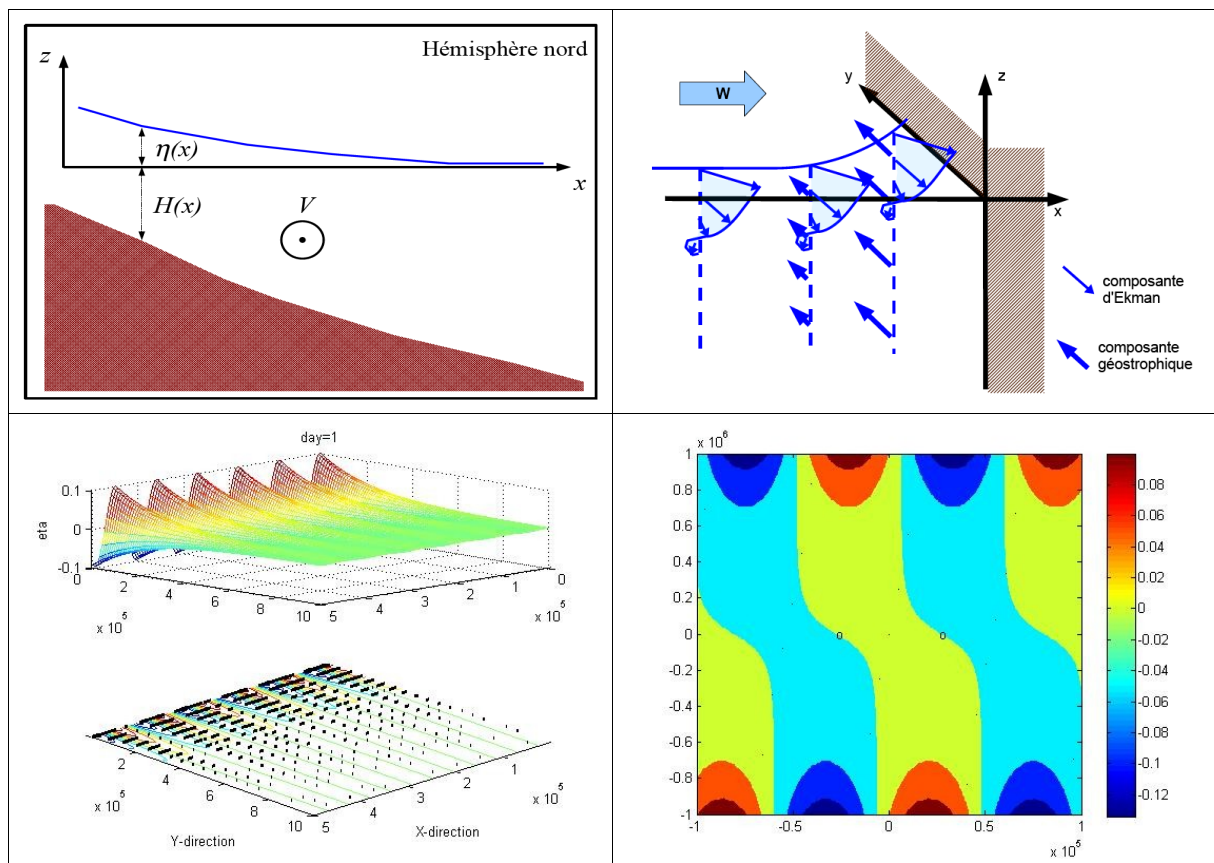


Andrea M. Doglioli

Notes du Cours

Océanographie Côtière



dernière révision 26 octobre 2011

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

Remerciements

Je désire remercier tous mes étudiants et mes collègues pour leurs commentaires, questions, corrections et suggestions.

En particulier ces notes bénéficient des contributions de A. Allou, R. Belon, N. Daniault, J.L. Devenon, J. Gatti, Z. Hu, Y. José, F. Mattioli, M. Magaldi, M. Kersalé, A. Petrenko, D. Piga.

Doglioli, A.M. (2010), *Notes du Cours Océanographie Côtière*, Centre de Océanologie de Marseille, Université de la Méditerranée, Marseille, France.

http://www.com.univ-mrs.fr/~doglioli/Doglioli_NotesCours_OceanographieCotiere.pdf

Ce matériel est distribué selon la licence Créative Commons [<http://creativecommons.org/>]

Vous êtes libres :

- * de reproduire, distribuer et communiquer cette création au public
- * de modifier cette création

Selon les conditions suivantes :

- * **Paternité.** Vous devez citer le nom de l'auteur original de la manière indiquée par l'auteur de l'oeuvre ou le titulaire des droits qui vous confère cette autorisation (mais pas d'une manière qui suggérerait qu'ils vous soutiennent ou approuvent votre utilisation de l'oeuvre).
- * **Pas d'Utilisation Commerciale.** Vous n'avez pas le droit d'utiliser cette création à des fins commerciales.
- * **Partage des Conditions Initiales à l'Identique.** Si vous modifiez, transformez ou adaptez cette création, vous n'avez le droit de distribuer la création qui en résulte que sous un contrat identique à celui-ci.



Cet ouvrage a été réalisé avec le logiciel libre OpenOffice <http://www.openoffice.org>

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

Table des matières

1. Introduction

- Rôle de l'Océan Côtier
- Importance économique des eaux côtières

2. Fondements

- 2.1 Équation de continuité
 - la densité
 - les effets de la température
 - les effets de la salinité
- 2.2 Équations de la quantité de mouvement
 - le tenseur de Reynolds
 - les forces de volume
- 2.3 L'approximation hydrostatique
 - L'approximation de Boussinesq
- 2.4 Les mouvements quasi-horizontaux
- 2.5 Le frottement sur le fond et à la surface
- 2.6 La viscosité turbulente
- 2.7 Linéarisation des équations
- 2.8 Les équations en eaux peu profondes
 - Problème locale et problème globale
- 2.9 Exemples de modèles simples
 - Le bilan géostrophique
 - Les oscillations d'inertie
 - La dérive d'Ekman

3. Ondes dans l'océan côtier

- 3.1 Les ondes de gravité longues
 - Ondes progressives
 - Ondes stationnaires
 - Les oscillations 1D dans un bassin fermé et semi-fermé
 - Les limites du modèle 1D
- 3.2 Les effets de la rotation de la Terre
 - Les ondes de Poincaré-Sverdrup
 - Les ondes de Kelvin
 - Les points amphidromiques

4. Courant levés par le vent au voisinage d'une côte

- 4.1 L'équilibre dit "*wind setup*"
 - Le "*wind setup*" dans un bassin de forme arbitraire
- 4.2 Solution pour un vent perpendiculaire à une cote
- 4.3 Solution pour un vent parallèle à une cote

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

Bibliographie et Liens utiles

Csanady, G. (1982), *Circulation in the coastal ocean*. D.Reidel Publishing Company, Kluwer Group, Dordrech, Holland .

Daniault, N. (2005), *Océanographie Physique pour l'École Navale*. Cours en ligne, Université de Bretagne Occidentale, Brest, France .

http://stockage.univ-brest.fr/~daniault/oceano_physique.pdf

Tomczak, M. (1998), *Shelf and Coastal Oceanography*. Cours en ligne, Flinders University of South Australia, Adelaide, Australia .

<http://www.es.flinders.edu.au/~mattom/ShelfCoast/newstart.html>

Pedloski, J (2003), *Waves in the Ocean and Atmosphere. Introduction to Wave Dynamics*. Springer, USA .

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

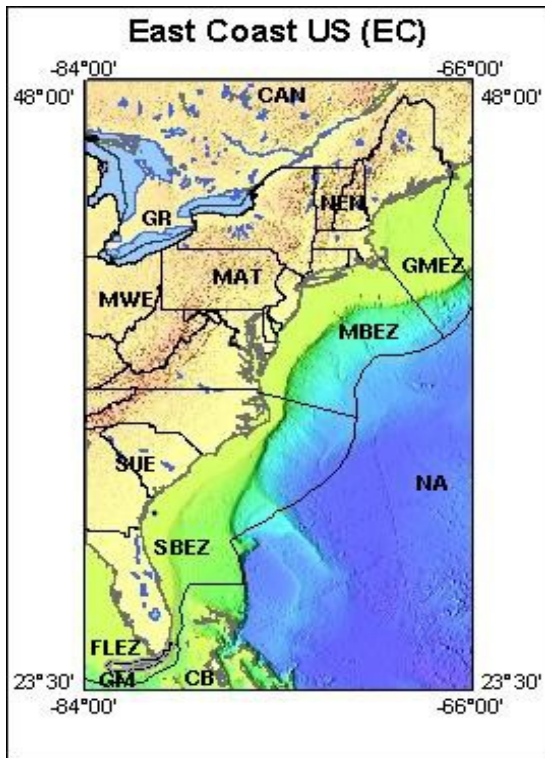
1. Introduction

L'océanographie physique dynamique a pour objet l'étude des mouvements de la mer et son champ d'application va des océans profonds aux estuaires, i.e. partout où l'eau de mer pénètre . Des nombreux de phénomènes physique, et théories leur correspondant, sont communs à l'ensemble des situations océaniques mais les eaux côtières diffèrent suffisamment à la fois des océans et des zones estuariennes et lagunaires de sorte qu'elles méritent une attention particulière .

