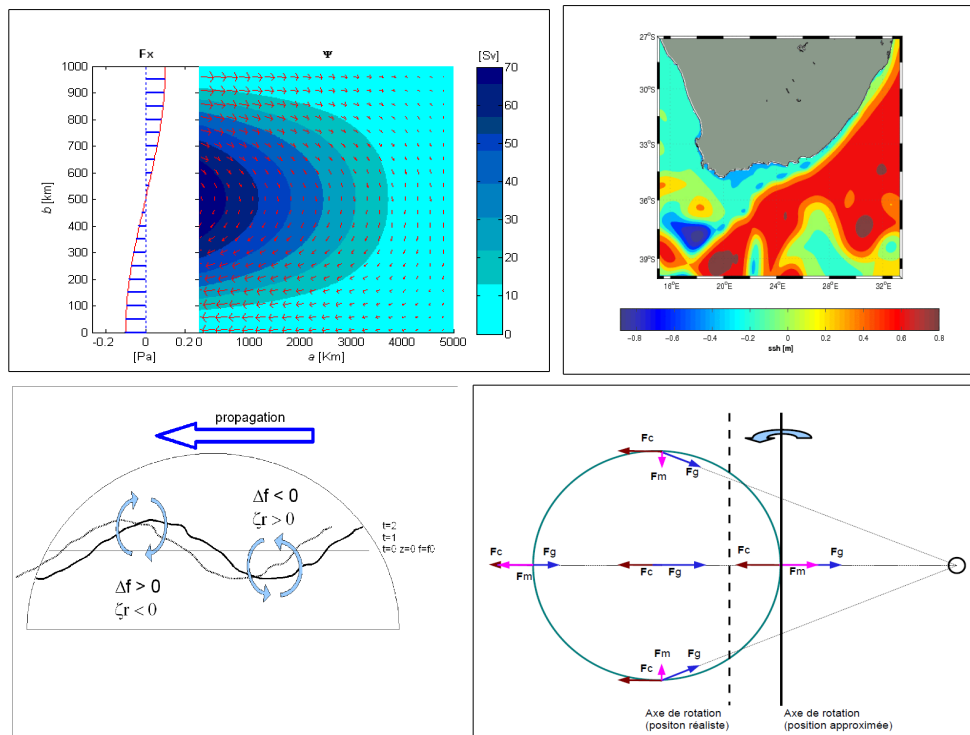


Andrea M. Doglioli
Anne A. Petrenko

Notes de Cours et Travaux Dirigés de
Dynamique des Océans



dernière révision 12 septembre 2022

Remerciements

Nous désirons remercier tous nos étudiants et nos collègues pour leur commentaires, questions, corrections et suggestions.

En particulier, ces polycopies ont bénéficié des contributions de Nicolas Barrier, Nathalie Daniault, Marion Fraysse, Nadia Pindari, F.Mattioli et Gérard Copin-Montégut, Katixa Lajaunie-Salla, Saïd Benjeddou.

Doglioli, A. M., Petrenko, A. A. (2022), *Notes de Cours et Travaux Dirigés de Dynamique des Océans*, Université d'Aix-Marseille, Marseille, France.

https://people.mio.osupytheas.fr/~doglioli/DoglioliPetrenko_NotesCoursTD_DynamiqueOceans.pdf

Ce matériel est distribué selon la licence Créative Commons [<http://creativecommons.org/>]



Vous êtes libres :

- * de reproduire, distribuer et communiquer cette création au public
- * de modifier cette création

Selon les conditions suivantes :

- * Paternité. Vous devez citer le nom de l'auteur original de la manière indiquée par l'auteur de l'oeuvre ou le titulaire des droits qui vous confère cette autorisation (mais pas d'une manière qui suggérerait qu'ils vous soutiennent ou approuvent votre utilisation de l'oeuvre).
- * Pas d'Utilisation Commerciale. Vous n'avez pas le droit d'utiliser cette création à des fins commerciales.
- * Partage des Conditions Initiales à l'Identique. Si vous modifiez, transformez ou adaptez cette création, vous n'avez le droit de distribuer la création qui en résulte que sous un contrat identique à celui-ci.

Cet ouvrage a été réalisé avec le logiciel libre OpenOffice www.openoffice.org

Table des matières

Notes de Cours

Rappels

Éléments de mathématique

Lois de Newton

Vitesse et accélération dans un repère non inertiel

1. Équations de l'hydrodynamique

Équations d'Euler

Forces agissant sur le milieu marin

Forces internes (Pesanteur, Force de pression)

Force externes (Force génératrice de la marée, Force d'entraînement du vent, Forces liées à la pente de la surface de la mer)

Forces secondaires (Force de Coriolis, Force de frottement dues à la viscosité)

Écoulement turbulent et équations de Reynolds

Simplifications

2. Analyse des ordres de grandeur et nombres sans dimensions

Le nombre de Reynolds

Analyses des ordres de grandeur des termes des équations

Nombres de Rossby et d'Ekman

3. Courants sans frottement

Écoulement géostrophique

Courant d'inertie

4. Courant avec frottement

Spirale d'Ekman

Upwelling et *Downwelling*

Circulation générale forcée par le vent

La circulation de Sverdrup

Intensification des courant de bord ouest

5. Les équations e.p.p. et la vorticité

Les équation en eaux peu profondes

La vorticité

La conservation de la vorticité

6. Introduction aux modèles numériques océaniques

Bibliographie

Anderson J.D. Jr (2005), *Ludwig Prandtl's Boundary Layer*, Physics Today.

<http://ccaunam.atmosfcu.unam.mx/jzavala/OceanoAtmosfera/Ludwing.pdf>

Coiffier J. (2000), *Un demi-siècle de prévision numérique du temps*. La Météorologie, 30, 11-31.

<http://hdl.handle.net/2042/36122>

Copin-Montégut G., Le Courant Géostrophique

<http://www.obs-vlfr.fr/Enseignement/enseignants/copin/Geostro.pdf>

Daniault N. (2005), *Océanographie Physique pour l'École Navale*. Cours en ligne, LPO - Université de Bretagne Occidentale, Brest.

http://stockage.univ-brest.fr/~daniault/oceano_physique.pdf

Lynch P. & De Moor G. (2008) *Les origines de la prévision numérique du temps et de la modélisation climatique*. La Météorologie, 63, 14-24.

<http://hdl.handle.net/2042/21887>

Mattioli F. (1995) *Principi Fisici di Oceanografia e Meteorologia* (en Italien)

Rappels

Éléments de mathématique

Scalaire T, S, ρ

Vecteur $\vec{v} \equiv (u, v, w)$

Derivée totale $\frac{d}{dx}F$ avec $F \equiv F(x)$ (autre notation $d_x F$)

Derivée partielle $\frac{\partial}{\partial x}F$ $\frac{\partial}{\partial y}F$ $\frac{\partial}{\partial z}F$ $\frac{\partial}{\partial t}F$ avec $F \equiv F(x, y, z, t)$ (autres notation $\partial_x F$)

Opérateur Nabla $\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ (autres notation $\vec{\nabla}$)

Gradient d'un scalaire $\nabla T \equiv \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$ c'est un vecteurs (autre notation $\vec{grad} T$)

Divergence d'un vecteur $\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ c'est un scalaire (autre notation $div \vec{v}$)

Rotationnel d'un vecteur $\nabla \times \vec{v} = \vec{i}(\partial_y w - \partial_z v) + \vec{j}(\partial_z u - \partial_x w) + \vec{k}(\partial_x v - \partial_y u)$ c'est un vecteurs (autre notation $rot \vec{v}$)

Gradient d'un vecteur $\nabla \vec{v} = \begin{bmatrix} \partial_x u & \partial_x v & \partial_x w \\ \partial_y u & \partial_y v & \partial_y w \\ \partial_z u & \partial_z v & \partial_z w \end{bmatrix}$ c'est un tenseur

Derivé Lagrangienne ou particulaire $\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla F = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z}$ (autres notations $\frac{DF}{Dt}$ $D_t F$ $d_t F$)

Les Lois de Newton

1^{ère} Loi de Newton ou Principe d'inertie

Dans un référentiel universel, dit référentiel galiléen, ou référentiel absolu, ou référentiel inertiel, toute particule isolée, i.e., éloignée de tout objet matériel, reste au repos si elle est initialement au repos, ou décrit un mouvement rectiligne uniforme si son accélération est nulle.

$$\vec{y} = 0 \Rightarrow \vec{V} = Cte = \vec{V}_o \Rightarrow \vec{X} = \vec{V}_o \cdot t + \vec{X}_o$$

2^{ème} Loi de Newton ou Principe fondamental de la dynamique

Dans un référentiel galiléen, il existe une relation de proportionnalité entre l'accélération $\vec{\gamma}$ d'une particule et la force \vec{F} à laquelle elle est soumise :

$$\vec{F} = m \vec{\gamma}$$

m est un coefficient positif caractéristique de la particule, appelé masse du point matériel.

3^{ème} Loi de Newton ou Principe de l'action et de la réaction

Dans un référentiel galiléen, l'action mutuelle de deux particules P_1 et P_2 l'une sur l'autre se traduit par une force \vec{F}_1 appliquée à la première particule et une force \vec{F}_2 associée à la seconde.

Les deux forces sont :

- portées par la droite P1-P2, qui joint les deux particules
- égales en module mais de sens opposé :

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Vitesse et accélération dans un repère non inertiel

Dans un référentiel galiléen $R_F = (T, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, en suivant une particule fluide de masse dm , on a :

$$\vec{F}_A = dm \vec{\gamma}_A$$

où $\vec{\gamma}_A$ est l'accélération absolue de la particule P

et \vec{F}_A est l'ensemble des forces qui agissent sur P ; soient **forces absolues**

Dans un référentiel non galiléen (non absolu) mobile $R' = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, la particule a une accélération relative $\vec{\gamma}_r$, qui est liée à l'accélération absolue par :

$$\vec{\gamma}_A = \vec{\gamma}_E + \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_C$$

ou $\vec{\gamma}_E$, est l'accélération d'entraînement et ou $\vec{\gamma}_C$, est l'accélération de Coriolis

Donc les forces absolues sont:

$$\vec{F}_A = dm(\vec{\gamma}_E + \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_C) = \vec{F}_r + dm(\vec{\gamma}_E + \vec{\gamma}_C)$$

Les forces relatives sont :

$$\vec{F}_r = \vec{F}_A + \vec{F}_C + \vec{F}_E = \vec{F}_A + F_{pseudo}$$

Les forces de Coriolis et d'entraînement sont appelées des pseudo-forces, respectivement égales à

$$\vec{F}_C = -dm \vec{\gamma}_C \quad \text{et} \quad \vec{F}_E = -dm \vec{\gamma}_E .$$

1. Équations de l'hydrodynamique

Dans un référentiel terrestre local, non galiléen, pour décrire le mouvement des océans, on dispose de 3 variables :

- la vitesse zonale, u (ouest – est, positive vers l'est),
- la vitesse méridienne v (sud-nord, positive vers le nord),
- la vitesse verticale w (positive vers le zénith).

Des lois régissent les mouvements de l'océan. Ce sont des lois de conservation :

- conservation de la masse : équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

- conservation de la quantité de mouvement : équations de Navier-Stokes (rappelée ultérieurement).

La quantité de mouvement par unité de volume correspond à $\rho \vec{v}$, avec ρ masse volumique (en kg/m^3) et $\vec{v} \equiv (u, v, w)$ vecteur vitesse.

On a aussi des lois permettant de déterminer l'évolution de la température et de la salinité des masses d'eau :

- conservation de la chaleur ou de la salinité : équations de transport de la température et de la salinité.

Les équations les plus importantes sont les **équations de Navier-Stokes**, qui sont des équations différentielles non-linéaires, décrivant le mouvement des fluides. Ces équations, lorsqu'elles ne sont pas simplifiées n'ont pas de solutions analytiques. Simplifiées, elles sont utiles pour des simulations numériques. Elles gouvernent par exemple les mouvements de l'air de l'atmosphère, les courants océaniques, l'écoulement de l'eau dans un tuyau, et de nombreux autres phénomènes d'écoulement de fluides. Elles sont nommées d'après deux physiciens du XIX^e siècle, Claude Navier et George Stokes.

Les **équations de Navier-Stokes** dérivent de la deuxième loi de Newton. En général, on effectue des simplifications de ces équations en considérant que le fluide est incompressible.

Rappel : la condition d'incompressibilité est la suivante:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\rho = 0$$

Si on fait aussi l'hypothèse que c'est un fluide parfait (viscosité nulle), on obtient les équations d'Euler.

1.1. Équations d'Euler

Elles traduisent, pour des **fluides parfaits**, la deuxième loi de Newton : masse*accélération=somme des forces, divisée par le volume. On obtient ainsi, dans un référentiel galiléen, des équations volumiques pour les quantités de mouvement.

$$\underbrace{\rho \frac{d\vec{V}}{dt}}_{\text{accélération totale}} = \underbrace{-\overrightarrow{\text{grad}} p}_{\text{force de pression}} + \underbrace{\rho \vec{f}}_{\text{force de volume par unité}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{\text{accélération locale}} + \underbrace{(\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V}}_{\text{accélération convective}} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p + \vec{f}$$

équation par unité de volume

ou :

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = -\text{volume} \overrightarrow{\text{grad}} p + m \vec{f} \quad \text{par unité de masse}$$

Jusqu'à présent, des cas simples ont été traités où les forces se limitaient à la pression et à la gravité. En réalité, et surtout dans le repère terrestre local (non galiléen), de nombreuses autres forces sont en jeu. C'est l'objet de la section suivante.

1.2. Forces agissant sur le milieu marin

Différentes forces s'exercent :

les forces internes au fluide,

- la force de pression : elle est dirigée des hautes pressions vers les basses pressions
- la force de gravité : elle ne s'exerce que dans la direction verticale et ne peut pas accélérer les courants horizontalement. Elle ne joue un rôle important que pour les mouvements verticaux, par exemple lors des phénomènes de convection.

les forces externes,

- la force génératrice de la marée
- la force d'entraînement due au vent
- les forces liées à la pente de la surface libre.

les forces secondaires

- la force de Coriolis liée à la rotation de la Terre s'exerce perpendiculairement au mouvement et est dirigée sur la droite du mouvement dans l'hémisphère Nord
- les forces de frottement dues à la viscosité. La viscosité mesure la résistance d'un fluide à l'écoulement. Elle est due aux frottements entre les particules fluides en mouvement.

1.3 Forces internes

Champ de pesanteur (gravitation).

Toute particule de masse dm est soumise à une force de pesanteur : $d\vec{F} = dm \cdot \vec{g}$ résultante de :

- la force de gravitation $dm \vec{g}'$ due à l'attraction terrestre
- la force axifuge $dm \vec{g}''$ due à la rotation de la terre

Attraction terrestre :

\vec{g}' est dirigée du point d'observation vers le centre de la Terre et vaut :

$$g' = \frac{GM}{r^2}$$

où $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$ (ou $\text{m}^3\text{s}^{-2}\text{kg}^{-1}$) - Constante de Gravitation

$M = 5,973 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ - Masse de la Terre

r = distance au centre de la Terre (\approx rayon de la terre en océanographie)

Force axifuge :

$$\vec{g}'' = \vec{F}e = -\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{TM})$$

Si \vec{u} est le vecteur unitaire passant par le point d'observation, perpendiculaire à l'axe des pôles et dirigé vers l'extérieur de la Terre. Si ϕ est la latitude en ce point, cette force d'entraînement peut s'écrire :

$$\vec{g}'' = \Omega^2 r \cos \phi \vec{u}$$

g'' est maximum à l'équateur où il vaut $0,034 \text{ ms}^{-2}$.

Remarques :

- * la droite colinéaire avec \vec{g} définit la verticale du lieu ; c'est la direction du fil à plomb.
- * lorsque l'on descend en dessous du niveau de la mer, la valeur de g augmente car g' augmente quand R diminue. Cependant, pour ce cours, en raison de la faible profondeur des océans relativement au rayon terrestre, on fera quand même l'hypothèse que g est une constante égale $\approx 9,81 \text{ ms}^{-2}$

Force de pression

Voir cours SM22 : La résultante des forces de pression (p) qui s'exerce sur une « particule élémentaire » de fluide de volume dv est :

$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}} p \cdot dv$$

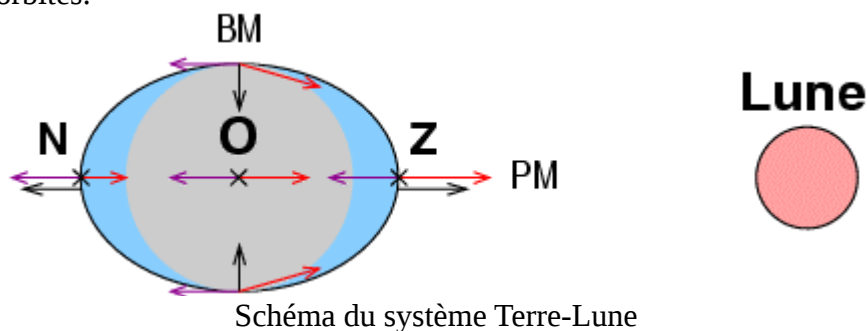
1.4 Force externes

Force génératrice de la marée

On considère que seuls la Lune et le Soleil ont une influence sur la Terre (le Soleil a une très grande masse et la Lune est proche de la Terre). Les autres planètes ou étoiles qui entourent la Terre sont trop éloignées ou de masses trop faibles pour être prises en considération. Les océans sont soumis à deux forces opposées :

- attraction gravitationnelle, dont l'intensité dépend de la distance à l'astre (Lune ou Soleil) : plus un point est proche de l'astre, plus l'attraction est forte.
- force axifuge qui s'oppose à l'attraction gravitationnelle et maintient chaque planète en équilibre sur son orbite. Cette force est constante en tous points du globe et dirigée dans le sens opposé à l'astre attracteur.

Ces deux forces se compensent exactement au centre de la Terre de sorte que la Terre et la Lune restent sur leur orbites.



La résultante des deux forces (en noir) dépend donc de sa position sur la Terre, elle est :
- nulle au centre de la Terre (point O)

- dirigée vers la Lune au zénith (point Z)
- dirigée à l'opposée de la Lune au nadir (point N)
- dirigée plus ou moins vers le centre de la Terre pour les points situés perpendiculairement à l'axe ZN.

Lorsque la force résultante est dirigée vers le centre de la Terre, la surface des océans a tendance à baisser créant une basse-mer (BM) et à l'inverse lorsque la force est dirigée vers le ciel (au zénith et au nadir) la surface des océans a tendance à monter créant une pleine-mer (PM).

Les forces en jeu sont extrêmement faibles et induisent des variations de niveau généralement inférieures au mètre dès que l'on s'éloigne des continents. A l'approche des côtes, l'onde de marée peut être considérablement amplifiée par la faible profondeur des eaux et le marnage peut parfois dépasser 10 mètres (17 m en baie de Fundy au Canada et 14.50 m à Granville en Normandie).

Si l'océan était en équilibre avec la force génératrice de la marée, sa surface prendrait la forme d'une ellipse de révolution dont le grand axe serait dirigé vers l'astre. Ce phénomène a reçu le nom de marée statique.

Dans la réalité, la marée est bien plus compliquée, mais elle est très bien modélisée en prenant en compte non seulement la lune mais le soleil et les autres astres.

Force d'entraînement du vent

Le vent soufflant à la surface de l'eau exerce sur la pellicule d'eau superficielle une force de frottement qui dépend de la densité de l'air, la vitesse du vent, de la « rugosité » de la surface de la mer (plus ou moins lisse), de la stratification thermique au voisinage de l'interface (stabilité ou instabilité des masses d'air entraînant une turbulence accrue) et autres causes encore.

