettivamente coefficienti di *espansione termica*, *compressibilità isoterma*, *contrazione salina*. Sostituendo nella (2.6) agli incrementi infinitesimi delle quantità finite calcolate rispetto ad uno stato di riferimento prefissato, caratterizzato da volume specifico α_0 , da temperatura T_0 , pressione p_0 e salinità s_0 , abbiamo

$$\alpha \simeq \alpha_0 [1 + (a_T)_0 (T - T_0) + (a_p)_0 (p - p_0) + (a_s)_0 (s - s_0)].$$

Concludendo possiamo riscrivere il sistema di equazioni introdotto all'inizio del paragrafo, nella forma seguente:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 & \text{(eq. continuità)} \\ \frac{d \mathbf{v}_H}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + A_H \nabla_H^2 \mathbf{v}_H + A_V \frac{\partial^2 \mathbf{v}_H}{\partial z^2} + \mathbf{g} \\ \quad + \tau_{wf} \times \hat{\mathbf{v}}_H + \tau_{bf} \times \hat{\mathbf{v}}_H - f \mathbf{k} \wedge \mathbf{v}_H & \text{(eq. momento)} \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g & \text{(eq. idrostatica)} \\ \frac{dT}{dt} = \kappa_T \nabla^2 T + \frac{Q}{\rho c_\alpha} & \text{(eq. calore)} \\ \frac{ds}{dt} = \kappa_s \nabla^2 s + \frac{\Sigma}{\rho} & \text{(eq. salinità)} \\ \alpha \simeq \alpha_0 [1 + (a_T)_0 (T - T_0) + (a_p)_0 (p - p_0) + (a_s)_0 (s - s_0)] & \text{(eq. di stato).} \end{array} \right.$$

2.2 L'approssimazione in acqua bassa per fluidi omogenei

La condizione di equilibrio idrostatico (2.4) permette di collegare il valore della pressione ad una certa profondità col valore dell'elevazione della superficie libera del fluido. Se $\zeta(x, y, t)$ è la superficie libera, la pressione ad una certa quota $z < \zeta$ può essere calcolata riscrivendo la (2.5) nella forma:

$$p = p_a + \rho g (\zeta - z),$$

dove p_a è la pressione atmosferica; se si assume che quest'ultima rimanga costante otteniamo:

$$\nabla_H p = \rho g \nabla_H \zeta + \nabla_H p_a \simeq \rho g \nabla_H \zeta.$$

Quindi il gradiente di pressione orizzontale dipende solo dalla forma della superficie marina. Inoltre visto che $\zeta = \zeta(x, y, t)$ non dipende dalla coordinata verticale, allora anche il moto dovrà essere indipendente dalla profondità. Considerando anche la componente della forza di Coriolis che dipende dalla sola componente verticale del vettore di rotazione Ω , le equazioni della componente orizzontale del moto diventano:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}_H}{\partial t} + \mathbf{v}_H \cdot \nabla_H \mathbf{v}_H = & -g \nabla_H \zeta + A_H \nabla_H^2 \mathbf{v}_H + A_V \frac{\partial^2 \mathbf{v}_H}{\partial z^2} + \\ & + \tau_{wf} \times \hat{\mathbf{v}}_H + \tau_{bf} \times \hat{\mathbf{v}}_H - f \mathbf{k} \wedge \mathbf{v}_H \end{aligned} \quad (2.7)$$

Nelle due equazioni della componente orizzontale, le incognite sono tre: u, v, ζ , quindi per la chiusura del sistema si utilizza l'equazione di continuità (2.1), riscritta nelle attuali condizioni, con le medesime variabili. Integrando l'espressione

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla_H \cdot \mathbf{v}_H + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

tra il fondo a $z = -h$ e la superficie libera a $z = \zeta$, si ottiene

$$(h + \zeta) \nabla_H \cdot \mathbf{v}_H + w_{z=\zeta} - w_{z=-h} = 0.$$

Una particella posta sulla superficie libera deve rimanere su di essa durante il moto, per cui

$$w_{z=\zeta} = \frac{d\zeta}{dt},$$

Analogamente per una particella a contatto col fondo, per cui

$$w_{z=-h} = -\frac{dh}{dt},$$

quindi

$$\frac{d}{dt}(h + \zeta) + (h + \zeta) \nabla_H \cdot \mathbf{v}_H = 0.$$

Tale equazione, escludendo che il fondo vari nel tempo, può essere anche posta nella forma

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \cdot (h + \zeta) \mathbf{v}_H = 0, \quad (2.8)$$

dove .

L'insieme della 2.7 e della 2.8 costituisce la cosiddetta *approssimazione di acqua bassa*, costituita da un sistema chiuso di tre equazioni nelle tre incognite u, v e ζ . Tale approssimazione è valida nelle stesse ipotesi di validità dell'equazione idrostatica, cioè quando la profondità dell'acqua è molto bassa rispetto alle scale orizzontali di moto che si intende studiare.

Capitolo 3

I processi di trasporto

Introduzione

Il termine *dispersione* viene generalmente usato per riferirsi al processo che porta una determinata sostanza immessa in un mezzo fluido a distribuirsi in esso. Mentre l'*avvezione* rappresenta il trasporto per mezzo di correnti (medie) deterministiche, la dispersione dipende sia da processi casuali (*diffusione*) sia dall'effetto dei gradienti di velocità (*shear*).

Fick (1855) e Taylor (1921) tentarono di parametrizzare i flussi di massa dei soluti provocati dai moti molecolari e turbolenti, assumendo che i flussi siano proporzionali ai gradienti di concentrazione. Le costanti di proporzionalità furono chiamate coefficienti di diffusione molecolare e turbolenta.

In seguito Taylor estese questa approssimazione anche ai flussi di

PRINCIPALI PROCESSI DI TRASPORTO	
<i>AVVEZIONE</i> movimento delle particelle fluide dovuto a processi di flusso risolti	
<i>DISPERSIONE</i> <i>Distribuzione delle particelle fluide dovuta a processi di flusso non risolti</i>	<i>SHEAR</i> gradienti spaziali di velocità
	<i>DIFFUSIONE</i> moti molecolari e turbolenza

Figura 3.1: Schema dei principali processi di trasporto.

shear, rappresentando l'effetto combinato dell'avvezione differenziale e della diffusione attraverso i cosiddetti coefficienti di dispersione.

In questo capitolo si descriverà dapprima la diffusione molecolare, successivamente si analizzerà la diffusione nei flussi turbolenti, infine dopo aver analizzato i due diversi tipi di approccio, Euleriano e Lagrangiano, al problema della modellizzazione dell'avvezione-dispersione, verranno introdotti i modelli a particelle.

3.1 La diffusione

3.1.1 I processi diffusivi

Col termine *diffusione* si indica il processo che avviene quando una sostanza immessa in un fluido si distribuisce in tutto il mezzo. Lo stesso processo avviene anche nell'ambito di un medesimo fluido per le proprietà, come la densità o la salinità, qualora la loro distribuzione inizialmente sia non uniforme. In generale in tali processi si trasferisce da un punto all'altro dello spazio materia, energia cinetica e quantità di moto: i tre processi hanno caratteristiche simili e sono fra loro strettamente interconnessi.

I processi diffusivi sono riconducibili al cosiddetto *moto Browniano*. Esso è osservabile per una particella solida di piccole dimensioni immessa in un fluido: essa percorre al passare del tempo una traiettoria discontinua e casuale, che la porta probabilisticamente sempre più lontano dalla posizione iniziale. Tale moto può essere spiegato in base alla teoria molecolare della struttura della materia come il risultato degli urti della particella con le molecole di fluido, in continuo movimento legato alla agitazione termica, incontrate lungo il percorso.

3.1.2 I teoremi di conservazione

La legge di conservazione di una generica quantità di densità ψ è del tipo

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \mathbf{v}) = 0.$$

Un caso particolare di legge di conservazione è la legge di continuità (2.1), in cui la quantità che si conserva è la densità ρ .

Una forma più generale per una legge di conservazione è:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \mathbf{v}) - \nabla \cdot \boldsymbol{\chi} = \xi, \quad (3.1)$$

in cui si tiene conto della eventuale presenza di pozzi e/o sorgenti della quantità ψ , rappresentati da un termine aggiuntivo γ ,

$$\gamma = \xi - \nabla \cdot \boldsymbol{\chi}.$$

Riscrivendo la equazione (3.1) in forma integrale:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \psi dV + \oint_{\mathcal{S}} \psi \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\chi} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{V}} \xi dV,$$

si evidenzia che la variazione della proprietà ψ nel volume \mathcal{V} è dovuta alla somma di

- un *termine di trasporto*, $\psi \mathbf{v}$, il cui effetto è legato allo spostamento della materia che trascina con sé quella proprietà;
- un *termine di flusso* (effetti legati ad azioni di superficie), legato agli agenti rappresentati da $\boldsymbol{\chi}$, che causa un apporto od una perdita complessiva di quella quantità in volumi finiti di spazio, ma non nello spazio complessivamente occupato dal fluido, se $\boldsymbol{\chi}$ si annulla lungo i contorni del dominio; esso rappresenta quindi un fattore di riarrangiamento di quella proprietà all'interno del fluido, o la distribuzione di quella proprietà nel fluido a causa di azioni tese ad introdurla o ad asportarla attraverso i contorni del dominio;
- un *termine di generazione o dissipazione* (effetti di azioni di volume), dovuto al fattore ξ , che rappresenta effetti di crescita o diminuzione di ψ dovuti ad agenti distribuiti nello spazio, che potrebbero essere complessivamente nulli; nella maggioranza dei casi comunque la presenza di tale termine sta ad indicare che quella proprietà non è affatto conservata ed in ogni caso non è localmente conservata.

3.1.3 Conservazione di quantità o proprietà specifiche

Si può esprimere la proprietà ψ come il prodotto della densità ρ e di una proprietà specifica S (e.g. la salinità dell'acqua marina misurata in parti per mille):

$$\psi = \rho S .$$

Utilizzando il teorema del trasporto di una proprietà specifica,

$$\frac{\partial (\rho S)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho S \mathbf{v}) = \rho \frac{d S}{dt} ,$$

la (3.1) si riscrive:

$$\rho \frac{d S}{dt} + \nabla \cdot \chi = \xi . \quad (3.2)$$

3.1.4 L'equazione di diffusione

In genere si formula l'ipotesi che il flusso di una proprietà è proporzionale in modulo e diretto inversamente al gradiente di quella proprietà, cioè si pone

$$\chi = -k_s \nabla S ,$$

dove k_s è un'opportuna costante di proporzionalità.

L'equazione (3.2) diventa

$$\rho \frac{d S}{dt} = \nabla \cdot (k_s \nabla S) + \xi .$$

In genere la variazione di k_s nello spazio è trascurabile, per cui

$$\frac{d S}{dt} = \kappa_s \nabla^2 S + \frac{\xi}{\rho} , \quad (3.3)$$

dove

$$\kappa_s = \frac{k_s}{\rho}$$

è detto *coefficiente di diffusione molecolare* per la proprietà S .

3.1.5 Proprietà dei processi diffusivi

Contrariamente a quanto avviene per i gas, la viscosità molecolare dei liquidi diminuisce con la temperatura, perchè un aumento dell'agitazione molecolare diminuisce l'intensità dei legami che tengono unite fra loro le molecole, rendendo più facile lo scorrimento di uno strato sull'altro; rimane invece indipendente dalla pressione.

I processi di diffusione molecolare avvengono su scale di tempo molto lunghe rispetto a quelle della maggior parte dei moti cui si è interessati, quindi si assume spesso che il primo termine dell'equazione di diffusione sia nullo. Tuttavia quando il moto è sostanzialmente assente, sono questi gli unici responsabili della distribuzione di una data proprietà nel fluido.

Si dimostra che in assenza di pozzi o sorgenti, la diffusione molecolare, coerentemente con il secondo principio della termodinamica, agisce sempre nel senso di ridurre i gradienti del campo, quindi tende a distribuirlo uniformemente in tutto lo spazio occupato dal fluido.

3.1.6 Soluzioni caratteristiche dell'equazione di diffusione

In un fluido fermo la (3.3) diventa

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \kappa_s \nabla^2 S + \frac{\xi}{\rho}.$$

Se $\xi = 0$, una possibile soluzione, e specificatamente quella corrispondente alla proprietà S inizialmente tutta concentrata in un punto (l'origine), è data da

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(4\pi\kappa_s t)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4\pi\kappa_s t}},$$

dove $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Questa soluzione rappresenta una gaussiana tridimensionale centrata nell'origine, di varianza

$$\sigma^2 = 2\kappa_s t,$$

cioè una concentrazione della proprietà S che si espande con velocità pari a $\sqrt{\frac{2\kappa_s}{t}}$. Il raggio della regione occupata dal fluido aumenta con la

radice quadrata del tempo, mentre la velocità di espansione diminuisce con la stessa quantità; comunque il processo è molto lento, visti i valori generalmente molto bassi dei coefficienti di diffusione molecolare. Inoltre questa soluzione omogenea tridimensionale, può essere scomposta nel prodotto da tre soluzioni unidimensionali:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{(4\pi\kappa_s t)^{3/2}} \left(e^{-\frac{x^2}{4\pi\kappa_s t}} \right) \left(e^{-\frac{y^2}{4\pi\kappa_s t}} \right) \left(e^{-\frac{z^2}{4\pi\kappa_s t}} \right) \\ &= \mathcal{G}_x \cdot \mathcal{G}_y \cdot \mathcal{G}_z ,\end{aligned}$$

ciascuna delle quali rappresenta la soluzione dell'equazione di diffusione unidimensionale

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \kappa_s \frac{\partial^2 S}{\partial x_i^2} ,$$

in cui $x_i = x, y, z$ per $i = 1, 2, 3$.

La soluzione trovata permette di costruire soluzioni nel caso in cui $\xi \neq 0$ a partire da un certo istante iniziale oppure si abbia una concentrazione iniziale S_0 :

$$S(\mathbf{r}, t) = \int_0^t \int_V \mathcal{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \frac{\xi(\mathbf{r}', t')}{\rho} d\mathbf{r}' dt' + \int_V \mathcal{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) S_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' .$$

Quindi per seguire l'evoluzione della distribuzione di una certa quantità che diffonde si può considerare la distribuzione inizialmente presente, o successivamente introdotta, come la somma di tante sorgenti puntiformi elementari, seguirne separatamente l'evoluzione, infine sommare tutti i vari contributi. Prevedere l'andamento qualitativo dei processi di diffusione, risulta pertanto relativamente semplice, fintanto che non intervengano fenomeni avveviti.

3.2 La turbolenza

Si verifica sperimentalmente che aumentando la velocità, un flusso *laminare*, cioè costituito dalla sovrapposizione di tante lamine o filamenti di fluido in moto uniforme gli uni rispetto agli altri, comincia ad un certo valore critico a presentare attorno ad un andamento medio fluttuazioni

irregolari e vortici che aumentano con la velocità: il moto si dice allora *turbolento*.

La turbolenza è il risultato di un flusso instabile, ovvero un flusso in cui le perturbazioni infinitesime collegabili ai moti caotici a livello molecolare tendono a crescere, fino a raggiungere un'intensità paragonabile a quella del flusso di base.

Il passaggio da stabilità ad instabilità è aleatorio; la velocità alla quale abbiamo il manifestarsi dei fenomeni turbolenti è in genere più alta della velocità alla quale un flusso turbolento ritorna ad essere laminare. Inoltre vibrazioni, scabrosità delle superfici che circondano il fluido ed altre irregolarità possono favorire la transizione allo stato turbolento.

Da un punto di vista matematico sono i termini avvevativi della derivata totale della velocità ad essere responsabili dei fenomeni di instabilità.

3.2.1 Il numero di Reynolds

In un flusso con lunghezza e velocità tipiche L e V , assumendo che in piena turbolenza:

- l'ordine di grandezza delle fluttuazioni di velocità non dipenda dalla direzione,
- che le fluttuazioni di velocità attorno al valor medio siano dello stesso ordine di grandezza della velocità V e
- che avvengano su scala spaziale pari a L ,

una stima approssimata dei termini non lineari e di quelli viscosi è rispettivamente

$$\mathbf{v} \cdot \nabla u \rightarrow \frac{V^2}{L} \qquad \nu \nabla^2 u \rightarrow \nu \frac{V}{L^2}.$$

Il rapporto fra essi è un numero puro, detto *numero di Reynolds*,

$$\mathcal{R}e = \frac{VL}{\nu},$$

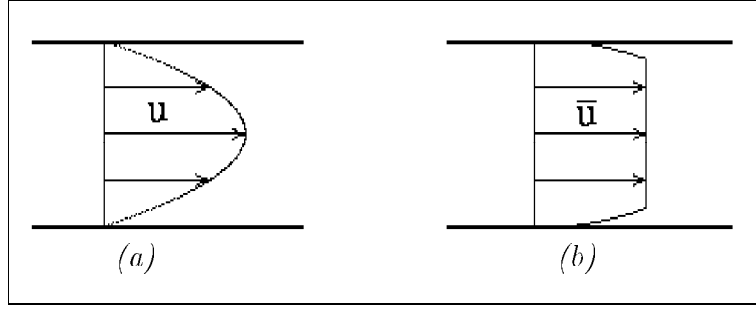


Figura 3.2: Profilo laminare (a) e turbolento (b) per la velocità media in un tubo di sezione circolare.

la cui importanza risiede nel fatto che, a parità di altre condizioni, il passaggio alla turbolenza avviene per lo stesso valore di $\mathcal{R}e$; in particolare non si ha turbolenza per $\mathcal{R}e < 1000$.

Per la corrente del Golfo, che ha velocità tipica di 1 m s^{-1} ed una larghezza di circa 100 km , assumendo $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, il numero di Reynolds vale:

$$\mathcal{R}e = \frac{1 \times 10^5}{10^{-6}} = 10^{11},$$

il moto quindi non può che essere turbolento.

3.2.2 I processi stocastici

Quando un moto diventa turbolento è privo di senso voler descrivere la sua evoluzione in tutti i suoi dettagli sia perchè le fluttuazioni avvengono su molteplici scale spaziali e temporali, sia perchè tali fluttuazioni non sembrano possedere nessun tipo di regolarità. L'attenzione viene quindi spostata sulle proprietà del moto medio; ad esempio nell'esperimento di Reynolds (vedi Figura 3.2) al passaggio da moto laminare a turbolento, il profilo della velocità media cambia notevolmente.

Su di un certo campo $\xi(\mathbf{r}, t)$ la media *temporale* è definita:

$$\bar{\xi}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}+t}^{\frac{T}{2}+t} \xi(\mathbf{r}, t + \tau) d\tau,$$

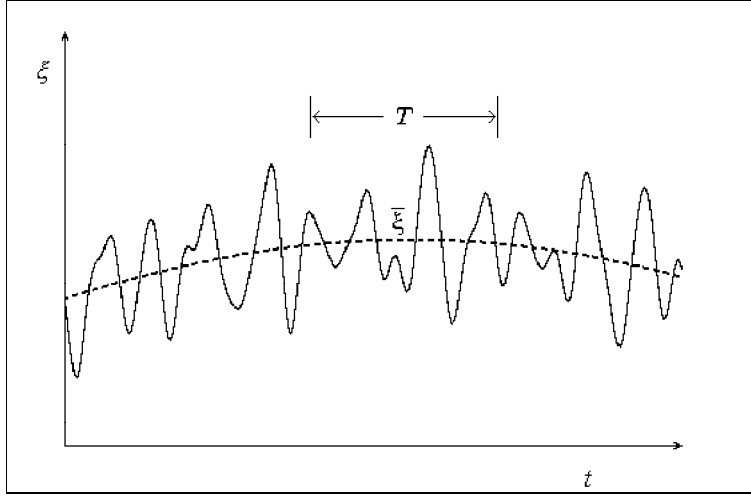


Figura 3.3: Il periodo temporale di mediazione T per una funzione stocastica ξ .

dove T è un intervallo di tempo sufficientemente lungo da contenere un numero abbastanza alto delle fluttuazioni che si intendono trascurare (Figura 3.3).

La media *spaziale* è invece espressa da:

$$[\xi](\mathbf{r}, t) = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{V}} \xi(\mathbf{r} + \mathbf{r}', t) d^3\mathbf{r}',$$

dove \mathcal{V} è una regione di spazio di volume V attorno al punto interessato contenente un elevato numero di fluttuazioni spaziali.

Infine la media *di insieme*, $\langle \xi \rangle(\mathbf{r}, t)$, è definita come la media in ogni istante di tempo ed per ogni punto dello spazio fra i valori ottenuti nella ripetizione per un numero indefinito di volte dello stesso esperimento.

In un processo stazionario, l'*ipotesi di ergodicità*, che pone:

$$\bar{\xi} = \langle \xi \rangle,$$

permette di ricavare le informazioni sulle medie di insieme da un singolo esperimento, attraverso opportune medie spaziali o temporali.

Per il fenomeno della diffusione turbolenta si assume che tale ipotesi sia valida.

Nei moti turbolenti marini dove si ha la sovrapposizione di un po' tutte le scale temporali con ampiezza variabile con continuità, non si può definire in modo univoco l'intervallo di tempo T di mediazione temporale. Esso dipenderà da ciò che si intende far entrare o meno nel concetto di moto medio.

Fissato T a seconda del problema in esame, si può formulare l'ipotesi che si possa scomporre il moto nella somma di due componenti:

- il moto medio, lentamente variabile;
- le fluttuazioni turbolente, rapidamente variabili.

Allora per una variabile ξ associata al campo di moto si può scrivere:

$$\xi = \bar{\xi} + \xi'$$

e con le precedenti definizioni, assumere che per la componente media

$$\bar{\xi} = \langle \xi \rangle ,$$

e per quella casuale

$$\overline{\xi'} = 0 .$$

3.3 L'avvezione-dispersione

La relazione che lega la derivata totale rispetto al tempo (relativa ad un sistema di riferimento *lagrangiano*) a quelle parziali (relative ad un sistema di riferimento *euleriano*) è:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$$

L'approccio matematico al problema dell'avvezione-dispersione può essere quindi di due tipi:

- schema *Euleriano*: si assume un sistema di riferimento fisso; il bilanci di quantità di moto, energia, massa dipendono dai flussi del fluido che attraversa la pareti di un volume \mathcal{V} fisso rispetto agli assi coordinati: su tale sistema vengono integrate le equazioni di avvezione-diffusione.

- schema *Lagrangiano*: il fluido viene interpretato come un insieme di particelle ed a ciascuna particella vengono attribuite caratteristiche proprie, come una data concentrazione di un inquinante ed una certa aleatorietà nella dinamica; in tale schema ci si avvale del concetto di *traettoria* come cammino di una particella immaginaria; lungo le traiettorie vengono simulate tutte le trasformazioni che le caratteristiche della particella subiscono in funzione delle condizioni ambientali.

3.3.1 L'approccio Euleriano

L'approccio Euleriano è basato sulla conservazione della massa di ogni singola specie di inquinante di concentrazione $c(x, y, z, t)$. Riscrivendo l'equazione di diffusione (3.3) nella forma:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) c = \kappa_s \nabla^2 c + \frac{\xi}{\rho}, \quad (3.4)$$

si assume che la velocità \mathbf{v} possa essere rappresentata come la somma di una componente media e di una fluttuante, cioè:

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'$$

Mentre $\bar{\mathbf{v}}$ rappresenta la porzione del flusso che può essere descritta con misure sperimentali o calcolata con modelli idrodinamici, invece \mathbf{v}' è una variabile stocastica che contiene le informazioni sulla diffusione turbolenta. Analogamente, per la concentrazione si pone

$$c = \bar{c} + c'.$$

Assumendo l'ipotesi ergodica, cioè

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \bar{\mathbf{v}}, \quad \langle \mathbf{v}' \rangle = 0, \quad \langle c \rangle = \bar{c}, \quad \langle c' \rangle = 0,$$

e sostituendo nella (3.4), si ottiene:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \langle c \rangle = -\nabla \cdot \langle c \mathbf{v}' \rangle + \kappa_s \nabla^2 \langle c \rangle + \frac{\langle \xi \rangle}{\rho}, \quad (3.5)$$

nella quale il termine $\langle c \mathbf{v}' \rangle$ rappresenta la diffusione turbolenta; tale termine è spesso espresso empiricamente (in modo in genere impreciso), per mezzo della cosiddetta *teoria K* come:

$$\langle c \mathbf{v}' \rangle = \mathcal{K} \nabla \langle c \rangle .$$

Gli elementi del tensore diagonale di diffusività turbolenta \mathcal{K} vengono stimati con misure o modelli; di solito viste le caratteristiche generali dei moti dei fluidi geofisici, si distingue tra fenomeni di diffusività orizzontale e verticale, perciò si riscrive per componenti la precedente equazione nella forma:

$$\langle c' u \rangle = -K_{SH} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} ,$$

$$\langle c' v \rangle = -K_{SH} \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} ,$$

$$\langle c' w \rangle = -K_{SV} \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} ,$$

dove K_{SH} e K_{SV} sono i cosiddetti *coefficienti di diffusione turbolenta* orizzontale e verticale rispettivamente.

Siccome il valore dei coefficienti di diffusione turbolenta è in genere di diversi ordini di grandezza superiore a quello del coefficiente di diffusione molecolare, il termine relativo a quest'ultimo può essere trascurato. A differenza dell'equazione della diffusione molecolare, i coefficienti di diffusione sono ora non più una caratteristica del fluido, ma del flusso; generalmente vengono determinati a posteriori in modo da soddisfare i dati sperimentali. Per scale di moto simili, i coefficienti di diffusione turbolenta della salinità e della temperatura sono sostanzialmente dello stesso ordine di grandezza dei coefficienti di viscosità turbolenta.

Considerando inquinanti non reattivi, per cui $\langle \xi \rangle = \xi$, la (3.5) diventa la cosiddetta *equazione della diffusione turbolenta*:

$$\frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \langle c \rangle = K_{SH} \nabla^2 \langle c \rangle + K_{SV} \frac{\partial^2 \langle c \rangle}{\partial z^2} + \frac{\xi}{\rho} .$$

Questa equazione può essere risolta con:

- *soluzioni analitiche* per il caso stazionario con opportune ipotesi semplificatrici;
- *soluzioni numeriche* per mezzo di diversi metodi (differenze finite, elementi finiti, spettrale).

3.3.2 L'approccio Lagrangiano

L'approccio Lagrangiano si basa sulla equazione per la dispersione di una singola specie di inquinante caratterizzata dalla concentrazione $c(x, y, z, t)$:

$$\langle c(\mathbf{r}, t) \rangle = \int_{-\infty}^t \int_{\mathcal{V}} P(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, t_0) \xi(\mathbf{r}_0, t_0) d\mathbf{r}_0 dt_0, \quad (3.6)$$

in cui $P(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, t_0)$ è la densità di probabilità di transizione che stabilisce la probabilità che una particella che si trova in \mathbf{r}_0 al tempo t_0 si trovi in \mathbf{r} al tempo t . Analogamente al caso euleriano, l'equazione (3.6) può essere integrata analiticamente, assumendo per P una certa distribuzione di probabilità, ad esempio una gaussiana (modelli gaussiani), ed opportune semplificazioni oppure con una integrazione numerica.

3.3.3 I modelli a particelle

La dispersione può essere simulata con i modelli lagrangiani a particelle in due modi:

- a 'particella singola': il moto di ciascuna particella risulta indipendente da quello delle altre;
- a 'due (o più) particelle': si riproduce la dispersione relativa tra le particelle.

Nei modelli a particella singola, le particelle vengono fatte spostare ad ogni passo temporale con una velocità \mathbf{v}_e equivalente alla velocità reale \mathbf{v} . Se \mathbf{v} definisce lo spostamento di una particella nell'intervallo $\Delta t = t_2 - t_1$ tramite la relazione:

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t) dt,$$

la velocità equivalente viene definita come:

$$\mathbf{v}_e = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t) dt.$$

Una stima di \mathbf{v}_e viene fatta utilizzando le misure euleriane di \mathbf{v} definendo:

$$\mathbf{v}_e = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}',$$

dove

- $\bar{\mathbf{v}}$ rappresenta la parte deterministica del trasporto, basata sulle misure euleriane di corrente o fornita da un modello idrodinamico;
- \mathbf{v}' è la ‘velocità di diffusione’, una perturbazione numerica artificiale legata all’intensità della turbolenza ed alle caratteristiche dei vortici più piccoli che non rientrano nel valore del campo medio.

Per stimare \mathbf{v}' ci sono due possibilità:

nel *calcolo deterministico* si utilizza una relazione ottenuta partendo dall’equazione della teoria K della diffusione applicata all’interno di una cella del grigliato:

$$\mathbf{v}' = -\frac{\mathcal{K}}{c} \nabla c,$$

dove c è la concentrazione calcolata dal numero di particelle entro la cella;

nel *calcolo statistico* invece si fornisce una valutazione stocastica di \mathbf{v}' utilizzando metodi tipo Monte Carlo.

Quest’ultimo metodo appare più flessibile ed interessante, perciò verrà analizzato più a fondo.

Si descrive \mathbf{v}' come una componente ‘pseudorandom’ ottenuta manipolando i numeri pseudorandom ottenuti dai computer, nell’ipotesi che le misure euleriane del campo di corrente \mathbf{v} forniscano informazioni statistiche su \mathbf{v}' .