Les trois zones sont bien entendu interconnectées et dépendent les unes des autres . Les marées qui induisent les élévations et les dénivellations d'eau dans les zones côtières sont générées dans l'océan profond . Les vagues qui brisent sur les plages peuvent avoir reçu leur énergie à des milliers de kilomètres de là . Les eaux fluviales, qui sont souvent à l'origine de l'existence de zones côtières à faible salinité et à haute concentration en sels nutritifs viennent des estuaires .

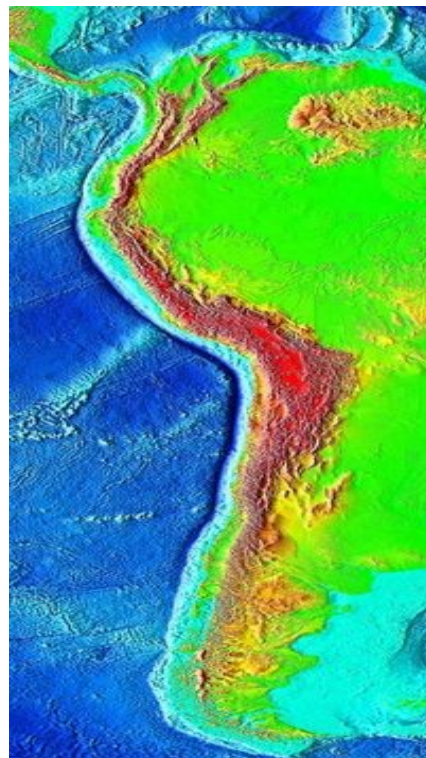
Les processus dynamiques dans les mers peu profondes et sur les marges continentales sont très différents de ceux de l'océan profond pour plusieurs raisons . Les échelles horizontales sont beaucoup plus petites et la présence de la côte constitue une forte contrainte . Les profondeurs concernées sont seulement de l'ordre des *centaines de mètres*, donc les effets de la surface, tel que le frottement du vent, le refroidissement ou le réchauffement de la surface, s'étendent sur une large fraction de la colonne d'eau, et quelques fois sur toute sa hauteur, tandis que dans l'océan profond les mêmes phénomènes agissent sur ce qu'on peut définir comme la « peau de l'océan » (Csanady), c'est à dire la petite couche superficielle . En même temps, ces bassins d'eaux peu profondes, ayant sur l'horizontal des dimensions de l'ordre des *centaines de kilomètres*, se comportent aussi d'une façon « océanique », c'est-à-dire que les mouvements sont fortement influencés par la rotation de la Terre .

On peut donc parler d'océan côtier comme celui constitué par les mers de cette taille avec une profondeur de quelques centaines de mètres . Dans cette définition on inclue donc des mers ouvertes avec une marge continentale large et plate (la *East Coast*, i.e. la côte atlantique des Etats Unis) ou avec une marge continentale étroite et raide (la *West Coast*, i.e. la côte pacifique des Etats Unis, ou la côte du Pérou-Chili), des bassins semi-fermés comme le Golfe du Maine ou la mer du Nord et aussi des bassins fermés comme les Grands Lacs de l'Amérique du Nord .



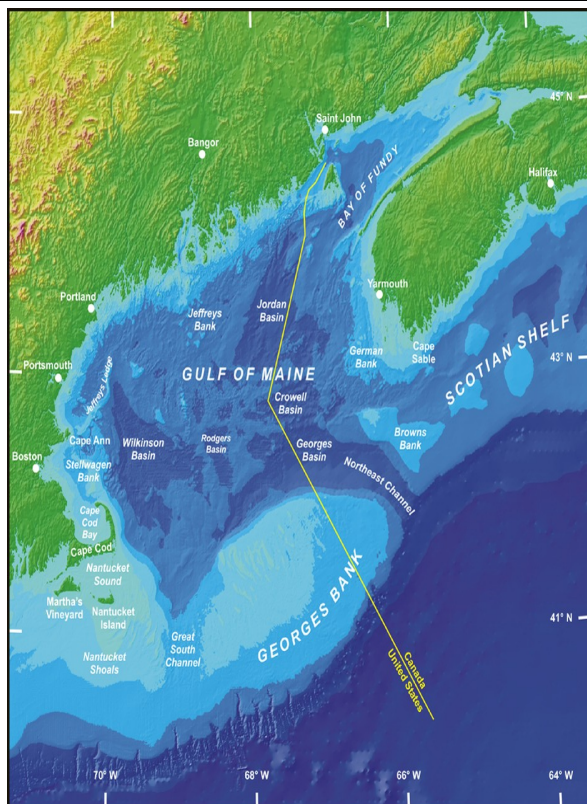
www.usgs.gov

East Coast des Etats Unis



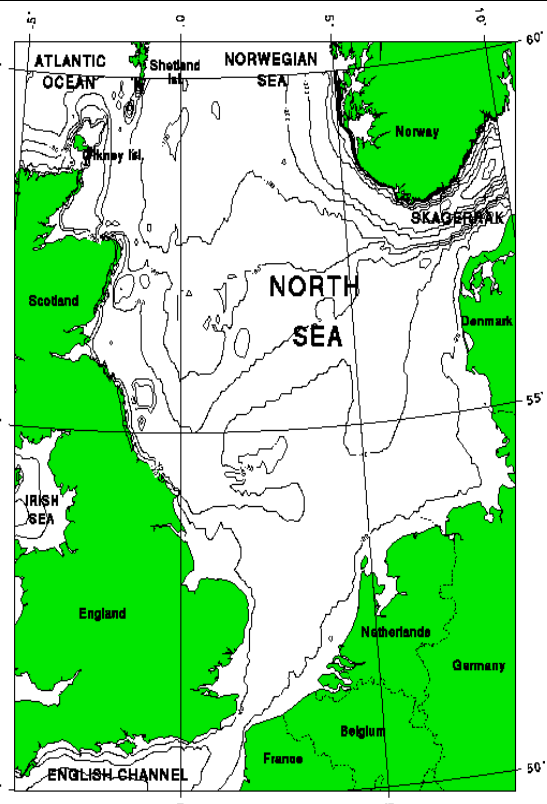
http://en.wikipedia.org/wiki/Peru-Chile_Trench

Côte pacifique de l'Amérique du Sud



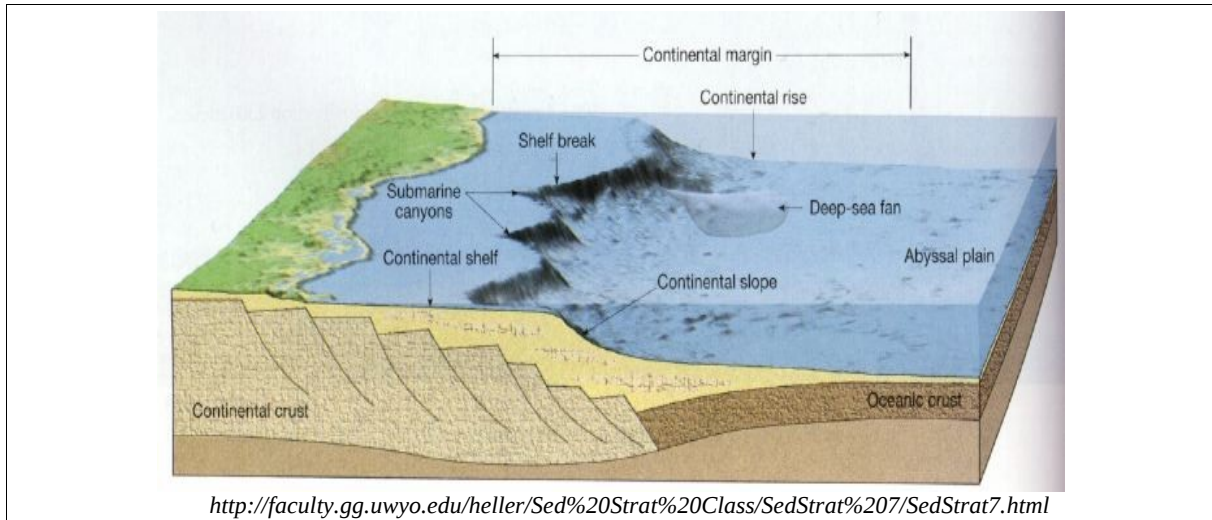
http://en.wikipedia.org/wiki/Gulf_of_Maine

Le bassin semi-fermé du Golfe du Maine



<http://stommel.tamu.edu/~baum/paleo/seamaps/north-sea.gif>

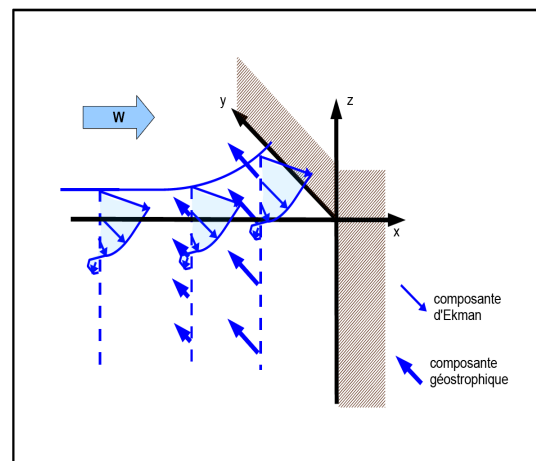
La Mer du Nord



Le terme d'eaux côtières recouvre donc les eaux qui se trouvent sur le plateau continental .
La marge du plateau continental, le talus, est habituellement une zone présentant un fort accroissement de la pente du fond qui passe de 1 : 500 à 1 : 20 .
La première caractéristique propre aux eaux côtières est typiquement leur très faible profondeur, typiquement inférieure à 200 m, en comparaison avec la profondeur moyenne de l'océan profond qui est à peu près de 4000 m .