Dès 1905, Ekman avait établi qu'une formule, fondée sur des conditions de « dimensions » (voir chapitre suivant), convenait pour une gamme étendue de vitesses :

$$F = k \rho_{air} |\vec{w}|^2$$

avec w vitesse du vent

Le coefficient k dépend de V qui varie avec l'altitude, hauteur au dessus de l'eau. Généralement, par convention, on se réfère à la vitesse du vent à 10m au-dessus du niveau de l'eau.

L'essentiel de la circulation superficielle est due au vent ; on conçoit l'intérêt d'une étroite collaboration entre météorologistes et océanographes.

Le mouvement provoqué par le vent initialement cantonné à la couche superficielle, se propage vers le bas par viscosité et turbulence et engendre des courants appelés « courants de dérive ». (Voir Partie Dynamique côtière).

Forces liées à la pente de la surface de la mer

À proximité des côtes, des élévations ou des abaissements du niveau marin se rencontrent suite à l'action d'entraînement dû au vent. On peut également rencontrer ce genre de situation ailleurs à cause des effets de pression atmosphérique exercée par l'atmosphère.

Il apparaît donc une pente de surface qui provoque des courants appelés « courants de pente ».

1.5 Forces secondaires

1.5.1 Force de Coriolis

Voir rappels du début de cours.

La force de Coriolis est liée à la rotation de la Terre ; elle s'exerce perpendiculairement au mouvement et est dirigée sur la droite du mouvement dans l'hémisphère Nord.

L'expression des composantes de la force de Coriolis par unité de masse dans un repère terrestre

local (axes liés à la Terre):

$$\begin{aligned} \text{sur } O_x \text{ (vers l'Est)} & \quad + 2 \omega v \sin \phi - 2 \omega w \cos \phi \\ \text{sur } O_y \text{ (vers le Nord)} & \quad - 2 \omega u \sin \phi \\ \text{sur } O_z \text{ (vers le zénith)} & \quad + 2 \omega u \cos \phi \end{aligned}$$

avec ω vecteur rotation instantanée du référentiel terrestre (i.e. rotation de la terre), ϕ latitude au point d'observation/étude, et u , v et w composantes du vecteur vitesse.

Rappel : La terre effectue un tour complet (2π radians) vers l'est, en un jour sidéral, soit 86164 secondes (et non $24 \times 3600s = 86\,400s$). On a donc : $\omega = 0,729 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$.

Les valeurs numériques montrent que la composante verticale (selon O_z) de la force de Coriolis est négligeable devant la pesanteur. On peut en outre négliger généralement les vitesses verticales (w) devant les vitesses horizontales (u et v) de telle sorte que les composantes de la force de Coriolis par unité de masse s'écrivent simplement :

$$\begin{aligned} \text{sur } O'x' \text{ (vers l'Est)} : & \quad + 2 \omega v \sin \phi = fv \\ \text{sur } O'y' \text{ (vers le Nord)} : & \quad - 2 \omega u \sin \phi = -fu \\ \text{sur } O'z' \text{ (vers le zénith)} : & \quad 0 \end{aligned}$$

On pose $f = 2\omega \sin \phi$; f est appelé facteur de Coriolis.

1.5.2 Forces de frottement dues à la viscosité et équations de Navier-Stokes

La viscosité (ou frottement interne) est une propriété commune à tous les fluides **réels** (c'est à dire « non parfaits »), qui tend à s'opposer aux irrégularités de vitesse dans une masse de fluide en mouvement.

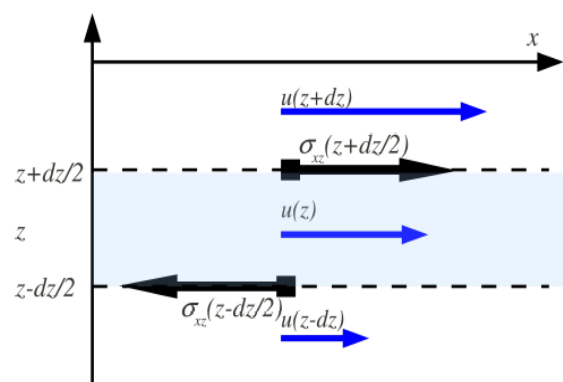
La viscosité mesure la résistance d'un fluide à l'écoulement. Elle est due aux frottements entre les particules fluides en mouvement. Les forces de frottement par unité de surface sont appelées tensions de frottement, ou de cisaillement. Ces forces sont tangentielles, par opposition aux forces de pression qui sont normales aux surfaces considérées.

Parmi les forces extérieures, on a signalé l'action du vent sur la couche superficielle. Ce mouvement va, par viscosité, se transmettre aux couches sous-jacentes de l'eau.

Supposons que le mouvement se fasse rigoureusement par tranches planes, par exemple, horizontales, séparées d'une distance infinitésimale dz et animées de vitesses dans la même direction mais inégales en grandeur et ne dépendant que de z . On écrit

$$\sigma_{xz} = \sigma_{xz}(z)$$

la contrainte tangentielle dans la direction x (indiquée par le premier indice) générée par la viscosité entre les couches superposées sur la verticale (deuxième indice) .



Par le principe d'action et réaction, la force qui s'exerce sur la couche inférieure est égale en

intensité et opposée en direction par rapport à la force qui s'exerce sur la couche supérieure. En considérant la couche centrée à la profondeur z , la contrainte visqueuse exercée par la couche supérieure sera $\sigma_{xz} = \sigma_{xz}(z+dz/2)\vec{i}$ avec \vec{i} vecteur unitaire en direction x , tandis que celle exercée par la couche inférieure sera $-\sigma_{xz}(z-dz/2)\vec{i}$. Le signe positif indique que la couche supérieure tend à entraîner la couche de référence vers les x positifs et celle inférieure tend à la freiner. Il faut noter aussi que, bien que la couche de référence soit sujette à un couple de forces, elle ne tourne pas car elle est bloquée dans sa position par les autres couches qui l'entourent. La force visqueuse par unité de volume qui agit sur la couche dans la direction \vec{i} s'écrit :

$$\rho \vec{F}_{v\vec{i}} = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \vec{i}.$$

De quoi dépend la contrainte visqueuse σ_{xz} ? L'hypothèse simple, formulée par Newton, est qu'elle est proportionnelle au cisaillement de la vitesse (en anglais *shear*) :

$$\sigma_{xz} = \mu \frac{\partial u}{\partial z}.$$

avec une constante de proportionnalité μ appelée viscosité moléculaire dynamique (avec unités $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$ ou Pa s), à estimer empiriquement. La science des fluides non newtoniens s'appelle la rhéologie.

La suite est donc valable pour les **fluides dits newtoniens**.

Finalement, si on remplace σ_{xz} dans la première équation, la force visqueuse par unité de volume qui agit sur la couche suivant \vec{i} s'écrit, dans la direction \vec{i} :

$$\vec{F}_{v\vec{i}} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \vec{i} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \vec{i}$$

avec ν appelée viscosité moléculaire cinématique (avec unités $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$).

Pour préciser les forces de frottement dans le cas d'un écoulement tridimensionnel il faut prendre en compte les trois composantes de la force de frottement et, du fait qu'elles agissent sur les trois directions x , y et z , cela conduit à introduire le tenseur des contraintes

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}.$$

Si de nouveau on utilise l'hypothèse de Newton on peut calculer les éléments du tenseur de la façon suivante:

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \mu \frac{\partial u}{\partial x} & \mu \frac{\partial u}{\partial y} & \mu \frac{\partial u}{\partial z} \\ \mu \frac{\partial v}{\partial x} & \mu \frac{\partial v}{\partial y} & \mu \frac{\partial v}{\partial z} \\ \mu \frac{\partial w}{\partial x} & \mu \frac{\partial w}{\partial y} & \mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix},$$

Comme dans chaque direction, il y a trois termes, la notation vectorielle pour la force visqueuse devient :

$$\vec{F}_v = \nu \vec{\nabla}^2 \vec{v} = \nu \Delta^2 \vec{v}$$

Il est très important de se rappeler que cette notation est valable **exclusivement** pour un fluide newtonien, i.e. avec viscosité linéaire proportionnelle au cisaillement de la vitesse, et incompressible (NB: pour le détail des calculs pour le cas général, voir l'encadré ci-dessous).

Dans le cas de ces approximations, les équations dites de Navier-Stokes s'écrivent sous forme vectorielle

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g} - 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{v}$$

Toujours dans le repère terrestre local (non galiléen) utilisé jusqu'à présent, cette équation peut s'écrire sous forme développée :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f v + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f u + \nu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

Par convention, on définit comme « équations de l'hydrodynamique » le système composé des trois équations précédentes (équations de Navier-Stokes) et de l'équation de continuité ci-dessous :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

Si on ajoute la condition d'incompressibilité :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \rho = 0$$

l'équation de la continuité se simplifie et devient :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

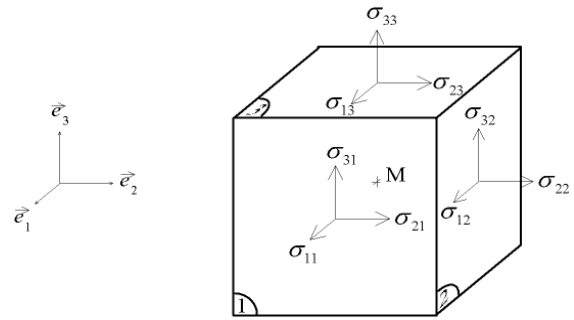
Il y a donc 5 inconnues : les trois composantes de la vitesse u , v , et w , la pression p et la masse volumique ρ et il y a 5 équations à résoudre : le système est donc fermé.

Dans la pratique de la modélisation de la circulation océanique, en plus de ces variables, il est possible de déterminer la température et la salinité au sein du fluide avec des équations de transport.

Les forces externes n'interviennent pas directement dans les équations. La force due à la pente de surface libre intervient au niveau du gradient de pression. La force génératrice de la marée est rarement introduite dans les modèles. On utilise plutôt l'impact que la marée a sur l'élévation de surface libre, i.e. une variation temporelle, somme de plusieurs ondes sinusoïdales. Quant aux forces de frottements dues au vent, elles sont prises en compte dans le terme de frottement, au niveau de la surface libre.

CONTRAINTES VISQUEUSES POUR UN FLUIDE NON-NEWTONIEN ET COMPRESSIBLE

On note ce **tenseur des contraintes** σ . Les coefficients sur la diagonale σ_{ii} correspondent aux contraintes normales à la surface dS , donc à la force de pression. Les coefficients hors de la diagonale σ_{ij} correspondent aux contraintes tangentielles, de frottement ou de cisaillement.



On peut obtenir l'équation d'Euler (ou de Navier-Stokes) à partir de la 2^{ème} loi de Newton de la façon suivante, en partant de la dérivée lagrangienne.

La variation temporelle de la quantité de mouvement est égal à l'ensemble des forces de volume et de surface.

$$\frac{d(\iiint \rho \vec{V} dv)}{dt} = \iiint \rho \vec{f} dv + \iint \vec{\sigma} \cdot n dS$$

C'est une dérivée lagrangienne, dans laquelle ρdv est constant le long de la trajectoire, du coup, on peut écrire le terme de gauche sous la forme :

$$\frac{d(\iiint \rho \vec{V} dv)}{dt} = \iiint \rho \frac{d\vec{V}}{dt} dv$$

Donc l'équation dérivée de la deuxième loi de Newton devient, en appliquant la loi d'Ostrogradsky (Gauss) :

$$\iiint \rho \frac{d\vec{V}}{dt} dv = \iiint \rho \vec{f} dv + \iiint \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dv$$

soit :

$$\iiint \rho \frac{d\vec{V}}{dt} dv = \iiint \rho \vec{f} dv + \iiint \text{div} \vec{\sigma} dv$$

L'égalité est vraie sans l'intégration sur le volume :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{f} + \text{div} \vec{\sigma}$$

On peut extraire du tenseur des contraintes σ la partie diagonale, correspondant à la pression :

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - p \delta_{ij}$$

où δ_{ij} représente le tenseur de Kronecker (=1 si $i=j$, et =0 si $i \neq j$). Le signe - qui apparaît devant la pression indique que le fluide au repos est généralement en compression.

σ' est lié à la déformation des éléments de fluide. On pourrait aussi démontrer que le tenseur σ' est symétrique.

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{f} + \overrightarrow{\text{div}}(\vec{\sigma}' - p\delta_{ij})$$

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{f} + \overrightarrow{\text{div}}\vec{\sigma}' - \overrightarrow{\text{grad}}p \quad \text{qui est l'équation de Navier-Stokes.}$$

Pour un fluide newtonien (définition: les composantes de σ' varient linéairement avec les valeurs instantanées des déformations de l'écoulement) **et incompressible**, la loi de conservation $\text{div}\vec{V} = 0$ simplifie l'écriture du tenseur σ' :

$$\text{div}\sigma' = \mu \nabla^2 \vec{v}$$

Le terme μ est la viscosité moléculaire dynamique

Dans l'équation de Navier-Stokes, la force de viscosité, indiquée par $\text{div}\sigma'$ ou $1/\rho \text{div}\sigma'$ correspond donc à $\mu \nabla^2 \vec{v}$ ou $\nu \nabla^2 \vec{v}$ ($\nu = \mu/\rho$ correspond à la viscosité cinématique moléculaire), que l'équation soit divisée ou non par ρ :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}p + \rho \vec{g} - 2\rho \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r + \overrightarrow{\text{div}}\vec{\sigma}'$$

donne:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}p + \rho \vec{g} - 2\rho \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r + \mu \nabla^2 \vec{v}$$

Remarque

Une autre classification des forces peut exister, en correspondance avec ce qui a été fait dans la section de rappels. Les forces relatives dans un repère local non galiléen sont composées: des forces absolues (du repère galiléen; i.e. frottement, pression et gravitation), de la force d'entraînement centrifuge et de la force de Coriolis.

Forces relatives =	Forces absolues +			Pseudo-forces	
	Forces absolues +			Force d'entraînement axifuge	+ Force de Coriolis
	frottement	pression	gravitation		
			pesanteur		
	secondaire	interne	interne	interne	secondaire

En effet, quand on parle de pesanteur, on inclut la gravité, correspondant à une composante des forces absolues, et la force d'entraînement. Quant à la force de Coriolis, elle est désignée comme une force secondaire dans la classification de la présente section.

+ voir note précédente sur les forces externes.

1.6 Écoulement turbulent et équations de Reynolds (voir détails en TD)

La turbulence désigne l'état de l'écoulement d'un fluide, dans lequel la vitesse présente en tout point un caractère tourbillonnaire : tourbillons dont la taille, la localisation et l'orientation varient constamment. Les écoulements turbulents se caractérisent donc par une apparence très désordonnée, un comportement difficilement prévisible et la coexistence de nombreuses échelles spatiales et temporelles. De tels écoulements apparaissent lorsque la source d'énergie cinétique qui met le fluide en mouvement est relativement intense devant les forces de viscosité que le fluide oppose pour se déplacer. À l'inverse, on appelle laminaire le caractère d'un écoulement régulier.

Si on fait plusieurs fois une même expérience pour mesurer la vitesse, on n'obtiendra pas les mêmes valeurs. Alors, plutôt que de rechercher la vitesse instantanée, obtenue avec les équations de Naviers-Stokes vues précédemment, on cherche une vitesse lissée dans le temps, c'est à dire moyennée sur une période de temps dépendant du phénomène étudié et on décompose la vitesse en une partie moyenne et un écart à la moyenne :

$$u = \bar{u} + u' \quad \text{avec} \quad \bar{u}' = 0$$

Cette technique s'appelle **décomposition de Reynolds**.

Pour l'équation de continuité dans le cadre de l'hypothèse d'incompressibilité, on a :

$$\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}+v')}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{w}+w')}{\partial z} = 0 \quad .$$

On obtient pour les valeurs moyennes et pour les écarts :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= 0 \quad (\text{par différence } u - \bar{u}) \end{aligned}$$

Pour les équations de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial t} + (\bar{u}+u') \frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial x} + (\bar{v}+v') \frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial y} + (\bar{w}+w') \frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f(\bar{v}+v') + \nu \left[\frac{\partial^2(\bar{u}+u')}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bar{u}+u')}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\bar{u}+u')}{\partial z^2} \right] \\ \frac{\partial(\bar{v}+v')}{\partial t} + (\bar{u}+u') \frac{\partial(\bar{v}+v')}{\partial x} + (\bar{v}+v') \frac{\partial(\bar{v}+v')}{\partial y} + (\bar{w}+w') \frac{\partial(\bar{v}+v')}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f(\bar{u}+u') + \nu \left[\frac{\partial^2(\bar{v}+v')}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bar{v}+v')}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\bar{v}+v')}{\partial z^2} \right] \\ \frac{\partial(\bar{w}+w')}{\partial t} + (\bar{u}+u') \frac{\partial(\bar{w}+w')}{\partial x} + (\bar{v}+v') \frac{\partial(\bar{w}+w')}{\partial y} + (\bar{w}+w') \frac{\partial(\bar{w}+w')}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g + \nu \left[\frac{\partial^2(\bar{w}+w')}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bar{w}+w')}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\bar{w}+w')}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

En TD, il sera démontré qu'en appliquant l'hypothèse que la moyenne des écarts est nulle on obtient

$u \frac{\partial u}{\partial x} = \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}}$ et de même pour les autres composante y et z. Ainsi les équations deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y}} + \overline{w' \frac{\partial u'}{\partial z}} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f \bar{v} + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right] \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \overline{u' \frac{\partial v'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial v'}{\partial y}} + \overline{w' \frac{\partial v'}{\partial z}} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - f \bar{u} + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \right] \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \overline{u' \frac{\partial w'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial w'}{\partial y}} + \overline{w' \frac{\partial w'}{\partial z}} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - g + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

Des nouveaux termes apparaissent : ils correspondent aux échanges d'énergie liées à la turbulence.

Or, ajoutant à chaque équation la divergence des écarts, qui est nulle, multipliée par l'écart de la composante, les termes tels que $\overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}}$ peuvent s'écrire : $\frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x}$ (voir TD). Les termes $\overline{u'u'}, \overline{u'v'}$ etc.. ne sont pas nuls et sont appelés **tensions de Reynolds**. Ils constituent un tenseur à 9 éléments, dit **tenseur de Reynolds** :

$$\bar{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{u'u'} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'v'} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'w'} \end{bmatrix} .$$

Ce tenseur est très similaire à celui des contraintes dues à la viscosité moléculaire, alors J.V. Boussinesq en s'inspirant de ce que Newton avait proposé pour la viscosité moléculaire, introduisit le concept de *viscosité due à la turbulence* et proposa de relier ces tensions de Reynolds aux composantes du gradient des vitesses moyennes de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \overline{u'u'} &= -A_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} ; & \overline{u'v'} &= -A_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} ; & \overline{u'w'} &= -A_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \\ \overline{v'u'} &= -A_x \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} ; & \overline{v'v'} &= -A_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} ; & \overline{v'w'} &= -A_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \\ \overline{w'u'} &= -A_x \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} ; & \overline{w'v'} &= -A_y \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} ; & \overline{w'w'} &= -A_z \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \end{aligned}$$

Contrairement à la viscosité cinématique moléculaire ν , la viscosité turbulente n'est pas une propriété du fluide, mais de l'écoulement. Ainsi les coefficients A (unités $m^2 s^{-1}$) peuvent varier d'un endroit à l'autre de l'écoulement ; en fait, ils dépendent de l'échelle sur laquelle la « moyenne » a été effectuée.

Les équations de Navier-Stokes deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f\bar{v} + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left(A_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right), \\ \frac{d\bar{v}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f\bar{u} + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left(A_x \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right), \\ \frac{d\bar{w}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left(A_x \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_y \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_z \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

qui sont connues aussi comme *RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) equations*.