La distribuzione delle velocità delle particelle che si disperdono in un mezzo turbolento può essere descritta utilizzando *modelli autoregressivi*. Questi modelli stocastici discreti descrivono il valore delle velocità ad

un certo istante come combinazione lineare dei valori assunti in tempi precedenti più un termine di ‘random forcing’ all’istante considerato; un modello autoregressivo di ordine p , indicato in genere con la sigla AR(p) è quindi:

$$\mathbf{v}'_n = \alpha_1 \mathbf{v}'_{n-1} + \alpha_2 \mathbf{v}'_{n-2} + \dots + \alpha_p \mathbf{v}'_{n-p} + \boldsymbol{\mu},$$

dove $\boldsymbol{\mu}$ è una velocità stocastica puramente casuale e stazionaria.

Modelli con ‘random walk’

Il moto browniano, cui si è accennato all’inizio di questo capitolo, può essere descritto da un processo autoregressivo di ordine zero, AR(0): la componente casuale della velocità della particella, essendo il risultato di urti casuali con le molecole del fluido, è puramente random ad ogni istante, cioè

$$\mathbf{v}'_n = \boldsymbol{\mu}.$$

Analogamente al caso molecolare, per particelle immerse in un fluido in moto turbolento, si possono considerare gli spostamenti provocati dai vortici come puramente casuali. Un modello numerico che utilizzi questa approssimazione, calcola gli spostamenti della singola particella nel modo seguente:

$$\mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_n = \bar{\mathbf{v}}\Delta t + \boldsymbol{\varrho},$$

in cui $\boldsymbol{\varrho} = \boldsymbol{\mu}\Delta t$. Ad ognuna delle componenti di $\boldsymbol{\varrho} = (\varrho_x, \varrho_y, \varrho_z)$ viene assegnato un valore secondo una funzione di densità di probabilità ottenuta dalla manipolazione dei numeri pseudorandom del calcolatore.

Modelli autoregressivi del primo ordine

Un modello autoregressivo del primo ordine, AR(1), si applica qualora si considerino le particelle di inquinante abbastanza piccole che le molecole che le circondano producono delle variazioni casuali delle loro velocità, ma anche abbastanza grandi da risentire dell’attrito con le molecole del fluido a causa del quale le loro velocità si smorzano. L’equazione del moto assume allora la forma dell’*equazione stocastica di Langevin*:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\beta \mathbf{v} + \boldsymbol{\nu}, \quad (3.7)$$

dove $\boldsymbol{\nu}$ è il termine di *random forcing* dovuto alle collisioni.

In questa equazione l'accelerazione della particella viene separata in due termini che descrivono diversamente l'interazione tra ciascuna particella ed il resto del fluido:

- $\beta \mathbf{v}$ descrive il comportamento del fluido come mezzo continuo, macroscopico, che esercita sulla particella una forza di attrito proporzionale, con coefficiente β , alla sua velocità;
- $\boldsymbol{\nu}$ descrive il comportamento del fluido come un insieme di fluttuazioni di pressione casuali, causa delle accelerazioni stocastiche della particella.

Una particella immersa in un fluido in moto con velocità $\mathbf{V}(\mathbf{r})$, risulterà allora avere una velocità data dalla somma della velocità del fluido e della componente casuale descritta dalla (3.7), cioè:

$$\mathbf{v}_e(\mathbf{r}) = \mathbf{V}(\mathbf{r}) + \mathbf{v}(\mathbf{r}) \quad (3.8)$$

Un modello computazionale che utilizzasse queste assunzioni è quindi costituito dalla risoluzione numerica del sistema di equazioni costituito dalla (3.7) e dalla (3.8); ad ogni passo temporale esso calcolerà la posizione della particella in base al campo di corrente fornitogli e alla velocità casuale calcoltasi. Discretizzando, per la (3.8), otteniamo:

$$\mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_n = [\mathbf{V}(\mathbf{r}_n) + \mathbf{v}_n] \Delta t ,$$

invece la (3.7) diventa:

$$\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n = -\beta \mathbf{v}_n \Delta t + \boldsymbol{\nu}_{n+1} \Delta t , \quad (3.9)$$

cioè:

$$\mathbf{v}_{n+1} = (1 - \beta \Delta t) \mathbf{v}_n + \boldsymbol{\nu}_{n+1} \Delta t = \Phi \mathbf{v}_n + \boldsymbol{\nu}_{n+1} \Delta t .$$

Se si assume che la successione $\{\boldsymbol{\nu}_n\}$ sia puramente casuale e stazionaria e a media nulla, la media d'insieme della componente casuale soddisfa l'equazione:

$$\langle \mathbf{v}_n \rangle = \Phi \langle \mathbf{v}_{n-1} \rangle .$$

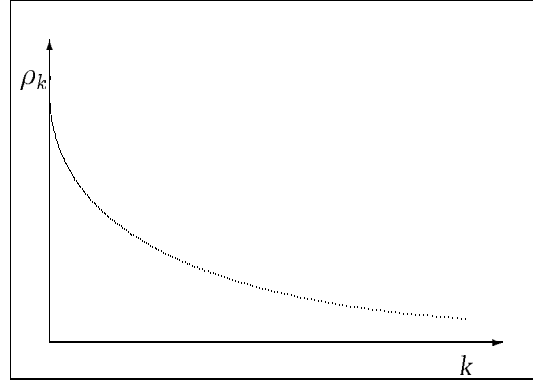


Figura 3.4: Andamento del coefficiente di correlazione.

In regime stazionario si potrà porre $\langle \mathbf{v}_n \rangle = 0$. La covarianza sarà:

$$\langle \mathbf{v}_n \mathbf{v}_{n-1} \rangle = \Phi \langle \mathbf{v}_{n-1}^2 \rangle,$$

in quanto il termine $\langle \boldsymbol{\nu}_n \mathbf{v}_{n-1} \rangle = 0$, essendo $\boldsymbol{\nu}_n$ indipendente da \mathbf{v}_n . In regime stazionario, chiamando la varianza $C_0 = \langle \mathbf{v}_n^2 \rangle$ la formula precedente si può scrivere nella forma:

$$C_1 = \Phi C_0$$

e più in generale:

$$C_k = \Phi C_{k-1} \quad \text{ovvero} \quad C_k = \Phi^k C_0.$$

Si definisce infine *coefficiente di correlazione*

$$\rho_k = \frac{C_k}{C_0} = \Phi^k$$

il quale, essendo $|\Phi| < 1$, avrà un andamento del tipo disegnato in figura 3.4.

La varianza di $\{\mathbf{v}_n\}$ è legata a quella di $\{\boldsymbol{\nu}_n\}$ dalla seguente formula¹:

$$\langle \mathbf{v}_n^2 \rangle = \Phi^2 \langle \mathbf{v}_{n-1}^2 \rangle + \langle \boldsymbol{\nu}_n^2 \rangle,$$

¹ nella quale: $2\Phi \langle \boldsymbol{\nu}_n \mathbf{v}_{n-1} \rangle = 0$

cioè

$$\langle \mathbf{v}_n^2 \rangle = \frac{1}{(1 - \Phi^2)} \langle \boldsymbol{\nu}_n^2 \rangle .$$

La serie $\{\mathbf{v}_n\}$, definita dalla (3.9) può essere calcolata per iterazione:

$$\mathbf{v}_1 = \Phi \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\nu}_1$$

$$\mathbf{v}_2 = \Phi^2 \mathbf{v}_0 + \Phi \boldsymbol{\nu}_1 + \boldsymbol{\nu}_2$$

$$\mathbf{v}_3 = \Phi^3 \mathbf{v}_0 + \Phi^2 \boldsymbol{\nu}_1 + \Phi \boldsymbol{\nu}_2 + \boldsymbol{\nu}_3$$

.....

$$\mathbf{v}_n = \Phi^n \mathbf{v}_0 + \sum_{i=0}^n \Phi^i \boldsymbol{\nu}_{n-i} ;$$

poichè Φ^n decresce velocemente, \mathbf{v}_n "perde rapidamente memoria" del suo stato iniziale. Asintoticamente (regime stazionario) si avrà:

$$\mathbf{v}_n \simeq \sum_{i=0}^{\infty} \Phi^i \boldsymbol{\nu}_{n-i} .$$

La serie $\{\mathbf{v}_n\}$ tende quindi essere una media mobile pesata esponenzialmente sulla storia passata di $\{\boldsymbol{\nu}_n\}$.

Capitolo 4

MIKE 21

Introduzione

Il modello MIKE 21 è un software elaborato ed utilizzato da circa un decennio dal Danish Hydraulic Institute (DHI); inizialmente creato per scopi puramente scientifici, ha trovato in seguito utilizzo come strumento di pianificazione presso enti di gestione del territorio costiero. Come prodotto commerciale, è stato suddiviso in moduli diversi che affrontano tematiche specifiche (idraulica costiera, propagazione del moto ondoso, dispersione di inquinanti, eutrofizzazione, processi sedimentari) e dotato recentemente di un'interfaccia con l'utente meno ostica.

Durante il lavoro di tesi sono stati utilizzati il modulo idrodinamico, il modulo avveztivo-dispersivo ed i moduli accessori per le elaborazioni grafiche ed il trattamento dei dati in entrata ed in uscita dal modello.

4.1 Il modulo idrodinamico

Il modulo idrodinamico di MIKE 21, MIKE 21 HD, è un modello numerico per la simulazione dei flussi e della elevazione in acque costiere; esso considera flussi bidimensionali in uno strato fluido omogeneo ed incompressibile. Utilizzando l'approssimazione in acqua bassa (vedi paragrafo 2.2), le equazioni della conservazione della massa e del momento sono integrate sulla colonna d'acqua ed espresse in termini di flussi:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} = 0 \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p^2}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{pq}{h} \right) + g h \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{g p \sqrt{p^2 + q^2}}{C^2 h^2} - \Omega p - \\ - \frac{1}{\rho_w} \left[\frac{\partial}{\partial x} (h \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (h \tau_{xy}) \right] - f V V_x + \frac{h}{\rho_w} \frac{\partial}{\partial x} (p_a) = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q^2}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{pq}{h} \right) + g h \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{g p \sqrt{p^2 + q^2}}{C^2 h^2} - \Omega q - \\ - \frac{1}{\rho_w} \left[\frac{\partial}{\partial y} (h \tau_{yy}) + \frac{\partial}{\partial x} (h \tau_{xy}) \right] - f V V_y + \frac{h}{\rho_w} \frac{\partial}{\partial y} (p_a) = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

dove:

- $h(x, y, t) = H(x, y) + \zeta(x, y, t)$: profondità dell'acqua, (m)
- $\zeta(x, y, t)$: elevazione superficiale, (m)
- $H(x, y)$: profondità batimetrica, (m)
- $p(x, y, t) = u h$: densità di flusso nella direzione x, (m³/s/m)
- $q(x, y, t) = v h$: densità di flusso nella direzione y, (m³/s/m)
- (u, v) : velocità mediata sulla profondità, (m/s)
- $C(x, y)$: numero di Chezy per l'attrito sul fondo, (m^{1/2}/s)
- g : accelerazione di gravità, (m/s²)
- $f(V)$: coefficiente di attrito del vento

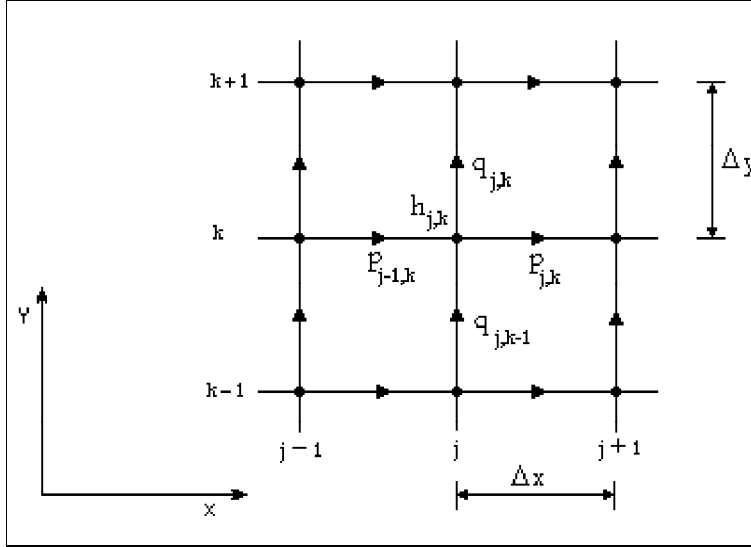


Figura 4.1: La griglia di calcolo di MIKE 21 HD.

- $V (V_x, V_y)$: velocità del vento, (m/s)
- $\Omega(x, y)$: parametro di Coriolis, (s^{-1})
- $p_a(x, y, t)$: pressione atmosferica, ($kg/m/s^2$)
- ρ_w : densità dell'acqua, (kg/m^3)
- τ_{ij} : componenti dello sforzo di taglio, (kg/m^2)

4.1.1 Cenni sullo schema numerico ADI-DS

Il dominio spaziale su cui MIKE 21 HD svolge le operazioni di calcolo è la griglia bidimensionale mostrata in Figura 4.1. Ai passi spaziali Δx e Δy possono essere assegnati valori diversi; per indicare gli spostamenti nella direzione x si utilizza l'indice j , nella direzione y invece l'indice k . Per quanto riguarda la dimensione temporale, il passo temporale è indicato con Δt e l'indice utilizzato è n .

Per integrare le equazioni (4.1), (4.2) e (4.3) nel dominio spazio-temporale MIKE 21 HD utilizza la tecnica di integrazione ADI (*Alternating Direction Implicit*). Le equazioni discrete che risultano per

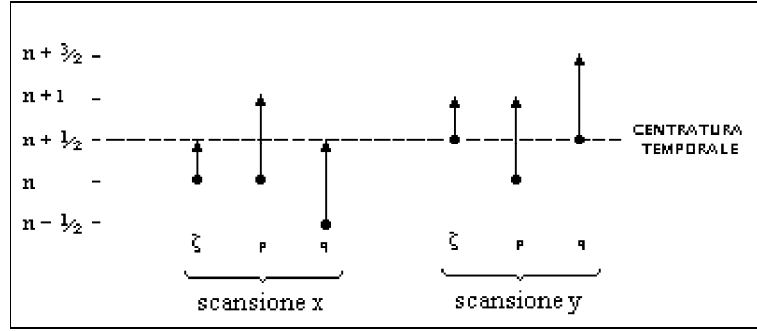


Figura 4.2: Il procedimento computazionale in MIKE 21 HD per la centratura temporale.

ciascuna direzione e ciascuna linea di griglia sono risolte con un algoritmo DS (*Double Sweep*), che consiste nella risoluzione alternata tra le direzioni X ed Y.

Durante la scansione in direzione X, le equazioni sono risolte prendendo ζ e p tra il passo temporale n e quello $n + 1$, mentre per q , sono utilizzati i valori noti calcolati ai due passi precedenti $n - \frac{1}{2}$ e $n + \frac{1}{2}$.

Durante la scansione in direzione Y, si prendono ζ tra $n + \frac{1}{2}$ e $n + 1$ e q tra $n + \frac{1}{2}$ e $n + \frac{3}{2}$, mentre per p si usano i valori appena calcolati in n e $n + 1$.

Come mostrato in Figura 4.2, questa procedura comporta che la centratura temporale sia attorno a $n + \frac{1}{2}$;

Per migliorare l'approssimazione della centratura temporale delle derivate miste si usa la tecnica detta "*side-feeding*", mostrata in Figura 4.3: ad un certo passo temporale le soluzioni della scansione x sono calcolate in ordine decrescente rispetto alla direzione y (*down sweep*), al passo temporale successivo in ordine crescente (*up sweep*).

L'organizzazione dell'intero ciclo computazionale può infine essere rappresentata come in Figura 4.4.

Per i punti vicini ai bordi della griglia o a dei punti di terra, è utilizzata una diversa approssimazione rispetto a quella per i punti centrali della griglia.

A titolo d'esempio si riportano le formule numeriche utilizzate per la risoluzione dell'equazione di continuità (4.1):

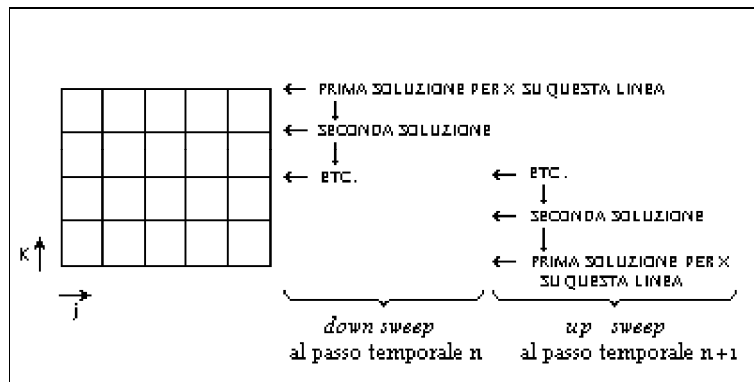
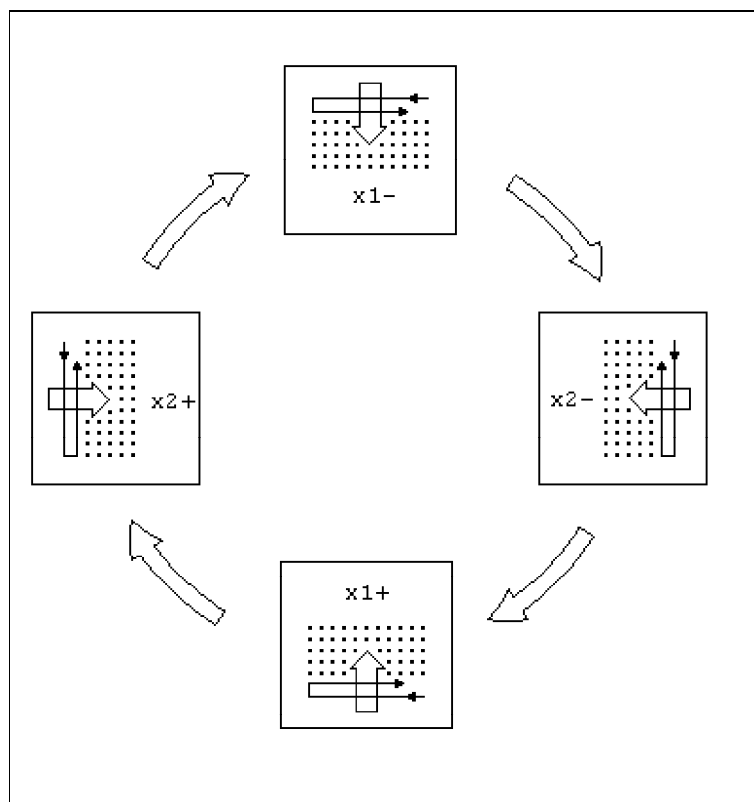
Figura 4.3: La tecnica computazionale del *side-feeding*.

Figura 4.4: Il ciclo delle scansioni computazionali di MIKE 21 HD.

– formula per la scansione x:

$$2 \cdot \left(\frac{\zeta^{n+\frac{1}{2}} - \zeta^n}{\Delta t} \right)_{j,k} + \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left(\frac{p_j - p_{j-1}}{\Delta x} \right)^{n+1} + \left(\frac{p_j - p_{j-1}}{\Delta x} \right)^n \right\}_k + \\ + \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left(\frac{q_k - q_{k-1}}{\Delta y} \right)^{n+\frac{1}{2}} + \left(\frac{q_k - q_{k-1}}{\Delta y} \right)^{n-\frac{1}{2}} \right\}_j = 0;$$

– formula per la scansione y:

$$2 \cdot \left(\frac{\zeta^{n+1} - \zeta^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} \right)_{j,k} + \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left(\frac{p_j - p_{j-1}}{\Delta x} \right)^{n+1} + \left(\frac{p_j - p_{j-1}}{\Delta x} \right)^n \right\}_k + \\ + \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left(\frac{q_k - q_{k-1}}{\Delta y} \right)^{n+\frac{3}{2}} + \left(\frac{q_k - q_{k-1}}{\Delta y} \right)^{n+\frac{1}{2}} \right\}_j = 0.$$

Analoghe formulazioni vengono utilizzate per le equazioni del momento.

4.1.2 Procedura di modellizzazione con MIKE 21 HD

Un generico studio di idrodinamica costiera attraverso l'uso di modelli matematici si può suddividere in sei fasi:

- definizione del modello idrodinamico;
- raccolta dati;
- preparazione delle impostazioni del modello;
- calibrazione e verifica;
- svolgimento delle simulazioni;
- presentazione dei risultati.

Nella definizione del modello idrodinamico, si tratta innanzitutto di individuare quali siano i principali fenomeni idraulici della zona di interesse e quali siano l'area e le scale temporali in cui essi agiscono. E'

necessario ricordare che le caratteristiche del modulo idrodinamico di MIKE 21 non consentono di simulare fenomeni come i flussi stratificati e le onde create dal vento, mentre posso includere direttamente le onde di marea.

Per la preparazione delle simulazioni sono necessari i dati su:

- batimetria;
- condizioni al contorno ed iniziali;
- attrito del vento e sul fondo;
- viscosità turbolenta;
- caratteristiche delle eventuali sorgenti o pozzi;

inoltre, per verificare i risultati ottenuti dal modello,

- misure e dati di calibrazione e validazione.

I dati raccolti devono quindi essere opportunamente trattati al fine di renderli utilizzabili dal programma.

Batimetria

Essendo MIKE 21 un modello alle differenze finite con una griglia XY rettangolare o quadrata, per batimetria del modello si intende la matrice bidimensionale contenente i dati di profondità della zona di mare considerata.

Tali valori sono negativi e calcolati rispetto ad una superficie di riferimento che generalmente è il livello medio marino (l.m.m); ciascun valore rappresenta la profondità di tutta la maglia attorno al punto di griglia. Per la terra emersa si utilizza un valore convenzionale positivo; il modulo idrodinamico di MIKE 21 ha anche la possibilità di considerare le escursioni di marea sulla terra emersa, ma tale caratteristica non è di interesse per studi nell'area mediterranea dove le maree sono molto limitate.

La griglia dovrebbe risolvere tutte le variazioni nella batimetria che influiscono sul flusso simulato, è quindi possibile considerare un 'area

più vasta di quella di interesse per comprendere tutta l'area di influenza dei fenomeni considerati. Bisogna però ricordare che in un modello numerico la scelta del passo spaziale e di quello temporale deve essere fatta con una certa cautela al fine di evitare l'insorgenza di instabilità numeriche. Per questo motivo, quando si effettua la scelta del passo temporale MIKE 21 HD fornisce il valore del numero di Courant per la simulazione che si sta preparando, calcolato in base alla seguente formula:

$$C_R = c \frac{\Delta t}{\Delta x},$$

nella quale $c = \sqrt{g h}$ è la velocità dell'onda di marea. Come si deduce dalla formula, C_R è un numero puro che misura quanti punti di griglia sono percorsi in un passo temporale dalla propagazione di una variazione del flusso. Il manuale d'uso [9] consiglia in linea generale di fare simulazioni in cui $C_R \leq 5$ e pone alcune restrizioni per casi particolari; il modello risulta comunque in grado di reggere valori fino a 20, applicabili però in casi in cui la batimetria è molto liscia.

La digitalizzazione della batimetria può essere fatta in vari modi:

1. manualmente, sovrapponendo alla carta un lucido con la griglia, riportando i valori di profondità nelle maglie ed inserendoli in un file con il *file editor 2D matrices* di MIKE 21;
2. usando un digitalizzatore compatibile col programma di digitalizzazione di MIKE 21 ;
3. preparando i dati in un file ASCII ed trascrivendoli attraverso il *ASCII reading facility* di MIKE 21 .

Quando si inseriscono nel modello i dati di batimetria si possono specificare la latitudine e la longitudine dell'origine della griglia e l'orientazione della griglia come angolo tra il nord vero e l'asse Y in senso orario. Se possibile, è conveniente ruotare la topografia dell'area di interesse in modo che il flusso principale sia parallelo agli assi delle coordinate e mettere l'origine delle coordinate del modello (in genere l'angolo in basso a sinistra) in un definito set di coordinate geografiche per poter facilmente trasformare le coordinate della griglia in quelle del sistema di riferimento geografico.

Condizioni ai bordi ed iniziali

Sulla base delle caratteristiche della batimetria si definiscono:

- "bordi chiusi" come costituiti dalle maglie laterali della griglia in cui si hanno solo punti di terra;
- "bordi aperti" dove si hanno invece punti d'acqua ed è quindi necessario porre, come si vedrà nel seguito, delle condizioni sui flussi o sull'elevazione.

Il programma è in grado di individuare, cercando per linee adiacenti ai quattro lati della griglia, i bordi aperti, ma è comunque possibile inserire fra le specifiche iniziali delle condizioni su dei bordi aperti individuati dall'utente.

Ai bordi aperti è preferibile che il flusso d'acqua abbia comportamento "beneducato", cioè che la batimetria sia liscia e la direzione perpendicolare al bordo. Due bordi aperti possono incontrarsi in un angolo, ma esso deve essere incluso in entrambe e ci si deve assicurare che le condizioni al contorno siano le stesse. Bisogna evitare un'improvvisa espansione o contrazione del flusso vicino ad un bordo aperto, a meno che la velocità attesa sia piccola, per impedire l'insorgere di instabilità numeriche.

Poichè le incognite sono l'elevazione superficiale e le densità di flusso nelle direzioni X e Y, si deve in teoria specificare due di queste tre variabili in ogni punto della griglia lungo un bordo aperto e per ciascun intervallo temporale; comunque con MIKE 21 HD è sufficiente conoscere anche solo l'elevazione superficiale e la direzione generale del flusso.

Per fissare le condizioni su ciascun bordo aperto sono previste le seguenti opzioni:

1. la variabile per la quale fissare le condizioni può essere scelta tra:
 - (a) elevazione superficiale, ζ ;
 - (b) flusso, (p, q) ;
2. la variazione temporale della variabile, che può essere:
 - (a) costante lungo tutto il bordo ¹.

¹Il segno determina la direzione: un flusso entrante dal lato sinistro è positivo

- (b) sinusoidale applicata in tutti i punti lungo il bordo con la formula:

$$\text{Value} = \text{Ref.level} + \frac{\text{Range}}{2 \sin \left(2\pi \frac{N\Delta t - \text{Phase}}{\text{Period}} \right)} ;$$

- (c) assegnata ad ogni passo temporale, con lo stesso valore a tutti i punti lungo il bordo (se il Δt del file di dati è diverso da quello della simulazione, il programma usa una interpolazione cubica);
- (d) assegnata ad ogni passo temporale, con un dato valore a ciascun punto (il file di dati deve avere gli stessi punti della simulazione, mentre per il Δt , il programma applica una interpolazione lineare).
- (e) ricavata dalle condizioni di flusso di un *encompassing model*.

Vi sono infine tre opzioni di controllo su come applicare i dati al contorno:

- *FAB (Flux Along the Boundary)* permette di scegliere tra i seguenti valori:
 - 0 : la direzione del flusso è perpendicolare al bordo;
 - 1 : la direzione del flusso è ottenuta per estrapolazione dal valore del flusso in un punto interno al bordo;
 - 2 : la direzione è assegnata esplicitamente ed il *FAB* viene calcolato dal programma;
 - 12 : quando la direzione è in uscita dal bordo viene scelta l'opzione 1, negli altri casi la 2.
- *THLT* (disponibile solo per bordi di tipo 'level'²) permette la scelta sul tipo di funzione che il modello utilizza al fine di compensare gli effetti del vento o della forza di Coriolis:
 - inclinazione nulla;
 - inclinazione costante attorno ad un punto fissato;

²Sono così definiti i bordi ai quali si sia scelto di porre le condizioni su ζ .

- inclinazione dipendente dalla profondità.
- *Default flow directions* (disponibile solo quando $FAB \neq 0$): permette di inserire un file contenente per ogni punto del bordo la direzione del flusso data in gradi rispetto al nord vero e positiva in senso orario.

Per quanto riguarda le condizioni iniziali, MIKE 21 HD consente di assegnare un unico valore a tutti i punti d'acqua della griglia, ma se l'area è vasta ed i livelli di superficie ai bordi aperti differiscono sostanzialmente, si può creare un file di dati con l'elevazione iniziale in ciascun punto della griglia.

Attrito del vento

Nelle simulazioni che si svolgono con MIKE 21 HD si possono includere gli effetti dell'attrito del vento sulla superficie dell'acqua secondo la legge quadratica già introdotta a pag. 13:

$$\tau_{wf} = \frac{\rho_{wind}}{\rho_{water}} C_D V_{10}.$$

Le condizioni sul vento possono essere assegnate secondo tre opzioni:

1. vento costante in direzione ed intensità su tutta l'area e per tutto il periodo di simulazione;
2. vento uguale su tutta l'area, ma variabile in intensità e direzione nel tempo secondo i dati di un file che deve coprire tutto il periodo di simulazione (se il Δt è diverso da quello della simulazione viene applicata l'interpolazione cubica);

In entrambe i casi precedenti è possibile inserire un periodo di *soft start*, ovvero di crescita lineare del forzante da zero al valore assegnato, per evitare la generazione di onde d'urto.

3. vento variabile in direzione ed intensità sia nel tempo che sull'area secondo i dati di un file contenente le componenti della velocità del vento e la pressione atmosferica ³.