La présence du fond à une profondeur relativement faible induit une plus grande contrainte sur les mouvements marins que dans le cas d'eaux plus profondes . Dans les zones côtières les courants près du fond sont souvent de grande intensité et le frottement exercé par le fond, qui est généralement négligeable en eaux profondes, joue un rôle significatif dans leur dynamique.

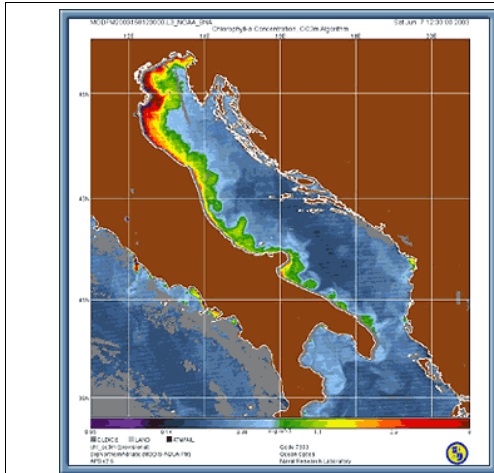
La présence d'une ligne de côte agit comme contrainte latérale sur le mouvement des masses d'eau, tendant à les dévier de sorte que l'écoulement se fasse parallèlement à la côte . Du fait de son rôle d'obstacle pour les eaux qui vont vers elle, la ligne de côte engendre des pentes de surface qui à leur tour modifient les mouvements de l'eau.



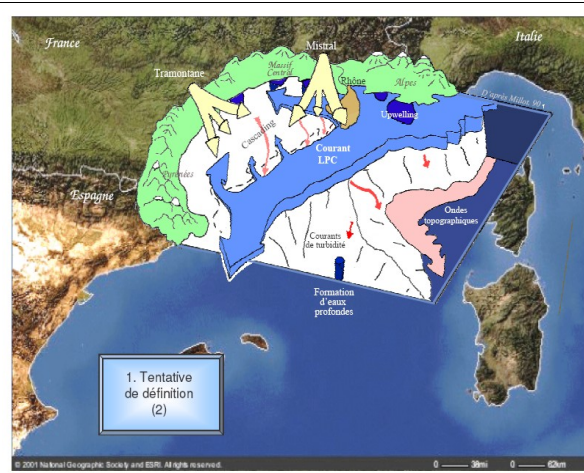
L'apport d'eau douce continentale a pour effet de réduire la salinité, et également la masse volumique, des eaux côtières . En plus, pour un même flux thermique à l'interface Océan-Atmosphère, les eaux peu profondes près de la côte subissent des plus grandes variations en température que les eaux plus profondes . Comme résultat de ces effets, les eaux côtières sont généralement des régions présentant de forts gradients horizontaux en salinité et température et par conséquent en masse volumique, donc souvent associées à des modifications de la circulation.

Les caractéristiques précédentes des eaux côtières ont quelques conséquences physiques importante.
Tout d'abord les marées et les courants de marée sont considérablement modifiés si on les compare avec leurs propriétés en eau profonde . Leur amplitude est généralement accrue, parfois d'un facteur très grand lorsqu'il y a résonance entre la période de la marée et la période naturelle d'oscillation d'une masse d'eau côtière . Par ailleurs les courants de marée sont plus intenses sur le plateau continental de sorte que le frottement du fond a une plus grande influence sur eux.

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--



<http://iop.apl.washington.edu>
A MODIS ocean color image (provided by NRL-Stennis Space Center) from 7 June 2003.



<http://poc.obs-mip.fr/auclair/index.htm>
Caractéristiques de la circulation et des forçages dans le Golfe du Lion

Les ondes de surface sont omniprésentes dans les océans, mais quand elles transitent dans des eaux moins profondes la proximité du fond induit des changements considérables et éventuellement les fait déferler de sorte qu'elles dissipent la majeure partie de leur énergie avant d'arriver au rivage. Cette libération d'énergie provoque les mouvements d'une grande quantité de sédiments dans certaines zones et exerce des forces considérables sur les structures naturelles ou celles construites par l'homme.

Les courants de dérive dus au vent sont également fortement affectés par la présence de la ligne côtière et par la proximité du fond. Dans certaines zones cela donne naissance à des houles de tempête, tandis que dans d'autres cas d'autres effets sont engendrés tels que l'apparition de remontées/descentes d'eaux (*upwelling/downwelling*) et de jets côtiers.

À cause de l'existence de forts gradients horizontaux de masse volumique, les courants de densité sont plus souvent une caractéristique de la zone côtière. Ils ont quelques similitudes avec ceux de la circulation estuarienne, mais il faut toujours se rappeler que les effets de Coriolis sont significatifs en zone côtière.

Dans certains cas des courants océaniques importants s'écoulent le long du talus continental, présentant des variations en intensité, des méandres, des tourbillons qui peuvent avoir une forte influence sur les eaux côtières.

Rôle de l'océan côtier

L'océan côtier malgré la faiblesse des surfaces et volumes concernés (8% et 0,05% de l'océan global, respectivement) est actuellement le siège d'enjeux cruciaux. Ce milieu est le trait d'union entre le continent, marqué par une importante présence humaine et ses activités (40% de la population mondiale vit à moins de 100 km des côtes), et l'océan du large qui est le principal régulateur thermique et biogéochimique de la planète. Le domaine côtier rassemble donc des préoccupations fondamentales propres à la gestion environnementale mais également au fonctionnement du système biosphère-géosphère.

L'océan côtier est en général caractérisé par une forte productivité biologique en raison d'un enrichissement en sels nutritifs lié aux activités anthropiques ou bien aux apports naturels des fleuves. Ainsi les zones côtières pourraient contribuer pour une part importante à la séquestration de carbone dans les couches profondes de l'Océan. 18 à 33% de la production primaire globale, 80% de l'enfouissement global de matière organique et 90% de la minéralisation globale dans les sédiments marins seraient effectués dans cette zone. Ces estimations délivrées à la conférence de Dahlem en 1991, soulignent l'importance potentielle de la zone côtière dans le bilan global de carbone mais

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité FLuides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

demandent encore aujourd'hui à être précisées . En effet, depuis cette conférence un certain nombre de programmes internationaux (e.g. LOICZ - *Land-Ocean Interactions in the Coastal Zone* <http://www.loicz.org/> , ELOISE-*European Land Ocean Interactions Studies* <http://www2.nilu.no/eloise/>) et nationaux (e.g. PNEC-Programme National Environnement Côtier <http://www.insu.cnrs.fr/a334.pnec.html> , MOOSE-*Mediterranean Ocean Observing System on Environment* , <http://www.obs-vlfr.fr/moose/> , <http://www.enea.it/eventi/eventi2008/SummerSchool170708/Mantoura.pdf>) ont été ou sont consacrés à l'étude de cette zone afin de savoir, entre autre, quel était le statut des zones côtières comme source ou puits de carbone dans l'océan global . Les synthèses des travaux mis en œuvre dans ces programmes, montrent que cette question n'admet pas une réponse unique du fait de la variété des systèmes côtiers et la complexité des processus mis en jeu . L'origine et le devenir de la matière organique, son utilisation par le réseau trophique, son piégeage par enfouissement ou exportation vers le large sont autant de questions dont les réponses en terme quantitatifs demeurent encore aujourd'hui incertaines.

Importance économique des eaux côtières

Les eaux côtières ont également un rôle important du point de vu économique . Les installations portuaires sont situées à la côte, donc soumis à l'action des courants côtiers, des marées, des houles et des vagues . Pour les rejoindre les bateaux doivent naviguer les eaux côtières pour entrer et sortir des ports . La majorité des pêches au niveau mondial se fait sur le plateau continental et les mers adjacentes et les conditions physiques jouent souvent un rôle majeur dans leur productivité . De plus il y a aussi un développement de fermes aquicoles qui évidemment s'installent près de la côte .