Enfin, en considérant les coefficients de viscosité turbulente comme constants, bien qu'il s'agit d'une très forte approximation, on peut réécrire les équations sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f\bar{v} + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right] + A_x \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + A_y \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + A_z \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}, \\ \frac{d\bar{v}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f\bar{u} + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \right] + A_x \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + A_y \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + A_z \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2}, \\ \frac{d\bar{w}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right] + A_x \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + A_y \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + A_z \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

1.7 Simplifications

Ces équations peuvent être simplifiées de diverses manières ce qui rend les équations plus faciles à résoudre. Certaines simplifications permettent de trouver des solutions analytiques à des problèmes de dynamique des fluides.

Écoulement stationnaire

Une autre simplification des équations de la dynamique des fluides est de considérer toutes les propriétés du fluide comme étant constantes dans le temps. Ceci est applicable à de nombreux problèmes divers, tels que la poussée ou la traînée d'une aile ou un flux traversant un tuyau. Les équations de Navier-Stokes et celles d'Euler deviennent alors plus simples.

Approximation hydrostatique

L'océan est une couche d'eau « peu profonde » par rapport à son étendue horizontale. Du coup, les échelles verticales sont généralement très inférieures aux échelles horizontales. Cela signifie que dans l'équation de Navier-Stokes concernant la composante verticale, on ne conserve que les termes de l'équilibre hydrostatique. Cette équation devient alors :

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g$$

et la vitesse verticale est déduite de l'équation de continuité. C'est comme si la pression variait peu que le fluide soit en mouvement ou au repos.

Approximation de Boussinesq

La masse volumique de l'eau de mer varie peu dans l'espace et dans le temps autour d'une valeur moyenne : $\rho = \rho_0 + \rho'(x, y, z, t)$. La masse volumique est considérée comme constante lorsqu'elle intervient avec les quantités de mouvement, mais sa variation est prise totalement en compte quand elle intervient dans le terme de flottabilité.

Hypothèse d'incompressibilité

La masse volumique du fluide peut varier de particule à particule, donc le fluide n'est pas forcément homogène, mais

chaque particule conserve sa propre masse volumique pendant le mouvement, i.e. sa dérivée lagrangienne est nulle $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho = 0$

Avec cette hypothèse l'équation de continuité se simplifie sous la forme : $\nabla \cdot \vec{v} = 0$

C'est une hypothèse moins contraignante que de considérer le fluide comme homogène et stationnaire (i.e. $\rho(x, y, z, t) = \text{const}$).

2. Analyse des ordres de grandeur et nombres sans dimensions

2.1. Le nombre de Reynolds

Les termes d'advection sont non-linéaires parce qu'ils représentent des dérivées de carrés de vitesse
 (e.g. $u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x}$), ou le produit de différentes composantes de la vitesse et de leurs dérivées
 (e.g. $v \frac{\partial u}{\partial y}$).

Cette équation est instantanée et donc u , v et w présentent des variations (ou perturbations) au cours du temps. A cause de ces termes non-linéaires, une faible perturbation peut induire une grande fluctuation.

Ces termes peuvent engendrer une instabilité quand ils sont « suffisamment grands » comparés aux termes visqueux qui eux ont tendance à homogénéiser ou gommer les différences de vitesse.

Pour estimer ce que signifie « suffisamment grands », considérons le rapport d'un terme non-linéaire à un terme de tension visqueuse:

$$\frac{u \frac{\partial u}{\partial x}}{\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

Si l'on analyse les dimensions, on voit qu'il s'agit d'un nombre sans dimension.

Si l'on considère u et ∂u comme étant de l'ordre de U (échelle de vitesse typique) et ∂x de l'ordre de L (échelle de longueur typique sur laquelle la vitesse U varie) le rapport précédent devient:

$$\frac{\frac{U^2}{L}}{\nu \frac{U}{L^2}} = \frac{UL}{\nu} = Re$$

et est appelé nombre de Reynolds pour un écoulement fluide.

Re détermine le caractère laminaire ou turbulent de l'écoulement. Si $Re \geq 10^5$ l'écoulement est turbulent. Pratiquement tous les mouvements océaniques sont des écoulements turbulents. Par exemple, pour le Gulf Stream on a $U = 1 \text{ m/s}$, $L = 100 \text{ km} = 10^5 \text{ m}$, $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ donc, $Re = 10^{11}$.

Les effets non linéaires sont très grands par rapport aux termes moléculaires (visqueux). En fait, en mer ouverte, on peut toujours négliger les effets moléculaires visqueux. Ils deviennent importants au voisinage immédiat de parois solides et, ôtant de l'énergie à l'écoulement turbulent aux petites échelles, l'empêchent de s'amplifier sans limitation. Les effets moléculaires visqueux sont importants pour les faibles valeurs de Re , ie pour les faibles valeurs de u et/ou L .

2.2. Analyses des ordres de grandeur des termes des équations

"Scaling" est un terme anglais dont la traduction peut être adimensionalisation. Pour l'application océanographique, on regarde l'ordre de grandeur des différents termes des équations du mouvement, pour effectuer des simplifications. On considère les deux cas de la circulation générale et de la circulation de moyenne échelle.

Circulation générale

Pour la circulation générale de grande échelle à l'intérieur des océans, loin des couches limites latérales, de surface et de fond, on a les ordres de grandeur suivants:

$$L = 1000 \text{ km} = 10^6 \text{ m}, H = 1000 \text{ m} = 10^3 \text{ m}, U = 10^{-2} \text{ ms}^{-1}.$$

La vitesse verticale est estimée à partir de l'équation de continuité:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{W}{H} \approx \frac{U}{L} \quad \text{donc } W = \frac{UH}{L} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$$

Pour obtenir les ordres de grandeur des coefficients de viscosité turbulente, on impose aux termes de frottement d'être du même ordre de grandeur que les termes non linéaires:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \approx A_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \frac{U^2}{L} = A_x \frac{U}{L^2}, \quad A_x = UL = 10^{-2} 10^6 = 10^4 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad \text{et}$$

$$w \frac{\partial u}{\partial z} \approx A_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \frac{WU}{H} = A_z \frac{U}{H^2}, \quad A_z = WH = 10^{-5} 10^3 = 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

En supposant le mouvement comme stationnaire, les équations de la quantité de mouvement deviennent alors :

- pour l'horizontale

$$+u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv + A_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$+u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu + A_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_y \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + A_z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

avec ordres de grandeurs

$$\frac{U^2}{L} \quad \frac{U^2}{L} \quad \frac{WU}{H} = ? \quad f_o U \quad A_x \frac{U}{L^2} \quad A_y \frac{U}{L^2} \quad A_z \frac{U}{H^2}$$

en remplaçant

$$10^{-10} \quad 10^{-10} \quad 10^{-10} = ? \quad 10^{-6} \quad 10^{-10} \quad 10^{-10} \quad 10^{-10}$$

- pour la verticale

$$+u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + A_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + A_z \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

avec ordres de grandeurs

$$\frac{UW}{L} \quad \frac{UW}{L} \quad \frac{W^2}{H} = ? \quad g \quad A_x \frac{W}{L^2} \quad A_x \frac{W}{L^2} \quad A_z \frac{W}{H^2}$$

en remplaçant

$$10^{-13} \quad 10^{-13} \quad 10^{-13} = ? \quad 10 \quad 10^{-13} \quad 10^{-13} \quad 10^{-13}$$

En conclusion, le terme de pression, qu'on ne sait pas estimer, doit être du même ordre de grandeur que le terme de Coriolis: c'est l'équilibre géostrophique sur l'horizontale et l'équilibre hydrostatique sur la verticale.

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \end{aligned}$$

Circulation « moyenne échelle »

Pour la circulation « moyenne échelle » les ordres de grandeur sont les suivants :

$$L = 100 \text{ km} = 10^5 \text{ m}, \quad H = 1000 \text{ m} = 10^3 \text{ m}, \quad U = 10^{-1} \text{ ms}^{-1}, \quad T \approx 10 \text{ jours} \approx 10^6 \text{ s}$$

La vitesse verticale est estimée à partir de l'équation de continuité:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{W}{H} &\approx \frac{U}{L} \quad \text{donc} \quad W = \frac{UH}{L} = 10^{-3} \text{ m s}^{-1} \end{aligned}$$

Pour obtenir les ordres de grandeur des coefficients de viscosité turbulente, on impose aux termes de frottement d'être du même ordre de grandeur que les termes non linéaires:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} &\approx A_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{U^2}{L} &= A_x \frac{U}{L^2}, & A_x &= UL = 10^{-1} 10^5 = 10^4 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad \text{et} \\ w \frac{\partial u}{\partial z} &\approx A_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} & \frac{WU}{H} &= A_z \frac{U}{H^2}, & A_z &= WH = 10^{-3} 10^3 = 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

- pour la verticale

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + A_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + A_z \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

avec ordres de grandeurs

$$\frac{W}{T} \quad \frac{UW}{L} \quad \frac{UW}{L} \quad \frac{W^2}{H} = ? \quad g \quad A_x \frac{W}{L^2} \quad A_x \frac{W}{L^2} \quad A_z \frac{W}{H^2}$$

en remplaçant

$$10^{-9} \quad 10^{-9} \quad 10^{-9} \quad 10^{-9} = ? \quad 10 \quad 10^{-9} \quad 10^{-9} \quad 10^{-9}$$

L'équilibre est encore hydrostatique puisque le terme de pression doit équilibrer g .

- pour l'horizontale

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f v + A_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

avec ordres de grandeurs

$$\frac{U}{T} \quad \frac{U^2}{L} \quad \frac{U^2}{L} \quad \frac{WU}{H} = ? \quad fU \quad A_x \frac{U}{L^2} \quad A_y \frac{U}{L^2} \quad A_z \frac{U}{H^2}$$

en remplaçant

$$10^{-7} 10^{-7} \quad 10^{-7} \quad 10^{-7} = ? \quad 10^{-5} \quad 10^{-7} \quad 10^{-7} \quad 10^{-7}$$

La géostrophie n'est satisfaite qu'à quelques pour-cents près: c'est un équilibre quasi-géostrophique.

2.3. Nombre de Rossby et nombre d'Ekman

L'importance relative des termes non linéaires par rapport au terme de Coriolis est appelé nombre de Rossby:

$$R_o = \frac{U^2/L}{fU} = \frac{U}{fL}$$

où U , L et f sont les ordres de grandeurs respectifs pour la vitesse horizontale, l'échelle spatiale horizontale et le facteur de Coriolis.

Si $R_o \ll 1$ les termes non linéaires sont négligeables par rapport au terme de Coriolis (géostrophie ou quasi-géostrophie).

Si $R_o \gg 1$ le terme de Coriolis est négligeable par rapport aux termes non linéaires. C'est le cas des mouvements à petites périodes (hautes fréquences) tels que les vagues et la houle.

Si $R_o \approx 1$ on ne peut rien négliger. C'est le cas des mouvements à période proche de la période d'inertie, tels que le courant d'inertie, la marée, les ondes internes de grand longueur d'onde.

Le nombre d'Ekman vertical compare le terme de frottement vertical au terme de Coriolis:

$$Ek = \frac{\nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}{f \nu} = \frac{\nu \frac{U}{H^2}}{f U} = \frac{\nu}{f H^2}$$

Ce nombre est souvent faible, mais l'importance du frottement est essentielle dans les couches limites.

Il est très important de noter que en océanographie, étant donné que tous les écoulements sont turbulents, dans la définition du nombre de Reynolds et du nombre d'Ekman on remplace la viscosité moléculaire par la viscosité turbulente:

$$Re_h^{turb} = \frac{UL}{A_h} \quad Re_z^{turb} = \frac{UL}{A_z} \quad \text{et} \quad Ek_z^{turb} = \frac{A_z}{fH^2} .$$

Dans ces derniers cas il serait plus correct de parler du nombre de Reynolds turbulent et du nombre d'Ekman turbulent .

3. Courants sans frottement

3.1 L'écoulement géostrophique

La géostrophie traduit l'équilibre entre la force de pression horizontale et la force de Coriolis. On considère donc ici que les courants sont permanents et que la tension du vent et autres termes de frottement peuvent être négligés. C'est la circulation générale. L'écoulement géostrophique est donc défini par ce système d'équations :

$$\begin{aligned}fv &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\fu &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho g\end{aligned}$$

Les deux premières équations traduisent l'équilibre géostrophique, la troisième est l'équation de l'hydrostatique. Ces équations sont obtenues à partir des équations de Navier-Stokes, dans l'approximation de Boussinesq, en supprimant l'accélération et les termes de frottement. Les courants qui satisfont à ce système sont appelés courants géostrophiques.

Tous les grands courants océaniques permanents, tels que le Gulf Stream, le courant Antarctique Circumpolaire, les Grands Courants Equatoriaux sont, en première approximation en équilibre géostrophique. Et le Courant Nord au large de Marseille, est-il en équilibre géostrophique ? Voir le projet de modélisation de P.Recoules ([PDF du rapport](#) et [PDF de la présentation](#))

Imaginons une situation simplifiée: de l'eau de mer de masse volumique constante ρ_o occupant un bassin océanique et une pente à la surface de l'eau.

Selon la loi de l'hydrostatique la pression en un point du fluide est simplement la pression due au poids de la colonne d'eau située au dessus de ce point, agissant par unité de surface :

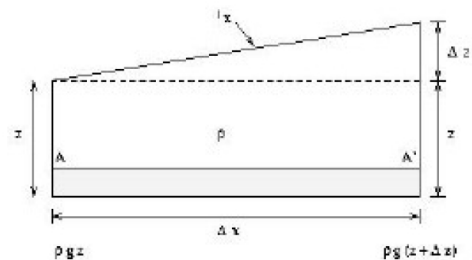
$$P_1 = \rho_o g z \quad ; \quad P_2 = \rho_o g (z + \Delta z)$$

Le terme de gradient de pression suivant x s'écrit :

$$\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p}{\partial x} \simeq \frac{1}{\rho_o} \frac{P_2 - P_1}{\Delta x} = \frac{1}{\rho_o} \frac{\rho_o g (z + \Delta z) - \rho_o g z}{\Delta x} = g \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

En approximation hydrostatique et pour un fluide homogène le gradient de pression est créé par une différence de niveau de hauteur de la colonne d'eau. On peut ainsi calculer l'intensité du courant en approximation géostrophique

$$\begin{aligned}v &\approx +\frac{g}{f} \frac{\Delta z}{\Delta x} \\u &\approx -\frac{g}{f} \frac{\Delta z}{\Delta y}\end{aligned}$$



En générale, intégrant l'équation de l'équilibre hydrostatique entre un niveau de référence $-z_o$ et la surface de la mer η on obtient l'expression suivante pour la pression

$$\int_{-z_o}^{\eta} dp = -\rho_0 g \int_{-z_o}^{\eta} dz$$

$$[p]_{-z_o}^{\eta} = -\rho_0 g [z]_{-z_o}^{\eta}$$

$$p_{\eta} - p_{-z_o} = -\rho_0 g [\eta + z_o]$$

$$p_{-z_o} = p_{\eta} + \rho_0 g [\eta + z_o]$$

et, si on remplace dans les termes de gradient horizontal de pression, étant la pression atmosphérique p_{η} et le niveau de référence $-z_o$ des constantes, on obtient

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = g \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

avec η la hauteur de la surface de la mer (dans le gérgon océanographique: surélévation ou *ssh* - *sea surface height*), calculée par rapport au niveau moyen de la mer (ou au géoïde).

Le gradient de pression est le même partout à l'intérieur du fluide. Donc si aucune autre force n'agit, le fluide entier doit être accéléré des hautes vers les basses pressions.

En incluant ces formules dans le système d'équations ci-dessus, on obtient un nouveau système de deux équations

$$fv = g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$fu = -g \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

D'autre part en multipliant la première équation par u et la seconde par v et en les retranchant, il vient :

$$u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \quad \text{i.e.} \quad \vec{v} \cdot \nabla \eta = 0$$

Il résulte de ceci, d'une part que le fluide ne dévale pas la pente des hautes vers les basses pressions, mais tourne autour du dôme de pression. L'écoulement est parallèle aux isobares (perpendiculaire au gradient de pression), et d'autre part la vitesse du courant est proportionnelle à la pente des isobares .

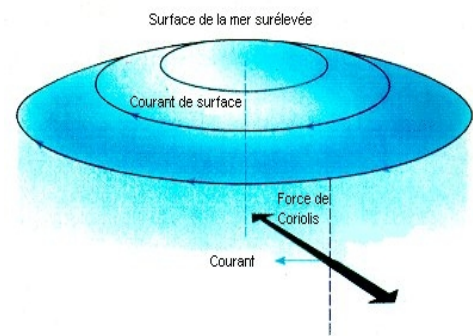
Dans l'hémisphère Nord une pente de la surface de l'eau orientée de l'Est vers l'Ouest crée une force de gradient de pression dirigée vers l'Ouest .

Cette pente crée à l'origine un mouvement des particules d'eau vers l'Ouest, mais dès que la particule entre en mouvement la force de Coriolis vient agir à droite (dans l'Hémisphère Nord) du mouvement.

L'équilibre est atteint lorsque l'écoulement devient perpendiculaire au gradient de pression, et donc parallèle aux isobares .

Dans l'hémisphère nord l'écoulement se fait dans le sens des aiguilles d'une montre autour des hautes pressions, dans le sens inverse autour des basses pressions . Quand on regarde dans la direction de l'écoulement, les hautes pressions sont à droite dans l'hémisphère Nord, à gauche dans l'Hémisphère Sud .

Ce mouvement peut durer indéfiniment (étant donné qu'on néglige les frottements) contrairement à ce qui se passerait en milieu non tournant où les hautes pressions auraient tendance à combler les basses pressions.



Un schéma très simplifié de la circulation de surface dans l'océan global est celui qui consiste à imaginer dans chaque bassin limité par des continents qu'il y a deux grandes recirculations ou gyres, un subtropical anticyclonique et un subpolaire cyclonique. Ce schéma fonctionne bien pour l'Atlantique Nord et le Pacifique Nord qui sont délimités par des côtes, mais pas au Sud où aucune côte n'arrête les courants qui sont circumpolaire. C'est-à-dire que l'on peut naviguer sans interruption et à la même latitude au sud des Océans Atlantique, Pacifique et Indien, autour du continent Antarctique.