³Tali dati si possono ottenere dal programma di MIKE 21 per la simulazione del campo del vento o introdurre in formato ASCII.

Attrito sul fondo

Per tener conto del termine di attrito sul fondo il modello chiede di assegnare il valore del numero di Chézy C o del numero di Manning M (vedi pag. 14). E' possibile assegnare:

- un solo valore a tutti i punti di griglia;
- un valore a ciascun punto di griglia con una mappa simile a quella di batimetria.

Per evitare problemi di instabilità, si possono fissare valori di attrito elevato su piccole strisce (2-4 maglie) vicino ad un bordo aperto su cui si abbiano dati poco accurati, tenendone poi però conto nella valutazione dei risultati. Utilizzando il numero di Manning invece di quello di Chézy, il tempo di calcolo aumenta poichè ad ogni passo computazionale viene calcolata la radice sesta della profondità.

Viscosità turbolenta

Nelle equazioni (4.2) e (4.3) discretizzate sono contenuti i flussi di momento dovuti alla turbolenza, alla integrazione verticale ed alle fluttuazioni di scala inferiore alla griglia. La formulazione della viscosità turbolenta nelle equazioni può essere espressa in due modi:

- formulazione basata sul flusso:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_t \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \left(\nu_t \frac{\partial p}{\partial y} \right) \quad \text{componente x ,}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_t \frac{\partial q}{\partial x} \right) + \left(\nu_t \frac{\partial q}{\partial y} \right) \quad \text{componente y ;}$$

- formulazione basata sulla velocità:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h\nu_t \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(h\nu_t \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad \text{componente x ,}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(h\nu_t \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(h\nu_t \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad \text{componente y ;}$$

nelle quali ν_t è comunque il coefficiente di viscosità turbolenta.

A rigore la formulazione basata sul flusso è applicabile solo per profondità costanti, ma la formulazione basata sulla velocità, pur essendo più corretta, è più difficilmente implementabile in un algoritmo numerico come quello dei MIKE 21 HD che usa i flussi come variabili. La seconda formulazione è comunque implementata usando ad un dato passo temporale le velocità ricavate dai flussi calcolati al passo precedente. Questo procedimento può introdurre delle instabilità numeriche per cui viene consigliato di rispettare il seguente criterio:

$$\nu_t \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Nella preparazione delle simulazioni, oltre alla scelta della formulazione, è possibile scegliere fra tre diverse opzioni sulla variabilità temporale di ν_t :

- un valore costante nel tempo ed uguale per tutti i punti di griglia;
- valori costanti nel tempo, ma assegnati a ciascun punto di griglia;
- valore variabile nel tempo in base ai gradienti di velocità locali, secondo le formule di Smagorinski (vedi avanti pag. 57) per il coefficiente di viscosità turbolenta,

$$\nu_t = c_s^2 \Delta x \Delta y \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right],$$

e per gli sforzi turbolenti,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h \nu_t \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2} h \nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right],$$

nelle quali U e V sono le componenti mediate sulla verticale della velocità e c_s , detto *fattore di Smagorinski*, è una costante di valore compreso tra 0.25 e 1.0.

Sorgenti e pozzi

Nel caso in cui si voglia considerare la presenza di sorgenti o pozzi (fiumi, condotte fognarie, prelievi, evaporazione, precipitazioni, ecc..) vi è la possibilità di scegliere le seguenti opzioni.

Per una sorgente si deve specificare:

1. la posizione in coordinate di griglia;
2. la direzione del flusso in gradi rispetto al nord vero;
3. la portata in m^3/s e/o la velocità in m/s
oppure
il nome del file che contiene la variazione nel tempo di questi dati.

Per un pozzo si deve specificare:

1. la posizione in coordinate di griglia;
2. la portata
oppure
il nome del file che contiene la variazione nel tempo di questo dato.

Calibrazione e verifica

Lo scopo della calibrazione è quello di tarare il modello riproducendo condizioni note o misurate durante un certo intervallo di tempo detto *periodo di calibrazione*, che dovrebbe includere tutte le differenti situazioni che si vogliono poi modellizzare.

Per ridurre le differenze fra misure e risultati delle simulazioni si può intervenire su una o più delle seguenti informazioni fornite al modello:

- batimetria;
- condizioni al contorno;
- attrito del vento;

- attrito sul fondo;
- viscosità turbolenta;

Siccome le correnti calcolate da MIKE 21 sono mediate sulla colonna d'acqua, servono come dati di calibrazione misure a più quote oppure valori ottenuti con l'assunzione di un profilo teorico.

Terminata la calibrazione si devono fare più simulazioni di più periodi dei quali si hanno dati senza cambiare i parametri: se si trovano risultati concordi con le misure, la verifica può ritenersi conclusa.

4.2 Il modulo avvettivo-dispersivo

Il modulo avvettivo-dispersivo di MIKE 21, MIKE 21 AD, risolve la cosiddetta *equazione di avvezione-dispersione* in due dimensioni per le sostanze sospese o disciolte: si tratta in sostanza di un'equazione di conservazione della massa di una singola specie applicata al caso di flussi integrati sulla colonna d'acqua:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(h C) + \frac{\partial}{\partial x}(u h C) + \frac{\partial}{\partial y}(v h C) = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(h D_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h D_y \frac{\partial c}{\partial y} \right) - F h C + S \end{aligned} \quad (4.4)$$

con

$$S = Q_s (C_s - C)$$

in cui:

- C : concentrazione
- (u, v) : velocità orizzontale, (m/s)
- h : altezza dell'acqua, (m)
- D_x, D_y : coefficienti di dispersione, (m²/s)
- F : coefficiente di decadimento lineare, (1/s)

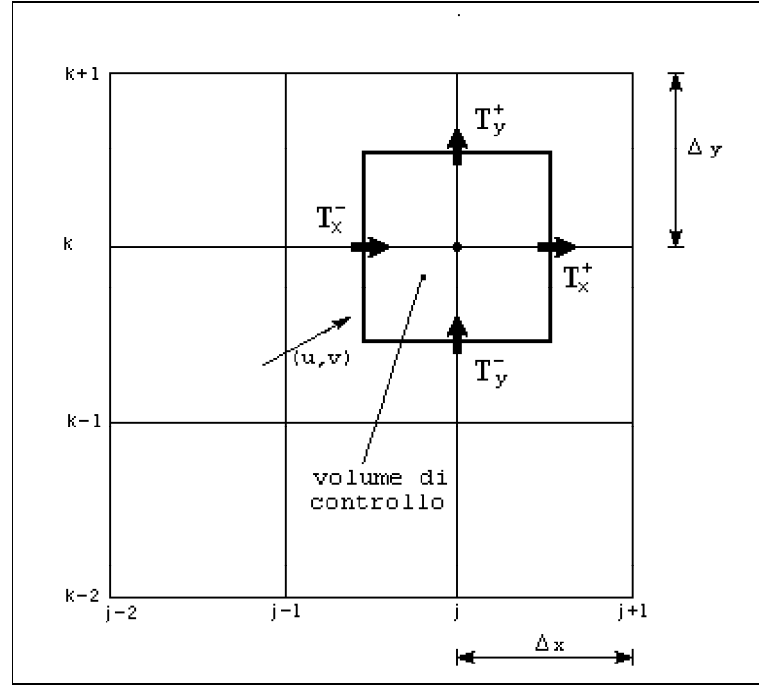


Figura 4.5: La griglia di calcolo di MIKE 21 HD.

- Q_s : portata della sorgente o del pozzo, ($\text{m}^3/\text{s}/\text{m}$)
- C_s : concentrazione all'uscita della sorgente o all'entrata nel pozzo

I dati su (u, v) ed h a ciascun passo temporale sono forniti dal modulo idrodinamico.

Il modulo avveztivo-dispersivo consente di affrontare anche lo studio degli impatti dovuti allo sversamento di acque calde provenienti da impianti di potenza.

4.2.1 Cenni sullo schema numerico QUICKEST

Lo schema numerico QUICKEST è uno schema alle differenze finite di terzo ordine, inizialmente sviluppato per casi unidimensionali, è stato applicato in seguito anche a modelli a due o più dimensioni.

L'equazione alla differenze finite equivalente alla (4.4) viene risolta sulla maglia mostrata in Figura 4.5.

Con l'espansione in serie di Taylor della (4.4) attorno al punto (i, j) si ottiene:

$$\begin{aligned} & \frac{c^{n+1} - c^n}{\Delta t} + u_{j,k}^n \frac{c_{j+1,k}^n - c_{j-1,k}^n}{2\Delta x} + v_{j,k}^n \frac{c_{j,k+1}^n - c_{j,k-1}^n}{2\Delta y} = \\ & = K_x \frac{c_{j+1,k}^n - 2c_{i,k}^n + c_{j-1,k}^n}{(\Delta x)^2} + K_y \frac{c_{j,k+1}^n - 2c_{i,k}^n + c_{j,k-1}^n}{(\Delta y)^2} + T.E. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Nel termine $T.E.$ sono compresi i termini di terzo ordine che vengono elaborati e quelli di quarto ordine e superiori che sono trascurati.

Utilizzando i simboli di Figura 4.5, si può scrivere in termini di trasporto la (4.5) che ha così forma più compatta:

$$c_{i,j}^{n+1} = c_{i,j}^n + [T_x^-(j, k) + T_x^+(j, k)] + [T_y^-(j, k) + T_y^+(j, k)],$$

ovvero

$$c_{i,j}^{n+1} = c_{i,j}^n + [T_x^n(j-1, k) + T_x^n(j, k)] + [T_y^n(j, k-1) + T_y^n(j, k)],$$

in cui

$$T_x^n(j, k) = \alpha_1 c_{j+1,k}^n + \alpha_2 c_{j,k}^n + \alpha_3 c_{j-1,k}^n + \alpha_4 c_{j,k+1}^n + \alpha_5 c_{j,k-1}^n - \Gamma_x c_{j+1,k}^n + \Gamma_x c_{j,k}^n$$

e

$$T_y^n(j, k) = \beta_1 c_{j,k+1}^n + \beta_2 c_{j,k}^n + \beta_3 c_{j,k-1}^n + \beta_4 c_{j+1,k}^n + \beta_5 c_{j-1,k}^n - \Gamma_y c_{j+1,k}^n + \Gamma_y c_{j,k}^n.$$

I coefficienti α e β si ottengono dalle elaborazioni ed approssimazioni cui si è accennato prima e sono espressi in termini di numeri di Courant:

$$C_x = u \frac{\Delta T}{\Delta x}, \quad \text{e} \quad C_y = v \frac{\Delta T}{\Delta y},$$

e diffusività adimensionale:

$$\Gamma_x = K_x \frac{\Delta T}{(\Delta x)^2}, \quad \text{e} \quad \Gamma_y = K_y \frac{\Delta T}{(\Delta y)^2}.$$

Usando la formulazione col trasporto non solo vengono ridotti i tempi di calcolo ma migliora anche la stabilità del modello.

4.2.2 I coefficienti di dispersione

I processi fluidodinamici avvengono simultaneamente su scale spaziali e temporali molto diverse che vanno con un spettro continuo da quella dell'agitazione molecolare fino a quella dei moti mareali e barotropici. Nella trattazione classica della fluidodinamica i fluidi sono però assimilati, come si è detto, a continui matematici, e ciò implica che le più piccole scale considerate debbano già essere molto più grandi delle distanze intermolecolari.

Per studi pratici e nell'ambito del calcolo numerico, si possono trattare processi dinamici solo al di sopra di una certa scala per evitare di sostenere costi computazionali eccessivi: attraverso opportuni metodi di filtraggio, si evita quindi di includere esplicitamente le scale fluidodinamiche più piccole delle variabili usate nella formulazione matematica. L'esistenza di fenomeni rilevanti anche su tali scale, definite *scale non risolte*, non può comunque essere ignorata; ad esempio la maggior parte dell'energia turbolenta è proprio dissipata sulle piccole scale. Tali fenomeni vengono allora messi in relazione empiricamente con le variabili dipendenti, rappresentative di tutte le scale risolte, attraverso dei termini dedotti dai processi di filtraggio. I principali effetti dovuti a queste relazioni ed ai rispettivi coefficienti possono essere suddivisi in:

- *dissipativi*, collegati ai decadimenti energetici nelle scale non risolte; per esempio, nei modelli bidimensionali il coefficiente di attrito sul fondo tiene conto non solo delle perdite di energia per lo sforzo tangenziale, ma anche della quantità di energia contenuta nelle scale verticali non risolte;
- *dispersivi*, cioè relativi al trasferimento di energia tra scale risolte, ma dovuti all'esistenza di scale non risolte; sono questi che vengono rappresentati dai cosiddetti coefficienti di viscosità o di diffusione.

La grande varietà di scale spazio-temporali, rende impossibile un approccio unificato, ma la ampia variazione dei valori dei coefficienti rende necessaria una prima stima che si può ottenere dalla teoria e dall'esperienza.

La formulazione adottata dal DHI per la valutazione del coefficiente di viscosità turbolenta si basa sul cosiddetto *modello di Smagorinsky per la turbolenza isotropica*:

$$\nu_t = \rho \ell^2(x_i) \left(S_{i,j} S_{j,i} \right)^{\frac{1}{2}},$$

dove ℓ è una lunghezza di mescolamento caratteristica ed $S_{i,j}$ è il tensore degli sforzi del secondo ordine.

Secondo l'analogia di Reynolds, i trasferimenti di materiali disciolti o sospesi nei flussi turbolenti sono equivalenti ai corrispondenti trasferimenti di momento, di conseguenza si assume che per il coefficiente di diffusione turbolenta valga l'eguaglianza approssimata:

$$D_t \simeq \nu_t.$$

Nei modelli bidimensionali, che come si è visto trattano valori medi verticali dei campi di velocità, si corre il rischio di eliminare gli effetti dispersivi dei profili verticali di velocità. I flussi con gradienti di velocità verticali sono noti come flussi di taglio (*shear*) e i fenomeni diffusivi ad essi associati vanno sotto il nome convenzionale di *effetti di taglio* (*shear effect*). Per tenerne conto si aggiungono ai modelli integrati sulla verticale dei termini empirici, definendo dei coefficienti di *viscosità di taglio* (*shear viscosity*) ν_x^s , ν_x^s e *diffusività di taglio* (*shear diffusivity*) D_x^s , D_x^s .

Il metodo migliore per stabilire i valori dei coefficienti è un processo di calibrazione, ma, dati i problemi di reperimento delle misure necessarie, si ricorre spesso a stime empiriche. Il manuale d'uso di MIKE 21 AD [8] propone le formule seguenti:

$$D = K_1 \cdot \Delta x^2 / \Delta t \quad \text{oppure}$$

$$D = K_2 \cdot \Delta x \cdot u \quad \text{oppure}$$

$$D = K_3 \cdot \Delta t \cdot u^2.$$

Usare valori troppo grandi per i coefficienti di dispersione può comportare l'insorgere di instabilità. Purtroppo non è possibile stabilire

a priori se un certo valore assegnato è troppo alto; comunque il programma non accetta valori che non rispettino la condizione di stabilità per un processo puramente diffusivo:

$$\left(\frac{D_x}{\Delta x^2} + \frac{D_y}{\Delta y^2} \right) \cdot \Delta t < 0.5 .$$

Nelle simulazioni effettuate con MIKE 21 AD, i valori dei coefficienti di dispersione possono essere assegnati:

- costanti nello spazio in ciascuna delle due direzioni;
- secondo una mappa bidimensionale, simile alla batimetria;
- calcolati ad ogni passo temporale in base alla densità dell'acqua ed a due coefficienti costanti fissati; i valori così ottenuti devono comunque essere compresi tra due valori di minimo e di massimo assegnati.

4.2.3 Procedura di modellizzazione con MIKE 21 AD

Nella preparazione di uno studio sulla dispersione, la prima cosa da tenere in considerazione sono le condizioni idrodinamiche che sono la base della modellizzazione e dalla quali dipende la qualità dei risultati. Per preparare le simulazioni, bisogna allora individuare:

- l'*area di interesse*, cioè l'area in cui si vuole stimare la variazione dei parametri ambientali;
- l'*area di influenza*, cioè l'area in cui può diffondere il materiale;
- la *scala dei tempi* dei fenomeni di trasporto che normalmente hanno tempi di risposta più lenti dei corrispondenti fenomeni idrodinamici, comportando tempi di simulazione più lunghi per ottenere soluzioni stazionarie.

I due moduli MIKE 21 HD e MIKE 21 AD funzionano accoppiati a ciascun passo temporale e non è possibile scinderli totalmente. Lo stesso passo temporale e la stessa batimetria, quindi lo stesso passo spaziale, usati per la simulazione idrodinamica, vengono applicati nella parte avvettiva-dispersiva. Siccome la scelta del passo temporale deve essere fatta tenendo conto di entrambe le simulazioni; si procede nel modo seguente:

1. si sceglie dapprima il passo spaziale per il modulo idrodinamico, come descritto nel paragrafo 4.1.2;
2. si decide il passo temporale in base all'indicazione fornita dal modello nella parte idrodinamica sul numero di Courant massimo;
3. si controlla che nel modulo avvettivo-dispersivo sia rispettata la seguente condizione sul numero di Courant per il trasporto:

$$C_{tr} = \Delta t \left(\frac{u}{\Delta x} + \frac{v}{\Delta y} \right) \leq 1,$$

in cui (u, v) è la velocità della corrente.

Per la preparazione della simulazione devono essere disponibili i seguenti dati per ogni componente di cui si vuole calcolare il trasporto:

- i dati al contorno, come misure di concentrazione od osservazioni;
- le misure per stimare il campo di concentrazione iniziale;
- i dati su pozzi e sorgenti, come portata e concentrazioni di fiumi, condotte, ecc.;
- i dati per la calibrazione e la verifica, cioè i valori di concentrazione in un certo numero di punti dell'area di interesse e specialmente vicino ai pozzi ed alle sorgenti.

Tipi di sostanze

Si possono scegliere tre diversi comportamenti per le sostanze per le quali usare MIKE 21 AD.

Il primo tipo sono le sostanze *conservative*: se non c'è corrente nè dispersione, la loro concentrazione rimane costante nel tempo.

Gli altri due tipi sono le sostanze *decadenti*, cioè non conservative, la cui concentrazione diminuisce nel tempo anche quando non c'è nè corrente nè dispersione. Il decadimento della concentrazione c nel tempo t è rappresentato in generale tramite la formula

$$\frac{dc}{dt} = -F c, \quad \text{cioè} \quad c(t) = c(0) e^{-\int_0^t F(\tau) d\tau}.$$

Se F è costante si ha

$$c(t) = c(0) e^{-F(t)}.$$

F si dice *fattore di decadimento* (se è costante $\frac{1}{F}$ è l'intervallo di tempo che porta ad una riduzione pari ad $\frac{1}{e}$ della concentrazione iniziale).

Assegnando un valore (costante) per F , il programma fornisce il valore del parametro T_{90} , cioè il tempo impiegato affinché la quantità di sostanza venga ridotta del 90%. Tale valore viene calcolato tramite la seguente formula:

$$c = c_0 \cdot 10^{-\frac{t}{T_{90}}}.$$

Si ha naturalmente $T_{90} = \frac{\ln 10}{F}$.

Condizioni iniziali ed al contorno

Per quanto riguarda le concentrazioni iniziali è possibile assegnare:

- un valore costante che viene applicato a tutti i punti della griglia;
- una matrice bidimensionale di valori.

Come nel modulo idrodinamico, per le concentrazioni ai bordi il modulo MIKE 21 AD è in grado, quando il flusso è diretto verso l'esterno della griglia di calcolare dei propri valori. Tuttavia, siccome si è raramente in grado di dire in anticipo se il flusso soddisfa tale condizione, nel

caso in cui si ritiene necessario fissare le concentrazioni al contorno, esse devono essere specificate ad ogni passo temporale. Per non falsare i risultati viene comunque consigliato [8] di posizionare i bordi aperti lontano sia dall'area di interesse che da quella di influenza.

Per assegnare tali valori sono possibili le seguenti opzioni:

- un solo valore costante per tutta la durata della simulazione, applicato a tutti i punti di griglia lungo il bordo;
- un file contenente per ogni passo temporale e per ogni componente i valori di concentrazione che vengono applicati in tutti i punti del bordo;
- un file con gli stessi dati della precedente opzione, nel quale però i valori sono assegnati per ciascun punto del bordo aperto.

Sorgenti e pozzi

La posizione dei pozzi e delle sorgenti e le loro portate sono assegnate durante la preparazione della simulazione con MIKE 21 HD, come discusso nel paragrafo 4.1.2.

Col modulo avvettivo-dispersivo si attribuiscono le concentrazioni nel modo seguente:

- un solo valore costante per tutta la durata della simulazione;
- un file contenente la serie temporale di valori per ciascun componente.

Calibrazione e verifica

Lo scopo della calibrazione è di regolare il modello in modo da riprodurre soddisfacentemente condizioni misurate o conosciute per un periodo detto appunto *periodo di calibrazione*, che deve includere differenti situazioni idrodinamiche. Bisogna ricordare che le concentrazioni fornite dal modello sono mediate sulla profondità per ciò i dati di calibrazione devono essere valori a più quote altrimenti si devono assumere dei profili teorici di concentrazione.

Per quanto riguarda i parametri di calibrazione, il modulo avveztivo-dispersivo dipende fortemente dalla parte idrodinamica; gli unici veri e propri parametri di calibrazione di MIKE 21 AD sono i coefficienti di dispersione.

4.3 I moduli accessori

Vengono di seguito illustrati brevemente i principali programmi accessori di MIKE 21 che sono stati utilizzati durante il lavoro di tesi.

4.3.1 Il trattamento dei dati

I dati utilizzati dal programma durante le simulazioni sono suddivisi in due directory, che devono essere create dall'utente prima di lanciare il programma, nel modo seguente:

- nella *Working directory* sono messi i file con estensione
 - *.inp*, che contengono tutti i dati assegnati dall'utente per una data simulazione, occupano circa 6 Kbytes;
 - *.gpr*, che forniscono dati statistici sui file usati in ingresso e in uscita e un messaggio per ogni passo temporale completato, occupano circa 300 Kbyte;
- nella *Data directory* sono invece memorizzati i
 - data files*, che hanno estensione **.dt0* e **.ct0*, **.dt1* e **.ct1*, **.dt2* e **.ct2*, a seconda che si tratti di serie temporali per singoli punti, per vettori unidimensionali o per matrici bidimensionali; occupano molto spazio, quindi è necessario memorizzare solo i dati strettamente necessari;
 - hot files*, cioè i dati che si è scelto di memorizzare per continuare la simulazione in seguito; raramente occupano più di 200 Kbytes.

Al termine della preparazione di una simulazione è obbligatoria una fase di verifica delle assegnazioni in cui MIKE 21 fornisce il valore dello

spazio richiesto per memorizzare l'output (*disk space*), tuttavia non controlla se esso sia realmente disponibile sul disco. Viene inoltre fornita una stima, continuamente aggiornata durante lo svolgimento della simulazione, del tempo che sarà impiegato dal computer a terminare il lavoro computazionale (*CPU time*). Si può tener presente che tale valore aumenta linearmente col numero dei punti d'acqua, col numero dei passi temporali ed il numero di componenti.

L'opzione 'Hot start'

Nel caso in cui in una simulazione precedente siano stati preparati gli *Hot data* si può lanciare una simulazione con l'opzione *Hot start*. Tale opzione che fornisce direttamente al programma le seguenti informazioni:

- griglia spaziale, passo temporale e ora dell'inizio della simulazione;
- latitudine ed orientazione della griglia;
- il valore simbolico assegnato per la terra emersa;
- valori di concentrazione per i componenti;

e permette di simulare gli effetti dei cambiamenti idrologici sul trasporto nel caso di simulazioni che coprono l'arco di diversi mesi.

L'importazione, l'elaborazione e l'esportazione dei dati

Il lettore di file ASCII di MIKE 21 permette di importare nell'ambiente specifico del programma file di dati provenienti da altre applicazioni, come ad esempio i dati di batimetria, gli andamenti mareali o i campi meteorologici.

Con l'editore di MIKE 21 è possibile preparare nello specifico formato utilizzato dal programma i diversi tipi di file per le assegnazioni dei valori alle variabili delle simulazioni. In particolare si possono elaborare le matrici bidimensionali di batimetria precedentemente importate oppure creare quelle di attrito sul fondo e preparare le serie temporali di elevazione ai bordi.

Per quanto riguarda invece i dati in uscita, è prevista la possibilità di convertirli in formato standard ASCII o in formato testo, in modo che possano essere utilizzati per altri programmi. Questa facilitazione è stata sfruttata in questo lavoro di tesi per fornire ai modelli di dispersione a particelle ideati, LAMP2D e LAMP3D, di utilizzare i files contenenti i dati di batimetria e velocità creati dal modulo idrodinamico di MIKE 21.

Il codice di analisi e previsione mareale

In mare aperto le variazioni di livello causate dalle maree possono essere descritte in termini di serie di Fourier. In acque basse invece le variazioni di livello sono più complesse a causa delle interazioni col fondale, pertanto vengono appositamente definite *maree costiere* e suddivise in due tipi:

- risposte non lineari di una sola componente mareale astronomica, caratterizzate da frequenze multiple della componente da cui sono generate;
- risposte non lineari alle interazioni tra due diverse componenti, con frequenze date dalla somma o dalla differenza delle frequenze astronomiche.

Per specifiche analisi dei dati di livello in acque basse, MIKE 21 è dotato di un modulo che analizza le componenti mareali utilizzando la tecnica matematica dei minimi quadrati e consente la previsione dei livelli mareali per ogni punto situato sul globo terrestre. In base alla lunghezza della serie temporale che gli viene fornita, il programma valuta l'ampiezza e la fase di un certo numero di frequenze mareali; le principali sono riportate in Tabella 4.1. La tecnica dei minimi quadrati rispetto all'analisi spettrale presenta il vantaggio del trattamento delle interruzioni che nello sviluppo in serie di Fourier costituiscono un serio impedimento.

4.3.2 La grafica

Il modello MIKE 21 è dotato di programmi grafici che consentono di presentare su video e stampare sia su carta che su supporto digitale le

Componente mareale Nome	Simbolo	Periodo (hrs)	Ampiezza ($M_2 = 100$)
<i>Semi-diurne</i>			
Principale lunare	M_2	12.42	100
Principale solare	S_2	12.00	47
Lunare ellittica larga	N_2	12.66	19
Luni-solare	K_2	11.97	13
<i>Diurne</i>			
Luni-solare	K_1	23.93	58
Principale lunare	O_1	25.82	42
Principale solare	P_1	24.07	19
Lunare ellittica larga	Q_1	26.87	8

Tabella 4.1: In questa tabella le principali componenti mareali sono indicate attraverso la denominazione che ne ricorda l'origine e con un simbolo convenzionale. I periodi sono espressi in ore solari. Le diverse ampiezze sono rapportate all'ampiezza della componente lunare semi-diurna, che è la maggiore.

rappresentazioni grafiche generalmente usate per la presentazione dei risultati di simulazioni di idrodinamica e di trasporto.

I dati da fornire a tali programmi sono suddivisi nel modo seguente:

Type 0 : file contenenti una o più serie temporali di singoli valori;

Type 1 : file con una o più serie temporali di array unidimensionali;

Type 2 : file di una o più serie temporali di array bidimensionali.

I file *Type 0* possono essere ottenuti mediante "estrazioni" dai dati dei file *Type 1* e *Type 2*: ad esempio, è possibile ottenere i valori di velocità ad ogni passo temporale in un certo punto (*Type 0*) dal file contenente i valori di velocità ad ogni passo temporale per tutti i punti di griglia (*Type 2*). In Figura 4.6 viene invece mostrato graficamente come si possono ottenere file *Type 1* da file *Type 2*.

I grafici dei dati *Type 0* e *Type 1* sono in genere diagrammi nel piano cartesiano; per le matrici *Type 2* vi sono rappresentazioni bidimensionali: ad esempio per la batimetria è possibile disegnare una

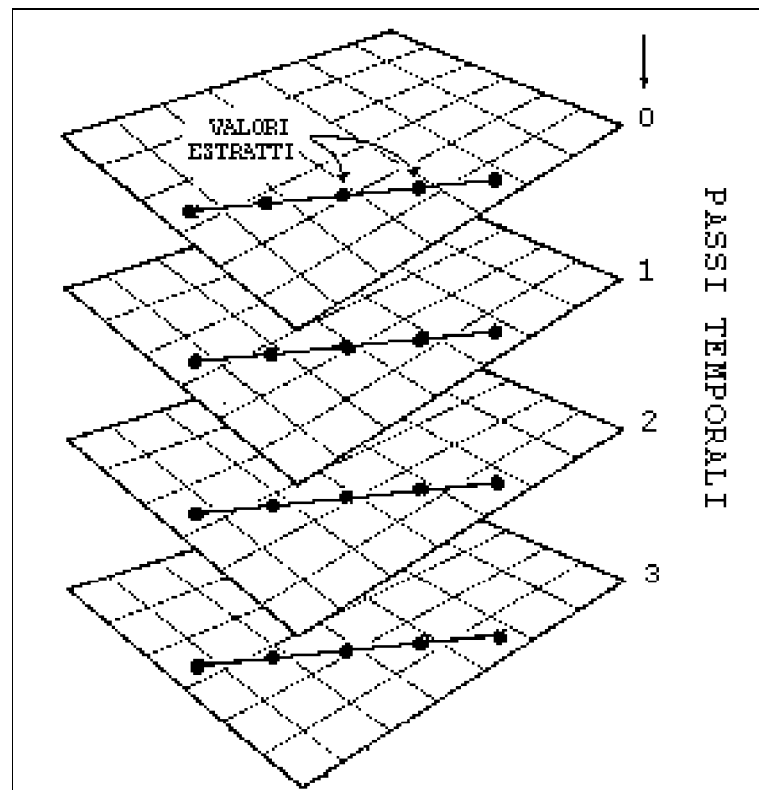


Figura 4.6: L'estrazione di dati $Type\ 1 \rightarrow Type\ 2$.

carta batimetrica con le isobate, le velocità possono essere sovrainpresse come vettori sulla batimetria, per le concentrazioni vi sono le isolinee o colori sfumati. Su tali carte è inoltre possibile sovrainporre i dati identificativi della simulazione, i riferimenti geografici (freccia del nord geografico e/o la maglia dei meridiani e dei paralleli) e le legenda. Per la sola carta batimetrica è disponibile anche una rappresentazione tridimensionale.