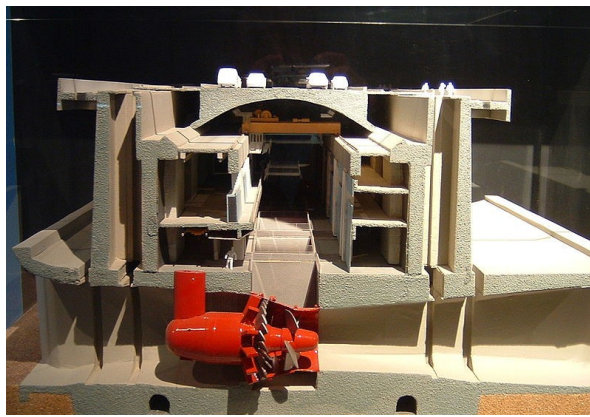
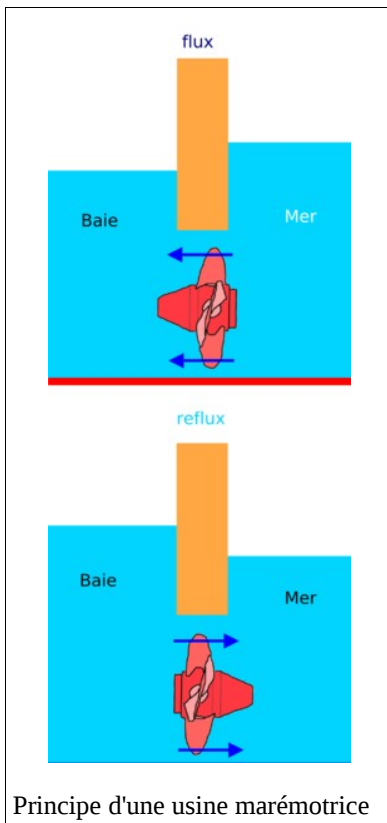
Dans la même zone il y a aussi les exploitations des minéraux solides, du pétrole et de gaz et les infrastructures qui vont avec (plateforme, oléoduc et gazoduc), sans compter toutes les lignes de communications .

Plus récemment on a assisté à la mise en place dans les eaux peu profondes des premiers générateurs éoliens, qui dans ces zones peuvent mieux exploiter l'énergie du vent avant quelle soit dissipée sur le continent . Toujours dans le domaine des énergies renouvelables, la première utilisation de l'énergie marémotrice remonte aux années 1120, avec la construction de moulins à marées. La première usine marémotrice au monde à été construite en France dans l'estuaire de la Rance; connectée au réseau depuis 1967, elle produit environ 500 Gwh/an .

<i>Visiter le site :</i> www.energy-market-research.info/	<i>Visiter le site :</i> http://www.atlantic-cable.com/Article/1869French/BrightMap1.jpg
pour des cartes de structures énergétiques dans la Mer du Nord: oléoduc, gazoduc, plates-formes, raffineries, terminales pétroliers	pour le détail de la Carte des Câbles Télégraphiques Transatlantiques en 1897 publiée par le Bureau International du Télégraphe de Berne. La nouvelle Écosse a représenté entre 1890 et 1950 un noeud très important pour les télécommunications.



Parc éolien offshore (Danemark) . Figure tirée de http://fr.wikipedia.org/wiki/Parc_éolien



Maquette de la coupe du barrage de la Rance

Figures tirées de http://fr.wikipedia.org/wiki/Énergie_marémotrice

Enfin, il faut pas oublier l'importance de l'industrie du tourisme balnéaire .

Tous ces intérêts sont aussi souvent en contraste entre eux et une connaissance approfondie de cet écosystème est nécessaire pour résoudre les controverses .

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

2. Fondements

2.1 Équation de continuité

Dans la mécanique des fluides classique l'équation de continuité est généralement écrite dans la forme Eulérienne

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0$$

avec ρ masse volumique, t temps et u_i vitesse du fluide le long des trois axes x_i (avec $i=1,2,3$ et application de la règle de l'addition, voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Convention_de_sommation_d'Einstein). L'équation exprime l'idée que la densité locale change seulement s'il y a une convergence ou une divergence du flux de masse (ρu_i).

Une autre forme de l'équation est

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.1)$$

avec

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i}$$

dérivé totale de la masse volumique, i.e. la vitesse de changement de la densité en suivant la particule.

Si on veut appliquer cette équation à l'océan côtier, on s'aperçoit que l'eau de mer n'est pas une substance très simple! D'abord on ajoute des changements en masse volumique dus à la diffusion du sel. En eau douce on peut simplifier en considérant que les causes principales des variations de masse volumique sont le refroidissement et le réchauffement du fluide et que ces effets sont tenus en compte dans l'équation (1.1) si on considère que u_i comprend aussi les expansions et les contractions thermiques, mais cela n'est pas possible en eau de mer. Toutefois, dans la gamme des valeurs réalistes des variations de flux de chaleur et de sel, la température et la salinité varient très lentement.

La masse volumique et la « densité »

La masse volumique est le paramètre fondamental pour l'étude dynamique des océans. Des faibles variations horizontales de masse volumique (générées par exemple par des différences de rayonnement solaire) peuvent produire des courants importants.

En toute rigueur, densité = (masse 1 m³ d'eau de mer)/(masse 1 m³ d'eau distillée à 4°C) [pas d'unité]. En océanographie, traditionnellement on lui donne une autre définition : pour des raisons pratiques on nomme « densité » la masse volumique [kg m⁻³] - 1000 et on utilise le symbole σ .

La masse volumique ρ de l'eau de mer dépend de la salinité S , de la température T et de la pression p . La relation entre ces termes est l'équation d'état de l'eau de mer. Cette relation empirique est le résultat de nombreuses études en laboratoire. La première équation établie en 1902 par Knudsen et Ekman est aujourd'hui remplacée par "l'Equation d'Etat Internationale (1980)" :

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

IES80 : équation d'état de l'eau de mer
(International Equation of State of Seawater)

$$\rho(S, t, p) = \rho(S, t, 0) \left[1 - p / K(S, t, p) \right]$$

avec

$$\rho(S, t, 0) = 999.842594 + 6.793952 \times 10^{-2} t - 9.095290 \times 10^{-3} t^2 + 1.001685 \times 10^{-4} t^3 - 1.120083 \times 10^{-6} t^4$$

$$+ 6.536332 \times 10^{-9} t^5 + 8.24493 \times 10^{-1} S - 4.0899 \times 10^{-3} t S + 7.6438 \times 10^{-5} t^2 S - 8.2467 \times 10^{-7} t^3 S$$

$$+ 5.3875 \times 10^{-9} t^4 S - 5.72466 \times 10^{-3} S^2 + 1.0227 \times 10^{-4} t S^2 - 1.6546 \times 10^{-6} t^2 S^2$$

$$+ 4.8314 \times 10^{-4} S^3$$

et

$$K(S, t, p) = 19652.21 + 148.4206 t - 2.327105 t^2 + 1.360447 \times 10^{-2} t^3 - 5.155288 \times 10^{-5} t^4 + 3.239908 p$$

$$+ 1.43713 \times 10^{-3} t p + 1.16092 \times 10^{-4} t^2 p - 5.77905 \times 10^{-7} t^3 p + 8.50935 \times 10^{-5} p^2$$

$$- 6.12293 \times 10^{-6} t p^2 + 5.2787 \times 10^{-8} t^2 p^2 + 54.6746 S - 0.603459 t S + 1.09987 \times 10^{-2} t^2 S$$

$$- 6.1670 \times 10^{-5} t^3 S + 7.944 \times 10^{-2} S^2 + 1.6483 \times 10^{-2} t S^2 - 5.3009 \times 10^{-4} t^2 S^2 + 2.2838 \times 10^{-3} p S$$

$$- 1.0981 \times 10^{-5} t p S - 1.6078 \times 10^{-6} t^2 p S + 1.91075 \times 10^{-4} p S^2 - 9.9348 \times 10^{-7} p^2 S$$

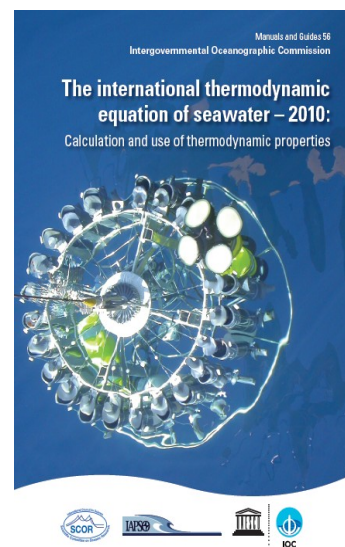
$$+ 2.0816 \times 10^{-8} t p^2 S + 9.1697 \times 10^{-10} t^2 p^2 S$$

<http://lecalve.univ-tln.fr/oceano/ies80/index.html>

Des formulations plus fine et récentes sont aussi présente dans la littérature (Anati, 1999; Feistel 2003, 2005) , ainsi que des formulations tenant en compte la variabilité géographique liée à la forme du géoïde (pour le concept de « *neutral density* » voir McDougall, 1987).

En juin 2009, la Commission Intergouvernementale Océanographique (IOC, “*Intergovernmental Oceanographic Commission*”), avec l’appui du Comité Scientifique de Recherche Océanographique (SCOR, “*Scientific Committee Oceanic Research*”) et de l’Association Internationale Des Sciences Physiques de l’Océan (IAPSO, “*International Association of the Physical Sciences of the Oceans*”), a adopté l’Equation Thermodynamique de l’eau de mer 2010 (TEOS-10, “*Thermodynamic Equation of Seawater – 2010*”) comme définition officielle des propriétés de l’eau de mer et de la glace en science de l’océan.