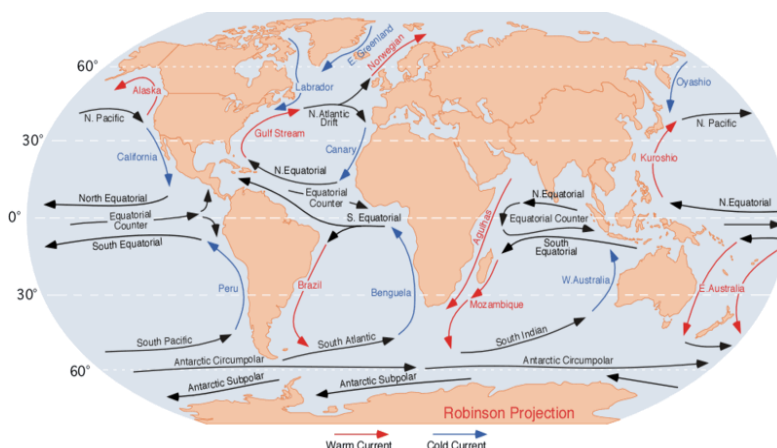
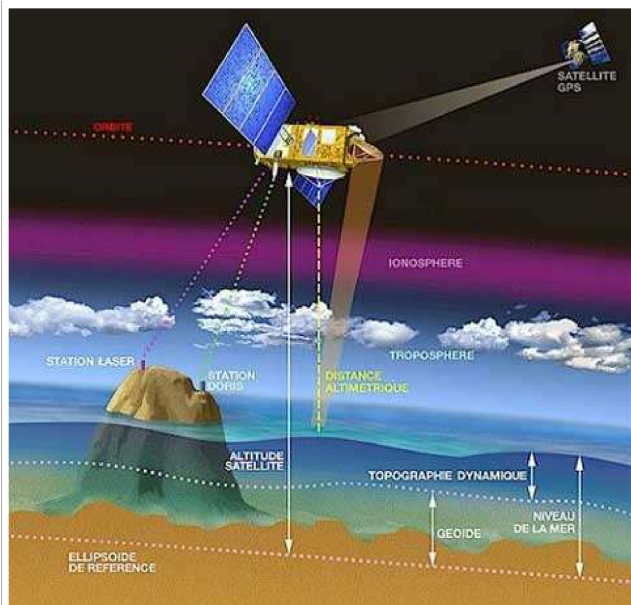


figure tirée de http://en.wikipedia.org/wiki/Ocean_current

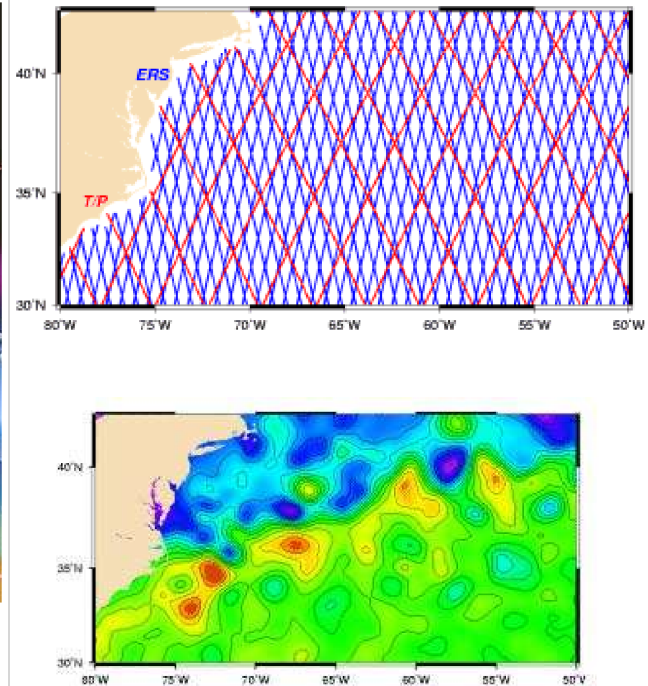
figure tirée de <http://en.wikipedia.org/wiki/Gyre> et modifiée.

Dans la figure ci-dessous est illustré le principe de fonctionnement de l'altimétrie satellite, qui fournit des cartes de *ssh* pour l'océan globale. Ensuite, en utilisant l'approximation géostrophique on peut aussi estimer par satellite les courants de surface.



Aviso.fr

<https://www.futura-sciences.com/sciences/dossiers/astronautique-decouvrir-altimetrie-495/page/5/>



3.2 Le courant d'inertie

Si une particule n'est soumise à aucune force extérieure, son accélération dans un repère d'inertie obéit à la II^{ème} loi de Newton. Les équations du mouvement se simplifient de la façon suivante :

$$\frac{du}{dt} = fv$$

$$\frac{dv}{dt} = -fu$$

en résolvant pour u et en remplaçant dans la deuxième équation avec f constant,

$$v = \frac{1}{f} \frac{du}{dt}$$

$$\frac{1}{f} \frac{d^2u}{dt^2} = -fu \quad \text{i.e.} \quad \frac{d^2u}{dt^2} + f^2u = 0$$

La solution générale de cette dernière équation différentielle du deuxième degré est notamment :

$$u = +V_o \cos(ft + \psi) \quad \text{et si on remplace dans l'équation pour } v$$

$$v = -V_o \sin(ft + \psi)$$

où la vitesse V_o et le déphasage ψ dépendent des conditions initiales.

Ces équations représentent un courant dont la direction tourne en sens des aiguilles d'une montre en faisant un

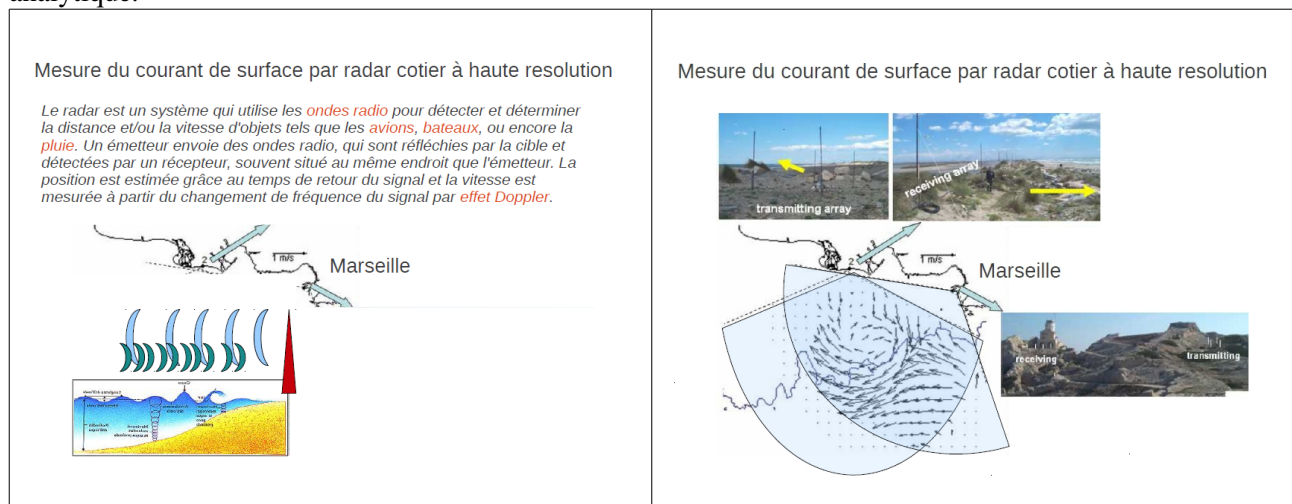
tour complet dans une période dite période inertielle $T = \frac{2\pi}{f}$.

En intégrant de nouveau, avec $u = \frac{dx}{dt}$ et $v = \frac{dy}{dt}$ on obtient la trajectoire :

$$\begin{aligned}x &= x_o + \frac{V_o}{f} \sin(ft + \psi) \\y &= y_o - \frac{V_o}{f} \cos(ft + \psi) \\(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 &= \left(\frac{V_o}{f}\right)^2\end{aligned}$$

Cette dernière formule montre que la trajectoire parcourue par une particule fluides « piégée » dans une oscillation d'inertie, est un cercle de centre (x_o, y_o) et de rayon $|V_o|/f$.

Le mesures effectuées avec un radar côtier par le collègue de l'Université de Toulon confirme ce modèle analytique.



voir animation :

<http://www.mio.univ-amu.fr/~doglioli/DynamiqueOceans/OscillationsInertie.odp>

4. Courants avec frottement

Introduction

Jusqu'à présent, les termes de friction entre les couches de fluides ou entre le fluide et le milieu extérieur au système considéré ont été négligés. Cette hypothèse de travail conduit à découpler le milieu marin du milieu extérieur: action directe du vent à l'interface air-mer, rôle du fond et des côtes sur l'écoulement fluide.

À l'échelle des courants océaniques, c'est-à-dire aux grandes échelles spatiales horizontales, les effets côtiers (latéraux) ne sont délibérément pas pris en compte.

L'action du vent à l'interface air-mer est responsable de nombreux phénomènes marins (mélange des couches superficielles, entraînement des masses d'eau, phénomènes d'upwelling et downwelling). Les interactions entre l'écoulement fluide et le fond jouent un rôle non moins important dans la dynamique des courants et le transport des sédiments.

On a vu que les termes de frottement étaient négligeables à l'intérieur de l'océan. Mais si on veut que l'océan « sente » l'effet de la tension du vent, il doit exister une couche de surface dans laquelle les termes de frottements doivent être pris en compte. Pour en estimer l'épaisseur, on écrit que dans la couche d'Ekman, la friction équilibre la force de Coriolis:

$$fU \simeq A_z \frac{U}{H_E^2}$$

avec $A_z \simeq 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $f \simeq 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, on a $H_E \simeq 10 \text{ m}$.

En effet, les couches d'Ekman de surface et de fond ont une épaisseur typique de quelque dizaines de mètres.

NB : Cette approche qui consiste dans la division de l'océan en différentes couches sur la base de la dynamique de chacune d'entre elles, est une extension aux écoulements géophysiques de la théorie de la couche limite de Prandtl (voir Anderson, 2005).

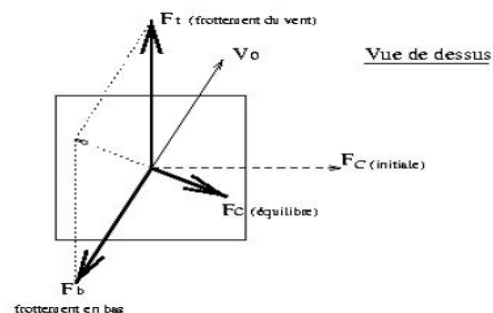
4.1 La spirale d'Ekman

En 1898 le biologiste Nansen observait que les icebergs dans l'océan Arctique déviaient dans une direction à droite de celle du vent.

Pour obtenir une explication qualitative du phénomène, il dessina le diagramme ci-dessous du bilan des forces agissant sur un iceberg en mouvement, traîné par le vent.

Le vent, quand commence à souffler, exerce sur le haut de cet élément une force de frottement F_t et initie un déplacement dans cette direction, qui initie à son tour une force de Coriolis F_{ci} qui va dévier le mouvement vers la droite. Une force de frottement à la base de l'élément fluide F_b s'oppose au déplacement.

Le vent étant supposé constant, un équilibre va être atteint (vitesse V_o) entre les forces F_b , F_c et F_t .



tirée de Daniault (2005), Oceanographie Physique

En 1902, Ekman formula la solution analytique du problème à partir des équations des composantes horizontale du mouvement en état stationnaire, linéarisées et avec viscosité due à la turbulence sur la verticale :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f v - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f u - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

Solution intégrée

On considère la solution du problème comme la somme de deux solutions de deux problèmes séparés.

On prend $\vec{v} = \vec{v}_G + \vec{v}_E$, avec \vec{v}_G vitesse géostrophique et \vec{v}_E vitesse due au forçage du vent, respectivement solutions des deux systèmes suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{Équations géostrophiques} & -f v_G = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ & +f u_G = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{Équations d'Ekman} & +f v_E = +\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\ & -f u_E = +\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \end{array}$$

En intégrant les équations d'Ekman d'une profondeur $-z_E$ où l'effet du vent est négligeable, jusqu'à la surface on obtient

$$\begin{aligned} +f \int_{-z_E}^0 v_E dz &= + \int_{-z_E}^0 \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz = +[\tau_{xz}]_{-z_E}^0 = +[\tau_{x0}] = -\frac{1}{\rho} F_x \\ -f \int_{-z_E}^0 u_E dz &= + \int_{-z_E}^0 \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} dz = +[\tau_{yz}]_{-z_E}^0 = +[\tau_{y0}] = -\frac{1}{\rho} F_y \end{aligned}$$

avec $\vec{F} \equiv (F_x, F_y)$ tension (en anglais *stress*, unités $\text{kg m}^{-1}\text{s}^{-2}$) de frottement du vent horizontale à la surface, dont l'influence se répercute en verticale à l'intérieur de l'océan par viscosité due à la turbulence. Par convention, on prend le signe négatif à indiquer que ce frottement s'exerce de l'atmosphère vers l'océan.

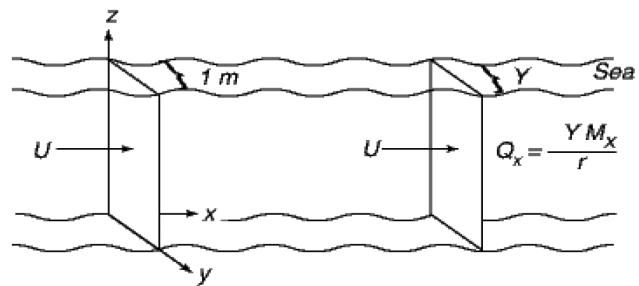
On ré-écrit enfin les équations sous la forme :

$$\begin{aligned} F_x &= -f M_y \quad \text{avec} \quad M_y = \rho_o \int_{z_E}^0 v_E dz \\ F_y &= +f M_x \quad \text{avec} \quad M_x = \rho_o \int_{z_E}^0 u_E dz \end{aligned}$$

$\vec{M} \equiv (M_x, M_y)$ s'appelle transport d'Ekman. L'équation aux dimensions de M_x et M_y donne $[\text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}]$.

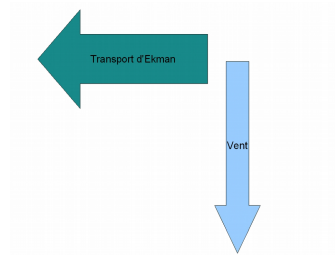
Il s'agit d'un transport de masse, soit la masse d'eau passant à travers un plan vertical large de 1 m et de hauteur z , par unité de temps. On obtient le transport de volume (débit) en divisant ces quantités par la densité et en multipliant par la largeur de la section choisie:

$$Q_x = \frac{\Delta Y M_x}{\rho_o} \qquad Q_y = \frac{\Delta X M_y}{\rho_o}$$



Notons qu'un vent soufflant du Nord ($F_x=0, F_y < 0$), génère un transport de masse vers l'Ouest (dans d'hémisphère Nord où $f < 0$).

C'est toujours l'effet de la force de Coriolis: pour un observateur regardant dans le sens du vent, l'eau va être poussée vers la droite dans l'hémisphère Nord et vers la gauche dans l'hémisphère Sud.



Solution complète (voir détails dans TD8)

Afin d'obtenir les profils verticaux de u_E et v_E dans la couche d'Ekman., il faut utiliser la fermeture newtonienne de la turbulence pour remplacer le terme de tension du vent par le terme de viscosité turbulente en considérant le coefficient de viscosité turbulente comme constant avec la profondeur :

$$\begin{aligned} -fv_E &= A_z \frac{\partial^2 u_E}{\partial z^2} \\ +fu_E &= A_z \frac{\partial^2 v_E}{\partial z^2} \end{aligned}$$

Ensuite, il est avantageux de passer en forme complexe en multipliant par i la deuxième équation et en les additionnant :

$$if(u_E + iv_E) = A_z \frac{\partial^2}{\partial z^2} (u_E + iv_E)$$

ainsi on se retrouve avec une seule variable et une seule équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants, dont l'équation caractéristique est $\lambda^2 - \frac{if}{A_z} = 0$ et la solution générale est $(u_E + iv_E) = C_1 e^{\lambda z} + C_2 e^{-\lambda z}$.

En définissant la profondeur d'Ekma de la façon suivante

$$D_E = \pi \sqrt{\frac{2A_z}{f}}$$

$$\text{on a } \lambda = \pm \sqrt{\frac{if}{A_z}} = \pm \sqrt{2i} \frac{\pi}{D_E} = \pm(1+i) \frac{\pi}{D_E} \text{ et } (u_E + iv_E) = C_1 e^{(1+i)\frac{\pi}{D_E} z} + C_2 e^{-(1+i)\frac{\pi}{D_E} z}.$$

Pour obtenir les valeurs des coefficients C_1 et C_2 on pose les conditions aux limites, i.e. à la surface et au fond.

À la surface ($z = 0$) dans le cas d'un vent qui souffle parallèlement à y , on pose :

$$\tau_{xo} = \left[-A_z \frac{\partial}{\partial z} u_E \right]_{z=0} = 0 \text{ et } \tau_{yo} = \left[-A_z \frac{\partial}{\partial z} v_E \right]_{z=0} = -\frac{1}{\rho} F_y$$

qui en forme complexe donne

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} (u_E + iv_E) \right]_{z=0} = i \frac{F_y}{\rho A_z}.$$

Au fond ($z \rightarrow -\infty$), plus simplement, on a

$$(u_E + iv_E) \rightarrow 0$$

La condition au fond implique $C_2 = 0$ tandis que la première $C_1 = U_o e^{\frac{i\pi}{4}}$ avec $U_o = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{F_y D_E}{\pi \rho A_z}$ vitesse du courant à la surface.

La solution d'Ekman peut alors s'écrire sous forme complexe :

$$u_E + iv_E = U_o e^{\frac{\pi}{D_E} z} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{D_E} z\right)}$$

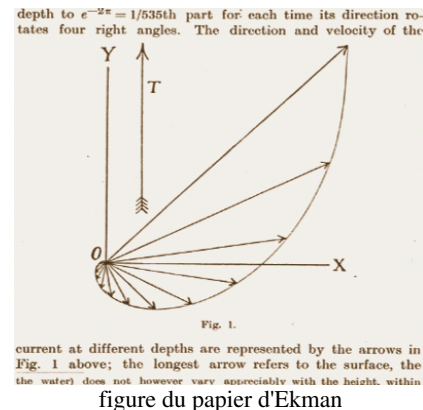
ce qui équivaut à l'écriture par composantes

$$u = U_o e^{\frac{\pi}{D_E} z} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{D_E} z\right)$$

$$v = U_o e^{\frac{\pi}{D_E} z} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{D_E} z\right)$$

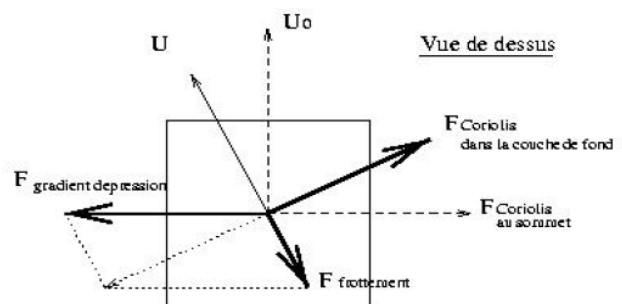
Ces équations indiquent que l'intensité du courant horizontal est maximale à la surface et vaut U_o , et diminue exponentiellement avec la profondeur. La direction du courant à la surface est à 45° de la direction du vent et, avec la profondeur, tourne sur la droite (dans l'hémisphère Nord) jusqu'à se retrouver opposée au courant de surface à la profondeur d'Ekman.

Cette solution a été représentée graphiquement par Ekman sur la figure ci-contre.



Spirale d'Ekman de fond

S'il existe un courant à l'intérieur de l'océan, il doit de même exister une "couche de frottement" permettant de ramener la vitesse à zéro au contact du fond. Un argument qualitatif identique à celui de Nansen permet de prédire que le courant est dévié vers la gauche dans la couche d'Ekman de fond. Tout d'abord, Au dessus de la couche d'Ekman de fond, le courant U_o est en équilibre géostrophique, avec la force de Coriolis agissant à droite (hémisphère nord) et la force du gradient de pression à gauche.



tirée de Danialt (2005), Oceanographie Physique

On suppose que l'écoulement est barotrope, donc le gradient de pression ne dépend pas de la profondeur. En s'approchant du fond, le frottement ralentit l'écoulement; la force de Coriolis, proportionnelle à la vitesse, diminue; la force du gradient de pression, agissant vers la gauche, n'est donc plus totalement équilibrée. L'écoulement est dévié vers la gauche, jusqu'à ce que les forces de Coriolis et de frottement puissent de nouveau équilibrer la force du gradient de pression. Contrairement à l'équilibre géostrophique, la vitesse a une composante dirigée vers les basses pressions. Cet écoulement à travers les isobares implique que les forces de pression produisent un travail qui compense la dissipation visqueuse et permet de maintenir l'écoulement.