4.4 Le simulazioni iniziali

Verranno brevemente descritte in questo paragrafo le prime simulazioni effettuate con MIKE 21. Si tratta di casi di flussi semplici che, richiedendo simulazioni di breve durata (circa un'ora di calcolo per simulare periodi di pochi giorni), hanno permesso di fare pratica nell'utilizzo del programma e di studiare i comportamenti del modello a seconda delle assegnazioni scelte.

Durante lo svolgimento di queste prime simulazioni, sono state preparate due schede (vedi in appendice a pag. 139), una per le simulazioni idrodinamiche ed una per quelle di avvezione-dispersione, contenenti le voci relative alle scelte da effettuare nelle assegnazioni e i campi per l'identificazione della specifica simulazione. Compilate durante la fase di verifica delle assegnazioni prima di "lanciare" la fase computazionale, si sono rivelate utili nel successivo studio dei risultati, fornendo uno strumento di immediato confronto fra le diverse simulazioni.

Nei due primi casi presentati sono state svolte simulazioni con il solo modulo idrodinamico, nel terzo invece si sono applicati entrambe i moduli, idrodinamico ed avveztivo-dispersivo.

4.4.1 Variazioni di latitudine per un canale a fondo piatto

E' stata preparata con l'editore di dati di MIKE 21 la rappresentazione di un canale lungo 42 km e largo 12 Km (le stesse dimensioni dell'area comprendente il Golfo Tigullio ed il Golfo Paradiso) su di una griglia di dimensioni 231×81 , con $\Delta x = 200$ [m]; per la profondità è stato fissato uniformemente su tutta la maglia un valore di -50 [m]. I bordi nord e

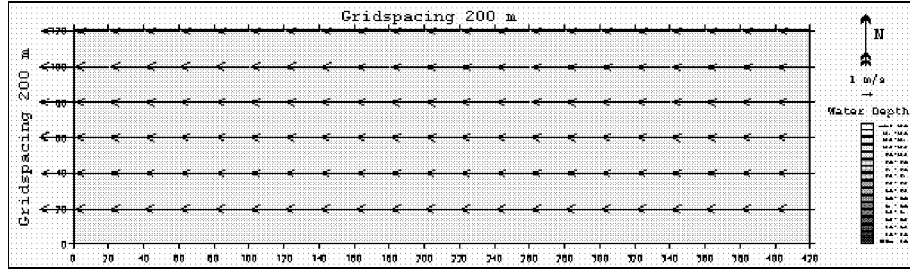


Figura 4.7: Corrente occidentale stazionaria in un canale alle latitudini equatoriali.

sud sono stati chiusi, avendo assegnato una maglia con valore 10 [m], corrispondente a quello simbolico per la terra emersa. E' stato scelto un passo temporale breve, $\Delta t = 18$ [s], in modo da avere per il numero di Courant un valore piccolo: $C_R = 2$. Le condizioni ai bordi aperti sono state fissate per l'elevazione della superficie libera: si è creato un dislivello costante nel tempo di 4 cm tra il bordo est (più alto) e quello ovest (più basso) al fine di ottenere una corrente stazionaria occidentale. In una prima serie di simulazioni il bordo meridionale della griglia è stato fissato all'equatore, cosicchè il contributo della forza di Coriolis risultasse trascurabile su tutto il dominio computazionale. Il risultato ottenuto coincide con quello atteso (Figura 4.7), anche se la situazione stazionaria, raggiunta al terzo giorno, presenta velocità della corrente troppo elevate per essere confrontabili con quelle reali: in seguito il dislivello è stato ridotto a 1 cm.

Successivamente un canale con le stesse dimensioni e le medesime condizioni ai bordi del caso precedente è stato posizionato alle medie latitudini. Non applicando l'opzione del *TILT* non lineare per compensare gli effetti della forza di Coriolis, si generavano instabilità numeriche che facevano "saltare" il processo computazionale (vedi Figura 4.8).

Quando invece tale opzione è stata applicata, i flussi stazionari sono diventati realisticamente uniformi con la superficie libera leggermente inclinata (condizione geostrofica).

Queste simulazioni hanno quindi permesso di sperimentare l'utilizzo dell'opzione *TILT* non lineare che permette di "distribuire" in funzione della profondità di ciascun punto il valore assegnato all'elevazione lungo il bordo aperto. Come *TILT point*, punto cioè dove il valore di ζ rimane

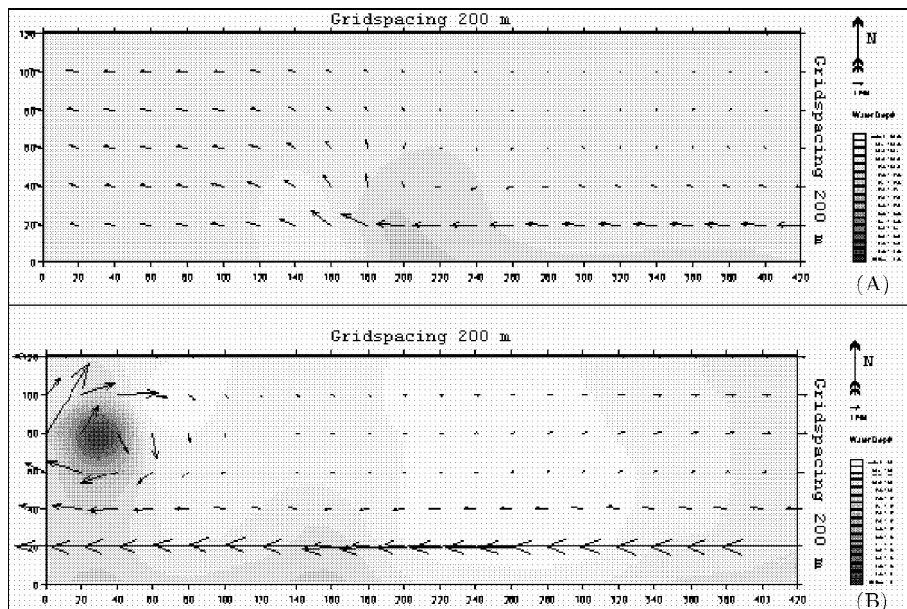


Figura 4.8: A) Campo di corrente alla VII ora di simulazione: la mancata compensazione nelle condizioni ai bordi della forza di Coriolis causa un andamento della corrente non realistico. B) *Blow-up* del processo computazionale alla XIV ora di simulazione.

comunque quello assegnato, è stato scelto il punto centrale, essendo tutto il fondo piatto. Per ottenere risultati realistici, insieme al *TILT* non lineare è stato assegnato al *FAB* il valore 12, quello cioè che come visto precedentemente, pone le condizioni meno stringenti.

4.4.2 Test di espansione

Questo test si propone di mostrare come un diverso valore della viscosità turbolenta possa cambiare notevolmente la situazione idrodinamica nel caso in cui il flusso entrante in un canale incontra una improvvisa espansione della sezione.

La griglia è di 51×21 punti con passo spaziale di 20 [m], mentre il passo temporale è 10 [s]. Tutto il canale ha profondità uniforme di -10 [m]. Ad entrambe i bordi aperti è fissata un flusso di 1000 [m³/s], con direzione entrante dove il canale è più stretto ed uscente dal lato più largo. Sono state effettuate due simulazioni: nella prima il valore della viscosità turbolenta è stato assegnato nullo, nella seconda invece $\nu_t = 5$ [m²/s]. I risultati sono mostrati in Figura 4.9.

4.4.3 Canale ad angolo con sorgente singola

Lo scopo di questa simulazione è di determinare quale sia il campo di concentrazione stazionario nel caso di un singolo scarico in un canale ad angolo retto.

Le condizioni idrodinamiche sono le seguenti:

- il passo spaziale è di 50 [m] e la profondità uniforme di -20 [m];
- il passo temporale è 30 secondi, ne risulta un numero di Courant di valore 8;
- il flusso va da sud ad ovest con una velocità della corrente di circa 0.8 [m/s] generata da una differenza di elevazione tra i due bordi aperti di 0.05 [m];
- nel punto di coordinate (25,3) è situata una sorgente con portata costante di 0.1 [m³/s], velocità costante 0.1 [m/s] e direzione 0.0 gradi;

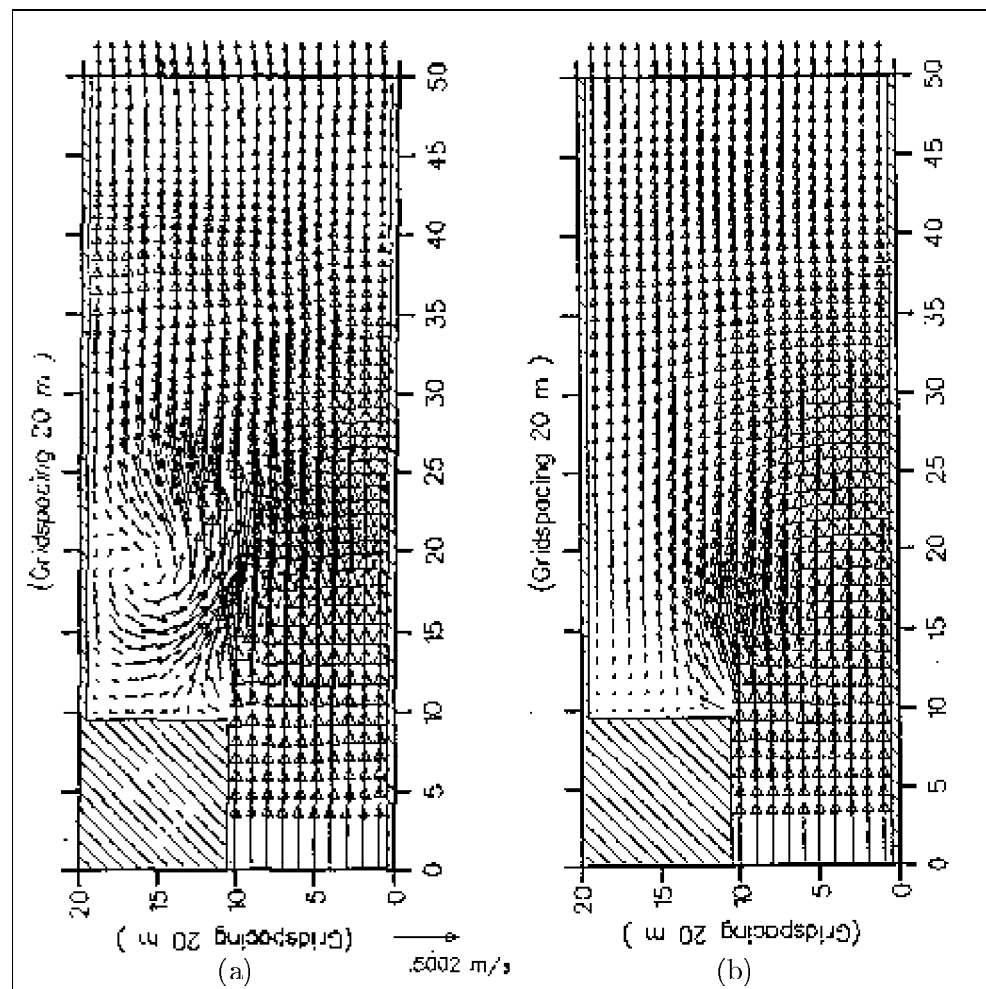


Figura 4.9: Campo di corrente nel canale con espansione. a) Viscosità turbolenta di valore 0 $[\text{m}^2/\text{s}]$. b) Viscosità turbolenta di valore 5 $[\text{m}^2/\text{s}]$.

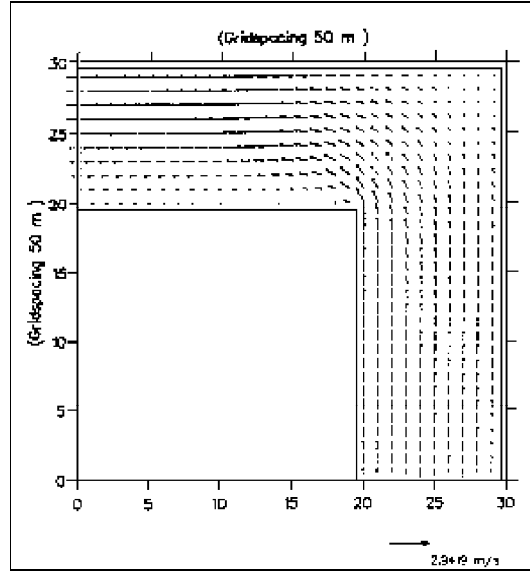


Figura 4.10: Canale ad angolo: campo di velocità al termine della simulazione rappresentato mediante i vettori.

- la viscosità turbolenta è $3 \text{ [m}^2/\text{s]}$.

Il numero di passi temporali è 360, vengono quindi simulate 3 ore. Il campo idrodinamico alla fine della simulazione è mostrato in Figura 4.10.

Nella parte avveztiva-dispersiva sono state fissate le caratteristiche dello scarico: viene immesso un solo componente di tipo conservativo, che alla sorgente ha concentrazione di 1000000 [ppm], costante nel tempo, con concentrazioni iniziale ed ai bordi nulle. Per quanto riguarda i coefficienti di dispersione, è stata scelta l'opzione di mantenerli costanti nel tempo ed indipendenti dalla corrente; il valore assegnato è $1.5 \text{ [m}^2/\text{s]}$. Per ottenere le due figure mostrate sotto si è utilizzato il programma di estrazione: dai dati *Type 2* si sono ottenute le serie temporali (*Type 0*) per velocità della corrente, Figura 4.11, e concentrazione, Figura 4.12.

Dall'analisi dei grafici, si evince che siccome il campo di flusso idrodinamico cresce lentamente, mentre l'emissione dallo scarico è costante, la concentrazione presso la sorgente è inizialmente molto elevata. Al

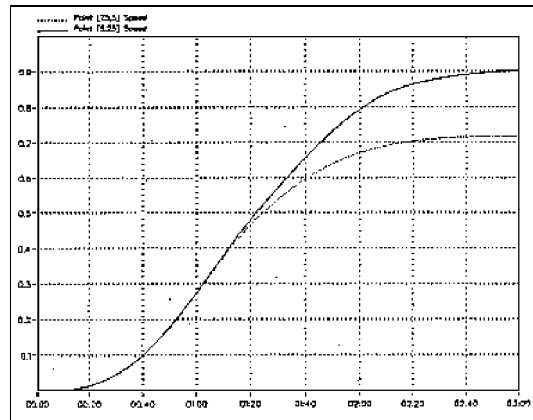


Figura 4.11: Andamento temporale della velocità della corrente in due punti del canale ad angolo, uno presso il bordo di entrata del flusso, l'altro presso il bordo di uscita.

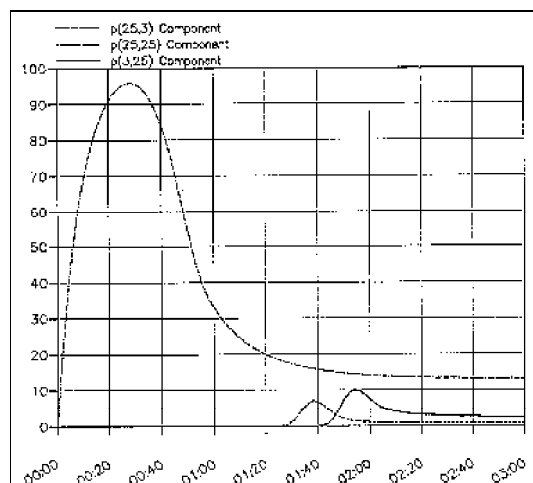


Figura 4.12: Andamento temporale della concentrazione in tre diversi punti del canale ad angolo: presso la sorgente, presso il bordo di entrata del flusso e presso il bordo di uscita.

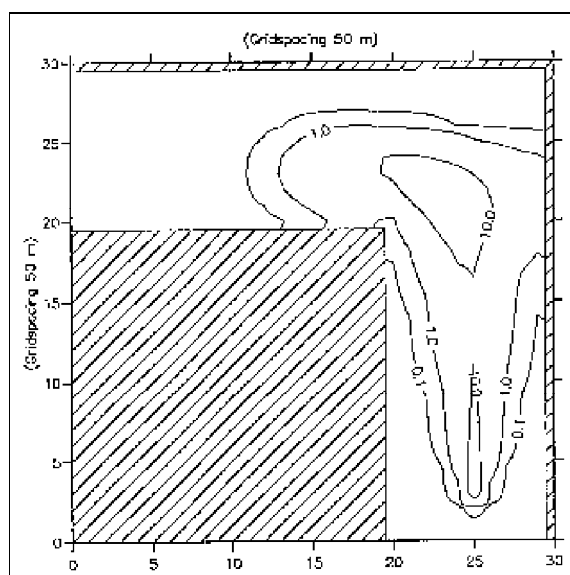


Figura 4.13: Campo di concentrazione rappresentato con le isoline dopo 1,5 [h] di simulazione.

crescere della velocità, i processi di trasporto si fanno più efficaci e la concentrazione diminuisce.

In questo caso la simulazione idrodinamica e quella di avvezione-dispersione raggiungono lo stato stazionario più o meno contemporaneamente: bisogna tener presente che normalmente ciò non avviene in quanto i processi idrodinamici sono generalmente più veloci di quelli avvevativi-dispersivi.

In Figura 4.13 ed in Figura 4.14 sono rappresentati con le isolinee i campi di concentrazione dopo un'ora e mezza e dopo un'ora di simulazione.

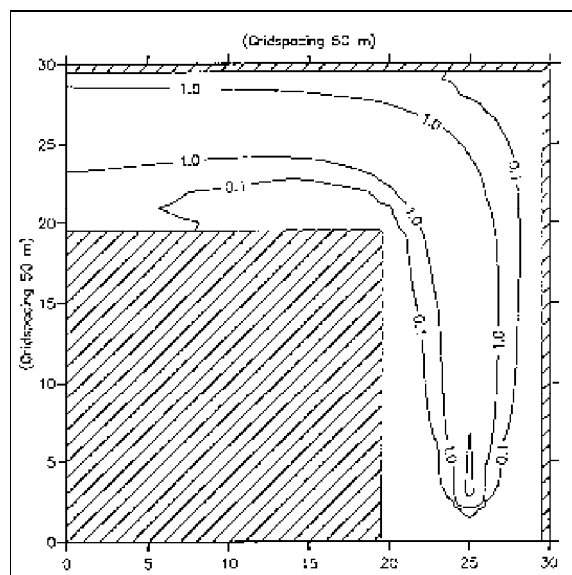


Figura 4.14: Campo di concentrazione rappresentato con le isoline dopo 3 [h] di simulazione.

Capitolo 5

LAMP2D

Introduzione

Il pacchetto LAMP2D è costituito dal modello numerico omonimo, da due programmi di grafica e da alcuni programmi accessori per il trattamento dei dati.

La programmazione è stata fatta in linguaggio FORTRAN, utilizzando il compilatore MSFortran5. I listati di tutti i programmi sono inseriti in appendice a pag. 135.

In questo capitolo vengono discusse nel dettaglio le caratteristiche del modello numerico ed il suo utilizzo per le simulazioni della dispersione di inquinanti in acque costiere; successivamente sono illustrati gli altri programmi e discussi i risultati delle prime simulazioni effettuate con LAMP2D.

5.1 Il modello numerico LAMP2D

Il modello matematico utilizzato per la programmazione di LAMP2D è un modello bidimensionale a particelle con *random walk*. Utilizzando i dati forniti da MIKE 21 su batimetria e velocità della corrente questo modello calcola la concentrazione di particelle integrata sulla verticale per ogni maglia di griglia.

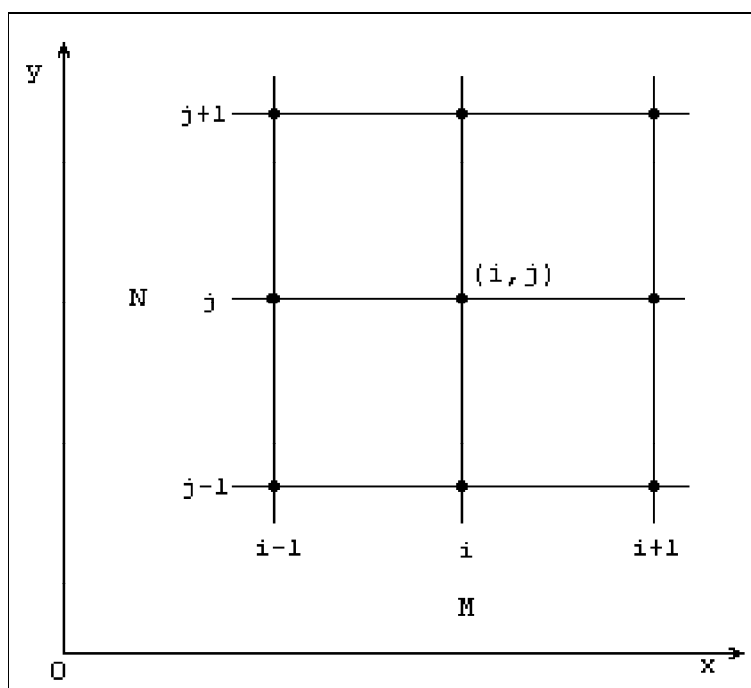


Figura 5.1: La griglia spaziale di LAMP2D: la matrice ha dimensioni $M \times N$ con indici i, j ; viene posta nel piano cartesiano in modo tale che il punto $(0,0)$ coincida con l'origine e l'indice i rappresenti la direzione x .

5.1.1 Il dominio di definizione

Il dominio spaziale in cui vengono effettuati i calcoli numerici del modello è una griglia rettangolare con maglie quadrate di passo spaziale ΔL e dimensioni fissate dall'utente all'inizio della simulazione. Si tratta quindi di una matrice $M \times N$ con indici rispettivamente i e j , posta nel piano cartesiano come rappresentato in Figura 5.1. Le posizioni nel dominio di calcolo sono allora espresse in coordinate di griglia (si vedrà in seguito un programma creato al fine di convertire le coordinate geografiche in coordinate di griglia).

Il dominio temporale è discretizzato con passi temporali Δt di valore scelto dall'utente e l'indice scelto per i passi temporali è n .

Tutti i dati in ingresso (batimetria, velocità, coefficiente di dispersione, concentrazione iniziale) forniti al programma vengono allora letti

da LAMP2D in un specifico formato ed assegnati come valori di array bidimensionali. Ad esempio il valore di batimetria -50 [m] nel punto di coordinate di griglia (115,45), viene assegnato alla variabile $H \equiv H(i, j)$ nel modo seguente $H(115, 45) = -50$.

5.1.2 Il calcolo avvettivo-dispersivo

Come si è visto al paragrafo 3.3.3, i modelli a *random walk* sono processi autoregressivi di ordine zero, in cui cioè la componente casuale della velocità della particella, essendo il risultato di spostamenti provocati dai vortici turbolenti, è puramente random ad ogni istante:

$$\mathbf{v}'_n = \boldsymbol{\mu}.$$

Ad ogni passo temporale la nuova posizione della particella viene allora calcolata con la formula numerica:

$$\mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_n = \bar{\mathbf{v}}\Delta t + \boldsymbol{\varrho}, \quad (5.1)$$

in cui $\boldsymbol{\varrho} = \boldsymbol{\mu}\Delta t$. Poichè nel caso del modello LAMP2D il campo di velocità deterministico viene fornito dalle simulazioni effettuate con MIKE 21, per maggiore chiarezza si indicherà di seguito $\bar{\mathbf{v}}$ con \mathbf{v}^{mike} , fermo restando che il modello LAMP2D rimane efficacemente applicabile al campo bidimensionale di velocità prodotto da un qualsiasi modello idrodinamico.

Indicando con i seguenti simboli le componenti in due dimensioni dei vettori presenti nelle formule precedenti:

$$\mathbf{r} = (x, y), \quad \mathbf{v}^{mike} = (u^{mike}, v^{mike}) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\varrho} = (\varrho_x, \varrho_y),$$

si può riscrivere la formula (5.1) per componenti:

$$\begin{cases} x_{n+1} - x_n = u^{mike} \Delta t + \varrho_x \\ y_{n+1} - y_n = v^{mike} \Delta t + \varrho_y. \end{cases}$$

Vediamo ora come tale sistema numerico ha trovato applicazione nel programma LAMP2D.

L'assegnazione della velocità deterministica

La posizione della particella indicata dalle coordinate spaziali x ed y è calcolata ad un generico passo temporale $n + 1$ sommando alla posizione precedente il valore dello spostamento deterministico e quello dello spostamento random. Le posizioni delle particelle sono numeri reali, definite cioè nel continuo. Gli spostamenti deterministici,

$$\Delta x = u^{mike} \Delta t \quad \text{e} \quad \Delta y = v^{mike} \Delta t$$

devono venire calcolati in base alla posizione attuale della particella, ma i dati sulla velocità sono noti solo per i punti di griglia.

Il valore della velocità viene allora calcolato per ciascuna componente con una media pesata fra i valori noti ai vertici della maglia (vedi Figura 5.2), con le seguenti formule:

$$u_{det} = w_1 u_{i,j}^{mike} + w_2 u_{i+1,j}^{mike} + w_3 u_{i+1,j+1}^{mike} + w_4 u_{i,j+1}^{mike} ,$$

$$v_{det} = w_1 v_{i,j}^{mike} + w_2 v_{i+1,j}^{mike} + w_3 v_{i+1,j+1}^{mike} + w_4 v_{i,j+1}^{mike} ,$$

I pesi w_k ($k = 1, 2, 3, 4$), inversamente proporzionali alla distanza d_k dai corrispondenti punti di griglia, vengono calcolati mediante la formula numerica

$$w_k = \frac{d_1 d_2 d_3 d_4}{d_k (d_1 d_2 d_3 + d_1 d_3 d_4 + d_1 d_2 d_4 + d_2 d_3 d_4)} \quad \text{con } k = 1, 2, 3, 4 .$$

Il calcolo degli spostamenti casuali

Si è già accennato in precedenza che nei modelli a particelle ad ognuna delle componenti di $\boldsymbol{\varrho} = (\varrho_x, \varrho_y)$ viene assegnato un valore secondo una funzione di densità di probabilità ottenuta dalla manipolazione dei numeri pseudorandom del calcolatore.

Nel linguaggio Fortran come generatore di numeri pseudocasuali sono predisposte le subroutine $\text{RANDOM}(r)$ e $\text{SEED}(s)$. Fornendo al calcolatore un certo valore per s (detto *seme*), SEED assegna il valore di partenza a RANDOM che generando numeri pseudocasuali fornisce il valore reale r , compreso tra 0 ed 1. Ogni volta che si assegna lo stesso valore a s , RANDOM produce gli stessi numeri nello stesso ordine; ciò permette, in caso di necessità, all'utente che conosca il valore

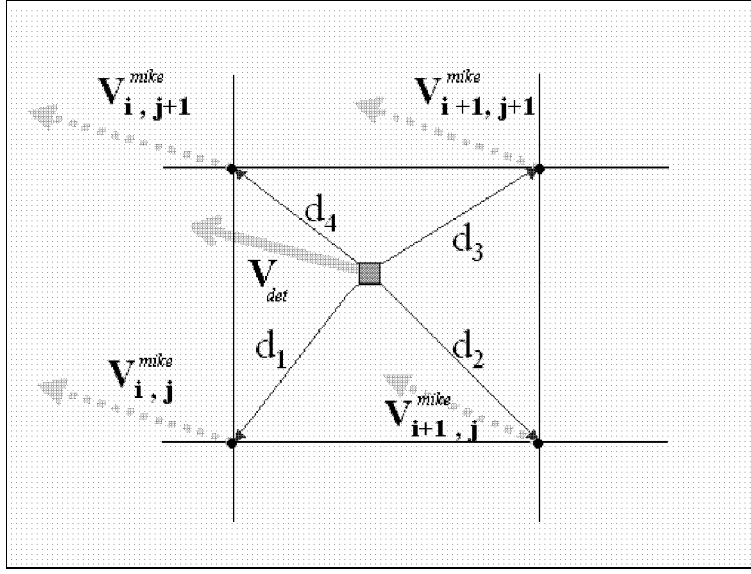


Figura 5.2: La velocità deterministica \mathbf{v}_{det} della particella viene calcolata a partire dai valori noti nei punti di maglia $\mathbf{v}_{i,j}^{mike}$ con una media pesata funzione delle distanze d .

di s , di ripetere esattamente la stessa simulazione nonostante che nel programma si utilizzino numeri pseudocasuali ¹.