Il est d’ors et déjà fortement conseillé aux océanographes d’utiliser les algorithmes et variables définis par TEOS-10 pour rapporter leurs résultats.



Les différences fondamentales de TEOS-10 par rapport à EOS-80 sont :

- (1) l’utilisation de la Salinité Absolue (Absolute Salinity SA) pour décrire la salinité de l’eau de mer; la Salinité Absolue prend en considération la variabilité spatiale de la composition de l’eau de mer. En pleine mer, l’usage de cette nouvelle salinité a un effet non trivial sur le gradient horizontal de masse volumique, et ainsi sur les vitesses calculés via l’équation du “vent thermique”.
- (2) l’utilisation de la Température Conservatrice (Conservative Temperature Q) pour remplacer l’utilisation de la température potentielle q. Ces deux températures sont des grandeurs déterminées à partir d’une expérience de pensée (à savoir, grandeurs ramenés à la pression de surface de manière adiabatique et isohaline). La Température Conservatrice présente l’avantage de mieux représenter la capacité calorifique de l’eau de mer, avec une précision supérieure par deux ordres de grandeur à celle de la température potentielle.
- (3) Les propriétés de l’eau de mer définies par TEOS-10 découlent toutes mathématiquement d’une fonction de Gibbs (notamment par différenciation) et sont ainsi compatibles les unes avec les autres (contrairement à l’approche EOS-80 désormais obsolète, dans laquelle différents polynômes définissaient chaque variable thermodynamique et n’étaient pas mutuellement compatibles).

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

Pour permettre à tout océanographe d'utiliser le nouveau formalisme TEOS-10, deux logiciels sont disponibles :

- (i) La 'toolbox' océanographique Gibbs SeaWater (GSW) (pour MATLAB et FORTRAN) et,
- (ii) Sea-Ice-Air (SIA) (Fortran et Visual Basic).

Ces deux logiciels sont libres d'accès depuis le site Internet suivant : <http://www.TEOS-10.org> .

Dans le cadre du cours, on peut toutefois, apporter des simplifications.

On définit comme densité potentielle (« *potential density* ») la densité d'une particule qui a été déplacée adiabatiquement à une pression de référence, par exemple à la surface. Dans les eaux côtières les variations de pression sont petites, une dizaine d'atmosphères, et cela correspond en pratique à négliger la contribution de la pression et adopter la relation plus simple

$$\rho = \rho(T, S)$$

Les effets de la température

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT} \frac{dT}{dt} \quad (1.1.1)$$

En eaux peu profondes les variations de T sont principalement dues au réchauffement/refroidissement de la surface, ce qui est quantifiée par le flux de chaleur (*heat flux*) q_s c'est-à-dire la chaleur transférée pour unité de surface et unité de temps [$\text{W m}^{-2} = \text{J s}^{-1} \text{m}^{-2}$ ou $\text{kcal s}^{-1} \text{m}^{-2}$]. Le champ de température est décrit par une loi de conservation avec une structure similaire à celle de (1.1) :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i T) = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{q_i}{\rho c_p} \right)$$

où c_p est la chaleur spécifique et q_i sont les composantes du flux de chaleur comprenant la chaleur radiative et les flux turbulents de Reynolds $\rho c_p \langle u_i T' \rangle$ (voir ci-dessous). Le flux de chaleur à la surface est une condition aux limites

$$q_s = q_3(x_3=0)$$

Par exemple, dans une journée de beau temps en été quand le soleil est au zénith on a un flux de chaleur de $400 \text{ W m}^{-2} = 400 \text{ J s}^{-1} \text{m}^{-2} = 100 \text{ cal m}^{-2} \text{s}^{-1}$, si on suppose que l'énergie est complètement absorbée dans le premier mètre d'eau et qu'il n'y a pas de perte de chaleur par advection/diffusion et si la chaleur spécifique est de $4000 \text{ J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ on calcule une variation de température de

$$\frac{dT}{dt} = - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{q_s}{\rho c_p} \right) = \frac{4 \cdot 10^2 \text{ J s}^{-1} \text{m}^{-3}}{10^3 \text{ kg m}^{-3} \cdot 4 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{K}^{-1}} = O(10^{-4} \text{ K s}^{-1})$$

i.e. la température varie de 1 degré toutes les $3h = 12400 \text{ s} \approx 10^4 \text{ s}$.

Le coefficient de dilatation thermique vaut

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT} \approx 10^{-4} \text{ K}^{-1}$$

En substituant dans (1.1.1) on obtient donc

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 10^{-8} \text{ s}^{-1}$$

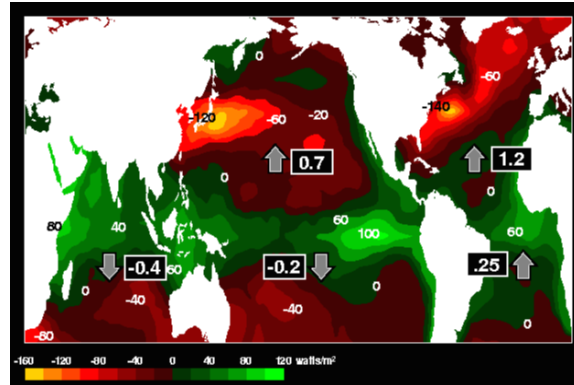
c'est à dire que dans un jour entier (10^5 s) il y a une variation qui serait d'une partie sur mille!!!

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

Si en plus on considère que pour faire ce calcul on s'est mis dans des conditions de maximum de radiation on voit bien que cet effet est négligeable.

Il faut se rappeler que si en mer on observe des variations plus fortes, elle sont dues au mélange turbulent et à l'advection .

La figure ci-contre montre le flux de chaleur ($W m^{-2}$) à la surface de l'océan global . Les valeurs positives indiquent que la chaleur pénètre dans l'océan. Le flèches indiquent le transport méridional. Ces valeurs montrent qu'en réalité le flux de chaleur est bien plus petit que notre estimation .



http://sam.ucsd.edu/sio210/lect_3/lecture_3.html

Hsiung, 1985, *Estimates of global oceanic meridional heat transport*. J. Phys. Oceanogr., 15, 1405-1413.

Les effets de la salinité

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dS} \frac{dS}{dt} \quad (1.1.2)$$

Les variations de salinité en eaux côtières sont principalement dues aux apports d'eau douce des rivières, bien que des fois et dans des endroits précis, les pluies locales et la fonte des glaciers peuvent jouer un rôle important.

Comme pour la température on a une loi de conservation

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i S) = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{s_i}{\rho} \right) + \frac{E - P}{\rho}$$

ou la salinité S est un rapport entre masses et s_i est le flux de sel en $kg m^{-2} s^{-1}$ qui encore une fois comprend les flux turbulents de Reynolds $\rho \langle u_i' S' \rangle$ (voir ci-dessous) . E et P sont l'évaporation et la précipitation, respectivement.

Si on considère l'advection négligeable et l'évaporation E compensée par la précipitation P (ces deux grandeurs sont très difficiles à mesurer en mer et on a encore aujourd'hui une très grande incertitude sur leur valeurs réelles), les deux seconds termes à droite et à gauche disparaissent.

Pour ce qui concerne le gradient du flux de sel, généralement on dit qu'il est proportionnel au gradient de salinité (en termes simples, le sel bouge d'où il y en a beaucoup vers où il y en a peu) et que la constante de proportionnalité est un coefficient de diffusion :

$$s_i = D_s \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho S)$$

En prenant encore une fois une situation extrême: 2 couches de 1 m d'épaisseur, l'une avec une salinité de 25 pour mille et l'autre 35 pour mille (une différence de 10 est un cas vraiment extrême!) et en sachant que la diffusivité moléculaire de la salinité est toute petite $D_s = 10^{-9} m^2 s^{-1}$, on a

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{D_s}{\rho} \frac{\partial (\rho S)}{\partial x_3} \right] = \frac{1}{1m} \frac{10^{-9} m^2 s^{-1}}{10^3 kg m^{-3}} \frac{10^3 kg m^{-3} 10}{1m} = 10^{-8} s^{-1}$$

Le coefficient de contraction saline vaut

$$\beta = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dS} \simeq 0.8$$

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

En conclusion, en remplaçant dans la (1.1.2)

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 8 \cdot 10^{-1} 10^{-8} \simeq 10^{-8} \text{ s}^{-1}$$

Encore une fois on a des effets très petits comme pour la température. En plus, dans le cas de la salinité il faut aussi tenir compte du fait que la turbulence est aussi entravée par la stabilité des couches.

Alors dans l'équation (1.1) le premier terme est de l'ordre de grandeur de 10^{-8} .

Si maintenant on regard le terme d'advection on trouve par contre que les vitesses du courant sont comprises entre le 0.1 et le 1.0 m s^{-1} et que les mouvements, comme dit précédemment, sont sur des échelles horizontales de 100 km = 10^5 m. On a donc le second terme de l'équation (1.1) de l'ordre de grandeur entre 10^{-7} et 10^{-5} .