Pour obtenir la solution complète représentée ci-contre, il suffit de poser correctement des nouvelles conditions aux limites : au fond la vitesse doit être nulle et à une certaine distance du fond, correspondante à l'épaisseur de la couche limite de fond, la vitesse doit être égale au courant de l'intérieur de l'océan, qui en première approximation peut être considéré géostrophique .

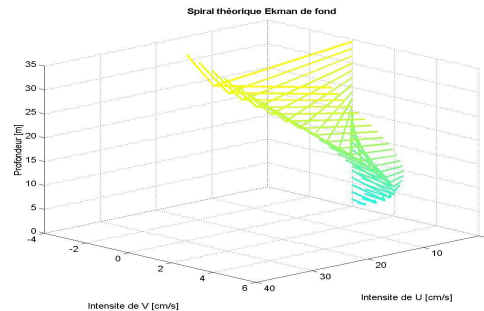
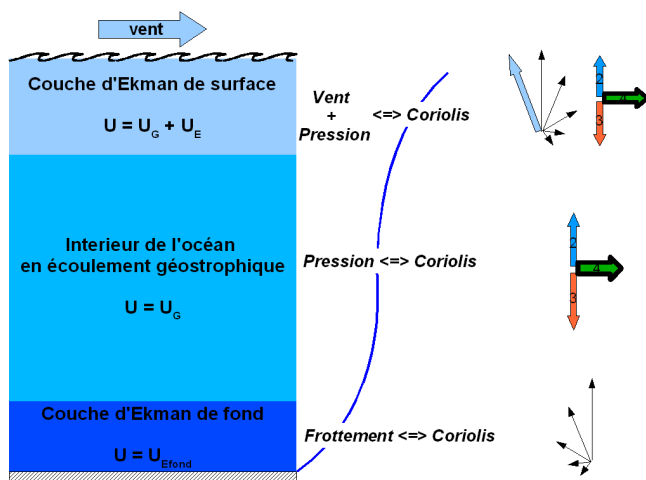


Figure tirée Bricout (2010), rapport de « Projet de Modélisation »

http://www.com.univ-mrs.fr/~doglioli/Rapport_projet_modelisation_RBricout.pdf

Résumé : le système général de courant



Ce système est la combinaison :

- d'une couche d'Ekman de surface
- d'une couche purement géostrophique
- d'une couche d'Ekman de fond

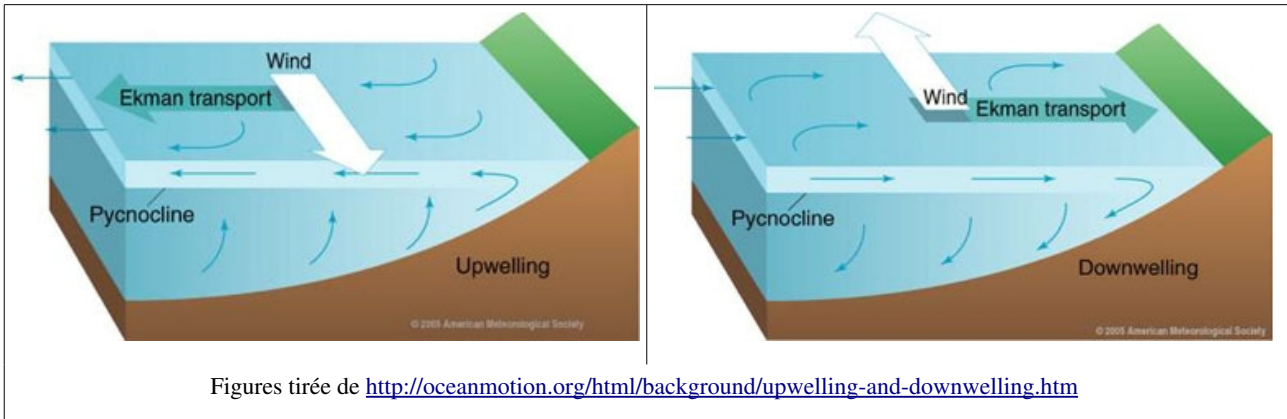
Ce système peut être représenté comme à gauche si la profondeur est largement supérieure à la somme des profondeurs d'influence d'Ekman.

4.2 Upwelling et downwelling

Upwelling est le terme utilisé en océanographie pour décrire le processus par lequel de l'eau de fond est ramenée en surface à cause du vent . Ce phénomène est important d'un point de vue biologique parce que les eaux de fond sont riches en matières nutritives, et deviennent donc très poissonneuses quand elles sont ramenées en surface où le phytoplancton a suffisamment de lumière pour se développer et démarrer la chaîne trophique .

Les zones les plus connues d'upwelling, sont des zones côtières où le vent dominant souffle parallèlement à une côte qui se trouve sur sa gauche : Californie, Pérou, Benguela, Portugal, Maroc, Mauritanie et Sénégal. En effet, selon la théorie d'Ekman le vent a pour effet de pousser les eaux sur sa droite (hémisphère Nord). S'il y a présence de la côte à gauche du vent, elle empêche un transport latéral, une divergence se crée et l'eau de fond est "pompée" pour combler le déficit d'eau en surface.

Le phénomène opposé, le *downwelling*, se passe quand le vent souffle parallèlement à une côte qui se trouve sur sa droite. Alors le transport d'Ekman accumule l'eau à la côte et crée une descente d'eau vers le fond .



Les zones d'upwelling peuvent être identifiées sur une carte de la température de surface (SST, *Sea Surface Temperature*), parce que caractérisées par des températures plus faibles que les eaux ambiantes .

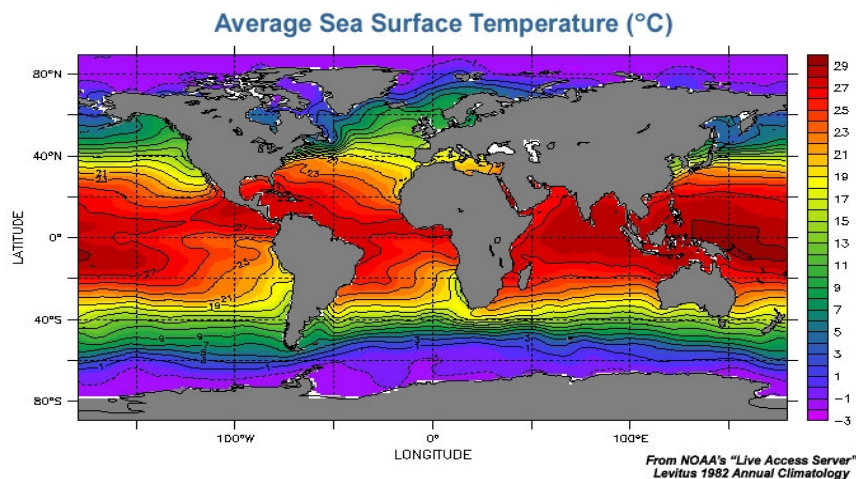


Figure tirée de <http://oceanmotion.org>

On peut également observer des upwellings (appelées aussi "pompage d'Ekman") en plein milieu de l'océan . La tension du vent à la surface de l'océan peut être à l'origine d'une divergence et donc d'un upwelling, par variation du vent en force et direction.

Les vents cycloniques d'un ouragan par exemple vont être à l'origine d'un upwelling. La présence d'eaux de surface plus froides après le passage d'un tel phénomène peut être due au mélange important, mais la divergence induite par le transport d'Ekman entre pour une bonne part dans ce refroidissement .

On peut observer un autre type d'upwelling le long de l'équateur où les alizés de Nord-Est sont à l'origine d'une dérive d'Ekman vers le Nord dans l'hémisphère Nord, alors que les Alizés du Sud-Est poussent les eaux vers le Sud dans l'hémisphère Sud . Lorsque la composante d'Est des Alizés est bien établie, la température de surface le long de l'Equateur est souvent inférieure de 2°C par rapport aux eaux de surfaces à quelques dizaines de milles de l'équateur.

4.3 La circulation générale forcée par le vent

Essayons de voir plus dans le détail comment se répercute l'influence du vent à l'intérieur de l'océan.

Les effets du frottement au fond seront négligés et on distingue toujours vitesse d'Ekman et vitesse géostrophique.

La vitesse verticale à la base de la couche d'Ekman w_E est proportionnelle à la divergence du transport total dans cette couche:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{-h}^0 \rho_o u dz \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_{-h}^0 \rho_o v dz \right] = \\ &= \rho_o \int_{-h}^0 \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] dz = \rho_o \int_{-h}^0 \left[-\frac{\partial w}{\partial z} \right] dz = \\ &= -\rho_o \int_{w_E}^0 dw = \rho_o w_E \end{aligned}$$

Sous une forme plus synthétique

$$\nabla_H \cdot [\vec{M}]_{-h}^0 = \rho_o w_E$$

avec $u = u_G + u_E$ et $v = v_G + v_E$

A. Regardons maintenant les différentes composantes dans la **couche de surface**.

A.1. Composante géostrophique

Si l'on prend les équations de la géostrophie sous la forme:

$$\begin{aligned} -f \rho_o v_G &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\ +f \rho_o u_G &= -\frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned}$$

et que l'on dérive la première par rapport à y et la seconde par rapport à x , et qu'ensuite l'on soustrait la première de la seconde (i.e. $\partial_x(2) - \partial_y(1)$)

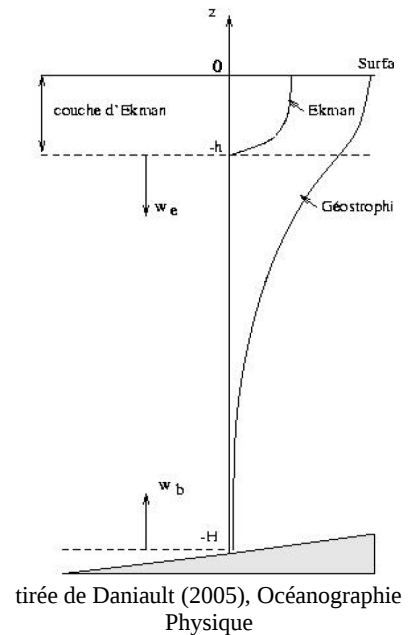
$$\begin{aligned} -\beta \rho_o v_G - f \rho_o \frac{\partial v_G}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} \\ +f \rho_o \frac{\partial u_G}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} \end{aligned} \Rightarrow \beta \rho_o v_G + f \rho_o \nabla_H \cdot \vec{u}_G = 0 \Rightarrow$$

$$\beta \int_{-h}^0 \rho_o v_G dz + f \nabla_H \cdot \int_{-h}^0 \rho_o \vec{u}_G dz = 0$$

on obtient

$$\beta [M_{yG}]_{-h}^0 + f \nabla_H \cdot [\vec{M}_G]_{-h}^0 = 0$$

A.2. Composante d'Ekman



$$-f v_E = A_z \frac{\partial^2 u_E}{\partial z^2}$$

Prenons les équations d'Ekman

$$+f u_E = A_z \frac{\partial^2 v_E}{\partial z^2}$$

que l'on intègre entre $-h$ et 0 et que l'on multiplie par ρ_o . On obtient

$$\begin{aligned} -f M_{yE} &= F_x \\ +f M_{xE} &= F_y \end{aligned}$$

et l'on dérive la première par rapport à y et la deuxième par rapport à x , et qu'ensuite l'on soustrait la première de la deuxième (i.e. $\partial_x(2) - \partial_y(1)$)

$$\begin{aligned} -\beta M_{yE} - f \frac{\partial M_{yE}}{\partial y} &= \frac{\partial F_x}{\partial y} \\ +f \frac{\partial M_{xE}}{\partial y} &= \frac{\partial F_y}{\partial x} \end{aligned}$$

on obtient

$$\beta [M_{yE}]_{-h}^0 + f \nabla_H \cdot [\vec{M}_E]_{-h}^0 = \vec{k}(\nabla \times \vec{F})$$

A.3. totale

La somme des deux donne

$$\beta [M_y]_{-h}^0 + f \nabla_H \cdot [\vec{M}]_{-h}^0 = \vec{k}(\nabla \times \vec{F})$$

En utilisant la formule pour w_E

$$\beta [M_y]_{-h}^0 + f \rho_o w_E = \vec{k}(\nabla \times \vec{F})$$

on obtient

$$w_E = \frac{\vec{k}(\nabla \times \vec{F}) - \beta [M_y]_{-h}^0}{\rho_o f}$$

On obtient ainsi le « **pompage d'Ekman** », vitesse verticale à la base de la couche d'Ekman, qui est le paramètre par lequel le forçage par le vent se répercute à l'intérieur de l'océan.

Cette équation est un cas plus général de la formule utilisée dans le TD9. Cette fois-ci on tient compte de la variation du paramètre de Coriolis avec la latitude.

B. Sous la couche d'Ekman

On a seulement la géostrophie

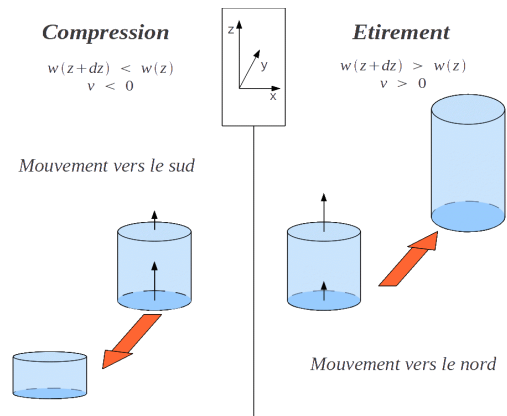
$$\begin{aligned} -f \rho_o v &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\ +f \rho_o u &= -\frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned}$$

comme auparavant on dérive la première par rapport à y , et la deuxième par rapport à x , et après on soustrait la première de la deuxième (i.e. $\partial_x(2) - \partial_y(1)$)

$$\begin{aligned} -\beta \rho_o v - f \rho_o \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} \\ +f \rho_o \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} \end{aligned} \Rightarrow \beta v + f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

$$\beta v = f \frac{\partial w}{\partial z}$$

Cette équation indique que l'éirement ou la compression des colonnes d'eau doit être compensé par des vitesses méridiennes. Un étirement provoque une migration de la colonne d'eau vers le nord, à l'inverse une compression provoque une migration vers le sud.



C. Sur toute la profondeur

Multiplions par ρ_o et intégrons de $-h$ à $-H$ la dernière équation.

$$\beta \int_{-H}^{-h} \rho_o v dz = \rho_o f w_E - \rho_o f w_b = \beta [M_y]_{-H}^{-h}$$

$$[M_y]_{-H}^{-h} = \frac{\rho_o f}{\beta} (w_E - w_b) = \frac{\rho_o f}{\beta} \left(\frac{\vec{k}(\nabla \times \vec{F})}{\rho_o f} - [M_y]_{-H}^0 - w_b \right) = \frac{\vec{k}(\nabla \times \vec{F})}{\beta} - [M_y]_{-H}^0 - \frac{\rho_o f}{\beta} w_b$$

en regroupant les transports

$$[M_y]_{-H}^0 = \frac{\vec{k}(\nabla \times \vec{F})}{\beta} - \frac{\rho_o f}{\beta} w_b$$

Cette équation est connue comme « relation de Stommel » et relie le transport méridien sur toute la colonne d'eau au rotationnel du vent en surface et au frottement au fond.

4.4 La circulation de Sverdrup

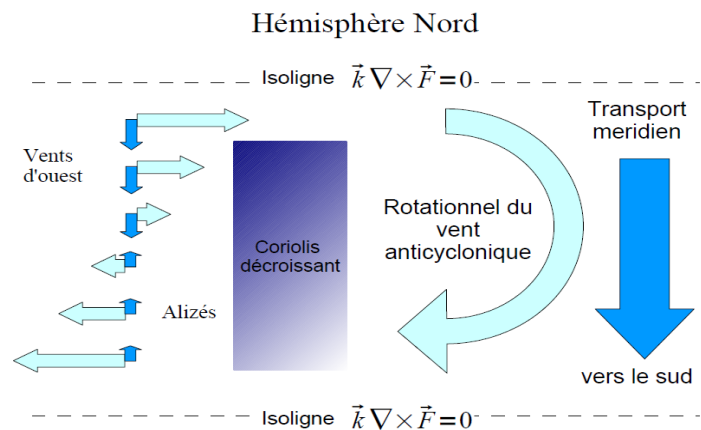
Dans la relation initialement démontrée par Sverdrup, le terme de fond n'existait pas. Le transport méridien total, intégré sur la couche d'eau de la surface jusqu'au fond, dû au forçage du vent s'écrivait

$$[M_y]_{-H}^0 = \frac{\vec{k}(\nabla \times \vec{F})}{\beta}$$

La relation de Sverdrup indique donc que le transport méridien, intégré sur toute la colonne d'eau, dépend du rotationnel de la tension du vent en surface.

Ci contre, une représentation schématique de l'Atlantique Nord, dans laquelle les frontières Est et Ouest sont méridiennes, le fond est plat, et la distribution du vent parfaitement zonale (i.e. de x).

La région limitée au nord et au sud par les isolignes $\vec{k} \nabla \times \vec{F} = 0$, schématise la région subtropicale.



RAPPEL : La fonction de courant

Si le champ de vitesse est irrotationnel et incompressible, il satisfait les relations

$$\nabla \times \vec{v} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Si le champs de vitesse est **irrotationnel** (ou **conservatif**), étant donné que $\nabla \times (\nabla \Phi) = 0$, il doit exister un champ scalaire Φ dit potentiel des vitesses tel que

$$\vec{v} = \nabla \Phi \quad (5.1)$$

Si le champs de vitesse est **solénoïdale** (ou **incompressible**), étant donné que $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{\Psi}) = 0$, il doit exister un champ vectoriel $\vec{\Psi}$ dit potentiel vecteur des vitesses tel que

$$\vec{v} = \nabla \times \vec{\Psi} \quad (5.2)$$

Si l'écoulement est plan (bidimensionnel horizontal), $\vec{\Psi} \equiv (0, 0, \psi)$ et le champ scalaire $\psi \equiv \psi(x, y)$ est dit **fonction de courant**.

Dans notre cas, le transport de Sverdrup \mathbf{M} est bidimensionnel non divergent, donc on peut écrire

$$\mathbf{M} \equiv \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & 0 & \psi \end{vmatrix} = \vec{i} \partial_y \psi - \vec{j} \partial_x \psi + \vec{k} 0 \quad \text{et} \quad M_x = +\partial_y \psi, \quad M_y = -\partial_x \psi$$

Sverdrup a trouvé une solution analytique pour la fonction de courant dans le cas d'un bassin rectangulaire de largeur a et hauteur b et un vent zonal, dont la tension est schématisée avec la formule sinusoïdale

$$F_x = -F_o \cos(\pi y/b), \quad F_y = 0$$

$$\beta M_y = \vec{k} \nabla \times \vec{F} = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = -F_o \frac{\pi}{b} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

$$M_y = -\frac{F_o \pi}{\beta b} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\psi(x, y) = \int \left[\frac{F_o \pi}{\beta b} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \right] dx = \frac{F_o \pi}{\beta b} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) x + K(y)$$

On veut que ψ s'annule sur les frontières. Il est impossible de satisfaire les conditions à la fois pour $x = 0$ et $x = a$, puisque cette équation nécessite d'une seule condition aux limites. Sverdrup choisit de satisfaire la condition $M_y = 0$ sur le bord Est sur la base du raisonnement suivant:

- à partir des mesures, on sait que les vents ont une circulation anticyclonique ;
- ce type de circulation des vents ne peut que générer une circulation du courant du même signe ;
- la relation de Sverdrup dit qu'une vorticité négative du vent correspond à un transport méridien négatif, donc vers le Sud ;
- une circulation du courant anticyclonique donne un transport méridien vers le sud seulement sur la partie orientale du bassin ;
- donc l'équation de Sverdrup est valable seulement sur la partie orientale du bassin et sa solution est obtenue en mettant la condition sur le bord oriental.