Il modello LAMP2D assume per gli spostamenti casuali q_x e q_y una funzione di densità di probabilità gaussiana con media nulla e deviazione standard σ da assegnare. Per ottenere dal computer dei numeri pseudocasuali con una tale distribuzione è necessario elaborare i numeri ottenuti dalla subroutine RANDOM(r) nel modo seguente.

La variabile r ha distribuzione di probabilità uniforme tra 0 ed 1; definendo una variabile $r' = r - \frac{1}{2}$, essa avrà distribuzione di densità di probabilità uniforme tra $-\frac{1}{2}$ ed $+\frac{1}{2}$ con media

$$\langle r' \rangle = 0$$

¹Nel caso si desideri avere ad ogni istante un seme diverso, è possibile assegnare ad s il valore dei centesimi dell'orologio del calcolatore con la subroutine GETTIME.

e varianza

$$\sigma_{r'}^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} r^2 dr = \left[\frac{r^3}{3} \right]_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} = \frac{1}{12}$$

Considerando allora la variabile casuale R definita come

$$R = \sum_{i=1}^n r_i$$

ed assumendo che le n variabili r_i siano indipendenti, si ha che la media di tale distribuzione è

$$\langle R \rangle = \sum_{i=1}^n \langle r_i \rangle,$$

mentre la varianza

$$\sigma_R^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_{r_i}^2.$$

Prendendo $n = 12$ e definendo tutte le variabili r_i come r' , otteniamo per la media e la varianza della distribuzione R

$$\langle R \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \sigma_R^2 = 1.$$

Infine per il *teorema del limite centrale* una successione di n variabili casuali indipendenti come R tende per $n \rightarrow \infty$ a distribuirsi secondo una gaussiana $\mathcal{G}(\langle R \rangle, \sigma_R^2)$. Ponendo $n = 12$, si può considerare allora il numero g calcolato con la formula numerica:

$$g = \left[\sum_{i=0}^{12} (r - 0.5)_i \right] \cdot \sigma.$$

come numero estratto a caso da una distribuzione di probabilità approssimativamente gaussiana con media nulla e deviazione standard σ .

5.1.3 Il calcolo della concentrazione

Calcolata come visto sopra la posizione ad ogni passo temporale di ciascuna particella, il programma effettua una serie di controlli affinché non si verifichino instabilità numeriche e risultati non realistici. I controlli effettuati sulla posizione sono effettuati al fine di verificare:

- se la particella è uscita al di fuori del dominio di calcolo;
- se la particella ha raggiunto punti di terraferma.

Nel primo caso si controlla se la nuova posizione della particella ha coordinate di griglia più grandi delle dimensioni della matrice; nel secondo si verifica che la particella non si trovi in un intorno pari a metà del passo spaziale di un punto di griglia cui è stato assegnato il valore simbolico rappresentante la terraferma.

Inoltre nel caso in cui l'inquinante di cui si sta simulando la dispersione sia del tipo "decadente", per ogni particella viene calcolata ad ogni passo temporale quale sia la sua possibilità di sopravvivenza. Si applica una legge di decadimento esponenziale:

$$c = c_0 \cdot 10^{-\frac{t}{T_{90}}},$$

in cui con T_{90} si indica, come già visto, il tempo in ore che impiega a decadere il 90% della quantità iniziale di inquinante. Ad un certo passo temporale la possibilità della particella di "sopravvivere" fino al passo successivo è data allora dalla formula:

$$\mathcal{P} = 1 - \frac{1}{\tau}$$

in cui

$$\tau = \frac{T_{90} \times 3600}{\Delta t \times \ln 10}.$$

Il valore ottenuto per la probabilità \mathcal{P} viene infine confrontato con un numero pseudorandom ottenuto, come già visto, dalla subroutine RANDOM(r) e se si verifica la condizione

$$\mathcal{P} < r$$

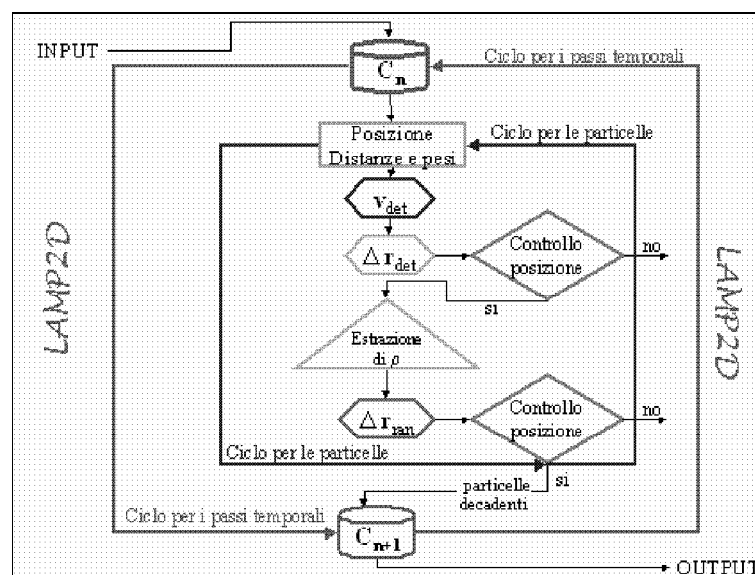


Figura 5.3: Il ciclo computazionale di LAMP2D.

la particella non viene più considerata nei calcoli successivi.

Nel caso in cui la particella ‘superi’ questi controlli viene considerata valida al fine del calcolo della concentrazione. Per concentrazione si considera il numero di particelle che ad un certo passo temporale sono all’interno di una maglia di griglia. Perciò il programma esegue un conteggio del numero di particelle per ciascuna maglia (la maglia viene individuata con l’indice del vertice in basso a destra) e memorizza il dato in una matrice. Con cadenza temporale definita dall’utente, il dato viene trascritto in un file di output utilizzabile per i programmi di grafica.

5.2 La struttura del programma

Il pacchetto LAMP2D è costituito principalmente dal programma di modellizzazione della dispersione omonimo, ma vi sono inoltre una serie di moduli accessori che permettono la presentazione dei risultati con mappe bidimensionali ed animazioni, i programmi di preparazione dei dati e di interfaccia con MIKE 21 ed un programma per la georeferenziazione.

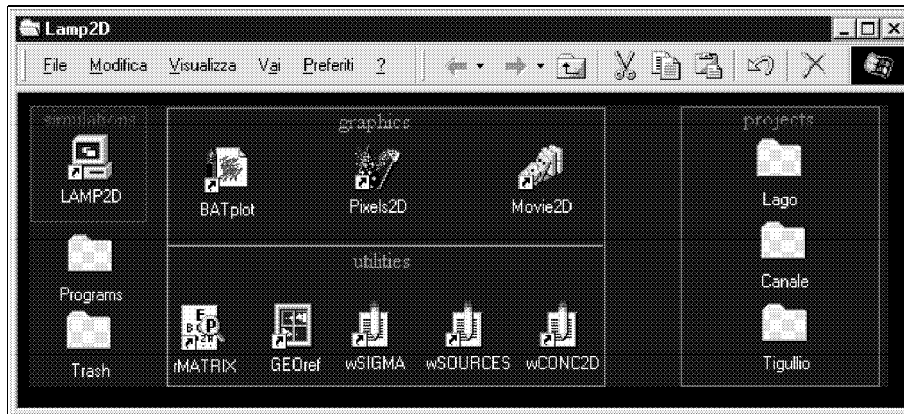


Figura 5.4: La finestra contenente i collegamenti ai programmi del pacchetto LAMP2D.

zione. Il programma è facilmente installabile da CD-ROM su PC con sistema operativo Windows 98; sul desktop viene preparata una icona cliccando sulla quale compare il menu mostrato in Figura 5.4. Oltre ai programmi nella finestra di dialogo vi è l'elenco dei *project*, ovvero delle cartelle nelle quali sono contenuti i dati d'ingresso (subdirectory "DATA") e in uscita (subdirectory "WORK") ed i file contenenti le specifiche per le simulazioni ed i grafici.

Vediamo ora in maggior dettaglio l'utilizzo e le caratteristiche di ciascuno dei programmi.

5.2.1 La preparazione di simulazioni con LAMP2D

Quando viene avviato il programma del modello avvelativo-dispersivo, si apre una finestra di tipo DOS. Il programma richiede all'utente una serie di assegnazioni necessarie alla preparazione della simulazione. Innanzitutto c'è la possibilità invece di proseguire nel fornire le specifiche da tastiera, di digitare il nome del file di testo (con estensione .spe) dove sono contenute tutte le necessarie informazioni in specifico formato. Vi sono tre categorie di dati da fornire al programma:

1. dati di definizione del dominio spazio-temporale;
2. dati per la caratterizzazione del tipo di inquinante;

3. elenco dei nomi dei file di input.
1. La definizione del dominio spaziale avviene scegliendo le dimensioni della matrice $M \times N$ ed il passo spaziale ΔL in metri. Successivamente si deve specificare la lunghezza del passo temporale Δt in secondi ed il numero di passi temporali che si vogliono effettuare. Come per le simulazioni con MIKE 21 AD bisogna rispettare il criterio per il numero di Courant per il trasporto:

$$C_{tr} = \Delta t \left(\frac{u + v}{\Delta L} \right) \leq 1,$$

in cui (u, v) è la velocità della corrente. Infine in base ai dati il programma calcola il numero di ore da simulare e chiede ogni quanto tempo si vogliono salvare le matrici di concentrazione.

2. Il tipo di inquinante può essere conservativo e non conservativo (decadente); nel secondo caso bisogna indicare anche il valore in ore per il T_{90} . Il tipo di rilascio dell'inquinante può essere istantaneo oppure continuo. Nel caso di rilasci istantanei deve essere fornita la concentrazione iniziale dell'inquinante nel dominio di calcolo. Nel caso di rilasci continui è necessario fornire al programma il numero di sorgenti di inquinanti e le loro caratteristiche con un file di testo preparato nello specifico formato richiesto da LAMP2D dal programma accessorio wSOURCES (vedi avanti).
3. Infine devono essere indicati al programma i nomi dei file contenenti
 - dati batimetrici;
 - campo di velocità;
 - matrice dei valori di σ ;

I dati batimetrici e di velocità devono essere convertiti dal formato del modello idrodinamico in quello specifico di LAMP2D; nel caso in cui il modello idrodinamico sia MIKE 21 HD, è stato preparato uno specifico programma di conversione, rMATRIX, che viene illustrato in seguito. La matrice della deviazione standard σ che

ha nel modello a particelle un significato analogo al coefficiente di dispersione richiesto per i modelli euleriani, viene preparata col programma wSIGMA.

L'ultimo dato da fornire a LAMP2D è il nome del file in cui si intende salvare i dati di concentrazione, che verranno in seguito elaborati dai programmi di grafica.

Al termine delle assegnazioni il programma visualizza una finestra di verifica, in cui sono riportate tutte le informazioni assegnate. Dopo la verifica, si può "lanciare" il programma che comincia il ciclo computazionale; al termine di ogni ora simulata appare sullo schermo un messaggio contenente alcuni dati sul numero di passi temporali effettuati e sulla posizione delle particelle. Quando inizia e quando termina la simulazione il programma memorizza l'ora e la scrive nel file di output: in questo modo si può avere una stima del tempo necessario a svolgere le simulazioni. Il tempo di calcolo è proporzionale al numero di passi temporali, alla dimensione della griglia di calcolo ed al numero di particelle che vengono considerate; approssimativamente il tempo impiegato da un processore Pentium II a 400 Mhz per la simulazione con LAMP2D è di circa un'ora di calcolo per ventiquattr'ore di simulazione.

5.2.2 I programmi di grafica

Per un'immediata visualizzazione dei risultati delle simulazioni effettuate con LAMP2D sono stati ideati tre programmi di grafica.

Il primo, BATplot, in base ai dati del file di batimetria evidenzia la terraferma, disegna il profilo della costa e le linee batimetriche dei -20, -30, -50, -100 e -200 [m]. Il file grafico prodotto è in formato standard *.bmp e quindi facilmente elaborabile (e.g. aggiungendo i simboli geografici, disegnando le posizioni delle condotte sottomarine, ecc) con qualsiasi programma commerciale di grafica. A tale file deve essere posto lo stesso nome, tranne naturalmente l'estensione, del file di dati per le successive elaborazioni grafiche dei dati di concentrazione.

Il programma Pixels2D mostra sul file grafico di batimetria preparato

in precedenza le posizioni delle singole particelle. Per ogni particella presente in una certa maglia di griglia esso disegna un pixel; nel caso in cui si voglia avere anche una indicazione sulla concentrazione di particelle è possibile stabilire tre diversi livelli di isoconcentrazione ed il programma mostrerà sullo schermo pixels di diversi colori a seconda della concentrazione per maglia ed una legenda. Quando si assegna il nome del file di dati di concentrazione il programma grafico informa l'utente sul contenuto, ed egli può scegliere gli intervalli di tempo a cui visualizzare le concentrazioni. Ogni immagine prodotta può essere salvata come file grafico in formato *.bmp per la presentazione dei risultati. Inoltre possono essere salvate in una subdirectory di nome MOVIE della directory WORK le intere sequenze di file grafici, in questo modo possono essere presentate col programma Movie2D le animazioni dei grafici. Tutte le specifiche per i programmi Pixels2D e Movie2D possono essere salvate in un file di testo con estensione *.plt, per essere subito disponibili per presentazioni dei risultati del modello LAMP2D.

5.2.3 I programmi accessori

Ai programmi che verranno ora brevemente descritti è già stato fatto cenno in precedenza; essi sono stati ideati al fine di rendere più versatile l'uso del modello LAMP2D e sono entrati a fare parte di un unico pacchetto *software*.

wSIGMA, wCONC, wSOURCES

Questi tre programmi servono a preparare nel formato specifico necessario a LAMP2D le matrici di dati iniziali.

I programmi wSIGMA e wCONC hanno struttura molto simile, in quanto producono file contenenti matrici bidimensionali con i valori rispettivamente di deviazione standard e concentrazione iniziale. Entrambe i programmi consentono di assegnare i valori punto per punto della matrice, oppure per riga o per colonna, oppure uniformemente su tutta la matrice; nei punti in cui non si specifica il valore, esso viene fissato a zero.

Il programma wSOURCES invece scrive i file contenenti le caratteristiche delle sorgenti di effluenti. Siccome il programma è stato creato in

modo specifico per gli scarichi da condotta sottomarina, i dati richiesti da esso per ogni sorgente sono:

- codice identificativo e nome della condotta;
- posizione in coordinate di griglia;
- la portata p in $[m^3/s]$;
- la concentrazione c in $[u.a./m^3]$

Affinchè i dati di portata e concentrazione siano utilizzabili dal modello a particelle, WriteSOURCE, fissato il numero di sorgenti n traduce i dati in ingresso in N_i^{part} , numero di particelle emesse ad ogni passo temporale Δt , per ciascuna sorgente i utilizzando la formula:

$$N_i^{part} = \frac{(p_i \ c_i) \Delta t}{\sum_{i=1}^n (p_i \ c_i)}.$$

rMATRIX

Come già accennato in precedenza, al modello di avvezione-dispersione LAMP2D devono essere forniti i dati sulla batimetria e sul campo di velocità da un modello idrodinamico. Il programma rMATRIX è stato ideato appositamente per convertire i dati nel formato di MIKE 21 HD in quello di LAMP2D. Si procede in due fasi nel modo seguente:

1. utilizzando il convertitore di dati di MIKE 21 si preparano i dati in formato trasferibile che vengono salvati in un file con estensione *.out.
2. si crea per un determinato ‘project’ la subdirectory MIKE.
3. si fornisce a rMATRIX il nome del file creato da MIKE 21 ed esso trascrive i dati nel formato utilizzato da LAMP2D, memorizzandoli nella directory DATA in un file con estensione *.dat.

Per i dati di velocità è necessario creare un file di dati per ciascuna delle due componenti u, v . rMATRIX fornisce anche la possibilità di mettere valori nulli di velocità nei punti di terraferma, qualora durante la fase di conversione gli si fornisca il nome del file di batimetria relativo.

GEOref

Il programma di georeferenziazione delle matrici utilizzate da LAMP2D è stato creato col fine di fissare nel dominio spaziale del modello le posizioni delle bocche delle condotte sottomarine. Tali posizioni infatti sono fornite dall'archivio della Regione Liguria in coordinate geografiche e devono essere trasformate in coordinate di griglia.

Il programma compie una trasformazione lineare a quattro coefficienti:

$$\begin{cases} x &= x_0 + A(\lambda - \lambda_0) + B(\phi - \phi_0) \\ y &= y_0 + C(\lambda - \lambda_0) + D(\phi - \phi_0), \end{cases}$$

in cui x ed y sono le coordinate di griglia, λ la longitudine e ϕ la latitudine. Per determinare i coefficienti A, B, C, D servono quindi tre caposaldi di coordinate geografiche note, (λ_0, ϕ_0) , (λ_1, ϕ_1) e (λ_2, ϕ_2) , e facilmente individuabili sulla mappa di batimetria nei punti di griglia (x_0, y_0) , (x_1, y_1) e (x_2, y_2) . Le formule che si ricavano con la regola di Kramer sono:

$$A = \frac{(x_1 - x_0)(\phi_2 - \phi_0) - (x_2 - x_0)(\phi_1 - \phi_0)}{(\lambda_1 - \lambda_0)(\phi_2 - \phi_0) - (\lambda_2 - \lambda_0)(\phi_1 - \phi_0)}$$

$$B = \frac{(\lambda_1 - \lambda_0)(x_2 - x_0) - (\lambda_2 - \lambda_0)(x_1 - x_0)}{(\lambda_1 - \lambda_0)(\phi_2 - \phi_0) - (\lambda_2 - \lambda_0)(\phi_1 - \phi_0)}$$

$$C = \frac{(y_1 - y_0)(\phi_2 - \phi_0) - (y_2 - y_0)(\phi_1 - \phi_0)}{(\lambda_1 - \lambda_0)(\phi_2 - \phi_0) - (\lambda_2 - \lambda_0)(\phi_1 - \phi_0)}$$

$$D = \frac{(\lambda_1 - \lambda_0)(y_2 - y_0) - (\lambda_2 - \lambda_0)(y_1 - y_0)}{(\lambda_1 - \lambda_0)(\phi_2 - \phi_0) - (\lambda_2 - \lambda_0)(\phi_1 - \phi_0)}$$

Le coordinate geografiche possono essere fornite al programma sia in gradi sessagesimali che in gradi decimali.

I caposaldi utilizzati per l'area del Golfo Paradiso e del Golfo Tigulio sono:

- P.ta Portofino (44.29800 N, 9.21923 E);
- P.ta Chiappa (44.32180 N, 9.14543 E);

- P.ta di Sestri Levante (44.26607 N, 9.28970 E).

Quando il programma è stato utilizzato per ricavare le coordinate di griglia delle bocche delle condotte della zona, in base al file di batimetria prodotto da MIKE 21, le informazioni fornite sono risultate imprecise, in particolar modo per i punti più distanti dai caposaldi. Ciò può essere imputabile alle seguenti cause:

- l'area in esame è di piccole dimensioni perciò le approssimazioni sui valori di latitudine e longitudine possono comportare errori apprezzabili nella determinazione delle coordinate di griglia;
- i caposaldi di cui si hanno a disposizione le coordinate geografiche sono approssimativamente allineati;
- il file di batimetria a disposizione è stato ottenuto da due diverse carte batimetriche e rielaborato con MIKE 21: ciò potrebbe aver introdotto delle trasformazioni non lineari che il programma GEOref non è in grado di considerare.

5.3 Simulazioni di calibrazione

Vengono ora presentate le simulazioni iniziali svolte con LAMP2D, che hanno permesso di migliorare e sviluppare il programma sia nella sua ideazione modellistica che nella parte più prettamente di programmazione.

5.3.1 Il progetto LAGO

Il progetto LAGO è consistito in una serie di simulazioni di verifica del calcolo della diffusione da parte del modello.

Utilizzando una batimetria uniforme risolta su maglie di 200 [m] ed un campo di velocità nullo, si è fatta calcolare la diffusione di 8000 particelle poste inizialmente al centro della griglia.

Il periodo di simulazione è stato fissato di 2160 passi temporali con $\Delta t = 40$ [s], corrispondenti a 24 [h]; avendo velocità nulla il criterio di Courant per il trasporto è automaticamente soddisfatto.

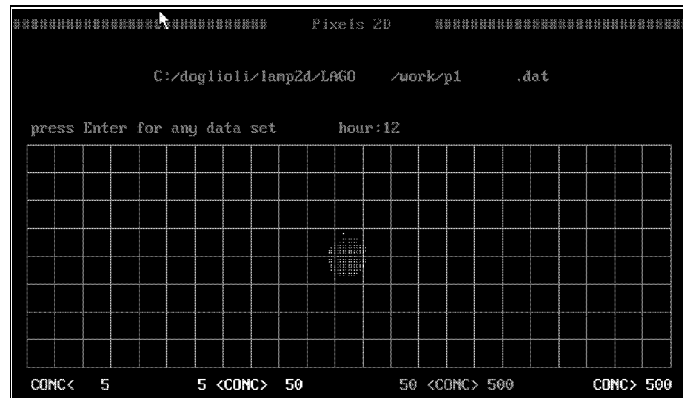


Figura 5.5: Diffusione senza trasporto, situazione dopo 12 h.

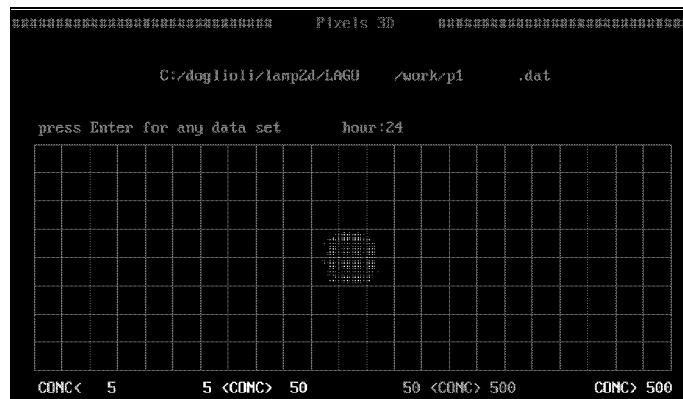


Figura 5.6: Diffusione senza trasporto, situazione dopo 24 h.

Sono state fatte simulazioni con diversi valori di deviazione standard; in Figura 5.5 ed in Figura 5.6 sono mostrati i grafici ottenuti con Pixels2D per le concentrazioni a 12 e 24 ore della simulazione in cui $\sigma = 10$.

Capitolo 6

LAMP3D

Introduzione

L'efficienza ottenuta con LAMP2D e l'interesse per risultati più dettagliati, hanno indotto ad introdurre la dimensione verticale nel precedente modello bidimensionale. Tale sviluppo del modello e del programma ha posto la necessità della risoluzione di alcuni problemi. La mancanza (sia in griglia spaziale che in componenti del campo di velocità) di un modello idrodinamico tridimensionale ha posto il problema di ricostruire veri campi tridimensionali a partire dai campi bidimensionali integrati prodotti da MIKE 21 HD. Trattandosi di un problema inverso è stato necessario introdurre nella sua risoluzione scelte opportune sulle informazioni mancanti, in particolare sui profili verticali di velocità. Tra i possibili profili compatibili con le soluzioni integrate di MIKE 21, il migliore è risultato quello basato sulla spirale di Ekman su fondali finiti. L'inserimento di una parte computazionale per la risoluzione numerica di tale schema ha portato a rivedere completamente il precedente programma (ad esempio introducendo velocità orizzontali complesse anzichè reali). Tuttavia si sono mantenuti i buoni risultati di velocità computazionale già ottenuti con LAMP2D. Tale lavoro è stato svolto con un approccio modulare che ha permesso di ottenere un nuovo programma sufficientemente versatile. Il nuovo programma, LAMP3D, può essere infatti utilizzato sia partendo dai dati idrodinamici di un modello fluidodinamico bidimensionale integrato sulla verticale, qual'è MIKE 21 HD, e applicando a tali dati profili di vario

tipo, sia teorici che sperimentali, sia partendo da campi di velocità ottenuti da modelli idrodinamici tridimensionali. Si è infine iniziato un ulteriore sviluppo introducendo nel calcolo degli spostamenti un processo autoregressivo con la correlazione della velocità diffusiva.

In questo capitolo dopo una sintetica presentazione dei concetti di correnti di deriva e di spirale di Ekman, verrà discussa l'applicazione di tale schema nella programmazione di LAMP3D. Dopo aver brevemente introdotto le novità nella procedura di preparazione delle simulazioni, si vedranno infine alcune simulazioni che mostrano le caratteristiche specifiche del programma.

6.1 Le correnti di deriva

Le correnti indotte dall'azione del vento sulla superficie marina, vengono chiamate *correnti di deriva*. Esse si sviluppano per lo sforzo generato dal vento che pone in movimento le particelle sulla superficie libera, le quali a loro volta trasmettono parte del momento alle particelle sottostanti: in questo modo viene messo in moto un intero strato d'acqua. I risultati di misure sperimentali inducono ad interpretare il fenomeno come prodotto di meccanismi turbolenti, piuttosto che molecolari, di diffusione del momento.

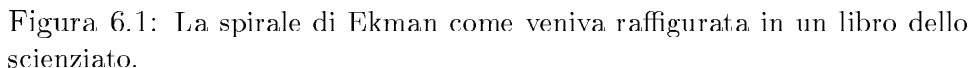
6.1.1 Lo strato limite di Ekman in oceano

Nel caso in cui il fluido sia omogeneo, la superficie libera sia orizzontale, non vi sia un gradiente di pressione orizzontale e il moto sia stazionario nel tempo, le equazioni (2.3) diventano

$$f\mathbf{k} \wedge \mathbf{v}_H = A_V \frac{\partial^2 \mathbf{v}_H}{\partial z^2}. \quad (6.1)$$

In mare aperto le condizioni al contorno opportune consistono nell'assegnazione dello sforzo del vento in superficie e del campo di velocità (nullo) sul fondo ($z \rightarrow \infty$). Espresse in termini di velocità orizzontale complessa tali condizioni sono quindi

$$\begin{cases} \rho A_V \frac{\partial}{\partial z}(u + iv) = (\tau_{zx} + i\tau_{zy}), & \text{per } z = 0, \\ (u + iv) \rightarrow 0, & \text{per } z \rightarrow \infty. \end{cases}$$


$$\delta_E = \pi \sqrt{\frac{2A_V}{f}},$$
$$u + iw = V e^{\frac{\pi}{\delta_E} z} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{\delta_E} z\right)} \quad (z \leq 0).$$

Lo schema di Ekman è costruito per fondali infinitamente profondi: in realtà le osservazioni sperimentali di correnti di deriva superficiali danno angoli minori del valore teorico di 45° , spesso vicini ai 30° . Per quanto riguarda lo spessore dello strato, δ_E risulta compreso tra i 20 ed i 40 m di profondità, con valori estremi tipici fra i 10 ed i 200 m.

6.1.2 Trasporto di Ekman nello strato oceanografico superficiale

La soluzione a spirale di Ekman implica la presenza di una componente della velocità ortogonale alla direzione del vento, che produce un effetto globale di trasporto di massa ruotato di 90° a destra (nel nostro emisfero) rispetto alla direzione del vento. Infatti, integrando l'equazione del moto (6.1) fra la superficie e il limite inferiore dello strato di Ekman, si ottiene

$$f\mathbf{k} \wedge \int_{-\delta_E}^0 \mathbf{v}_H dz = \left(A_V \frac{\partial \mathbf{v}_H}{\partial z} \right)_{z=0} - \left(A_V \frac{\partial \mathbf{v}_H}{\partial z} \right)_{z=-\delta_E}.$$

Se si indica con

$$\mathbf{M} = \int_{-\delta_E}^0 \mathbf{v}_H dz$$

il trasporto di massa, si trascura lo sforzo del vento alla profondità di Ekman e si indica con

$$\mathbf{T} = \left(A_V \frac{\partial \mathbf{v}_H}{\partial z} \right)_{z=0}$$

lo sforzo del vento alla superficie, si ottiene

$$\mathbf{M} = -\frac{1}{f} \mathbf{k} \wedge \mathbf{T}.$$

Il trasporto di massa \mathbf{M} è quindi appunto ortogonale alla direzione del vento, ruotato di 90° a destra nell'emisfero settentrionale.

E' importante sottolineare che, se i dettagli dell'andamento della spirale di Ekman non sono generalmente rispettati in natura, invece il risultato integrato corrisponde ad un dato facilmente osservabile sperimentalmente.