Cela dit, dans beaucoup de situations en océanographie côtière on peut simplifier l'équation (1.1) dans la forme:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{1.4}$$

Cette équation est aussi la forme standard de l'équation de continuité pour un fluide incompressible. Physiquement cette équation nous dit que, une fois un volume de contrôle fixé, le volume d'eau entrante doit compenser le volume d'eau sortante.

2.2 Équations de la quantité de mouvement

En approche Eulérien la seconde loi de Newton (ou principe fondamental de la dynamique de translation) s'écrit

$$\frac{d(\rho u_i)}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i \tag{1.3}$$

Dans la partie gauche il y le taux de changement de la quantité de mouvement par unité de volume en suivant une particule de fluide tandis que dans la partie droite il y a la somme des forces de surface et de volume.

Les forces de surface sont les gradients de pression hydrostatique p et la divergence du tenseur des contraintes τ_{ij} .

Les forces de volume ρb_i ont plusieurs origines (gravité, Coriolis), mais toutes sont caractérisées par le fait qu'elles soient proportionnelles à la masse de la particule.

Le premier index dans τ_{ij} est utilisé pour définir la direction de cisaillement (parallèle à x_i) tandis que le second index définit le plan de cette action (perpendiculaire à x_i). L'axe x_3 indique la verticale. Donc, τ_{13} et τ_{23} sont les contraintes de cisaillement sur les plans horizontaux, tandis que τ_{12} et τ_{21} sont celles sur les frontières latérales.

Entre les différentes composantes du tenseur des contraintes, les contraintes de cisaillement sur les

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

plans horizontaux sont particulièrement importantes dans les eaux peu profondes, parce que ceux sont elles qui transmettent le forçage du vent aux couches de surface et le frottement aux couches de fond.

En utilisant l'équation de continuité pour un fluide incompressible (1.2) on peut réécrire la dérivée totale à droite dans (1.3) de la façon suivante

$$\frac{d(\rho u_i)}{dt} = \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) \quad (1.4)$$

Le deuxième terme sur la droite est la divergence du flux de la quantité de mouvement entraînée par l'écoulement même. Il représente la redistribution de la quantité de mouvement dans l'espace, dont heureusement les effets sont importants seulement dans une partie limitée du champ d'écoulement. En effet ce terme non linéaire dans les composantes de la vitesse est la source de beaucoup de complexités mathématiques!

Le tenseur des contraintes de Reynolds

L'écoulement dans les eaux côtières est généralement turbulent, surtout dans les couches de surface et de fond et les échelles de temps de ces mouvements sont typiquement en excès par rapport aux échelles typique des fluctuations turbulentes. Dans ces circonstances il est possible d'utiliser l'approche de Reynolds et penser les équations de la continuité et du mouvement comme relatives à un écoulement moyen convenablement défini.

Donc toutes les quantités turbulentes qui interviennent dans les équations sont supposées être la somme d'une composante moyenne et d'une composante fluctuante

$$u_i = \bar{u}_i + u_i'$$

$$p = \bar{p} + p'$$

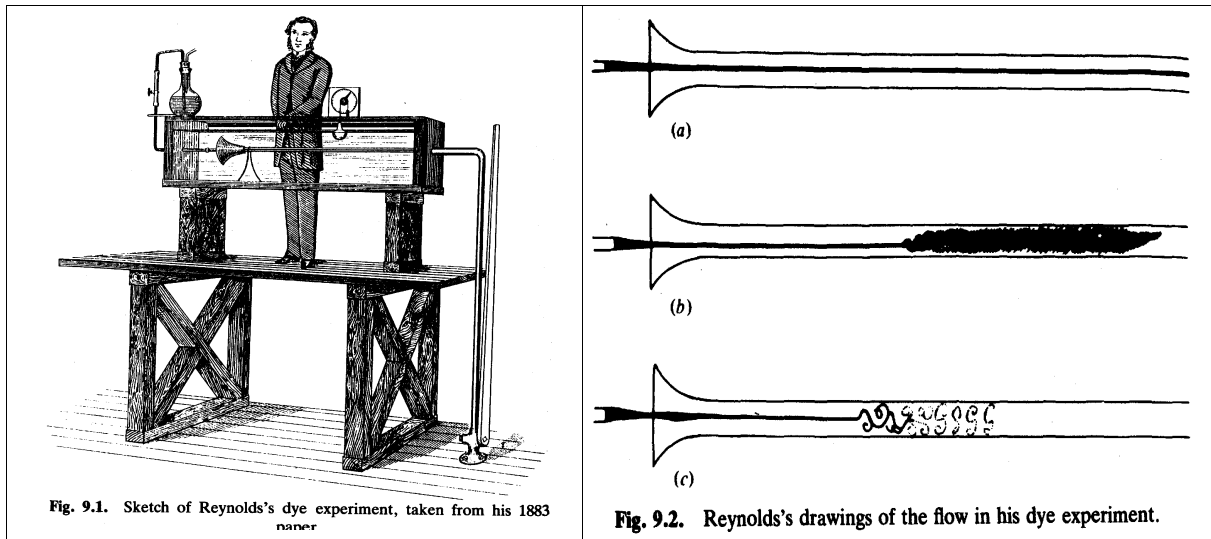
Les moyennes temporelles étant de u_i', p' nulles par hypothèse, dans les équations de continuité et du mouvement moyennées tous les termes qui contiennent des fluctuations disparaissent, sauf les termes contenant la moyenne du produit $\rho \overline{u_i' u_j'}$. La divergence de ces termes joue un rôle dans les équations du mouvement qui est très similaire à celui des termes visqueux ainsi ces termes sont généralement mis dans la partie droite de l'équation du mouvement et combinés avec les termes visqueux moyennés :

$$\tau_{ij} = \bar{\tau}_{ij} - \rho \overline{u_i' u_j'}$$

La contribution de la viscosité moléculaire est toute petite par rapport à celle de la viscosité turbulente (mis à part quelque cas exceptionnel) donc dans la suite on considérera toujours que les contraintes turbulentes de Reynolds sont toujours incluses dans les termes visqueux et que l'équation (1.3) est toujours appliquée à l'écoulement moyen, bien que d'un point de vue pratique on ne mettra plus sur toutes les quantités les barres symbolisant l'opération de moyenne .

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

RAPPEL (voir Cours OPCB217)



His results were as follows:

1. At low velocities the streak of dye extended in a straight line along the tube.
2. If the water in the tank was not at rest, the streak would shift about the tube.
3. As the velocity increased, at some point in the tube, the color band would all at once mix up with the surrounding waters. When viewing the tube with an electric spark, this mixed fluid actually looked like a bunch of coherent eddies.

http://www.marine.maine.edu/~eboss/classes/SMS_491_2003/Week_5.htm

Les équations de l'écoulement moyen (Reynolds)

L'écoulement étant turbulent, plutôt que de rechercher la vitesse instantanée, que nous donnent les équations de Navier-Stokes vues précédemment, on cherche une vitesse lissée dans le temps, c'est à dire moyennée sur une période de temps dépendant du phénomène étudié.

Dans le même temps, pour chacune des variables (composantes de la vitesse et pression) on fait la décomposition suivante $u = \bar{u} + u'$, où \bar{u} est la moyenne et u' la variabilité autour de u , telle que $\overline{u'} = 0$:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u dt \quad \overline{u'} = \frac{1}{T} \int_0^T u' dt = 0$$

Cette technique a été mise au point par Osborne Reynolds (http://en.wikipedia.org/wiki/Osborne_Reynolds). Établissons pour exemple la moyenne du produit de deux composantes indépendantes u et v :

$$\overline{uv} = \frac{1}{T} \int_0^T uv dt = \frac{1}{T} \int_0^T \bar{u}\bar{v} dt + \frac{1}{T} \int_0^T \bar{u}v' dt + \frac{1}{T} \int_0^T u'\bar{v} dt + \frac{1}{T} \int_0^T u'v' dt$$

ainsi

$$\overline{uv} = \bar{u}\bar{v} + \overline{\bar{u}v'} + \overline{u'\bar{v}} + \overline{u'v'}$$

mais puisque $\overline{u'} = \overline{v'} = 0$

$$\overline{uv} = \bar{u}\bar{v} + \overline{u'v'}$$

T représente un laps de temps suffisamment long pour que les valeurs moyennes soient indépendantes du temps. On a pour $v, w, p \dots$ des définitions analogues. Si $\overline{u'} = 0$ il faut noter que les fluctuations elles-mêmes peuvent être du même ordre de grandeur que u . De plus les fluctuations superposées au vecteur vitesse moyen sont tridimensionnelles, c'est à dire u', v', w' sont toujours présentes même si l'écoulement est mono ou bidimensionnel.

On peut montrer que tous les termes linéaires des équations de Navier-Stokes gardent, pour l'écoulement moyen, la même forme que pour l'écoulement instantané, par contre les termes d'advection (à démontrer en exercice) deviennent :

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

$$\overline{\vec{V} \cdot \nabla u} = \overline{\vec{V}} \cdot \nabla \bar{u} + \underbrace{u' \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} + w' \frac{\partial u'}{\partial z}}_{\text{termes turbulents}}$$

Les équations de Reynolds diffèrent donc de celles de Navier-Stokes par l'apparition des termes « turbulents ». En anglais elles sont aussi appelées *RANS equations (Reynolds-averaged Navier-Stokes equations)*.