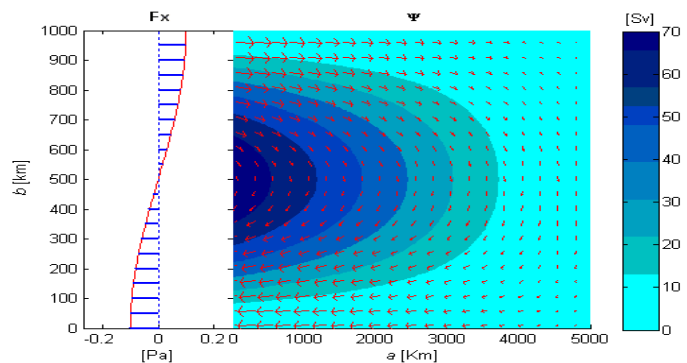
Si $\psi(x=a, y)=0$ alors

$$K_{x=a} = -\frac{F_o \pi}{\beta b} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) a$$

et finalement

$$\psi(x, y) = \frac{F_o \pi}{\beta b} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) (x-a)$$

Les dimensions de ψ sont $[M T^{-1}]$, elle est donc mesurée en $kg s^{-1}$.



Frottement du vent (à gauche) et fonction de courant (à droite en couleur) avec superposition des vecteurs de la vitesse du courant (en rouge).
Figure obtenue avec le script en annexe

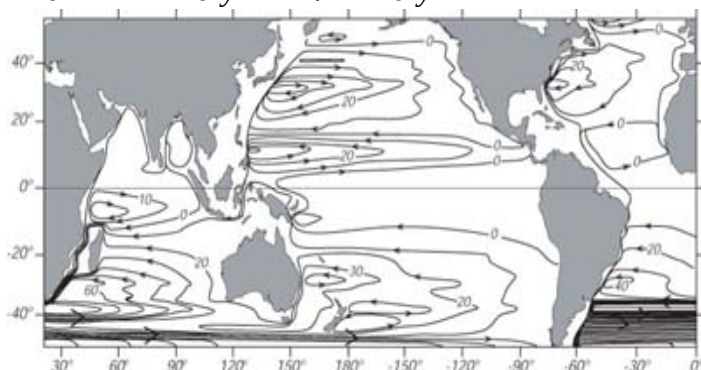
La solution de Sverdrup ne peut pas être appliquée à tout le bassin parce que la conservation de la masse ne serait plus satisfaite: si la relation s'appliquait de l'ouest à l'est de l'atlantique nord, cet océan se viderait au fil du temps! Pour compléter la solution, on est amené à admettre qu'il existe une région de l'océan dans laquelle l'équilibre dynamique n'est pas rempli par la relation de Sverdrup. Cette dynamique différente ne peut exister que dans une couche limite de bord Ouest, ce qui justifie à posteriori le fait d'avoir satisfait la condition de bord Est.

Plus généralement, si l'on multiplie par ρ_o l'équation de continuité et que l'on intègre de la surface au fond (en se rappelant que Sverdrup y néglige le frottement, i.e. $w_o = w_{-H} = 0$) on obtient

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} = -\frac{\partial M_y}{\partial y} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial (\vec{k} \nabla \times \vec{F})}{\partial y}$$

À partir de ces équations, de la définition de fonction de courant et des données de vent, on peut obtenir une figure comme celle ci-contre.

La fonction de courant du transport de Sverdrup (ψ telle que $M_x = \partial_y \psi, M_y = -\partial_x \psi$) calculée pour l'océan global avec des vent réels (moyennes annuelles). Cette figure met en évidence l'existence de cellules de circulation de grande échelle, les gyres subtropicaux, dans les divers océans, séparés par les lignes $\vec{k} \nabla \times \vec{F} = 0$



Depth-integrated Sverdrup transport applied globally using the wind stress from Hellerman and Rosenstein (1983). Contour interval is 10 [Sv]. From Tomczak and Godfrey (1994).

http://oceanworld.tamu.edu/resources/ocng_textbook/chapter11/chapter11_01.htm

4.4 La circulation de Stommel et l'intensification des courants de bord Ouest

Sverdrup dans son modèle avait négligé le frottement sur le fond. Cette hypothèse est acceptable si les courants sont peu importants à l'intérieur de l'océan. Par contre, si la circulation s'intensifie, comme on peut imaginer dans les régions de bord ouest de l'océan, l'hypothèse n'est plus valable. C'est Stommel qui, en tenant compte du forçage au fond, a présenté un nouveau modèle plus détaillé.

En reprenant l'expression du transport méridien complète

$$[M_y]_{-H}^0 = \frac{\bar{k}(\nabla \times \vec{F})}{\beta} - \frac{\rho_o f}{\beta} w_b$$

on peut exprimer la vitesse verticale au fond en terme de rotationnel de la vitesse géostrophique et aussi la fonction de courant

$$w_b = \frac{d}{2} \bar{k} \nabla_H \times \vec{v}_G = -\frac{d}{2\rho_o H} \nabla^2 \psi$$

où $d = \sqrt{\frac{2A_z}{f}}$ est l'épaisseur de la couche d'Ekman de fond, au facteur π près, et H la profondeur de l'océan (pour une démonstration détaillée voir Danialt, 2005, sections 6.5 et 7.7).

Ainsi on obtient une équation de la fonction de courant

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{fd}{2\beta H} \nabla^2 \psi = -\frac{\bar{k}(\nabla \times \vec{F})}{\beta}$$

On peut voir que le fait d'ajouter du frottement au fond, permet de fermer les contours sur le bord Ouest, où apparaît une couche limite très étroite. L'intégration en x nécessite ici deux conditions aux limites, qui permettent d'annuler le transport zonal à la fois à l'est et à l'ouest du bassin.

Si on prend la même tension du vent choisie par Sverdrup, $F_x = -F_o \cos(\pi y/b)$, $F_y = 0$, on obtient

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{fd}{2\beta H} \nabla^2 \psi = -\frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) = \frac{F_o \pi}{\beta b} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

Une solution de cette équation peut être construite en faisant la somme d'une solution sur le bord est ψ_E et une solution dans la couche limite près du bord ouest ψ_W .

Pour la première on prend la solution de Sverdrup

$$\psi_E = \phi(x-a) \text{ avec } \phi = \frac{F_o \pi}{\beta b} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

Dans la couche limite, le frottement du vent est négligeable, seule le frottement au fond est important. On cherche donc pour la deuxième une solution de l'équation différentielle

$$\mu \nabla^2 \psi_W + \frac{\partial \psi_W}{\partial x} = 0 \text{ avec } \mu = \frac{fd}{2\beta H}$$

Les solutions générales pour Ψ_W s'écrivent $\Psi_W = A + B e^{-\frac{x}{\mu}}$.

On peut maintenant écrire les solutions générales pour la fonction de courant

$$\Psi = \Psi_E + \Psi_W = \phi(x-a) + A + B e^{-\frac{x}{\mu}}$$

On a donc deux paramètres à fixer et pour cela on peut poser deux conditions aux frontières, le transport doit être nul sur les bords ouest ($x=0$) et est ($x=a$) du bassin:

$$\Psi(x=0) = 0, \text{ soit } -\phi a + A + B = 0, \text{ i.e. } A = \phi a - B$$

$$\Psi(x=a) = 0, \text{ soit } 0 + A + B e^{-\frac{a}{\mu}} = 0, \text{ i.e. } \phi a - B + B e^{-\frac{a}{\mu}} = 0, \text{ ' } B = -\frac{\phi a}{e^{-\frac{a}{\mu}} - 1}$$

En remplaçant dans l'équation générale

$$\Psi = \phi(x-a) + \phi a + \frac{\phi a}{e^{-\frac{a}{\mu}} - 1} - \frac{\phi a}{e^{-\frac{x}{\mu}} - 1} e^{-\frac{x}{\mu}}$$

$$\Psi = \phi a \left[\frac{a}{x} - \frac{1}{e^{-\frac{a}{\mu}} - 1} \left(e^{-\frac{x}{\mu}} - 1 \right) \right]$$

En fin en remplaçant pour ϕ on obtient la solution de Stommel pour un bassin de dimension a et b :

$$\Psi = \varphi = \frac{F_o \pi}{\beta b} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) a \left[\frac{a}{x} - \frac{1}{e^{-\frac{a}{\mu}} - 1} \left(e^{-\frac{x}{\mu}} - 1 \right) \right]$$

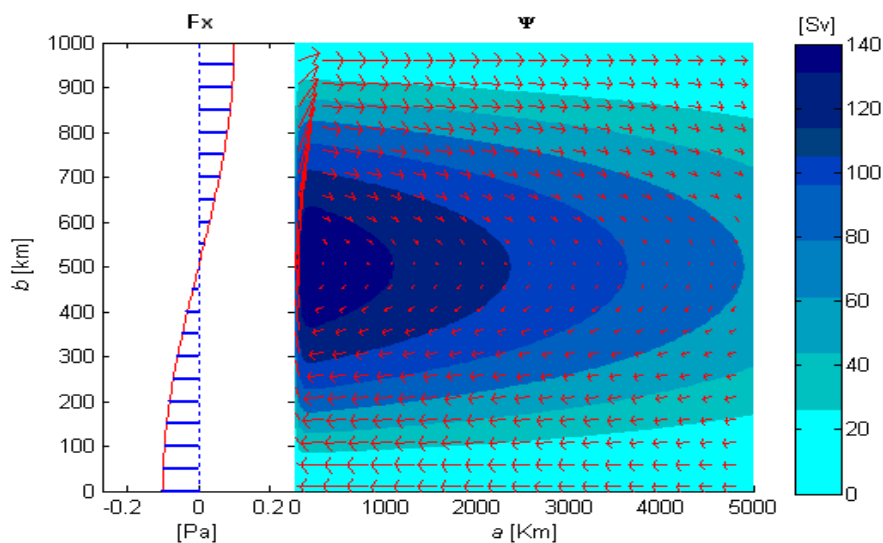


figure Matlab obtenue avec le script en annexe

%Script Matlab pour dessiner les solutions de Sverdrup et de Stommel

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear;close all;

%type='Sverdrup'
type='Stommel'

beta=2*10^-11 %coeff beta [m^-1 s^-1]
a=5*10^6 %extention zonale de l'ocian [m]
b=1*10^6 %extention meridionale de l'ocian [m]
F0=0.1 %frottement du vent [Pa]
rho0=1000 %densite [kg m^-3]
H=1000 %profondeur[m]
f=10^-4 %parametre Coriolis [s-1]
beta=2*10^-11 %m^-1 s^-1
Az=10^-2 %viscoite turbulente verticale [m^2s^-1]

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

[x,y]=meshgrid(0:a/100:a,0:b/100:b);

%Frottement du vent
Fx=-F0*cos(pi*y/b);

%Calcul de psi
if type=='Sverdrup'
    psi=(F0*pi/beta/b)*sin(pi*y/b).*(x-a);
    psi=psi/rho0/10^6; %transport [Sv]
elseif type=='Stommel'
    d=sqrt(2*Az/f);
    mu=f*d/2/beta/H;
    psi=(F0*pi/beta/b).*sin(pi*y/b).*a.*(x/a - (1/(exp(-a/mu)-1))*(exp(-x/mu)-1));
    psi=psi/rho0/10^6; %transport [Sv]
else
    dispo('Error')
end

%Calcul du transport barotrope
u=zeros(101);
v=zeros(101);
for i=1:100
    for j=1:100
        u(i,j)=-(psi(i,j)-psi(i+1,j))/(y(i,j)-y(i+1,j));%[m^2s^-1]
        v(i,j)=-(psi(i,j)-psi(i,j+1))/(x(i,j)-x(i,j+1));
    end
end

%Dessin
figure(1);hold on
%
subplot('Position',[0.15 0.1 0.2 0.75]);hold on;
plot(Fx,y/1000)
line(Fx*0,y/1000,'color','b','linestyle',':')
for j=1:5:100
    quiver(0,y(j)/1000,Fx(j),0,1,'color','b','MaxHeadSize',0.1,'linewidth',2)
end
axis([-0.27 0.27 0 1000])
title('\bf Fx')
xlabel('[Pa]')
ylabel('\it b [km]')
box on
%
subplot('Position',[0.35 0.1 0.6 0.75]);hold on
contourf(x/1000,y/1000,psi);shading flat
mymap=colormap(winter);mymap(:,2)=1-mymap(:,2);colormap(mymap)
skip=5;
axis([0 5000 0 1000])
title('\bf \Psi')
xlabel('\it a [Km]')
set(gca,'yTickLabel','')
colorbar
quiver(x(2:skip:end,2:skip:end)/1000,y(2:skip:end,2:skip:end)/1000,u(2:skip:end,2:skip:end),v(2:skip:end,2:skip:end),1,'r')
text(5500,1040,['Sv'])
box off
%
saveas(1,['psi',type,'.bmp'])
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

5. Les équations e.p.p. et la vorticité

5.1 Équations en eaux peu profondes

Auparavant on a vu que l'évolution de la vitesse horizontale moyenne (au sens de la turbulence) des particules du fluide géophysique est décrite par les équations de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P}{\partial x} + f v - \frac{\overline{\partial u' u'}}{\partial x} - \frac{\overline{\partial u' v'}}{\partial y} - \frac{\overline{\partial u' w'}}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P}{\partial y} - f u - \frac{\overline{\partial v' u'}}{\partial x} - \frac{\overline{\partial v' v'}}{\partial y} - \frac{\overline{\partial v' w'}}{\partial z} \end{aligned}$$

u , v et w sont les composantes horizontales et verticale non turbulentes ou « moyennes » de la vitesse du mouvement ;

u' , v' et w' sont les composantes turbulentes de la vitesse du mouvement ;

f est le paramètre de Coriolis ;

P est la pression ;

ρ_o est la densité de référence de l'eau de mer au sens de l'hypothèse de Boussinesq .

Le premier terme correspond à la variation locale de la vitesse en fonction du temps . Dans le deuxième, troisième et quatrième terme sont représentées les advections horizontales . Le cinquième terme est le gradient de pression.

Le sixième terme est le terme de Coriolis, qui rend compte de l'influence de la rotation de la Terre ; si les écoulements sont à une échelle suffisamment réduite, on peut approcher la surface terrestre par son plan tangent et considérer la force de Coriolis i) constante : approximation de plan- f , $f = f_o$, dynamique côtière ; ii) variable linéairement avec la coordonnée méridienne : approximation de plan- β , $f = f_o + \beta y$, dynamique régionale, mais aussi grande échelle .

Les trois derniers termes sont les termes turbulentes . La théorie dite de la « fermeture Newtonienne » dit que comme pour la viscosité moléculaire, on peut introduire des coefficients de viscosité turbulente et re-écrire les moyennes des produits des composantes turbulentes de la vitesse en terme de vitesse moyennes :

$$\begin{aligned} \overline{u' u'} &= -A_x \frac{\partial u}{\partial x} ; & \overline{u' v'} &= -A_y \frac{\partial u}{\partial y} ; & \overline{u' w'} &= -A_z \frac{\partial u}{\partial z} ; \\ \overline{v' u'} &= -A_x \frac{\partial v}{\partial x} ; & \overline{v' v'} &= -A_y \frac{\partial v}{\partial y} ; & \overline{v' w'} &= -A_z \frac{\partial v}{\partial z} . \end{aligned}$$

Pour les échelles typiques de la plus part des mouvements océaniques, l'équation pour la composante verticale de la vitesse est réduite à l'équation de l'hydrostatique, qui traduit l'équilibre entre la force de pression et la force de pesanteur. Elle fournit la pression:

$$P(z) = P_a + g \int_z^\eta \rho \cdot dz$$

où P_a est la pression atmosphérique, g est l'accélération de la gravité et η l'élévation de la surface par rapport au zéro de l'axe Oz . $z = \eta(x, y, t)$ constitue ainsi la surface libre de l'océan tandis que $z = -h(x, y)$ repère le fond. ρ est la masse volumique. En utilisant l'approximation de Boussinesq $\rho \equiv \rho_o + \rho'(x, y, z, t)$ avec $\rho' \ll \rho_o$, les dérivées horizontales deviennent

$$\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P_a}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{g}{\rho_o} \int_z^\eta \frac{\partial \rho'}{\partial x} dz$$

$$\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P_a}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{g}{\rho_o} \int_z^\eta \frac{\partial \rho'}{\partial y} dz$$

Le deuxième et le troisième terme de droite des équations ci-dessus sont respectivement les contributions barotrope et barocline au gradient de pression.

Si on néglige la contribution barocline et celle de la pression atmosphérique, le gradient horizontal de pression pourra alors s'exprimer :

$$\nabla_H P = \rho_o g \nabla_H \eta$$

Cette équation dit que les forces qui agissent dans le fluide sont purement horizontales, donc on peut supposer que les composantes horizontales de la vitesse seront indépendantes de z. Ainsi les quatrièmes termes dans les équations de Navier-Stokes sont nuls et le terme de viscosité turbulente verticale est remplacé par les conditions aux bords qui représentent les forçage du vent $\vec{F} \equiv (F_x, F_y)$ et au fond $\vec{B} \equiv (B_x, B_y)$.

Les équations du mouvement deviennent

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + f v + A_h \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + F_x - B_x \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - f u + A_h \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + F_y - B_y \quad (2)$$

Il y a donc deux équations pour trois inconnues (les deux composantes de la vitesse et la surélévation). Pour fermer le système, il faut ajouter l'équation de continuité écrite en fonction de ces trois variables.

On prend alors l'équation de continuité pour un fluide incompressible :

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial w}{\partial z} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

en intégrant du fond à la surface libre, vu que les vitesses et leurs dérivées sont indépendantes de z on obtient:

$$w_{z=\eta} - w_{z=-h} + (h+\eta) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 .$$

À la surface

$$w_{z=\eta} = \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} .$$

Au fond, en considérant que la bathymétrie ne varie pas dans le temps

$$w_{z=-h} = -\frac{dh}{dt} = -u \frac{\partial h}{\partial x} - v \frac{\partial h}{\partial y} .$$

En substituant, on obtient :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(Hu)}{\partial x} + \frac{\partial(Hv)}{\partial y} = 0 \quad \text{avec } H = h + \eta \quad (3)$$

L'ensemble des trois équations (1-3) constitue les équations en eaux peu profondes (e. p. p. ou *shallow water equations*). Elles sont valables, comme pour l'approximation hydrostatique, quand l'eau est très basse par rapport aux échelles horizontales que l'on veut étudier.

Les équations e. p. p. sont utilisées pour étudier, entre autre, les ondes longues de gravité ou gyroscopiques. Pour cela il faut considérer les équation linéarisées, sans viscosité turbulente et faire l'hypothèse $\eta \ll h$. Par ailleurs, si $h = \text{const}$, $f = 0$ et le mouvement ne dépend que de x (1D), les équations deviennent:

$$\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{si on dérive par} \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + h \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{array} \quad \text{On obtient } \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gh \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0$$

Cette dernière est un équation d'onde qui a pour solution $\eta = F(x - ct)$ avec $c = \sqrt{gh}$.
(Voir Cours « Ondes dans l'océan » en L3 ou « Circulation et dispersion en Eaux Côtières » en M2)

5.2 La vorticité

Il existe différents types de vorticité : relative, planétaire, absolue et potentielle .