6.1.3 Lo strato limite di Ekman su fondali finiti

Le condizioni al contorno utilizzate nel precedente paragrafo vanno modificate qualora l'approssimazione di massa d'acqua infinitamente profonda non sia più accettabile. Nel caso di correnti di deriva vicino

a costa e considerando la corrente superficiale invece del vento, esse diventano:

$$\begin{cases} u + iv = u_0 + iv_0, & \text{per } z = 0, \\ (u + iv) = 0, & \text{per } z = -H. \end{cases}$$

Indicando per brevità con $\kappa = (1 + i)\frac{\pi}{\delta_E}$, soluzione della (6.1) è la

$$(u + iv) = (u_0 + iv_0) \frac{e^{\kappa(H+z)} - e^{-\kappa(H+z)}}{e^{\kappa H} - e^{-\kappa H}}; \quad (6.2)$$

essa permette di conoscere la velocità dell'acqua su un fondale di profondità H ad una certa quota z , ricavandola dalla velocità superficiale nota.

Notiamo che lo sforzo superficiale del vento è dato in questo caso da

$$\mathbf{T} \propto \left[\frac{\partial}{\partial z}(u + iv) \right]_{z=0} = (u_0 + iv_0) \kappa \frac{e^{\kappa H} + e^{-\kappa H}}{e^{\kappa H} - e^{-\kappa H}}.$$

L'ultimo fattore complesso a secondo membro (che vale 1 per $H \rightarrow \infty$) dà un'angolo tra sforzo del vento a velocità superficiale diverso da 45° . Integrando tra superficie e fondo e dividendo per la profondità si trova la velocità media verticale

$$\begin{aligned} \langle u + iv \rangle &= \frac{1}{H} \int_{-H}^0 (u + iv) dz = \\ &= (u_0 + iv_0) \frac{1}{\kappa H} \frac{e^{\frac{\kappa(H+z)}{2}} - e^{-\frac{\kappa(H+z)}{2}}}{e^{\frac{\kappa H}{2}} + e^{-\frac{\kappa H}{2}}}, \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$(u_0 + iv_0) = \langle u + iv \rangle \kappa H \frac{e^{\frac{\kappa(H+z)}{2}} + e^{-\frac{\kappa(H+z)}{2}}}{e^{\frac{\kappa H}{2}} - e^{-\frac{\kappa H}{2}}}.$$

e infine

$$(u + iv) = \langle u + iv \rangle \kappa H \mathcal{F}(z), \quad (6.3)$$

dove

$$\mathcal{F}(z) = \frac{e^{\kappa(H+z)} - e^{-\kappa(H+z)}}{\left(e^{\frac{\kappa H}{2}} - e^{-\frac{\kappa H}{2}}\right)^2}. \quad (6.4)$$

Il fattore complesso $\mathcal{F}(z)$ determina quindi direzione e modulo della velocità a varie profondità nota che sia la velocità media sulla colonna d'acqua.

6.2 Il modello numerico LAMP3D

In questo paragrafo vengono illustrate le caratteristiche del modello tridimensionale che lo differenziano dal modello bidimensionale. Innanzitutto si descrive il dominio spaziale e come il profilo verticale di velocità di Ekman è stato applicato nel modello numerico. Successivamente si illustra come avviene il calcolo advettivo-dispersivo ed il conteggio della concentrazione di particelle.

6.2.1 Il dominio di definizione

Il dominio spaziale in cui vengono effettuati i calcoli numerici del modello è una griglia tridimensionale retta: nel piano x, y le maglie hanno passo spaziale ΔL , mentre in verticale il passo spaziale è ΔZ . Tale definizione permette all'utente di fissare all'inizio della simulazione un passo spaziale orizzontale diverso rispetto a quello verticale. Si tratta quindi di una matrice $M \times N \times O$ con indici rispettivamente i, j e k , posta nel piano cartesiano come rappresentato in Figura 6.2.

Il dominio temporale è discretizzato con passi temporali Δt di valore scelto dall'utente e l'indice utilizzato per i passi temporali è n .

6.2.2 Il calcolo numerico del profilo di Ekman

L'equazione (6.3) viene risolta numericamente nel modello LAMP3D per ottenere in ogni punto della griglia un valore di velocità orizzontale, $\mathbf{u}_{i,j,k} = (u_{i,j,k}, v_{i,j,k})$, dai dati integrati prodotti dalle simulazioni idrodinamiche di MIKE 21, $\mathbf{v}_{i,j}^{mike}$, mediante la formula:

$$\mathbf{u}_{i,j,k} = \mathbf{v}_{i,j}^{mike} \kappa H_{i,j}^{sm} \mathcal{F}_k.$$

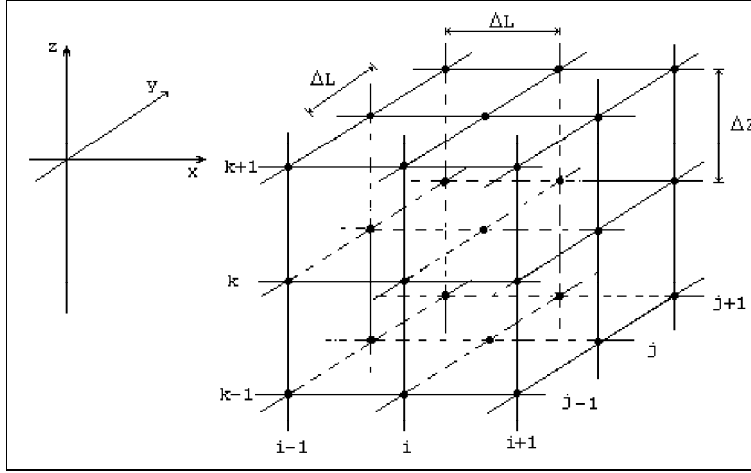


Figura 6.2: La griglia spaziale di LAMP3D: la matrice ha dimensioni $M \times N \times O$ con indici i, j, k ; viene posta nel piano cartesiano in modo tale che il punto $(0,0)$ coincida con l'origine, l'indice i rappresenti la direzione x e l'indice j la direzione y ; sull'asse z i valori di batimetria hanno segno negativo.

Vediamo il significato di ciascun termine.

I dati forniti dalle simulazioni idrodinamiche di MIKE 21 HD sono le due componenti della velocità integrata sulla verticale, u^{mike} e v^{mike} ; siccome nel modello LAMP3D il campo di velocità viene espresso mediante variabili complesse, tali dati sono rielaborati nel modo seguente:

$$\mathbf{v}_{i,j}^{mike} = u_{i,j}^{mike} + \imath v_{i,j}^{mike},$$

in cui con \imath si indica l'unità immaginaria.

Il termine κ viene definito nel modello numerico come

$$\kappa = (1 + \imath) \frac{\pi}{\left(\frac{\delta_E}{\Delta Z}\right)},$$

in cui δ_E è la profondità di Ekman espressa in [m] con segno negativo.

Per quanto riguarda la profondità, è stato introdotto un fattore di scala per meglio adattare la formulazione di Ekman a fondali finiti, il valore di profondità utilizzato nella formula numerica viene calcolato con la formula

$$H_{i,j}^{sc} = H_{i,j} \frac{f_{sc}}{\Delta Z},$$

in cui $H_{i,j}$ è il dato di batimetria e f_{sc} è appunto il fattore di scala.

Infine il fattore \mathcal{F} , definito nella (6.4), viene calcolato con la formula numerica

$$\mathcal{F}_k = \frac{e^{\kappa(H^{sc}+k)} - e^{-\kappa(H^{sc}+k)}}{\left(e^{\frac{\kappa H^{sc}}{2}} - e^{-\frac{\kappa H^{sc}}{2}}\right)^2},$$

Il calcolo del campo di velocità orizzontale secondo il profilo di Ekman viene effettuato in tutti i punti d'acqua della maglia, mentre per i punti al di sotto del fondale marino oppure di terraferma, viene posto il valore zero.

6.2.3 Il calcolo della componente verticale della velocità

L'assunzione di un profilo verticale di velocità orizzontale su fondali non piatti ($\nabla H(x, y) \neq 0$) costringe a valutare l'insorgere di una componente verticale della velocità. Poichè deve valere comunque la conservazione della massa, si ha

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y},$$

ovvero

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{Re} \{ \mathbf{v} \} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathcal{Im} \{ \mathbf{v} \} \right),$$

cioè

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\mathcal{Re} \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right\} - \mathcal{Im} \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \right\}.$$

Discretizzando la precedente equazione, utilizzando nelle direzioni x e y le derivate centrali, si ottiene la formula numerica

$$\begin{aligned} \frac{w_{i,j,k+1} - w_{i,j,k}}{\Delta Z} = & -\mathcal{Re} \left\{ \frac{\mathbf{v}_{i+1,j,k} - \mathbf{v}_{i-1,j,k}}{2\Delta L} \right\} - \\ & -\mathcal{Im} \left\{ \frac{\mathbf{v}_{i,j+1,k} - \mathbf{v}_{i,j-1,k}}{2\Delta L} \right\}, \end{aligned}$$

con la quale si calcola nei punti della maglia la componente verticale della velocità:

$$w_{i,j,k} = w_{i,j,k+1} + \Delta Z \left(\operatorname{Re} \left\{ \frac{\mathbf{v}_{i+1,j,k} - \mathbf{v}_{i-1,j,k}}{2\Delta I_r} \right\} + \operatorname{Im} \left\{ \frac{\mathbf{v}_{i,j+1,k} - \mathbf{v}_{i,j-1,k}}{2\Delta I_r} \right\} \right) .$$

Per i punti sui bordi vengono poi applicate le formule numeriche con le derivate laterali anziché centrali, mentre nei punti di maglia al di sotto del valore di batrimetria oppure di terraferma il valore viene assegnato nullo.

Terminata questa fase computazionale il programma può quindi calcolare la dispersione delle particelle avendo a disposizione in ogni punto di griglia un valore di velocità $\mathbf{v}_{i,j,k} = (u_{i,j,k}, v_{i,j,k}, w_{i,j,k})$.

Tale campo potrebbe naturalmente essere fornito anche direttamente, qualora si avesse a disposizione un modello idrodinamico tridimensionale, oppure potrebbe essere calcolato secondo profili teorici diversi dal modello della spirale di Ekman o anche secondo profili sperimentali. Durante lo sviluppo del modello, sono state sviluppate formule numeriche anche per altri tipi di profilo (lineare, parabolico, logaritmico) che però non hanno fornito risultati d'interesse. Tali profili infatti non tengono conto del trasporto integrato laterale dovuto alla spirale di Ekman, che come ricordato, è un dato sperimentalmente sempre riscontrato, anche quando non risulta evidente il profilo di velocità collegato. La disponibilità di dati correntometrici a più quote risulterebbe comunque di grandissimo aiuto nello sviluppo di profili teorici.

6.2.4 Il calcolo avvettivo-dispersivo nelle tre dimensioni

Come il modello dispersivo bidimensionale, anche LAMP3D è un modello a *random walk*, perciò la posizione a ciascun passo temporale viene calcolata con la formula numerica (5.1):

$$\mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_n = \bar{\mathbf{v}}\Delta t + \boldsymbol{\varrho} .$$

Nel caso tridimensionale i simboli utilizzati per le componenti dei vettori sono:

$$\mathbf{r} = (x, y, z), \quad \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_{det} = (u_{det}, v_{det}, w_{det}) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\varrho} = (\varrho_x, \varrho_y, \varrho_z),$$

perciò riscrivendo la formula (5.1) per componenti, si ottiene:

$$\begin{cases} x_{n+1} - x_n = u_{det} \Delta t + \varrho_x \\ y_{n+1} - y_n = v_{det} \Delta t + \varrho_y \\ z_{n+1} - z_n = w_{det} \Delta t + \varrho_z. \end{cases}$$

Vediamo ora quali variazioni al precedente schema bidimensionale si sono rese necessarie per applicare questo nuovo sistema numerico.

L'assegnazione della velocità deterministica

Come per il modello bidimensionale le posizioni delle particelle sono numeri reali, definite cioè nel continuo, e gli spostamenti deterministici

$$\Delta x = u^{grid} \Delta t, \quad \Delta y = v^{grid} \Delta t \quad \text{e} \quad \Delta z = w^{grid} \Delta t,$$

devono venire calcolati in base alla posizione attuale della particella.

Nel caso tridimensionale il valore della velocità viene sempre calcolato per ciascuna componente con una media pesata; i valori noti ai vertici della maglia, che in questo caso è un parallelepipedo, sono otto, perciò le formule viste in precedenza per il modello bidimensionale diventano:

$$\begin{aligned} u_{det} = & \quad w_1 \, u_{i,j,k} + w_2 \, u_{i+1,j+1,k+1} + w_3 \, u_{i+1,j,k} + w_4 \, u_{i+1,j+1,k} + \\ & + \quad w_5 \, u_{i+1,j,k+1} + w_6 \, u_{i,j+1,k} + w_7 \, u_{i,j,k+1} + w_8 \, u_{i,j+1,k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{det} = & \quad w_1 \, v_{i,j,k} + w_2 \, v_{i+1,j+1,k+1} + w_3 \, v_{i+1,j,k} + w_4 \, v_{i+1,j+1,k} + \\ & + \quad w_5 \, v_{i+1,j,k+1} + w_6 \, v_{i,j+1,k} + w_7 \, v_{i,j,k+1} + w_8 \, v_{i,j+1,k+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{det} = & \quad w_1 \, w_{i,j,k} + w_2 \, w_{i+1,j+1,k+1} + w_3 \, w_{i+1,j,k} + w_4 \, w_{i+1,j+1,k} + \\ & + \quad w_5 \, w_{i+1,j,k+1} + w_6 \, w_{i,j+1,k} + w_7 \, w_{i,j,k+1} + w_8 \, w_{i,j+1,k+1}. \end{aligned}$$

I pesi w_k ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$), inversamente proporzionali alla distanza d_k dai corrispondenti punti di griglia, vengono calcolati mediante la formula numerica.

$$\begin{aligned} w_k = & \frac{d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 d_7 d_8}{d_k} (d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 d_7 + d_1 d_3 d_4 d_5 d_6 d_7 d_8 + \\ & + d_1 d_2 d_4 d_5 d_6 d_7 d_8 + d_1 d_2 d_3 d_5 d_6 d_7 d_8 + d_1 d_2 d_3 d_4 d_6 d_7 d_8 + \\ & + d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_7 d_8 + d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 d_8 + d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 d_7 d_8)^{-1}. \end{aligned}$$

Il calcolo degli spostamenti casuali

Ad ognuna delle componenti di $\boldsymbol{\varrho} = (\varrho_x, \varrho_y, \varrho_z)$ viene assegnato ad ogni passo temporale un valore estratto casualmente da una certa funzione di probabilità ottenuta a partire dai numeri pseudorandom del calcolatore.

Come per il modello bidimensionale, per generare di numeri pseudo-casuali si utilizzano le subroutine $\text{RANDOM}(r)$ e $\text{SEED}(s)$. Il modello LAMP3D assume, analogamente a LAMP2D, per gli spostamenti casuali ϱ_x , ϱ_y e ϱ_z una funzione di densità di probabilità gaussiana con media nulla e deviazione standard σ da assegnare: viene applicata al numero casuale r la medesima elaborazione vista al paragrafo 5.1.2.

Nel caso tridimensionale però si sono introdotte due novità:

- un profilo verticale per il coefficiente di dispersione;
- una distinzione tra spostamenti nel piano orizzontale e spostamenti lungo la verticale.

Dato che gli spostamenti casuali sono, come già visto, legati ai moti turbolenti della massa d'acqua, per particelle che vengano a trovarsi a profondità elevate alle quali i moti sono molto ridotti rispetto alla superficie, il valore di σ deve essere più piccolo. Viene pertanto applicata la formula

$$\sigma_{i,j}^{depth} = \sigma_{i,j} \left(1 - \frac{z_n}{H_{i,j}} \right),$$

in cui $\sigma_{i,j}$ e $H_{i,j}$ sono rispettivamente il valore di deviazione standard superficiale assegnato dall'utente e la profondità batimetrica della maglia in cui la particella si trova, mentre z_n è la profondità alla quale è la particella al passo temporale n .

Anche in questo caso, essendo il profilo lineare assunto di tipo puramente teorico, esso potrebbe, in seguito a misure sperimentali, essere sostituito con andamenti che tengano conto di fenomeni locali, quali la presenza di un termoclino ad una data profondità.

Siccome misure sperimentali di dispersione in mare evidenziano come la dispersione sia più grande nel piano orizzontale che lungo la verticale, il valore calcolato sopra viene applicato direttamente nel piano x, y :

$$\sigma_H^{depth} = \sigma^{depth},$$

mentre lungo la direzione z la sigma verticale è calcolata con la formula

$$\sigma_z^{depth} = f_z \sigma^{depth},$$

in cui f_z è il *coefficiente di riduzione* il cui valore può essere assegnato dall'utente.

Riassumendo abbiamo, indicando con $P(\varrho_i)$ la funzione densità di probabilità da cui viene estratto il numero ϱ_i con $i = x, y, z$:

$$P(\varrho_x) = \mathcal{G}(0, \sigma_H^{depth}),$$

$$P(\varrho_y) = \mathcal{G}(0, \sigma_H^{depth}),$$

$$P(\varrho_z) = \mathcal{G}(0, \sigma_z^{depth}).$$

6.2.5 Il calcolo della concentrazione

Calcolata la posizione ad ogni passo temporale di ciascuna particella, anche LAMP3D effettua una serie di controlli affinché non si verifichino instabilità numeriche e risultati non realistici. I controlli effettuati sulla posizione sono effettuati al fine di verificare:

- se la particella è uscita al di fuori del dominio di calcolo;
- se la particella ha raggiunto punti di terraferma.
- se la particella ha raggiunto punti di profondità superiore a quella batimetrica.

Nel caso tridimensionale, viene dunque aggiunto rispetto al caso bidimensionale un controllo sulla profondità.

Nel caso in cui l'inquinante di cui si sta simulando la dispersione sia del tipo "decadente", viene applicata la stessa legge di decadimento esponenziale discussa a pag. 83:

$$c = c_0 \cdot 10^{-\frac{t}{T_{90}}}.$$

Il conteggio del numero di particelle contenute in ogni maglia di griglia viene effettuato solo per le particelle che hanno superato i controlli, con la differenza rispetto a LAMP2D di poter calcolare la concentrazione tra livelli di profondità assegnati. E' possibile ad esempio avere il dato di concentrazione superficiale tra la superficie libera ed i -10 [m], oppure la concentrazione nello strato più vicino al fondo.

6.2.6 Lo sviluppo del modello come AR(1)

Successivamente alla fase di ideazione e programmazione dello schema a *random walk*, si è pensato ad un ulteriore sviluppo del modello LAMP3D come modello autoregressivo del primo ordine.

Come si è visto al paragrafo 3.3.3, tali modelli sono costituiti dalla sistema di equazioni numeriche

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{n+1} &= \mathbf{r}_n + [\mathbf{V}(\mathbf{r}_n) + \mathbf{v}_n] \Delta t; \\ \mathbf{v}_{n+1} &= \Phi \mathbf{v}_n + \boldsymbol{\nu}_{n+1}. \end{cases}$$

Si tratta quindi di considerare nel calcolo ad ogni passo temporale della posizione della particella che lo spostamento possa dipendere anche dalla velocità al passo temporale precedente. In altre parole, si assume che una particella che si sta muovendo in una certa direzione, tenda in parte a continuare a muoversi in quella direzione subendo comunque degli spostamenti casuali.

Questo schema si può applicare nel caso della dispersione in mare, qualora si voglia considerare il fatto che per una particella catturata da un vortice turbolento, la traiettoria rimanga, per un certo periodo di tempo, condizionata dalla velocità del vortice.

Riscrivendo il sistema di equazioni adottando i simboli già precedentemente usati, si ha

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{n+1} &= \mathbf{r}_n + (\mathbf{v}'_{det} + \mathbf{v}_n) \Delta t; \\ \mathbf{v}_{n+1} &= \Phi \mathbf{v}_n + \boldsymbol{\varrho}'_{n+1}, \end{cases}$$

in cui \mathbf{v}'_{det} e $\boldsymbol{\varrho}'$ vengono calcolati con procedimento analogo a quello adottato nel modello a *random walk* per \mathbf{v}_{det} e $\boldsymbol{\varrho}$. Il coefficiente Φ viene invece calcolato in base al valore adottato per il coefficiente di correlazione ρ_k (vedi pag. 37).

Le prime simulazioni effettuate con questo modello autoregressivo non hanno fornito, alle scale temporali considerate, risultati che indicassero sostanziali differenze rispetto a quelli ottenuti con il modello a *random walk*, si è perciò preferito mantenere il precedente schema numerico che permette tempi di calcolo più brevi. Tuttavia l'eventuale disponibilità di dati sperimentali sulle strutture turbolente dei flussi potrebbe fornire indicazioni per un possibile sviluppo futuro del modello in questa direzione.

6.3 La struttura del programma

Come già visto per il modello bidimensionale, il pacchetto LAMP3D è costituito principalmente dal programma di modellizzazione omonimo, cui sono collegati dei programmi accessori per grafica e trattamento dati. Anche LAMP3D è installabile su PC con sistema operativo Windows98 da CD-ROM; la finestra di dialogo che si apre dal desktop è riportata in Figura 6.3. L'organizzazione delle directory di dati e di lavoro è invece mostrata in Figura 6.4: la directory principale contiene le varie directory dei progetti e la directory contenente i programmi; ciascun progetto ha una subdirectory di dati, una di lavoro ed una di scambio dati con MIKE 21.

6.3.1 La preparazione di simulazioni con LAMP3D

Analogamente al modello bidimensionale, quando viene avviato il programma di simulazione si apre una finestra di tipo DOS con le richieste delle assegnazioni. Le assegnazioni possono essere fornite al programma

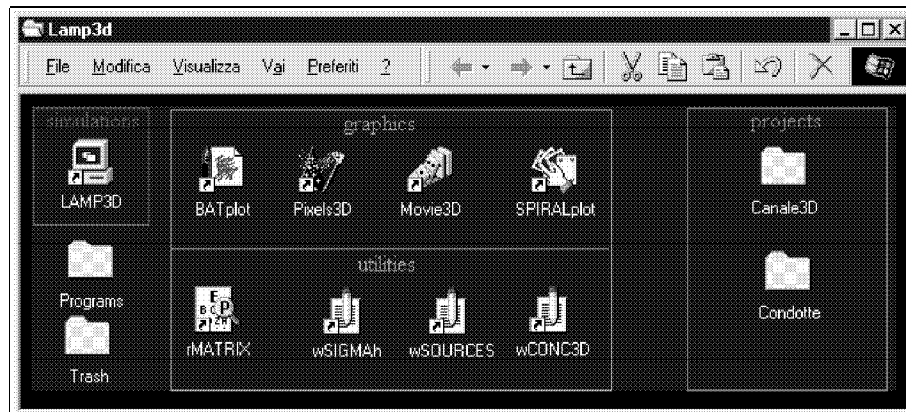


Figura 6.3: La finestra contenente i collegamenti ai programmi del pacchetto LAMP3D.

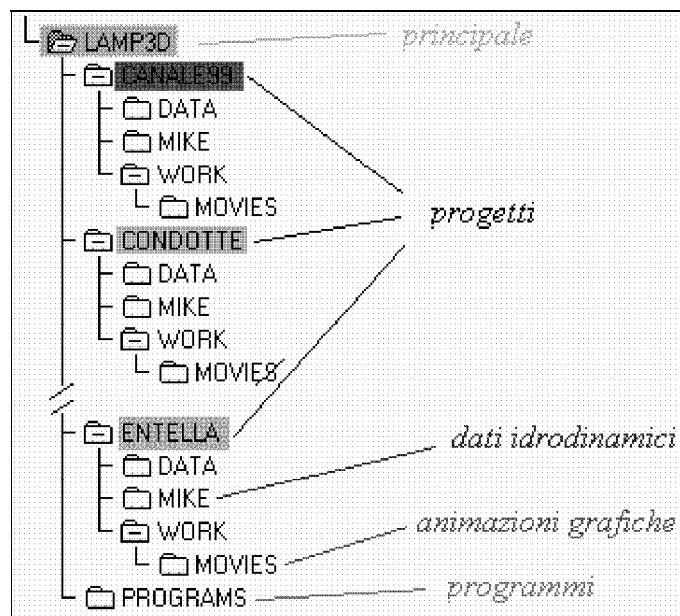


Figura 6.4: Diagramma ad albero delle directory di LAMP3D.

temporale Δt in secondi ed il numero di passi temporali, il programma fornisce il numero di ore totali di simulazione. Nel caso tridimensionale il criterio di Courant per il trasporto diventa:

$$C_{tr} = \Delta t \left(\frac{u}{\Delta L} + \frac{v}{\Delta L} + \frac{w}{\Delta Z} \right) \leq 1,$$

in cui (u, v, w) è la velocità della corrente.

2. Con LAMP3D è necessario fornire al programma anche alcuni dati per il calcolo del profilo verticale di velocità: il valore per la profondità di Ekman δ_E e per il fattore di scala f_{sm} .
3. Come per LAMP2D, si può scegliere tra inquinanti conservativi e decadenti, con T_{90} assegnato dall'utente in ore, e tra rilasci continuativi e rilasci istantanei. Per i rilasci continui, il programma che scrive il file delle caratteristiche delle sorgenti, wSOURCES, è stato aggiornato al fine di comprendere ulteriori dati come la profondità della sorgente, mentre nella preparazione della simulazione del trasporto si può inserire anche la quota efficace del pennacchio in uscita dalle condotte sottomarine, z_{eff} . Inoltre con LAMP3D può essere assegnata una velocità di sedimentazione in [m/s], che se negativa permette di simulare anche inquinanti galleggianti.
4. Infine devono essere indicati i nomi dei file con i dati di batimetria, il campo di corrente e la matrice dei valori di σ . Mentre per i primi due tipi di dati possono essere forniti a LAMP3D gli stessi file utilizzati nelle simulazioni bidimensionali, per il file dei valori di deviazione standard, bisogna tener conto nell'assegnazione dei valori che il modello tridimensionale utilizza il profilo descritto a pag. 103 e che deve essere assegnato il valore del coefficiente di riduzione f_z .

Dopo aver indicato il nome del file in cui salvare i dati in uscita, compare la finestra per la verifica delle assegnazioni fatte. Durante lo svolgimento dei cicli computazionali, anche LAMP3D fornisce ad ogni ora simulata messaggi sui passi temporali completati e la posizione delle particelle. Il tempo di calcolo per LAMP3D risulta di poco superiore a quello del modello bidimensionale.

6.3.2 I programmi di grafica e i moduli accessori

Fra i programmi di grafica illustrati nel paragrafo 5.2.2, mentre il programma BATplot è rimasto sostanzialmente immutato, agli altri due sono state apportate alcune modifiche per renderli più adatti ai dati forniti dal modello tridimensionale. Potendo infatti disporre di dati di concentrazione a più quote, il programma Pixels3D è in grado di mostrare sovrainpressi sulla carta batimetrica pixels di concentrazione a quote diverse ed il programma Movie3D fornisce le animazioni con tali grafici.

Specificatamente per le simulazioni tridimensionali, è stato inoltre preparato un programma grafico, chiamato SPIRALplot, per visualizzare i risultati della applicazione del profilo a spirale di Ekman ai dati di corrente prodotti da MIKE 21 HD. Questo programma proietta nel piano dello schermo i vettori della velocità della corrente alle diverse profondità, sovrapponendo il dato del modello idrodinamico.

Per quanto riguarda i programmi accessori, già descritti al paragrafo 5.2.3, sono state apportate modifiche sostanziali ai seguenti programmi:

wCONC

Nel programma di scrittura della concentrazione iniziale si è introdotta la terza dimensione spaziale, affinché sia possibile posizionare le particelle all'inizio di una simulazione anche a quote diverse.

wSOURCES

Al programma di scrittura dei file contenenti le caratteristiche delle sorgenti sono state aggiunte le istruzioni per aggiungere il dato di profondità della bocca della condotta.

Gli altri due programmi, rMATRIX e GEOref, sono stati modificati solo per renderne compatibile l'utilizzo con gli altri programmi a tre dimensioni spaziali.

6.4 Le simulazioni di calibrazione

Al termine della fase di ideazione e programmazione di LAMP3D sono state svolte numerose simulazioni di controllo del funzionamento del

programma e di calibrazione del modello.

Vediamo ora, fra i vari progetti iniziali, quello che si ritiene più significativo.

6.4.1 Il progetto CANALE99

Il progetto CANALE99 consiste in una serie di simulazioni di confronto fra il modulo avveztivo-dispersivo di MIKE 21 ed il modello LAMP3D. Il fenomeno simulato è il trasporto degli effluenti emessi da una singola condotta sottomarina in un canale a sezione triangolare.

Batimetria

Con il programma di scrittura delle matrici bidimensionali di MIKE 21 è stata preparata una mappa di batimetria delle dimensioni simili a quelle dell'area del golfo Tigullio e del Golfo Paradiso. Anche l'andamento delle curve di batimetria è stato ripreso da quello della zona di arco ligure citata, assumendo però un andamento assai più regolare. Si è quindi ottenuto un canale di dimensioni 12×46 [km] con profondità massima di -310 [m] a sezione approssimativamente triangolare. Con il programma di proiezione tridimensionale dei dati di batimetria di MIKE 21 è stato ottenuto il grafico mostrato in Figura 6.6. Successivamente utilizzando il programma rMATRIX, i dati di batimetria sono stati convertiti dal formato di MIKE 21 a quello di LAMP3D.