Tension de Reynolds et viscosité turbulente

On démontre que l'équation de continuité pour un fluide incompressible

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

satisfait pour l'écoulement moyen (à faire en exercice) à la forme:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0$$

D'après les définitions de \bar{u} et u' nous obtenons:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial u}{\partial x} dt = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{T} \int_0^T u dt \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{T} \int_0^T (\bar{u} + u') dt \right] = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$$

on en déduit par soustraction ($u' = u - \bar{u}$) que

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

On peut donc écrire les termes turbulents de la façon suivante, sans en changer la valeur (selon Ox):

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} + w' \frac{\partial u'}{\partial z} + u' \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) = \frac{\partial u' u'}{\partial x} + \frac{\partial u' v'}{\partial y} + \frac{\partial u' w'}{\partial z}$$

et l'équation de Reynolds pour la composante u s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + f \bar{v} + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial \overline{u' u'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u' v'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u' w'}}{\partial z}$$

Les trois derniers termes sont appelés termes de tensions de Reynolds.

J.V. Boussinesq (1842 – 1929) proposa de relier ensuite ces tensions de Reynolds aux composantes du gradient des vitesses moyennes de la façon suivante :

$$\overline{u' u'} = -A_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} ; \quad \overline{u' v'} = -A_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} ; \quad \overline{u' w'} = -A_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} ;$$

où les coefficients A sont appelés coefficients d'échange turbulent (*Austausch* = échange en allemand) ou *eddy viscosity* en anglais.

Si on néglige les variations spatiales de ces coefficients les termes turbulents prennent une forme identique aux termes de frottement moléculaires, e.g. pour la composante x :

$$\frac{d \bar{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + f \bar{v} + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right] + A \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right]$$

et vu que ces derniers sont beaucoup plus petits (en océan, 10^{-5} à 10^{-6} en verticale, 10^{-10} à 10^{-12} sur l'horizontale) ils seront par la suite être négligés.

Il faut par contre faire attention dans les simplifications, parce que, contrairement à ν , les A ne sont pas des propriétés du fluide, mais de l'écoulement. Ils varient de place en place et dépendent de l'échelle de « lissage » choisie. En océanographie généralement, on fait une distinction entre coefficients horizontaux et coefficient verticale.

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

Les forces de volume

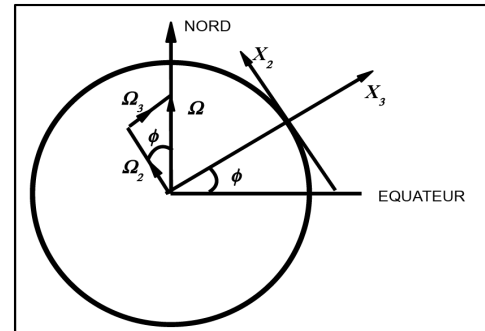
Les composantes de la vitesse u_i sont mesurées dans un système de référence en rotation tel que la Terre, donc les forces de volume incluent la force centrifuge et celle de Coriolis associées à la rotation de la Terre. Généralement la force centrifuge est contenue dans le terme de la force de gravité et les forces de volume sont écrites dans la forme suivante

$$\begin{aligned} b_i &= 2 \epsilon_{ijk} u_j \Omega_k + g_i \\ g_i &= -g \delta_{i3} \end{aligned} \quad (1.5)$$

avec Ω_k qui représente les composantes de la vitesse angulaire de la Terre dans le système de coordonnées locales et g l'accélération gravitationnelle locale.

Entre les autres forces de volume il y a l'attraction gravitationnelle de la Lune et du Soleil, qui sont importantes surtout dans l'océan profond, tandis qu'en océanographie côtière on étudie les effets de la propagation de la marée en eaux peu profondes plus que les mécanismes de sa génération.

Le système de coordonnées locales horizontales (x_1, x_2) et verticale (x_3) à la latitude ϕ et les composantes du vecteur vitesse angulaire de la Terre.



L'intensité du vecteur vitesse angulaire de la Terre Ω est 2π radiant en 24 h, donc

$$\Omega = 0.7292 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}.$$

En substituant (1.4) et (1.5) dans la (1.3) on obtient

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - g \rho \delta_{i3} + 2 \rho \epsilon_{ijk} u_j \Omega_k + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (1.6)$$

Dans cette forme les équations du mouvement sont plus ou moins impossibles à traiter analytiquement. Pour arriver à des modèles appropriés pour des écoulements simples dans l'océan côtier il faut encore faire des idéalizations et des simplifications.

2.3 Mouvements quasi-horizontaux

En océanographie côtière le rapport entre la vitesse verticale et les vitesses horizontales est petit. Cela est en partie dû au petit rapport d'échelle entre profondeur et largeur de l'océan côtier, qui est de l'ordre de 10^{-3} et par simple contrainte géométrique on peut s'attendre que les mouvements à l'échelle de bassin aient le même rapport pour les vitesses. En plus, la présence fréquente de stratification empêche les mouvements verticaux.

Alors étant que $|u_3| \ll |u_1|, |u_2|$ les composantes du terme de l'accélération de Coriolis dans les équations du mouvement deviennent

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

$$\begin{aligned} \text{1ère eq.} & \quad 2(u_2 \Omega_3 - u_3 \Omega_2) \cong 2 u_2 \Omega_3 \\ \text{2ème eq.} & \quad 2(u_3 \Omega_1 - u_1 \Omega_3) \cong -2 u_1 \Omega_3 \end{aligned}$$

la géométrie du système nous donne

$$\Omega_3 = \Omega \sin\phi$$

avec ϕ = latitude. On peut alors introduire le paramètre de Coriolis

$$f = 2 \Omega \sin\phi = 1.458 \cdot 10^{-4} \sin\phi \quad [s^{-1}]$$

On aura donc

$$\begin{aligned} \text{dans la 1ère eq.} & \quad f u_2 \\ \text{et dans la 2ème eq.} & \quad -f u_1 \end{aligned}$$

Aux moyennes latitudes autour de 41 degrés, la valeur approximative de f est $10^{-4} s^{-1}$. Généralement on prend f positive et on fait référence à l'hémisphère nord.

2.4 L'approximation hydrostatique et l'approximation de Boussinesq

L'équation (1.6) s'applique séparément dans les trois dimensions, mais pour un grand ensemble de mouvements la force de gravité est fortement prévalent sur la verticale.

Si on prend l'équation de la quantité de mouvement pour la composante verticale on a

$$\frac{d u_3}{d t} = -\frac{1}{\rho} \frac{d p}{d x_3} - g + 2(u_1 \Omega_2 - u_2 \Omega_1) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{3j}}{\partial x_j} \quad (1.7)$$

L'accélération gravitationnelle g est presque de 10 m s^{-2} ; pour ce qui concerne les mouvements horizontaux on a déjà vu que dans l'océan côtier leur ordre de grandeur est entre le 0.1 et le 1.0 m s^{-1} , ainsi l'accélération de Coriolis est de l'ordre de $10^{-5} - 10^{-4} \text{ m s}^{-2}$. Les valeurs maximales des gradients des tensions de Reynolds sont de quelques 0.1 N m^{-2} (0.1 Pa) = 0.1 kg m s^{-2} sur une couche de 10 m , donc le dernier terme est de l'ordre de grandeur de 10^{-5} m s^{-2} . Les vitesses verticales typiques de l'océan côtier sont au maximum de 10^{-2} m s^{-1} et les échelles de temps au minimum de 10^3 s , par conséquent les accélérations verticales sont de l'ordre de 10^{-5} m s^{-2} . Par conséquent on a des mouvements presque horizontaux dans lesquels le seul terme qui balance la prépondérante accélération de gravité est le gradient de pression :

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = \rho g \quad (1.8)$$

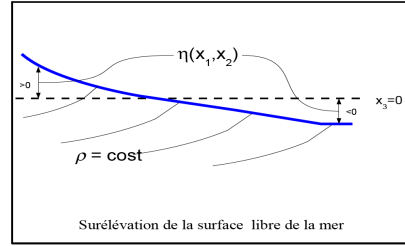
étant donné que ce bilan est le même que celui d'un fluide au repos, on l'appelle approximation hydrostatique.

Toutefois il faut penser que si le fluide était vraiment au repos, cet équilibre nous dit que la position de la surface libre de la mer doit être $x_3 = 0$, par contre dans un fluide en mouvement la surface libre peut avoir une certaine inclinaison par rapport à l'horizontal. Généralement on utilise une fonction $\eta = \eta(x, y)$ pour indiquer la position de la surface libre de la mer (surélévation ou, en anglais, *sea surface height, ssh*). Des valeurs négatives de η indiquent que la surface libre est au dessous du niveau moyen de référence, les valeurs positives indiquent que η est au dessus.