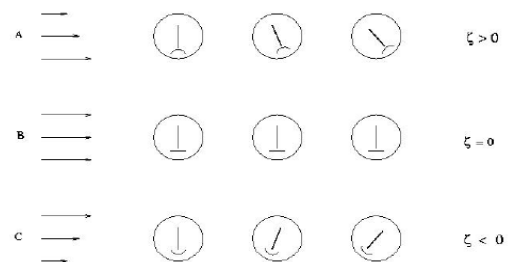
La vorticité relative

Elle est définie comme la composante verticale du rotationnel de la vitesse

$$\zeta = \vec{k}(\nabla \times \vec{V}) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

La vorticité relative exprime la tendance d'un fluide à tourner. Le signe de ζ peut être illustré avec le schéma ci-contre .

Elle est appelée vorticité relative, car elle est mesurée par rapport à la terre.



La vorticité planétaire

Pour un solide en rotation la vorticité est égale à deux fois sa vitesse angulaire. A la latitude Φ la vitesse angulaire par rapport à l'axe verticale en ce point est $\Omega \sin \Phi$, la vorticité est donc

$$2 \Omega \sin \Phi = f$$

Une colonne d'eau au repos sur la terre en rotation possédera donc une vorticité dite « planétaire » f . La vorticité planétaire correspond au paramètre de Coriolis en approximation dite de « mouvements quasi-horizontaux » (voir TD4).

La vorticité absolue

On prend les équations de la quantité de mouvement pour les composantes horizontales, en considérant qu'elles ne varient pas sur la verticale. On néglige aussi la viscosité et le frottement (on se positionne donc hors des couches d'Ekman et des couches limites de bords Ouest) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y}\end{aligned}$$

Différence croisée et soustraction $\partial_x(2) - \partial_y(1)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial f}{\partial y} v - f \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} u + f \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}\end{aligned}$$

conduisent à une seule équation (en se rappelant que $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y}$)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{df}{dt} + f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

qui peut être re-écrite

$$\frac{\partial}{\partial t} \zeta + \frac{\partial u}{\partial x} \zeta + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \zeta + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{df}{dt} + f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

en regroupant les termes 1, 3 et 5, qui représentent la dérivée totale de la vorticité relative et aussi les termes 2 et 4

$$\frac{d\zeta}{dt} + \zeta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{df}{dt} + f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

et finalement

$$\frac{d(\zeta + f)}{dt} + (\zeta + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

Cette équation exprime le principe de la conservation de la vorticité absolue $\zeta_{abs} = (\zeta + f)$ pour les écoulements sur terre lorsque le frottement est négligé : le module de la vorticité absolue s'accroît dans un écoulement convergent ($\nabla_H \vec{u} < 0$) et décroît dans un écoulement divergent ($\nabla_H \vec{u} > 0$) .

La vorticité potentielle

Soit une couche d'épaisseur D dans laquelle la densité est supposée homogène.

L'équation de continuité s'écrit :

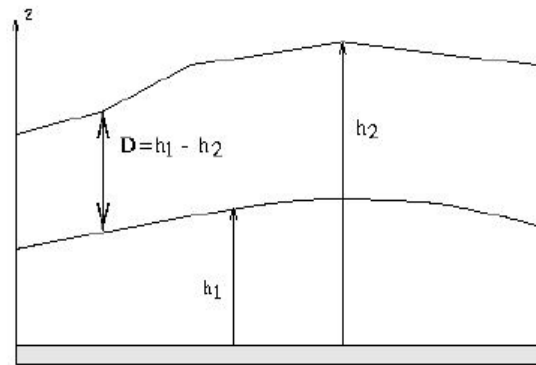
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

on peut écrire que :

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\left(\frac{dh_1}{dt} - \frac{dh_2}{dt} \right)}{(h_1 - h_2)} = \frac{1}{D} \frac{dD}{dt}$$

en remplaçant dans l'équation de continuité

$$\frac{1}{D} \frac{dD}{dt} = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$



tirée de Daniault (2005), Océanographie Physique

On peut alors remplacer la divergence horizontale dans l'équation de conservation de la vorticité absolue et obtenir

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\zeta + f}{D} \right) = 0$$

NB : On a utilisé la règle de la dérivé de la division:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\zeta_a}{D} \right) = 0 \rightarrow \left(\frac{d\zeta_a}{dt} D - \zeta_a \frac{dD}{dt} \right) \frac{1}{D^2} = 0 \rightarrow \frac{d\zeta_a}{dt} \frac{1}{D} - \zeta_a \frac{dD}{dt} \frac{1}{D^2} = 0 \rightarrow \frac{d\zeta_a}{dt} - \zeta_a \frac{dD}{dt} \frac{1}{D} = 0$$

Si on compare les dimensions de quatre vorticité: relative, planétaire, absolue et potentielle

$$\zeta_{rel} : \left[\frac{LT^{-1}}{L} \right] = [T^{-1}] \quad \zeta_{pla} : [T^{-1}] \quad \zeta_{abs} : [T^{-1}] \quad \zeta_{pot} : \left[\frac{T^{-1}}{L} \right] = [T^{-1}L^{-1}]$$

on voit que la vorticité potentielle n'a pas les mêmes dimensions que les autres!

NB: Une formulation plus générale de la vorticité potentielle tient compte aussi des effets de la densité, de la température, de la salinité ou autre, et les dimensions dépendent de la grandeur prise en considération

$$\frac{d}{dt} \left(\zeta_{abs} \cdot \frac{\nabla \lambda}{\rho} \right) = 0$$

5.3 La conservation de la vorticité

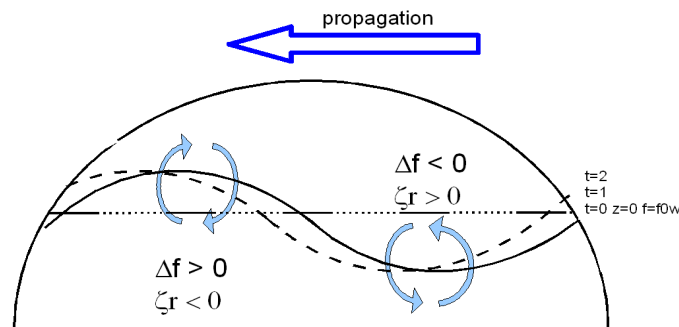
Ci-dessous on explique en terme de conservation de la vorticité absolue et potentielle des phénomènes importants de la circulation océanique et atmosphérique.

Vorticité absolue et Ondes de Rossby

Une série de particules est disposée sur un parallèle (ligne pointillée et continue), et est ensuite déformée par une sinusoïde (ligne continue).

Les particules qui se retrouvent plus au Nord augmentent leur vorticité planétaire et, par conservation de la vorticité absolue, auront une vorticité relative négative (anticyclonique, en sens horaire), qui fera déplacer les maxima de la sinusoïde vers l'Ouest.

D'une façon similaire les minima bougent aussi vers l'ouest (vorticité relative positive, cyclonique, en sens anti-horaire). Toute l'onde sinusoidale tends alors à bouger vers l'Ouest: ces types d'ondes sont connue commes Ondes de Rossby, qui les a découvertes en cherchant des solutions analytiques ondulatoires des équations de Navier-Stokes.



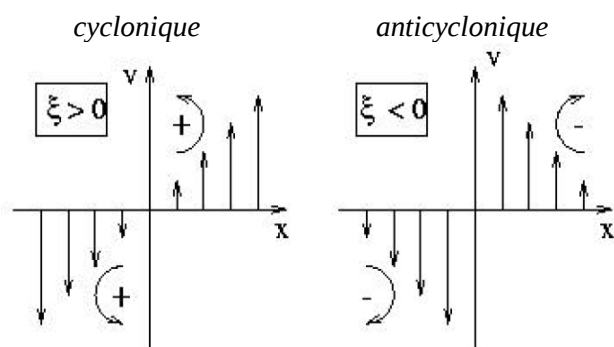
Conservation de la vorticité potentielle

Intensification des courants de bord ouest

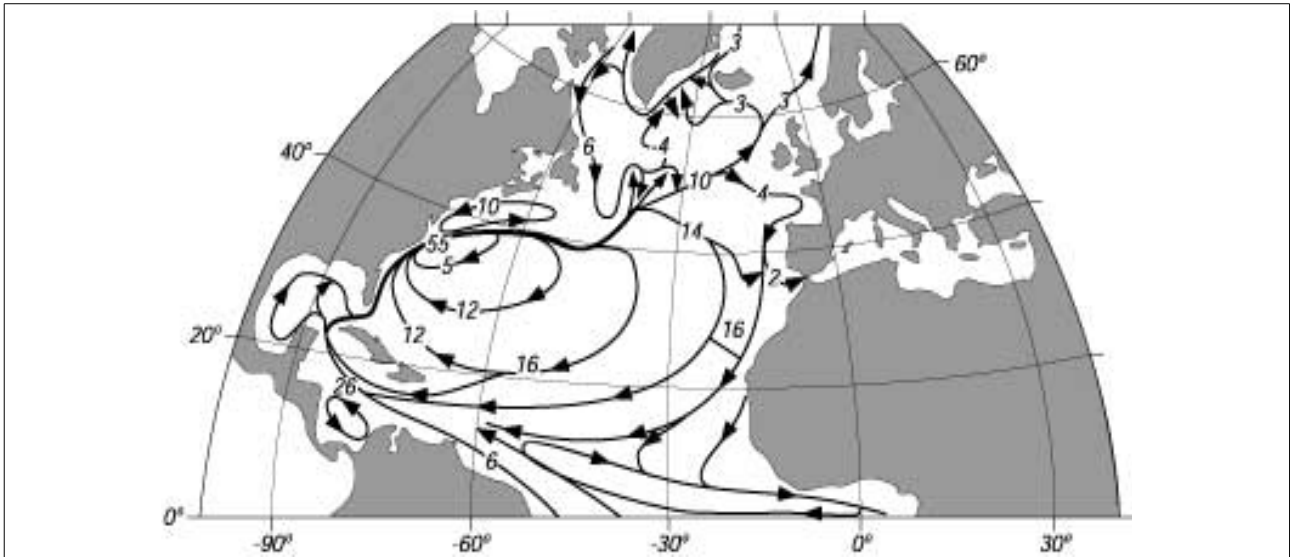
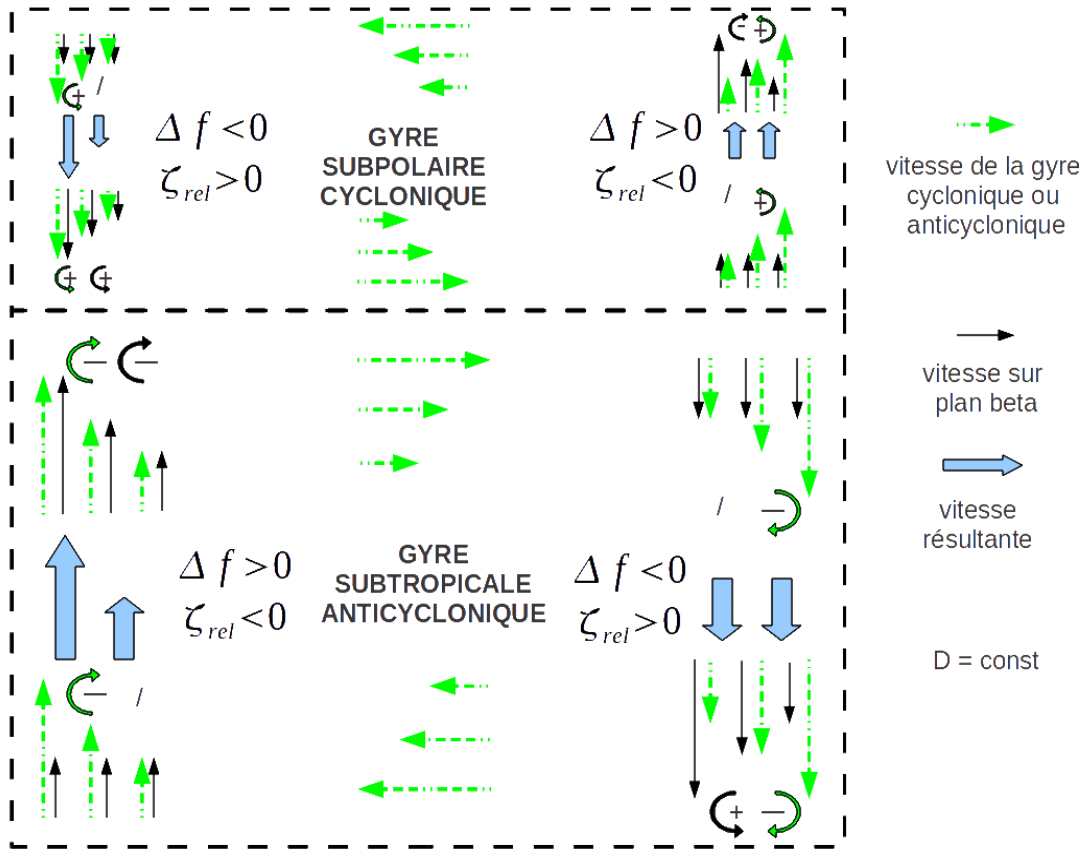
Prenons l'exemple de l'Atlantique Nord. Schématisons la circulation le long des bords par des vitesses uniquement méridiennes, illustrant le gyre subpolaire au nord et subtropicale au sud.

La vorticité relative s'écrit alors :

$$\zeta = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial v}{\partial x}$$



On peut expliquer l'intensification des courants de bord Ouest par la conservation de la vorticité potentielle : si D reste constante le long des frontières océaniques (cette condition n'est pas indispensable, ni forcément vraie mais elle permet une explication plus simpliste), la seule façon de conserver la vorticité potentielle est de diminuer ζ quand l'écoulement est dirigé vers les pôles, et d'augmenter ζ quand l'écoulement est dirigé vers l'équateur. Il en résulte un écoulement plus intense concentré le long des frontières Ouest de l'océan, alors que l'effet inverse s'observe le long des côtes Est.



Sketch of the major surface currents in the North Atlantic. Values are transport in units of $10^6 \text{m}^3/\text{s}$. From Sverdrup, Johnson, and Fleming (1942: fig. 187).

The figure shows a broad, basin-wide, mid latitude gyre as we expect from Sverdrup's theory. In the west, a western boundary current, the Gulf Stream, completes the gyre. In the north a subpolar gyre includes the Labrador current. An equatorial current system and countercurrent are found at low latitudes with flow similar to that in the Pacific.

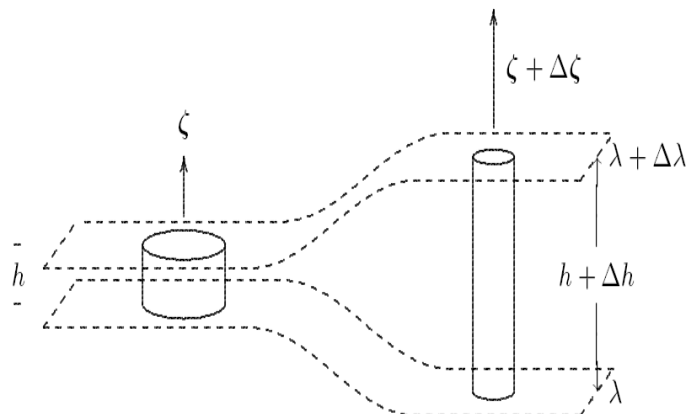
Tirée de http://oceanworld.tamu.edu/resources/ocng_textbook/chapter11/chapter11_01.htm

Intensification des tourbillons étirés

Si on se met sur un plan- f

$$\left(\frac{\zeta}{D}\right) = const$$

alors une colonne d'eau qui bouge entre deux surfaces sur lesquelles λ doit être conservée, doit se modifier pour satisfaire les lois de conservation de la masse et du moment angulaire. Plus grande sera la hauteur de la colonne, plus grande devra être la vitesse de rotation de la colonne de fluide.



$$\Delta D > 0 \rightarrow \Delta \zeta > 0$$

$$\Delta D < 0 \rightarrow \Delta \zeta < 0$$

Tirée de Mattioli (1995) Principi Fisici di Oceanografia e Meteorologia, Fig.48.1

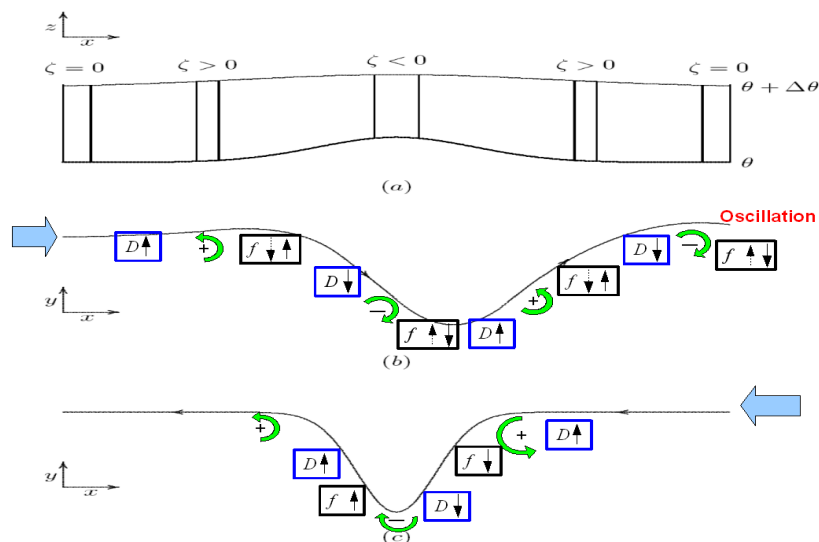
Vent dépassant une chaîne montagneuse

Les isosurfaces de température potentielle tendent à suivre la forme d'un obstacle mais avec des rayons de courbure grandissant avec la hauteur. Il y a une espèce de lissage des obstacles.

Dans un écoulement qui passe au dessus d'une montagne, la colonne d'air comprise entre deux valeurs de température potentielle d'abord s'étire, et ensuite se comprime (partie a de la figure ci-dessous).

Pour un écoulement qui vient de l'Ouest (partie b), ce fait comporte un mouvement d'abord cyclonique et en suite fortement anticyclonique, qui déclenche des oscillations en aval.

Pour un écoulement qui vient de l'Est (partie c), par contre, il y a une déviation symétrique vers le Sud.



Adaptée depuis Fig. 48.2 de Mattioli (1995) Principi Fisici di Oceanografia e Meteorologia

6. Introduction aux modèles océaniques numériques

La modélisation numérique de la circulation océanique est une discipline très jeune puisqu'elle s'est essentiellement développée au cours de la seconde moitié du XX^e siècle, bénéficiant de façon continue des progrès en matière d'outils de calcul automatique et s'appuyant, surtout au début, sur les développements de la prévision numérique du temps en météorologie. En effet les équations qui décrivent le comportement de l'océan et de l'atmosphère sont très similaires.

Avant 1900, météorologie et océanographie essentiellement descriptives.

Exemple:

Carte du Gulf Stream de Franklin-Folger, imprimée en 1769-1770.

Cette première carte du Gulf Stream, re-découverte par P. Richardson (1980) est remarquablement précise, a été dessinée par B. Franklin pour la poste anglaise sur la base des informations fournies par le capitaine de baleinières Timoty Folger.

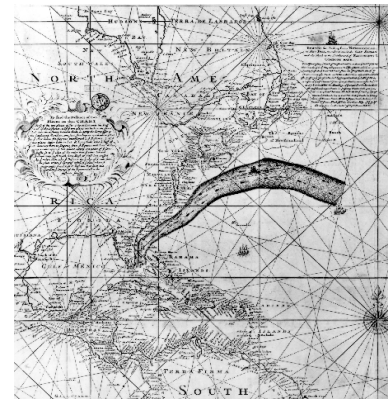


Image tirée du papier de R. Peterson et al. (1996) dans Progress in Oceanography.

http://sam.ucsd.edu/sio210/gifimages/Franklin_folger.gif

Coiffier (2000) présente un aperçu historique très intéressant des techniques qui ont servi à la construction des modèles de prévision numérique du temps basé sur la résolution numérique de ces équations, c'est-à-dire à déterminer les valeurs futures de ses grandeurs caractéristiques en partant de valeurs initiales connues grâce aux observations. Les modèles numériques d'atmosphère construits sur ce principe sont ainsi devenus des outils indispensables de la prévision du temps, supplantant progressivement les méthodes fondées sur l'application de règles de déplacement et d'évolution de structures atmosphériques identifiables (les centres d'action et les fronts).