Le simulazioni idrodinamiche

Con MIKE 21 HD sono state svolte alcune simulazioni idrodinamiche: per ottenere una corrente occidentale è stato imposto tra i due bordi aperti est ed ovest una differenza di elevazione di 2 mm con TILT non lineare; sul bordo meridionale è stata assegnata la condizione di flusso perpendicolare al bordo nullo. L'attrito sul fondo è stato espresso in termini di numero di Manning con valore 32, mentre per la viscosità turbolenta si è scelto il valore $1,5$ [m²/s] con formulazione basata sul flusso. Nel punto di coordinate di griglia (115,51) si è posta una sorgente di portata $0,065$ [m³/s], valore medio delle portate delle condotte

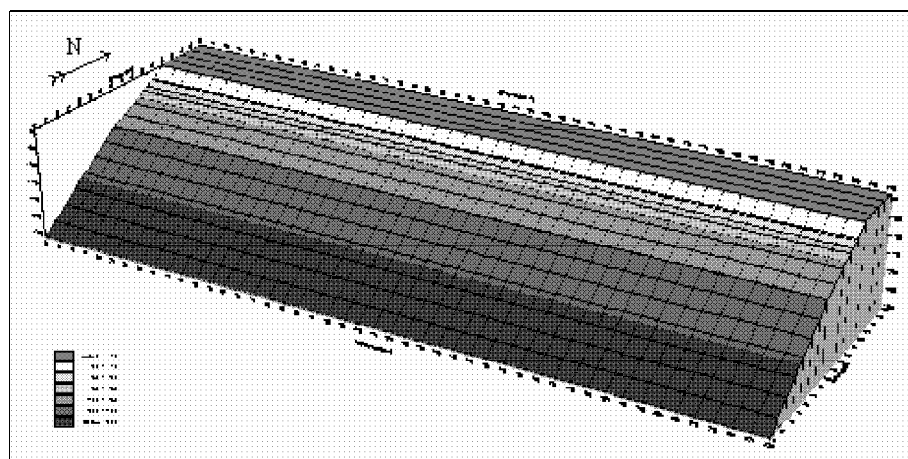


Figura 6.6: La batimetria di canale utilizzato nel progetto CANALE99, in proiezione tridimensionale.

sottomarine del Golfo Tigullio. La simulazione copriva un periodo di venti giorni, con mille passi temporali di crescita lineare del forzante da zero al valore assegnato (*soft start*), in modo da raggiungere sicuramente una situazione stazionaria.

Il campo di corrente così ottenuto è stato convertito, sempre con rMATRIX, nel formato di LAMP3D.

Le simulazioni del trasporto

Con MIKE 21 AD sono state effettuate alcune simulazioni di trasporto, nel campo di corrente stazionario ottenuto col modulo idrodinamico, degli effluenti emessi dalla sorgente precedentemente descritta. Tale sorgente rilascia tre tipi di contaminanti: materiali sospesi (inquinante conservativo), BOD5 (decadente a lungo periodo: $T_{90} = 315$ [h]), coliformi (decadente a breve periodo, $T_{90} = 2$ [h]) con le concentrazioni alla sorgente riportate in Tabella 6.1. Per tutti i tre tipi di inquinanti si è assunto concentrazione iniziale nulla, mentre per i coefficienti di dispersione, D_x e D_y è stato scelto lo stesso valore di 1 [m²/s]. La durata del periodo di simulazione è stata fissata a 24 [h], ovvero 2160 passi temporali della durata di 40 [s]. Avendo ottenuto dei valori di velocità inferiori a 25 [cm/s], il valore del numero di Courant per il trasporto

<i>Nome del contaminante</i>	<i>Fattore di decadimento</i>	<i>Concentrazione alla sorgente</i>
Materiali sospesi	0	222 [g/m ³]
BOD5	$2,03 \times 10^{-6}$	220 [gO ₂ /m ³]
coliformi	$3,2 \times 10^{-4}$	5×10^{12} [m ⁻¹]

Tabella 6.1: Le assegnazioni dei valori del fattore di decadimento e della concentrazione alla sorgente applicate ai modelli dispersivi durante le simulazioni del progetto CANALE99.

risulta:

$$C_{tr} = \Delta t \left(\frac{u}{\Delta L} + \frac{v}{\Delta L} \right) \leq 0.05,$$

perciò il criterio viene ampiamente rispettato.

Con il modello a particelle LAMP3D si sono poi effettuate simulazioni con assegnazioni analoghe al fine dei confronti.

La sorgente emette 40 particelle ad ogni passo temporale e, potendo col programma tridimensionale fissarne la profondità dello sbocco, è stata posta a quote diverse. Per avere un valore della deviazione standard confrontabile con il valore dei coefficienti di dispersione di MIKE 21 AD è stata applicata nel piano orizzontale la formula discreta

$$\sigma_H = \sqrt{2D\Delta t} \simeq 9,$$

basata sulla risoluzione dell'equazione di diffusione descritta nel paragrafo 3.1.6 (in questo caso però D è il coefficiente di diffusione turbolenta); nella direzione verticale, dato che MIKE 21 AD assume che la turbolenza sia isotropica, si è scelto

$$\sigma_z = f_z \sigma_H^{depth} \quad \text{con} \quad f_z = 1$$

Date le già discusse approssimazioni di tali calcoli ed essendo il valore della deviazione standard praticamente l'unico parametro di calibrazione per il modello a particelle, sono state fatte varie simulazioni assegnando a σ_H ed a f_z valori diversi, all'interno comunque dello stesso ordine di grandezza di quelli indicati sopra.

I risultati ottenuti con i due diversi modelli sono stati confrontati mediante sovrapposizione alle isolinee di concentrazione prodotte da

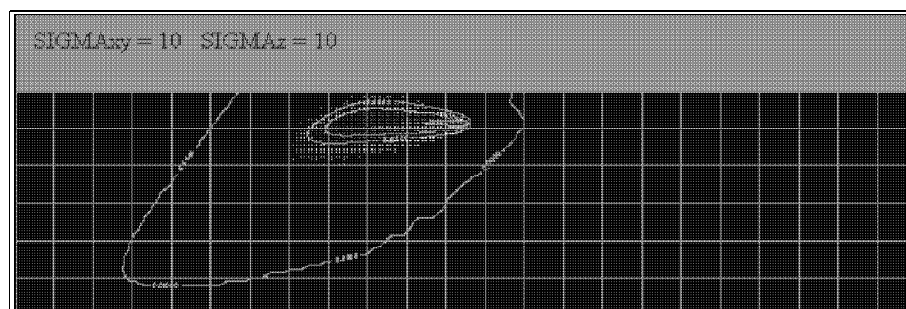


Figura 6.7: Confronto dei risultati delle simulazioni di trasporto prodotti da MIKE 21 (isolinee) e LAMP3D (pixels). La zona di concentrazione più elevata al centro della macchia rimane con LAMP3D troppo ampia rispetto alle isolinee di MIKE 21.

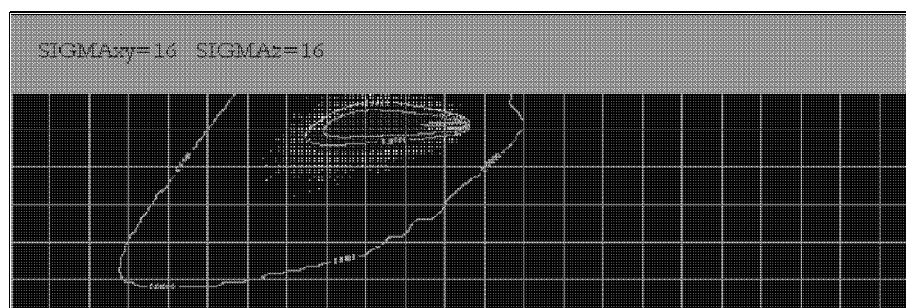


Figura 6.8: Confronto tra MIKE 21 (isolinee) e LAMP3D (pixels). Aumentando il valore della deviazione standard la congruenza fra le risposte dei due modelli tende a migliorare.

MIKE 21 dei grafici prodotti dal programma di grafica di LAMP3D, Pixels3D. Alcuni esempi sono riportati in Figura 6.8 e Figura 6.7. Tali prove hanno permesso di calibrare i due modelli l'uno rispetto all'altro con risultati soddisfacenti.

Capitolo 7

L'applicazione a Golfo Tigullio e Golfo Paradiso

Inroduzione

In questo capitolo viene presentato il lavoro di applicazione dei modelli precedentemente descritti alla zona di mare antistante la costa ligure approssimativamente compresa tra Sori e Sestri Levante, per lo studio della dispersione degli inquinanti provenienti dagli scarichi a mare delle condotte fognarie. Dapprima vengono analizzate le caratteristiche idrologiche della zona di interesse e le simulazioni effettuate per la modellizzazione dei campi di velocità della corrente con il modello idrodinamico MIKE 21 HD. In seguito si presentano i dati forniti dalla Regione Liguria sulle tipologie degli scarichi fognari da condotta sottomarina basandosi sui quali si sono preparate le simulazioni di dispersione con MIKE 21 AD, LAMP2D, LAMP3D.

7.1 La caratterizzazione idrodinamica dell'area di interesse

L'esame dei fenomeni idrologici ed idrodinamici caratteristici della zona in esame si è basato essenzialmente su un articolo del 1983 [3], contenente l'analisi di circa un anno di misure di corrente e temperatura presso Sestri Levante, e sulla pubblicazione del 1997 [5], che presenta lo

stato di avanzamento del progetto ENVIREG nella parte riguardante l'applicazione del modello MIKE 21.

7.1.1 Le misure idrologiche

Le misure di temperatura e corrente presso Sestri Levante [3] sono state effettuate tra ottobre e luglio con una catena idrologica dotata di sensori alle tre quote di -16, -50, -95 [m] ed ancorata su di un fondale di 100 [m] di profondità. Le misure di temperatura alla quota più alta presentano un andamento stagionale con valori medi estivi di 22°C che decrescono fino a raggiungere un valore medio invernale di 14°C. Le fluttuazioni rispetto ai valori medi di temperatura decrescono con la profondità arrivando ad essere di soli 2°C attorno al valore medio annuale di circa 14°C registrato sul fondo. Viene quindi dedotto un progressivo affondamento del termoclino che da una profondità estiva tra i -10 ed i -20 [m] scende ai -90 [m] in autunno per poi scomparire in periodo invernale (febbraio-aprile).

I dati di densità, salinità e temperatura rilevati durante la campagna idrologica effettuata da Arcatom nel Golfo del Tigullio alla fine del Maggio 1992 [5] evidenziano la presenza di un termoclino situato approssimativamente alla profondità di -12 [m], quindi compatibile con le misure effettuate a Sestri Levante. I diagrammi T-S presentati nella pubblicazione indicano che si tratta di acque abbastanza omogenee tranne per la stazione posta davanti alla foce del fiume Entella, dove risentono della presenza di acque dolci più fredde. In tutte le altre stazioni si evidenziano comunque acque di fondo con parametri distinti da quelli delle acque superficiali; di ciò è tenuto conto nella valutazione dei risultati prodotti dai modelli bidimensionali che, considerando il mezzo come completamente rimescolato, possono sovrastimare la capacità di diluizione.

7.1.2 La valutazione dei forzanti

Nella valutazione dei forzanti da assegnare a MIKE 21 HD per le simulazioni idrodinamiche si è presa come riferimento la pubblicazione del 1997 [5]. In essa vengono presentati i dati sulle variazioni di pressione rilevate ad una profondità di circa tre metri tra maggio e giugno 1993

presso Lavagna e La Spezia. Le due serie temporali (dal 18/5 all'8/6 a Lavagna e dal 6/5 all'8/6 a La Spezia) hanno curve con andamento simile e, tenuto conto dei fattori di conversione, mostrano delle oscillazioni rispetto al livello medio marino con ampiezza picco-picco tra i 10 ed i 30 [cm]. Tali dati sono stati analizzati con un esame della densità spettrale. I due spettri hanno andamenti molto simili e sono stati suddivisi in tre regioni:

- le alte frequenze (più di 3 cicli al giorno), caratterizzate da bassa potenza e, essendo ricondotte a fenomeni strettamente locali, trascurate;
- le medie frequenze (fra 1 e 2 cicli al giorno), dominate dalle oscillazioni mareali che impongono picchi di frequenza attorno ai periodi di 12 e 24 ore.
- le basse frequenze (meno di 0,5 cicli al giorno), cui è legata frazione sostanziale dell'energia.

Le frequenze mareali sono state analizzate mediante il codice di analisi e previsione mareale di MIKE 21. Presentando il problema della mancanza di una misura di livello assoluta, a ciascuna delle due serie di dati è stato sottratto il valor medio. Dall'analisi risulta che ciò che distingue maggiormente i due siti è una differenza di fase (circa 40 minuti) della componente principale lunare M_2 e di ampiezza picco-picco di circa 1 [cm]. Gli autori ritengono però che la forzante mareale non sia realisticamente applicabile alla zona di simulazione, in quanto la propagazione della marea lungo le coste è tale che le reali differenze di fase e di ampiezza sui bordi del dominio di calcolo potrebbero risultare diverse da quelle assegnate basandosi su tali dati.

Le basse frequenze sono invece state considerate causate dalle oscillazioni dell'intero bacino ligure, spiegando in questo modo la coerenza fra le due serie temporali. L'andamento temporale misurato è infatti stato estrapolato a tutto il dominio di calcolo e si sono considerate le differenze tra i due andamenti come le cause della corrente mediamente parallela alla linea di costa.

Per quanto riguarda l'altro tipo di forzante che il modello può applicare, il vento, non vi è disponibilità di dati sperimentali per la zona in

esame, quindi gli effetti locali sono stati trascurati. Usando comunque come condizioni al contorno dati sperimentali come i flussi o i livelli, essi risentono della circolazione generale, quindi in senso lato comprendono anche gli effetti non locali del vento.

7.1.3 Le misure correntometriche

Le misure correntometriche effettuate presso Sestri Levante [3] confermano che nella zona di studio vi è un pressoché continuo movimento dell'intera massa d'acqua verso Nord-Ovest, parallelamente alla costa con solo brevi periodi di inversione associati a venti provenienti da Nord. Tale movimento appare coerente a tutte le profondità e la componente lungo costa della corrente superficiale mantiene un valore di 0.25 [m/s] per periodi relativamente lunghi. Il valore massimo di corrente è stato registrato nei mesi invernali della campagna di misure ed è risultato di 1 [m/s], associato a venti molto forti. Vicino al fondo invece il valore della velocità scende attorno ai 0.1 [m/s], con valori massimi di 0.4 [cm/s]. L'analisi spettrale mostra dei picchi significativi nei mesi invernali corrispondenti a fluttuazioni di periodo 20 giorni in superficie e 15 giorni sul fondo. La circolazione generale delle correnti nella zona viene ricondotta ad una componente lungo costa dovuta a gradienti di densità ed alle variazioni di livello della superficie libera indotte dal vento e prodotte dal tipo di bacino semichiuso. Le oscillazioni di lungo periodo registrate per la corrente sono addotte ai venti di larga scala.

I dati di corrente misurati presso Lavagna sulla batimetrica dei -40 [m] ad una profondità di -20 [m] vengono ritenuti [5] vicini a quelli medi sull'intera colonna d'acqua, quindi utilizzabili per la calibrazione dei risultati del modulo idrodinamico. Si pensa che la presenza dello strato superficiale a densità inferiore possa introdurre un fattore di errore dell'ordine del 10 %. Nella elaborazione dei dati si individuano una componente parallela alle linee batimetriche che raggiunge i 0.5 [m/s] ed una componente perpendicolare alla costa assai più contenuta. L'analisi spettrale presentata [5] conferma che non sono rilevabili picchi in corrispondenza delle frequenze mareali.

7.1.4 Le simulazioni idrodinamiche

Viene ora presentato il lavoro di simulazione col modello idrodinamico MIKE 21 HD che ha prodotto i campi di velocità della corrente marina utilizzati per lo studio del trasporto e della dispersione.

Batimetria

L'area in esame va da circa 5 [km] ad ovest di Sori fino a 2 [km] a est della Punta di Sestri Levante.

La mappa batimetrica digitale della zona è stata fornita da ENFA che l'aveva già preparata [5] nel formato necessario per le simulazioni idrodinamiche con MIKE 21 con il procedimento presentato di seguito.

Con l'accostamento di due carte digitali in scala 1 : 100 000 dell'Istituto Idrografico della Marina Militare, si è ottenuta una carta unica successivamente proiettata su una griglia 231×81 con passo spaziale 200 [m] e formattata per MIKE 21. Il file così ottenuto è poi stato rielaborato con i programmi accessori di MIKE 21 ruotando la mappa di 12° per porre il flusso principale parallelo all'asse x del dominio, fissando le coordinate dell'origine con i valori indicativi di 44° latitudine nord e 9° longitudine est, assegnando come valore per la terra emersa 10 [m]. Siccome la mappa originaria aveva le linee batimetriche fino ai -200 [m], oltre a questa profondità si è creato per interpolazione un andamento più regolare fino ai -310 [m] di profondità raggiunti sul bordo meridionale della griglia. Anche ai bordi est ed ovest della griglia sono state aggiunte due zone di circa 15 maglie con andamento regolare per non creare instabilità numeriche ai bordi del dominio di calcolo.

La mappa utilizzata per le simulazioni idrodinamiche così ottenuta è riportata in Figura 7.1 in proiezione piana ed in Figura 7.2 in proiezione tridimensionale.

Condizioni ai bordi

Come si vede dalla mappa batimetrica, i bordi aperti su cui si devono porre le condizioni al contorno sono tre.

Sul bordo meridionale, poichè le misure di corrente danno un campo di velocità parallelo alla costa, si è fissata la condizione di flusso perpen-

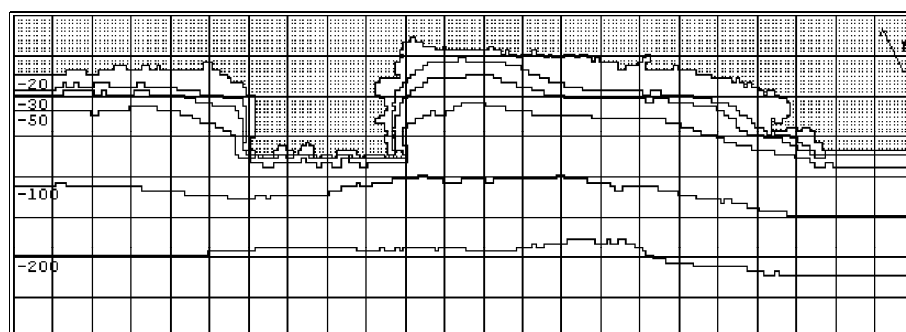


Figura 7.1: Mappa batimetrica dell'area di studio in proiezione piana disegnata dal programma BATplot.

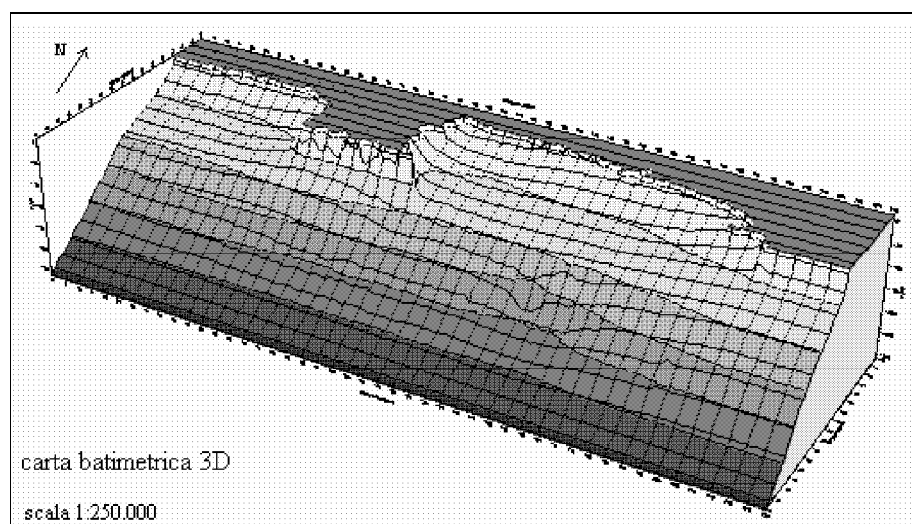


Figura 7.2: Mappa batimetrica dell'area di studio in proiezione tridimensionale ottenuta con MIKE 21.

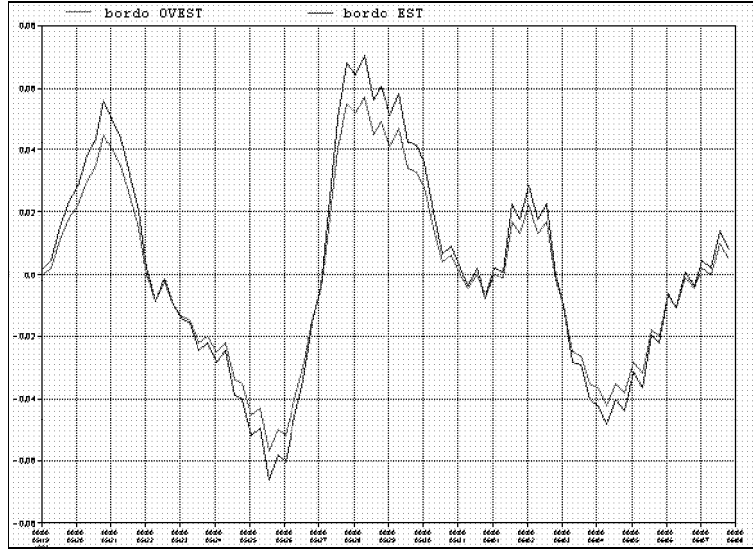


Figura 7.3: Serie temporali di elevazioni applicate come condizioni ai bordi nelle simulazioni idrodinamiche.

dicolare al bordo nullo, che in precedenti lavori [5] si è rivelata essere la condizione con migliori garanzie di stabilità.

Per gli altri due bordi, in seguito all'analisi delle forzanti, si è deciso di applicare come condizioni le misure di elevazione di Lavagna. I dati che consistono in una serie temporale (dal 19/5/93 all'8/6/93) con passo temporale 6 [h] dei valori di pressione in [hPa], sono stati convertiti valori di elevazione, ζ , in [cm]. Successivamente si sono calcolate le elevazioni ai bordi della griglia di calcolo, ζ_{bd} , con una trasformazione lineare dei valori di Lavagna, $\zeta_{Lavagna}$:

$$\zeta_{bd} = a \zeta_{Lavagna} + c.$$

Utilizzando come dati di calibrazione le misure correntometriche di Lavagna e le indicazioni fornite dall'articolo del 1983, si sono fatte diverse simulazioni al fine di individuare i valori dei parametri a e c più adatti a ricreare la situazione reale. In Figura 7.3 sono riportati gli andamenti utilizzati nella simulazione che ha dato i risultati più soddisfacenti.

Assegnazioni ulteriori

Vediamo ora i valori assegnati agli altri parametri richiesti da MIKE 21 HD durante la preparazione della simulazione.

La durata della simulazione è stata fissata per coprire l'intero periodo dei dati di elevazione disponibili: 43200 passi temporali con intervallo di 40 [s]. Il valore scelto per il ΔT comporta un valore piuttosto elevato del numero di Courant $C = 11$, che comunque si è rivelato sperimentalmente accettabile [5]. Si è inoltre introdotto un periodo di "riscaldamento" (*soft start*) di 300 passi.

Per l'attrito sul fondo è stato preparato un file contenente una matrice bidimensionale di valori del coefficiente di attrito sul fondo, espresso in termini del numero di Manning, con $M = 32$ [$\text{m}^{1/3}/\text{s}$] all'interno del dominio e $M = 15$ [$\text{m}^{1/3}/\text{s}$] per due maglie lungo i bordi aperti, in modo da eliminare eventuali instabilità sul contorno.

Per la viscosità turbolenta si è fissato un valore costante di $1,5$ [m^2/s] ed utilizzato la formulazione basata sul flusso.

Infine per preparare le simulazioni del trasporto di inquinanti sono state posizionate nove sorgenti rappresentanti gli scarichi della condotte a mare le cui caratteristiche sono riportate nella Tabella 7.1.

Risultati delle simulazioni idrodinamiche

Le simulazioni idrodinamiche svolte con MIKE 21 HD, hanno portato, dopo le necessarie prove di calibrazione, ad individuare due situazioni tipiche del campo di corrente nella zona d'interesse: il prolungato permanere di una corrente "occidentale", cioè parallela alla costa e diretta verso nord-ovest, e dei periodi più brevi di inversione del campo (corrente "orientale").

Il campo di corrente che si forma per periodi più prolungati è mostrato in Figura 7.4: al largo la corrente fluisce lungo le linee batimetriche con valori attorno ai 0.4 [m/s], sotto costa invece le velocità sono molto più basse ma l'andamento si mantiene in genere regolare,

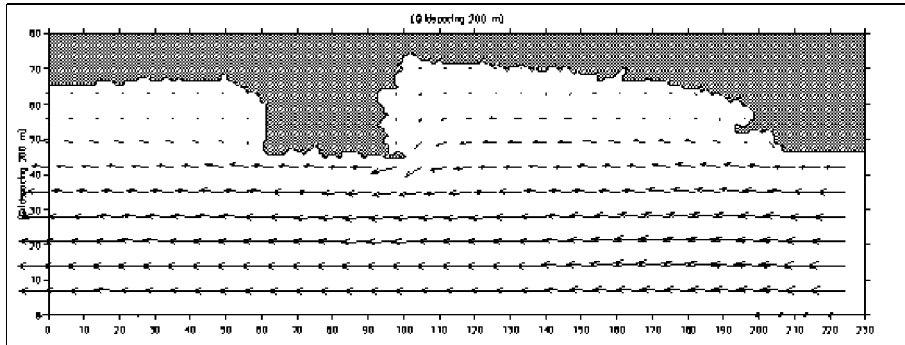


Figura 7.4: Corrente "occidentale".

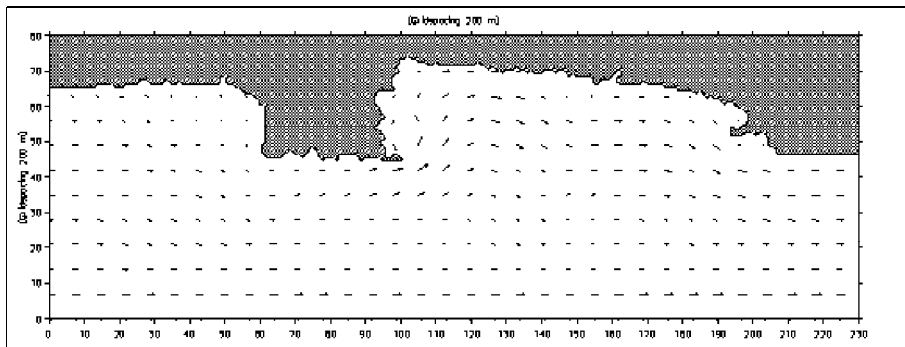


Figura 7.5: Corrente "orientale".

fatta eccezione per le zone attorno ad alcune punte, come Punta di Portofino e Punta della Chiappa, dove i calcoli dal modello sono da ritenere molto approssimati e necessiterebbero di misure sperimentali ad hoc.

I periodi di inversione della direzione della corrente, ricollegabili a venti settentrionali, portano alla situazione mostrata in Figura 7.5: l'andamento risulta assai più irregolare rispetto alla precedente situazione ed i valori di velocità, molto più bassi in tutta l'area di interesse, non sono più diversi tra largo e costa.

In generale durante tutto il periodo simulato, la circolazione nel Golfo Paradiso risulta sempre più contenuta rispetto al Golfo Tigullio.

I due diversi andamenti della corrente possono essere considerati situazioni tipiche dell'area di studio.

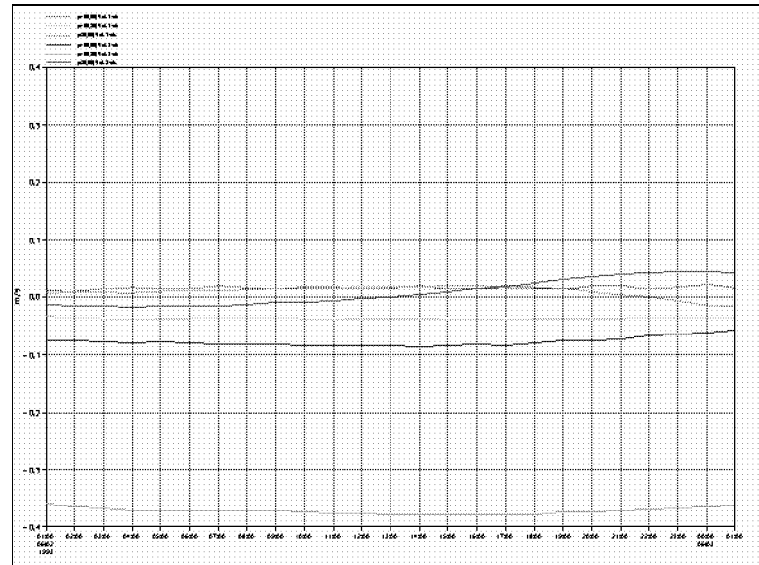


Figura 7.6: Andamento temporale delle componenti della velocità nella situazione di corrente "occidentale".