« Les équations utilisées sont les équations générales de la mécanique des fluides, bien établies déjà au début du XX^e siècle, auxquelles on applique un certain nombre de simplifications qui se justifient par l'analyse des ordres de grandeur des divers termes dans le cas particulier de l'atmosphère terrestre et selon les échelles à décrire. Le recours au calcul numérique est indispensable pour résoudre ces systèmes d'**équations non linéaires** dont les solutions ne peuvent pas être déterminées analytiquement dans le cas général.

La construction d'un modèle numérique d'atmosphère et d'océan comprend deux étapes distinctes : la première consiste à établir un système d'équations, alors que la seconde, dite « numérisation », consiste à remplacer les équations portant sur des variables continues par des équations portant sur des variables discrètes et dont les solutions sont obtenues au moyen d'un algorithme approprié. Les résultats d'une prévision numérique dépendent donc des propriétés générales des solutions des équations, qui relèvent de la météorologie dynamique, ainsi que des effets de la numérisation adoptée, qui doivent être examinés de façon détaillée.

La mise en oeuvre de l'algorithme implique de disposer d'un outil de calcul qui soit suffisamment puissant, tout en restant simple d'utilisation. C'est la raison pour laquelle les progrès de la prévision numérique du temps ont été étroitement liés au fantastique développement des ordinateurs, depuis leur naissance à la fin de la deuxième guerre mondiale. » (Coiffier, 2000):

Au XX^e siècle: modélisation devient une branche de la physique mathématique

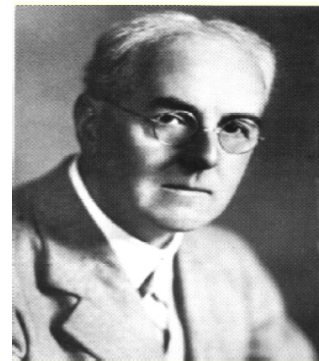
Dès 1904, le Norvégien Vilhelm Bjerknes reconnaît que la prévision du temps est fondamentalement un problème déterministe à valeurs initiales au sens mathématique du terme (Bjerknes, 1904) : « Si, comme le pense chaque homme raisonnant scientifiquement, les phénomènes atmosphériques se développent à partir de ceux qui les précèdent suivant des lois précises, on peut en déduire que les conditions nécessaires et suffisantes pour une solution rationnelle de la prévision en météorologie sont les suivantes :

- on doit connaître avec une précision suffisante l'état de l'atmosphère à un instant donné ;
- on doit connaître avec une précision suffisante les lois selon lesquelles un état de l'atmosphère se développe à partir de l'état précédent. »

Cependant, Bjerknes réalise que la difficulté du problème vient de la nécessité de résoudre un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires pour lesquelles on ne dispose pas, dans le cas général, de solutions analytiques.

Richardson essayait donc de montrer que le calcul permettait effectivement d'effectuer des prévisions météorologiques à une époque où les calculateurs électroniques n'existaient pas encore. Il publia sa méthode en 1922 dans un livre intitulé *Weather Prediction by Numerical Process*.

Richardson préconisait des techniques de calcul permettant de simplifier les équations et indiquait qu'il était nécessaire de partir d'une situation météorologique avec un nombre important de données terrestres et d'altitude sur l'ensemble du globe.



À l'aide de formulaires standardisés, pour accélérer le calcul en divisant le travail, il avait estimé que 64000 personnes étaient nécessaires pour que la prévision soit émise en avance sur les événements.

http://fr.wikipedia.org/wiki/Lewis_Fry_Richardson

Richardson découpait le globe en une grille rectangulaire de 230 km (en latitude) sur 200 km (en longitude), ce qui donnait 3200 colonnes verticales autour de la Terre. De plus, il divisait l'atmosphère en tranches à 4, 7 et 12 km d'altitude et il proposait des calculs par pas de temps de 3 heures.

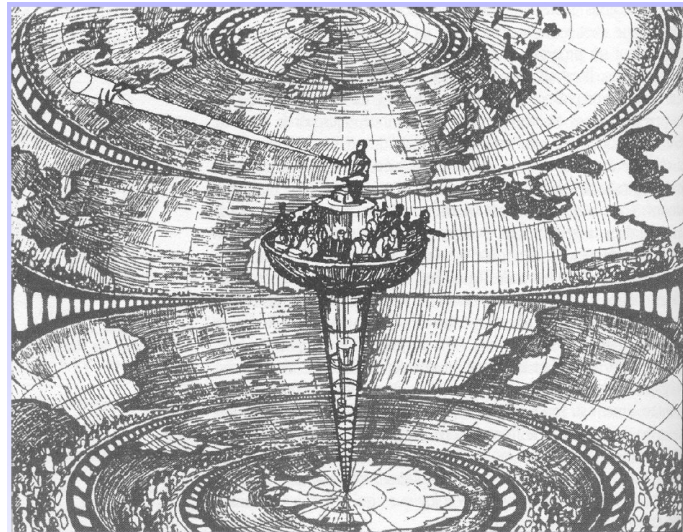
Cet immense système a été baptisé "**l'usine à prévoir le temps**".

Citation, Richardson (1922)

Il m'a fallu une bonne partie de six semaines pour remplir les formulaires de calcul et établir la nouvelle distribution dans deux colonnes verticales, pour la première fois. Mon bureau était un tas de foin dans un froid cantonnement en retrait. Avec de l'entraînement, le travail d'un calculateur moyen pourrait aller sans doute dix fois plus vite. Avec un pas de temps de trois heures, alors trente-deux personnes pourraient calculer exactement deux points de façon à avancer à la même vitesse que le temps, sans tenir compte du très grand gain de vitesse que l'on constate invariablement quand une opération complexe est divisée en parties plus simples, sur lesquelles des individus se spécialisent. Si les dimensions des carreaux de l'échiquier sont de 200 kilomètres sur l'horizontale, il y aurait 3 200 colonnes sur la Terre entière. Comme dans les régions tropicales le temps est souvent connu à l'avance, on peut considérer qu'il y a 2 000 colonnes actives. De cette façon, $32 \times 2\,000 = 64\,000$ calculateurs seraient nécessaires pour faire la course avec le temps sur la Terre entière. C'est un nombre plutôt considérable. Sans doute, dans quelques années, sera-t-il possible de simplifier le schéma de calcul. Mais, de toute façon, l'organisation qui est proposée est celle d'une fabrique de prévisions centralisée pour l'ensemble de la Terre, ou pour des parties limitées par des frontières où le temps est invariable, avec des calculateurs humains spécialisés sur des équations différentes. Espérons pour eux qu'ils seront régulièrement affectés à de nouvelles opérations.

Après un raisonnement aussi difficile, on peut sans doute avoir un peu de fantaisie.

Imaginons un immense hall en forme de théâtre, sauf que les galeries et balcons y feraient un tour complet, occupant ainsi la place dévolue à la scène. Les murs de cet espace seraient peints pour représenter une carte de la Terre. Le plafond représenterait les régions polaires septentrionales, l'Angleterre serait dans les balcons, les tropiques dans les baignoires du haut, l'Australie au niveau des corbeilles et l'Antarctique dans la fosse. Une myriade de calculateurs humains sont au travail sur le temps de la partie de la carte où ils siègent, mais chacun ne s'occupe que d'une équation ou d'une partie d'équation. Le travail de chaque région est coordonné par un employé de haut rang. De nombreux petits tableaux affichent les valeurs instantanées de façon à ce que les calculateurs voisins puissent les lire.



Le modèle de Richardson, 1922

Imagination d'un système de calcul humain (64000 personnes) automatisé et parallèle avec une puissance de calcul de 1 Flops (Floating point operations per second).

Dessin d'Alf Lannerbaeck, publié par le journal suédois *Dagens Nyheter* le 22 septembre 1984.

Chaque nombre est ainsi affiché dans trois niveaux adjacents, de façon à maintenir les communications avec le Nord et le Sud sur la carte. Du plancher de la fosse s'élève une haute tour qui atteint la moitié de la hauteur du théâtre. Elle porte une chaire sur son sommet: le responsable de l'ensemble y est assis, entouré de plusieurs assistants et messagers. Une de ses tâches consiste à maintenir une vitesse de progression constante dans toutes les parties du globe. De ce point de vue, il ressemble au chef d'un orchestre dont les instruments seraient des règles à calcul et des machines à calculer. Mais au lieu d'agiter une baguette, il pointe un rayon lumineux rose en direction des régions en avance sur les autres et un rayon bleu vers celles qui sont à la traîne. Quatre employés de haut niveau collectent le temps au fur et à mesure qu'il est calculé, et l'expédient à l'aide d'une messagerie pneumatique vers une salle calme. De là, il sera codé et téléphoné vers la station d'émission radio. Des messagers transportent les piles de formulaires de calcul usagés vers un local d'archivage au sous-sol.

Dans un bâtiment voisin, un service de recherche est installé qui invente des améliorations. Mais il est nécessaire de faire des essais à petite échelle avant de procéder à des changements dans les algorithmes utilisés dans le théâtre de calcul. Dans le sous-sol, un enthousiaste passe son temps à observer des tourbillons dans le liquide qui remplit un bassin en rotation, mais jusqu'à présent la méthode numérique donne de meilleurs résultats. Dans un autre bâtiment sont installés les services financiers, courrier et administratif habituels. À l'extérieur se trouvent des terrains de jeux, des habitations, des montagnes et des lacs, car on a pensé que ceux qui calculent le temps devraient pouvoir le respirer librement.

Cependant, un petit essai de prévision d'évolution de la pression atmosphérique selon cette méthode, mais sans tout le personnel, donna un résultat très décevant:

la variation calculée était de 145 hPa en 6 heures, une valeur tout à fait impossible quand on pense qu'une variation de 20 hPa est considérée comme une variation extrême pour ce même temps.

En fait, la variation réelle a été presque nulle.

L'erreur de Richardson a été de discrétiser les dérivées des équations primitives atmosphériques sans tenir compte de la variabilité expérimentale des données.

Ces dérivées impliquent des divisions de nombres qui sont très proches l'un de l'autre (ex. variation de la pression ou de la température avec le temps). Or la variation des variables météorologiques peut être de

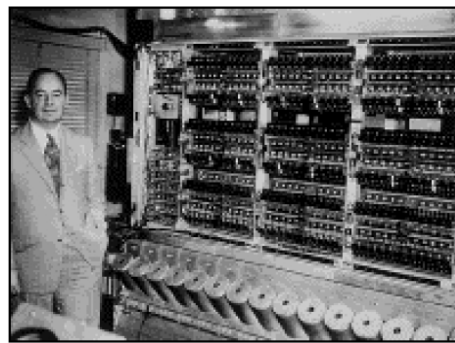
l'ordre de l'erreur de leur mesure et en plus, elle peut être instantanément grande sans pour autant durer. Il faut donc utiliser des valeurs lissées sur une certaine période pour obtenir des résultats réalistes. On sait maintenant que le pas de temps n'aurait pas dû excéder une demi-heure dans les calculs et que les données initiales, n'ayant pas subi de contrôle de qualité, introduisirent des instabilités de calcul. Richardson a cependant démontré l'idée que la prévision du temps par calcul était possible et les problèmes de logistique humaine et financière ont été résolus plus tard par l'avènement des ordinateurs.

En 1928, les mathématiciens allemands Courant, Friedrichs et Levy étudient de façon systématique la manière de résoudre les équations aux dérivées partielles à l'aide des « différences finies » et précisent les contraintes à respecter lors de la numérisation (Courant et al., 1928).

En 1939, le Suédois Carl-Gustav Rossby montre que l'équation de conservation du tourbillon absolu permet d'interpréter correctement le déplacement observé des centres d'action atmosphériques (Rossby et al., 1939).

Apparition de calculateurs électroniques

En 1946, le premier ordinateur électronique, l'Eniac (*Electronic Numerical Integrator Analyser and Computer*), voit le jour à l'université de Pennsylvanie située à Philadelphie (États-Unis), grâce à l'impulsion déterminante du mathématicien américain d'origine hongroise John von Neumann, qui propose de l'utiliser aussi pour la prévision météo.



En 1948, l'Américain Jule Charney propose une simplification du système général d'équations, connue sous le nom d'«approximation quasi géostrophique», et retrouve comme cas particulier l'équation étudiée par Rossby (Charney, 1948).

Enfin, en 1950, J. Charney, le Norvégien R. Fjörtoft et J. von Neumann réalisent la première prévision numérique du temps (Charney et al., 1950) : ils utilisent pour cette expérience l'équation de conservation du tourbillon absolu et effectuent les calculs numériques sur le ordinateur électronique Eniac, installé à Aberdeen (Maryland, États-Unis). Les résultats obtenus pour la prévision de l'altitude géopotentielle de la surface isobare 500 hPa, caractéristique de l'atmosphère moyenne, sont tout à fait encourageants et cette expérience historique marque ainsi le point de départ de la prévision numérique moderne (Platzmann, 1979). En réponse à Charney, qui lui avait fait parvenir l'article décrivant l'expérience, Richardson écrit en 1952 : «Permettez-moi de vous féliciter ainsi que vos collaborateurs pour le remarquable succès que vous avez obtenu à Princeton et pour les perspectives d'amélioration que vous indiquez» (Ashford, 1985).

Amélioration des performances

- 1955 modèle barocline de Charney sur IBM701 (10000 Flops)
- Mais jusqu'en 1962 c'est le modèle barotrope qui fait les prévisions sur 3 jours (32 x 23 points de calcul)
- Identification des problèmes d'instabilités numériques

Nouveaux concepts par les modèles

- 1956 Phillips: vérifications numériques de validité d'hypothèses physiques simplificatrices: Modèle quasi-géostrophique non-linéaire vérifiant qu'un modèle analytique linéaire est valable dans une plage de paramètres donnée
- Instabilités numériques linéaires et non-linéaires
- Débats sur les avantages des schémas robustes vs. schémas précis

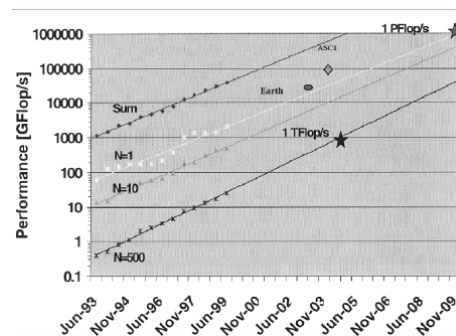
- 1966 Arakawa: discrétisations conservant des propriétés non-linéaires

Ressources disponibles

- Augmentation des ressources informatiques surtout utilisées pour assurer des résolutions plus fines

Puissances de calcul

- Croissance exponentielle: Loi de Moore: doublement des capacités tous les 18 mois.
- Le PC banal de 2001 était le superordinateur coûtant 1MEuro en 1992.
- Limitations à prévoir?
 - 1GHertz limite distances à 30cm (vitesse de la lumière)
 - Traçage des circuits par rayons lumineux limités par longueur d'onde du visible
 - Échauffements



Architectures nouvelles

- SISD single instruction, single data: processeur classique
- SIMD single instruction, multiple data: processeur vectoriel
- MIMD multiple instruction, multiple data: processeur parallèle
 - mémoire partagée: typiquement 16 processeurs exploités efficacement
 - mémoire distribuée: massivement parallèle mais recodage (1024 processeurs)

Programmation toujours en FORTRAN ...

Apparition de modèles océanographiques

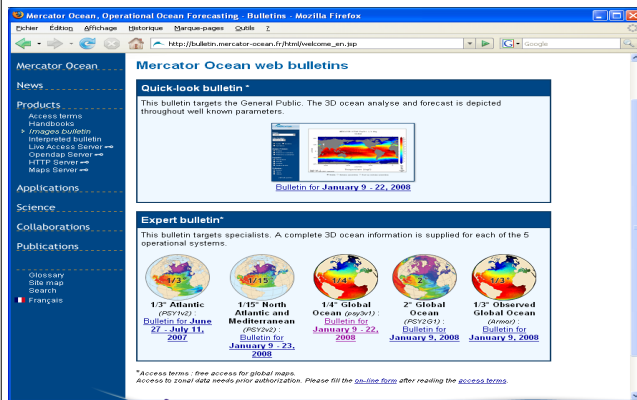
- 1963 Bryan: modèle barotrope
- 1969 Bryan: modèle barocline incluant effets topographiques et fermeture turbulente
- En météorologie, les modèles aux équations primitives 3D existent depuis 1963 (Smagorinsky).

Et depuis?

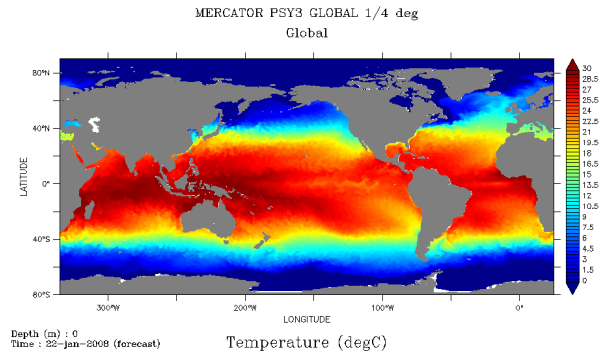
- Le modèle de Bryan (GFDL, MOM) est presque inchangé et reste le plus utilisé
- Les nouveaux développements viennent généralement des modèles météorologiques (assimilation, fermetures, méthodes spectrales, semi-lagrangiennes)
- Refaire complètement un modèle est un investissement majeur
- Ajouts aux modèles: assimilation de données, meilleurs schémas numériques, fermetures plus complexes

Exemples de modèles océaniques opérationnels

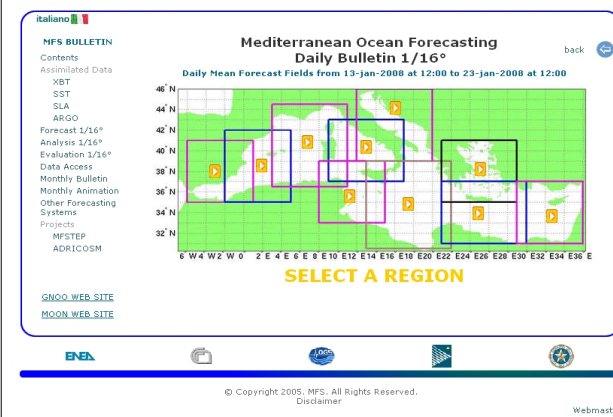
MERCATOR OCEAN



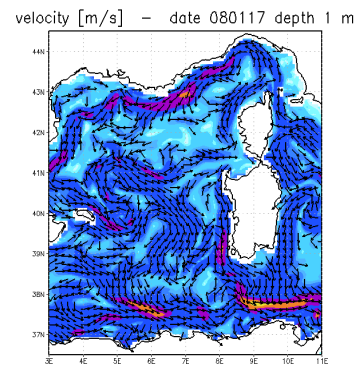
http://bulletin.mercator-ocean.fr/html/welcome_en.jsp



MFS



<http://www.bo.ingv.it/mfs/>



Introduction tirée du Cours

OPB205 Projet de modélisation de la circulation océanique

http://www.com.univ-mrs.fr/~doglioli/teaching_OPB205.htm