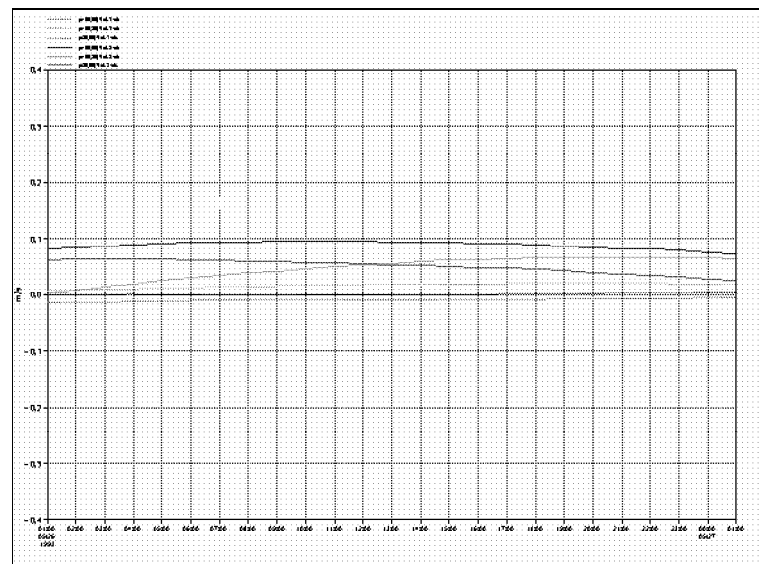


Figura 7.7: Andamento temporale delle componenti della velocità nella situazione di corrente "orientale".

In Figura 7.6 ed in Figura 7.7 sono riportati gli andamenti delle due componenti della corrente in tre punti del dominio spaziale (155,55), (100,30), (30,55) durante 24 [h]. Tali andamenti mostrano che nel breve periodo, ventiquattro ore appunto, al fine delle simulazioni di trasporto, possono essere considerati regimi stazionari.

7.2 Lo studio modellistico del trasporto degli inquinanti

7.2.1 Le caratteristiche degli scarichi a mare dell'area

Le informazioni sulle caratteristiche degli scarichi che insistono nell'area di mare interessata sono state fornite da due pubblicazioni del 1993 [7] [7], che analizzano e riportano i dati, riguardanti l'intero arco ligure, reperiti durante l'attività preliminare del progetto ENVIREG. Tale attività si è articolata in una raccolta organica delle informazioni tecnico-funzionali sulle condotte attuata tramite la compilazione di una scheda-tipo ed in uno studio sull'efficienza dei trattamenti, sulle tipologie di impianti previsti dal piano di risanamento delle acque della Regione Liguria e sugli abitanti serviti.

Le condotte considerate sono nove, dalla condotta di Recco Punta S. Anna (numero codice 098) alla condotta di Sestri Levante Capolungo (numero codice 107); la condotta di Recco (numero codice 099) essendo attiva solo per emergenza, è stata trascurata.

I comuni di Recco e Camogli hanno condotte che portano gli effluenti, dopo trattamento primario, ad una profondità giudicata sufficientemente alta. Nel Golfo del Tigullio vi sono comuni (Portofino, S. Margherita Ligure e Rapallo) con sistemi di smaltimento considerati, sempre nello studio del 1993, adeguati sia per trattamento depurativo che per profondità raggiunta dalla condotta, mentre per altri (Lavagna, Chiavari e Zoagli) le situazioni di scarico, a causa dell'entità, della profondità di emissione e della situazione fisiografica, vengono definite critiche.

7.2.2 I parametri considerati

Per le simulazioni effettuate con MIKE 21 AD, LAMP2D e LAMP3D, si è deciso di considerare come parametri per la stima dei carichi inquinanti i solidi sospesi, il BOD5 ed i coliformi. Tale scelta è stata fatta in base alle seguenti considerazioni:

- I solidi sospesi impediscono la penetrazione luminosa, occludono gli organi dei pesci e ricoprono i fondali, quindi in una zona di grande interesse ambientale come i fondali del promontorio di Portofino sono uno dei contaminanti da tenere maggiormente in considerazione.
- In ambiente acquatico uno dei principali parametri che caratterizzano un'acqua di buona qualità per il mantenimento degli organismi viventi è la concentrazione di ossigeno disciolto, perciò tutti gli inquinanti ad effetto deossigenante in grado cioè di sequestrare ossigeno dall'ambiente acquoso rivestono grande importanza. Fra i vari parametri di richiesta di ossigeno, uno dei più utilizzati è il BOD5 (Biological Oxygen Demand), che misura l'ossigeno consumato per azione batterica, in 5 giorni alla temperatura di 20°C, da un campione di acqua contenente sostanza organica biodegradabile. Tale parametro rappresenta quindi anche una misura indiretta della sostanza organica presente.
- Lo standard di accettabilità dell'acqua di mare più frequentemente richiesto dal punto di vista giuridico e progettuale è quello relativo alla balneazione, ovvero l'indice di concentrazione di batteri coliformi fecali.

Inoltre dal punto di vista prettamente modellistico tali parametri permettono di sfruttare appieno le capacità dei modelli, appartenendo a tre diverse categorie: i materiali sospesi sono conservativi, il BOD5 è un decadente a lungo termine, i coliformi infine sono decadenti a breve periodo.

La mancanza di copertura analitica per tutte le condotte e la presenza in alcuni casi di dati non recenti, ha indotto ad utilizzare i dati stimati in base al numero di abitanti gravanti su ogni condotta ed al trattamento effettuato sui reflui. Nella pubblicazione del 1993 [7] sono

disponibili stime dei carichi inquinanti provenienti dalle condotte attive basate sulla tipologia di trattamento e sul numero di abitanti sia residenti che totali. Avendo a disposizione i dati idrodinamici di un periodo tardo-primaverile si è preferito utilizzare le stime dei parametri materiali sospesi e BOD5 basate sugli abitanti totali che tengono conto delle fluttuazioni legate al fenomeno turistico.

Per quanto riguarda le stime dell'apporto giornaliero di coliformi fecali ci si è attenuti alle indicazioni fornite dal Vismara [13] ($10^{10} - 10^{12}$ per abitante) applicate sempre al numero di abitanti totali.

7.2.3 Le simulazione avvettivo-dispersive

Le simulazioni con i tre modelli avvettivi-dispersivi si sono basate sui campi di corrente forniti da MIKE 21 HD al fine di ottenere indicazioni sulla diluizione ed il trasporto degli inquinanti nelle due situazioni idrodinamiche prima presentate.

Tutte le simulazioni svolte coprono un periodo di 24 [h] con 2160 passi temporali della durata di 40 [s]; essendo la velocità non superiore a 1 [m/s] ed il passo spaziale lo stesso, 200 [m], delle simulazioni idrodinamiche il criterio di Courant è rispettato:

$$C_{tr} = \Delta t \left(\frac{u}{\Delta L} + \frac{v}{\Delta L} \right) = 0.4.$$

Per tutti i tre diversi inquinanti si è scelta una concentrazione ai bordi ed iniziale nulla, in modo da evidenziare gli impatti degli effluenti da condotta.

La posizione, le portate e le concentrazioni alla sorgente dei tre inquinanti per ciascuna delle nove condotte a mare presenti nella zona sono riportate in Tabella 7.1. Le posizioni delle bocche delle condotte, fornite dalle schede di censimento [7] in coordinate geografiche, sono state trasformate in coordinate di griglia con l'aiuto del programma GEOref. Il dato di profondità, fornito anch'esso dalle schede di censimento, è stato utilizzato solamente per le simulazioni con LAMP3D. Le portate delle condotte e le concentrazioni alla sorgente sono state ricavate dalla tabella 20 della pubblicazione del 1993 [7]. I valori di concentrazione dei colibatteri sono stati calcolati utilizzando il dato di apporto giornaliero per abitante indicato da Vismara [13] e il dato di portata della tabella 20 [7].

<i>Codice</i>	<i>Coordinate di griglia</i>	<i>Profondità</i> [m]	<i>Portata</i> [m ³ /s]	Mat.sosp. [g/m ³]	BOD5 [gO ₂ /m ³]	Coliformi [g/m ³]
098	(48,58)	-33.22	0.053	315	285	5 · 10 ¹²
100	(55,56)	-34.01	0.038	175	210	5 · 10 ¹²
101	(97,50)	-32.64	0.007	350	300	5 · 10 ¹²
102	(109,58)	-48.94	0.055	233	280	6.7 · 10 ¹²
103	(115,59)	-47.97	0.200	303	275	4.8 · 10 ¹²
104	(122,69)	-18.54	0.013	350	300	5 · 10 ¹²
105	(140,60)	-30.42	0.060	38	55	5.5 · 10 ¹²
106	(163,60)	-24.81	0.083	162	195	4.6 · 10 ¹²
107	(202,46)	-33.94	0.083	73	83	3.5 · 10 ¹²

Tabella 7.1: Assegnazioni per le sorgenti da condotta.

Per quanto riguarda i tempi di decadimento dei due inquinanti non conservativi si è ancora fatto riferimento a Vismara:

- per il BOD5 si è calcolato $T_{90} = 315.2$ [h];
- per i coliformi in acqua di mare viene indicato come valore di massima per il Mediterraneo $T_{90} = 2$ [h].

Tali valori corrispondono nelle assegnazioni per MIKE 12 AD ai seguenti valori del coefficiente di decadimento:

- per il BOD5 $F = 2.03 \cdot 10^6$;
- per i coli $F = 3.20 \cdot 10^4$.

Per i coefficienti di dispersione nella direzione x e nella direzione y , nelle simulazioni con MIKE 21 AD si è scelto per entrambe il valore di 1 [m²/s] confermato da misure sperimentali [4] e già utilizzato in precedenti lavori [5].

Per LAM2D il valore assegnato alla dispersione standard è $\sigma = 11$, mentre per LAMP3D il valore assegnato alla deviazione standard orizzontale in superficie è $\sigma = 16$ ed il fattore di riduzione per la deviazione standard in verticale ha valore $f_z = 0.5$.

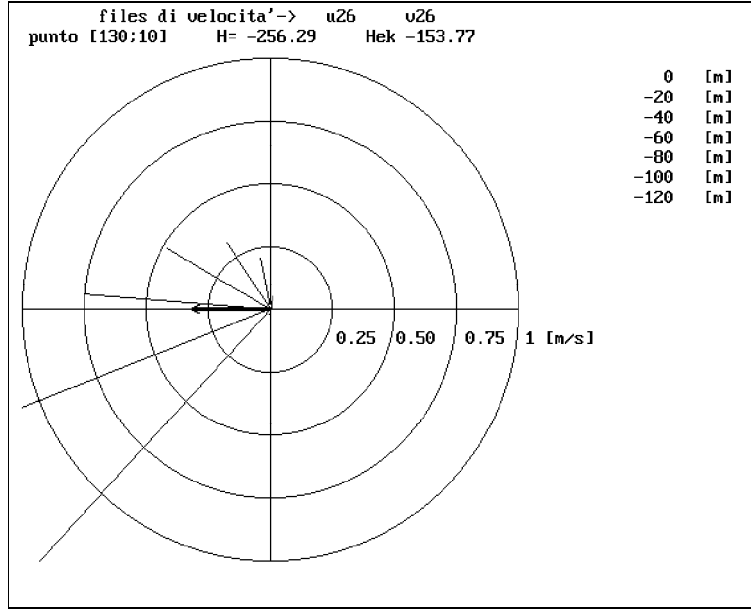


Figura 7.8: La spirale di Ekman calcolata numericamente da LAMP3D in punto vicino al bordo meridionale della griglia in base ai dati di velocità nel caso di corrente "occidentale". Il grafico è stato disegnato col programma SPIRALplot: la freccia in grassetto indica il valore integrato calcolato da MIKE 21, le linee sottili i vettori di velocità alle quote indicate.

Inoltre nelle simulazioni effettuate con LAMP3D si è fissato per quanto riguarda il calcolo del profilo verticale di velocità un valore per la profondità di Ekman di -150 [m] ed un fattore di scala $f_{sc} = 0.7$. In Figura 7.8 è riportato uno dei grafici ottenuti con il programma SPIRALplot applicato ai dati di velocità nel caso di corrente diretta verso nord-ovest.

Col modello tridimensionale inoltre si è introdotto nel calcolo la profondità dei diffusori delle condotte, con risalita del pennacchio dalla bocca pari a $z_{eff} = 4$ [m].

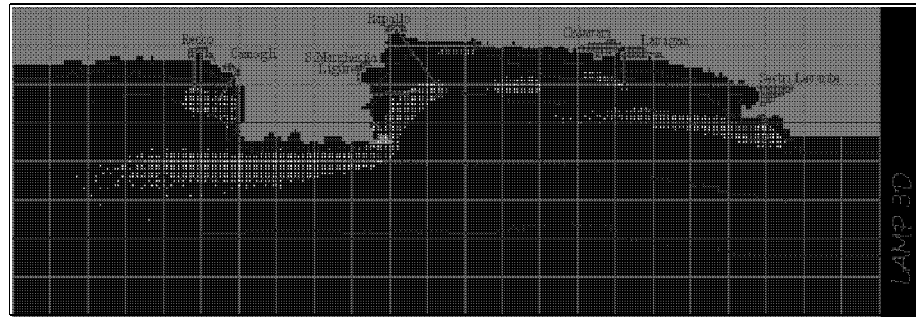


Figura 7.9: Materiali sospesi dopo 24 [h] con corrente "occidentale".

7.3 Analisi e discussione dei risultati ottenuti

I risultati ottenuti in questo lavoro di simulazione possono essere analizzati sotto due diversi aspetti:

- dal punto di vista prettamente modellistico, essendo il primo caso di studio di una situazione reale, tale lavoro fornisce un utile confronto fra i risultati dei tre modelli, per comprenderne più a fondo le diverse caratteristiche;
- dal punto di vista della valutazione e previsione ambientale, sono fornite dai risultati dei modelli indicazioni di qualche rilievo sugli impatti degli scarichi delle condotte a mare.

Le seguenti analisi si basano sull'analisi dei grafici prodotti dai moduli grafici dei modelli.

In Figura 7.9 ed in Figura 7.10 sono riportati a titolo d'esempio i grafici prodotti da Pixels3D con i dati di concentrazione calcolati da LAMP3D. In appendice a pag. 137 sono inseriti tutti i grafici a colori.

Il rilascio continuo di sostanze conservative, come nel caso dei solidi sospesi, comporta un aumento della loro quantità totale nell'ambiente fino a quando il flusso di tali sostanze non esce dall'area di simulazione. Nella situazione di corrente "occidentale" non si ha però nelle ventiquattro ore fuoriuscita di materiale. Data la situazione idrodinamica

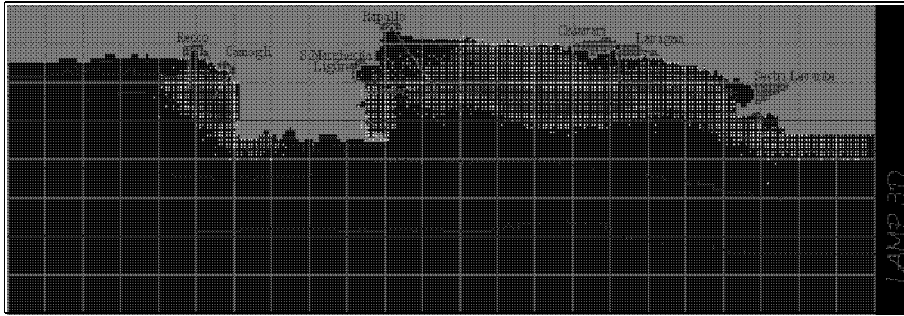


Figura 7.10: Materiali sospesi dopo 24 [h] con corrente "orientale".

calcolata. il trasporto è comunque notevole e il materiale delle due condotte di S. Margherita Ligure e di Rapallo viene trasportato fuori del Golfo del Tigullio. Il modello tridimensionale indica che tale trasporto è indirizzato verso il largo, risparmiando così la zona di mare antistante il promontorio, riserva marina, da impatti significativi; i modelli bidimensionali invece sono meno "ottimisti" e l'indicazione di possibili accumuli di materiali sospesi nella zona del parco, merita ulteriori studi.

Nella situazione di inversione invece si ha fuoriuscita dal dominio di calcolo di materiale dato che la condotta di Sestri Levante si trova in prossimità del confine del dominio. Tuttavia le correnti più modeste che si sono calcolate in tale situazione riducono molto il trasporto e si ha una stagnazione del materiale sia nel Golfo di Portofino che nel Golfo Paradiso.

Nella zona antistante Camogli, essendo la corrente piuttosto debole in entrambe le situazioni idrodinamiche, le due condotte che scaricano a profondità elevata producono accumuli, che possono sia risalire in superficie sia interessare, nel caso di inversione della corrente, il lato meridionale del promontorio.

Nel caso di inversione della corrente, la zona che va da Zoagli a Cavi è interessata dalla presenza sottocosta di solidi in sospensione e materiale organico, che, proveniente da praticamente tutte le condotte presenti nel Golfo del Tigullio tende a stagnare per lo scarso trasporto.

Per quanto riguarda i batteri, la loro presenza, dato il tempo di vita molto basso, sembra ristretta alla zona più prossima alle bocche

delle condotte; è però da segnalare il caso della condotta di Zoagli che scaricando a bassa profondità e molto vicino alla linea di costa non solo è causa della probabile presenza di batteri coliformi, ma anche di materiale solido e materiale biodegradabile in vicinanza della battigia.

I risultati sul trasporto degli inquinanti forniti dai tre diversi modelli danno indicazione di una buona calibrazione reciproca e fanno ritenere valide le indicazioni sugli impatti degli scarichi, tuttavia sarebbe necessaria nel caso di disponibilità di dati, una calibrazione basata su misure sperimentali di concentrazione.

Tale calibrazione permetterebbe inoltre di sfruttare maggiormente le potenzialità del modello tridimensionale che, avendo caratteristiche particolari rispetto agli altri due, necessita di una messa a punto dedicata.

7.4 Conclusioni e prospettive

Si ritiene che lo studio e l'applicazione del modello MIKE 21 abbia permesso di acquisire una sufficiente conoscenza del modello e soprattutto di maturare la necessaria esperienza nell'utilizzo del programma sia per quanto riguarda la parte idrodinamica che quella di avvezione-dispersione.

I risultati ottenuti con i due modelli LAMP2D e LAMP3D sono ritenuti soddisfacenti. I confronti col modello commerciale hanno confermato la validità dei risultati ottenibili nella applicazione di questi modelli a situazioni reali.

In particolare il modello tridimensionale può essere considerato un valido strumento per lo studio della dispersione in acque marine. E' stato infatti presentato un progetto di applicazione di questo modello nelle acque dell'area marina protetta del Promontorio di Portofino per lo studio della dispersione non solo di inquinanti, ma anche di sedimenti sospesi.

Se le future applicazioni confermeranno la validità dei risultati, si potrebbe avere un successivo sviluppo sia del modello che del programma. In particolare si pensa alla messa a punto di una schema numerico che consideri l'autocorrelazione delle velocità, già introdotto

in questo lavoro di tesi. Inoltre l'eventuale disponibilità di nuovi dati sperimentali potrà permettere lo studio di profili verticali di velocità e di diffusione che tengano conto di particolari fenomeni locali di rimescolamento delle masse d'acqua.

Una ulteriore messa a punto dello schema numerico del programma porterebbe non solo a ridurre i tempi di calcolo, ma anche a eliminare eventuali instabilità numeriche. La parte grafica infine potrebbe essere adeguata alle attuali esigenze delle presentazioni dei risultati: si pensa ad esempio a mappe tridimensionali.

Nel lavoro sperimentale di applicazione dei modelli ad un caso reale si pensa di aver messo alla prova le proprie capacità di analisi e discussione di risultati modellistici. Si ritiene che tale esperienza possa costituire la base su cui sviluppare una futura competenza nel campo della gestione ambientale.

[5][3][1][2][4] [11][13][14][12] [9][8][10][6][7]

Appendice A

Listati dei programmi

Appendice B

Grafici a colori

Appendice C

Schede di simulazione per MIKE 21

Lista delle Figure

2.1	Equazione di stato dell'acqua marina.	17
3.1	Schema dei principali processi di trasporto.	21
3.2	Esperimento di Reynolds.	28
3.3	Media temporale di una funzione stocastica.	29
3.4	Il coefficiente di correlazione.	37
4.1	La griglia di calcolo di MIKE 21 HD.	41
4.2	La centratura temporale di MIKE 21 HD.	42
4.3	La tecnica del <i>side-feeding</i>	43
4.4	Il ciclo delle scansioni computazionali di MIKE 21 HD.	43
4.5	La griglia di calcolo di MIKE 21 HD.	54
4.6	L'estrazione dei dati	66
4.7	Canale ad equatore.	68
4.8	Canale alle medie latitudini.	69
4.9	Test di espansione.	71
4.10	Campo di velocità nel canale ad angolo.	72
4.11	Serie temporale delle velocità nel canale ad angolo.	73
4.12	Serie temporale delle concentrazioni nel canale ad angolo.	73
4.13	Isolinee di concentrazione nel canale ad angolo.	74
4.14	Isolinee di concentrazione nel canale ad angolo.	75
5.1	La griglia spaziale di LAMP2D.	78
5.2	Calcolo della velocità pesata.	81
5.3	Il ciclo computazionale di LAMP2D.	84
5.4	Il menu di LAMP2D.	85
5.5	Diffusione senza trasporto, situazione dopo 12 h.	92
5.6	Diffusione senza trasporto, situazione dopo 24 h.	92

6.1	La spirale di Ekman.	95
6.2	La griglia spaziale di LAMP3D.	99
6.3	Il menu di LAMP3D.	107
6.4	Diagramma ad albero delle directory di LAMP3D.	107
6.5	LAMP3D	108
6.6	Batimetria 3-D di CANALE99.	112
6.7	Prove di calibrazione di LAMP3D.	114
6.8	Prove di calibrazione di LAMP3D.	114
7.1	Batimeria 2D.	120
7.2	Batimeria 3D.	120
7.3	Serie temporali di elevazione.	121
7.4	Corrente "occidentale".	123
7.5	Corrente "orientale".	123
7.6	Andamento della velocità (corrente "occidentale").	124
7.7	Andamento della velocità (corrente "orientale").	124
7.8	La spirale di Ekman (corrente "occidentale").	129
7.9	Materiali sospesi con corrente "occidentale".	130
7.10	Materiali sospesi con corrente "orientale".	131

Lista delle Tabelle

4.1	Le principali componenti di marea	65
6.1	Assegnazioni per la sorgente in CANALE99	113
7.1	Assegnazioni per le sorgenti da condotta.	128

Bibliografia

- [1] M.B Abbott and J. Larsen. Modelling circulations in depth-integrated flows: Part 2: A reconciliation. *Journal of hydraulic research*, 23(5), 1985.
- [2] M.B. Abbott, J. Larsen and Jianhua Tao. Modelling circulations in depth-integrated flows: Part 1: The accumulation of evidence. *Journal of hydraulic research*, 23(4), 1985.
- [3] Mario Astraldi and Giuseppe Manzella. Some observations on current measurements on the east ligurian shelf, mediterranean sea. *Continental Shelf Research*, 1983.
- [4] Bacciola, D. et al. Esperimenti per la determinazione del coefficiente di diffusione locale. *RTI/AMB/GEM-MAR/93/07*, 1993.
- [5] Antonio Baldi, Pietro Marri and Antonio Schirone. Applicazione di un modello per la simulazione del trasporto e della diluizione di inquinanti nelle acque costiere. *RTI/AMB/GEM-MAR/97/04/RL2/A1.4*, 1997. Progetto ENVIREG.
- [6] Convenzione ENEA-Regione Liguria, S.Teresa, La Spezia. *Le condotte a mare lungo il litorale ligure. Censimento, caratteristiche e studi.*, 1993.
- [7] Convenzione ENEA-Regione Liguria, S.Teresa, La Spezia. *Schede descrittive delle condotte a mare lungo il litorale ligure.*, 1993.
- [8] Dansk Hydraulisk Institut, Hørsholm, Denmark. *MIKE21 Advection-Dispersion Module. User Guide and Reference Manual*, 1994.

- [9] Dansk Hydraulisk Institut, Hørsholm, Denmark. *MIKE21 Hydrodynamic Module. User Guide and Reference Manual*, 1994.
- [10] Dansk Hydraulisk Institut, Hørsholm, Denmark. *MIKE21 Pre- and Post-processing Module. User Guide and Reference Manual*, 1994.
- [11] Franco Mattioli. *Principi Fisici di Oceanografia e Meteorologia*. Editrice Compositori Srl, Bologna, 1993.
- [12] Davide Sacchetti. *Studio modellistico lagrangiano del trasporto atmosferico di effluenti di grandi sorgenti naturali ed antropogeniche*. PhD thesis, UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI GENOVA, 1993.
- [13] Renato Vismara. *Ecologia Applicata 2ª edizione*. Hoepli, Milano, 1992.
- [14] Paolo Zannetti. *Air pollution Modeling*. Computational Mechanics Publications, Boston, 1990.

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Scopi della tesi	1
1.2	I modelli matematici	2
1.2.1	I vantaggi e gli svantaggi dei modelli lagrangiani .	3
1.3	Sintesi del lavoro di tesi	4
2	Cenni di fluidodinamica generale	9
2.1	Equazioni fondamentali	10
2.1.1	L'equazione di continuità	10
2.1.2	L'equazione del momento	11
2.1.3	L'equazione idrostatica	14
2.1.4	L'equazione del calore	16
2.1.5	L'equazione della salinità	16
2.1.6	L'equazione di stato per l'acqua marina	17
2.2	L'approssimazione in acqua bassa per fluidi omogenei . .	19
3	I processi di trasporto	21
3.1	La diffusione	22
3.1.1	I processi diffusivi	22
3.1.2	I teoremi di conservazione	22
3.1.3	Conservazione di quantità o proprietà specifiche .	24
3.1.4	L'equazione di diffusione	24
3.1.5	Proprietà dei processi diffusivi	25
3.1.6	Soluzioni caratteristiche dell'equazione di diffusione	25
3.2	La turbolenza	26
3.2.1	Il numero di Reynolds	27
3.2.2	I processi stocastici	28

3.3	L'avvezione-dispersione	30
3.3.1	L'approccio Euleriano	31
3.3.2	L'approccio Lagrangiano	33
3.3.3	I modelli a particelle	33
4	MIKE 21	39
4.1	Il modulo idrodinamico	39
4.1.1	Cenni sullo schema numerico ADI-DS	41
4.1.2	Procedura di modellizzazione con MIKE 21 HD	44
4.2	Il modulo avveztivo-dispersivo	53
4.2.1	Cenni sullo schema numerico QUICKEST	54
4.2.2	I coefficienti di dispersione	56
4.2.3	Procedura di modellizzazione con MIKE 21 AD	58
4.3	I moduli accessori	62
4.3.1	Il trattamento dei dati	62
4.3.2	La grafica	64
4.4	Le simulazioni iniziali	67
4.4.1	Variazioni di latitudine per un canale a fondo piatto	67
4.4.2	Test di espansione	70
4.4.3	Canale ad angolo con sorgente singola	70
5	LAMP2D	77
5.1	Il modello numerico LAMP2D	77
5.1.1	Il dominio di definizione	78
5.1.2	Il calcolo avveztivo-dispersivo	79
5.1.3	Il calcolo della concentrazione	83
5.2	La struttura del programma	84
5.2.1	La preparazione di simulazioni con LAMP2D	85
5.2.2	I programmi di grafica	87
5.2.3	I programmi accessori	88
5.3	Simulazioni di calibrazione	91
5.3.1	Il progetto LAGO	91
6	LAMP3D	93
6.1	Le correnti di deriva	94
6.1.1	Lo strato limite di Ekman in oceano	94

6.1.2	Trasporto di Ekman nello strato oceanografico superficiale	96
6.1.3	Lo strato limite di Ekman su fondali finiti	96
6.2	Il modello numerico LAMP3D	98
6.2.1	Il dominio di definizione	98
6.2.2	Il calcolo numerico del profilo di Ekman	98
6.2.3	Il calcolo della componente verticale della velocità	100
6.2.4	Il calcolo avveztivo-dispersivo nelle tre dimensioni	101
6.2.5	Il calcolo della concentrazione	104
6.2.6	Lo sviluppo del modello come AR(1)	105
6.3	La struttura del programma	106
6.3.1	La preparazione di simulazioni con LAMP3D	106
6.3.2	I programmi di grafica e i moduli accessori	110
6.4	Le simulazioni di calibrazione	110
6.4.1	Il progetto CANALE99	111
7	L'applicazione a Golfo Tigullio e Golfo Paradiso	115
7.1	La caratterizzazione idrodinamica dell'area di interesse	115
7.1.1	Le misure idrologiche	116
7.1.2	La valutazione dei forzanti	116
7.1.3	Le misure correntometriche	118
7.1.4	Le simulazioni idrodinamiche	119
7.2	Lo studio modellistico del trasporto degli inquinanti	125
7.2.1	Le caratteristiche degli scarichi a mare dell'area	125
7.2.2	I parametri considerati	126
7.2.3	Le simulazione avveztivo-dispersive	127
7.3	Analisi e discussione dei risultati ottenuti	130
7.4	Conclusioni e prospettive	132
A	Listati dei programmi	135
B	Grafici a colori	137
C	Schede di simulazione per MIKE 21	139