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

Si on intègre l'éq.(1.8) entre un certain niveau x_3 et la surface on obtient

$$p = p_a + \int_{x_3}^{\eta} \rho g dx_3 \quad (1.9)$$



où p_a est la pression atmosphérique.

Les équations du mouvement horizontales (1.6 avec $i=1,2$) contiennent les gradients de pression qui peuvent être calculés à partir de l'approximation hydrostatique (1.9) de la façon suivante :

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial p_a}{\partial x_i} + \rho_{surf} g \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \int_{x_3}^{\eta} g \frac{\partial \rho}{\partial x_i} dx_3 \quad (i=1,2) \quad (1.10)$$

Cette équation nous dit que le gradient de pression dans la colonne d'eau est le résultat de la somme de trois termes: le gradient de la pression atmosphérique, celui de la surélévation de la surface libre et du gradient du champs de densité interne.

Le gradient de pression atmosphérique constitue un forçage externe pour les mouvements dans les eaux peu profondes, mais si on le compare avec le forçage du vent ce terme peut généralement être négligé.

Le deuxième terme est l'accélération de gravité due à l'inclinaison de la surface libre, comme si les particules d'eau qui se trouvent à la surface roulent le long de la pente.

Le troisième terme exprime les effets de flottabilité (en anglais *buoyancy*) liés aux différences de masse volumique le long des surfaces horizontales (ou mieux de géopotentiel). Dans les conditions typiques de la circulation côtière ce dernier terme peut être reformulé pour une plus grande simplicité.

Les différences verticales en masse volumique dans les eaux côtières sont de l'ordre de un sur mille, donc dans (1.10) une densité de référence ρ_0 peut substituer ρ_{surf} sans faire des erreurs trop grandes. Par contre les échelles horizontales de la variation en masse volumique ($\partial \rho / \partial x_i$) ne sont pas négligeables. Boussinesq a suggéré alors d'écrire la masse volumique comme

$$\rho = \rho_0(1+\epsilon) \quad \text{avec } \epsilon = O(10^{-3}) \quad (1.11)$$

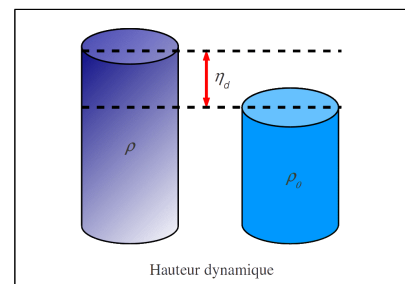
et de retenir dans le terme de flottabilité (*buoyancy*) seulement les quantités qui ont cet ordre de grandeur.

Laissant tomber le terme de la pression atmosphérique, on peut récrire la (1.10)

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} = g \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \int_{x_3}^{\eta} g \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} dx_3 = g \frac{\partial}{\partial x_i} [\eta - \eta_d(x_3)] \quad (i=1,2) \quad (1.12)$$

La quantité η_d est la différence de hauteur entre une colonne d'eau de densité ρ_0 et une à la « vrai » densité $\rho(x_3)$. En résumé, l'approximation de Boussinesq permet de remplacer la densité exacte par sa valeur de référence ρ_0 partout sauf dans le terme d'accélération de la pesanteur. Dans les termes de pression il ne reste plus que la part due à ϵ qui est appelée hauteur dynamique, car c'est le principal moteur de l'écoulement.

Souvent comme densité de référence on prend la densité la plus grande ainsi ϵ est toujours négative et la hauteur dynamique est nulle ou positive



Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

Si le gradient de pression $-\partial p/\partial x_i$ disparaît à un certain niveau suffisamment profond $x_3 = -h$, l'équation (1.12) devient

$$\eta = \eta_d(-h) \quad (1.13)$$

ayant négligé la constante d'intégration, i.e. en faisant un choix astucieux du niveau zéro de la surface libre. Dans ce cas la topographie du niveau de la mer peut être déterminée directement par la distribution de la densité (Sverdrup, 1942). Dans les eaux peu profondes toutefois il est rarement raisonnable de faire l'hypothèse que les gradients de pression deviennent nuls à un niveau suffisamment profond, donc le calcul (1.13) peut être fait seulement quand la profondeur totale H est beaucoup plus grande que la profondeur de référence h . Cela empêche pratiquement toute simplification dans les eaux côtières qui sont généralement des zones avec de très forts gradients de densité et sont dynamiquement très actives.

Toutefois, avec un choix attentif du niveau de référence h on peut regarder h_d comme une contribution à la hauteur dynamique de quelque chose qui est relative à la distribution de la densité et sur laquelle il y a une distribution de $h - h_d(-h)$ qui n'est pas nécessairement lié avec la distribution interne de la densité.

Les vitesses typiques dans l'océan côtier sont de l'ordre de 0.1 m s^{-1} avec des échelles de temps de quelques jours (ex. tempête) i.e. 10^5 s . Cela correspond à une accélération moyenne de 10^{-6} m s^{-1} . Une inclinaison de la surface libre de 10^{-7} (1 cm sur 100 km) va créer la même accélération, donc elle est importante dans le bilan de la quantité de mouvement.

Une anomalie de densité ϵ d'une partie sur 1000 constante sur une couche superficielle profonde de 30 m, donne une contribution de 3 cm à la hauteur dynamique relative à une profondeur de 30 m. Sur l'échelle typique des 100 km un gradient créé par la densité de 10^{-7} est observé s'il y a une couche légère de surface qui est profonde de 30 m dans un point et de 20 m 100 km plus loin. Les différences de densité de cet ordre de grandeur (et plus) sont presque toujours présentes dans l'océan côtier, donc on peut dire que tous les processus physiques qui contrôlent le champ de densité peuvent affecter les bilans horizontaux de quantité de mouvement de façon considérable.

2.5 Frottement à la surface et au fond

Tandis que les composantes diagonales $i=j$ du tenseur des contraintes de Reynolds représentent une petite correction de la pression hydrostatique, les composantes $\tau_{12} = \tau_{21} = \rho \langle u'_1 u'_2 \rangle$ représentent le flux de quantité de mouvement turbulent dont la divergence est très importante dans les deux premières équations de la quantité de mouvement (équations des composantes horizontales). Dans la pratique la valeur de τ_{12} est rarement plus grande que 1 Pa et son échelle de variation spatiale est rarement moins que 10 km. Donc, le terme de sa divergence

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \approx O(10^{-7}) \text{ m s}^{-2} < \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{i3}}{\partial x_3} \quad (\text{voir ci-dessous})$$

Bien que la divergence verticale soit plus importante, la différence n'est pas assez grande pour éliminer complètement τ_{12} , toutefois Csanady (82) souligne que aucun exemple n'est arrivé à démontrer que les effets de frottement du transfert de quantité de mouvement aient un rôle vraiment significatif dans des problèmes de circulation générale dans l'océan côtier.

Par contre, les tensions de Reynolds dans les plans horizontaux $\tau_{13} = \rho \langle u'_1 u'_3 \rangle$ et $\tau_{23} = \rho \langle u'_2 u'_3 \rangle$ sont très importantes en eaux peu profondes. Le frottement du vent est le principal forçage de l'écoulement et il est transmis des couches superficielles à celle de fond par ces termes-là.

Si on indique avec ρF_i ($i=1,2$, étant F_i la contrainte cinématique) les composantes du frottement dû au vent, la continuité du frottement à l'interface air-mer impose

$$\tau_{i3} = \rho F_i, \quad (x_3 = 0) \quad (1.22)$$

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

L'expérience de Nikuradse, 1932

The Darcy-Weisbach *friction factor*, f , is a function of the same variables as wall shear stress (Equation 2.16). Again using dimensional analysis, a functional relationship for the friction factor can be developed:

$$(2.18) \quad f = F\left(\frac{\rho D v}{\mu}, \frac{\epsilon}{D}\right) = F(Re, \frac{\epsilon}{D})$$

where $Re =$ Reynolds number

The Darcy-Weisbach friction factor is dependent on the velocity, density, and viscosity of the fluid; the size of the pipe in which the fluid is flowing; and the internal roughness of the pipe. The fluid velocity, density, viscosity, and pipe size are expressed in terms of the Reynolds number. The internal roughness is expressed in terms of a variable called the *relative roughness*, which is the internal pipe roughness (ϵ) divided by the pipe diameter (D).

In the early 1930s, the German researcher Nikuradse performed an experiment that would become fundamental in head loss determination (Nikuradse, 1932). He glued uniformly sized sand grains to the insides of three pipes of different sizes. His experiments showed that the curve of f versus Re is smooth for the same values of ϵ/D . Partly because of Nikuradse's sand grain experiments, the quantity ϵ is called the *equivalent sand grain roughness* of the pipe. Table 2.2 provides values of ϵ for various materials.

<http://www.haestad.com/library/books/awdm/online/wwhelp/wwhimpl/js/html/wwhelp.htm>

Généralement le frottement dû au vent s'exerce le long de la direction du vent et son intensité est calculée avec une loi quadratique.

$$F_i = \frac{\rho_a}{\rho_w} C_{10} W_i W \quad (1.23)$$

avec W intensité du vent, W_i composantes de la vitesse du vent le long de l'axe x_i , ρ_a/ρ_w rapport entre la masse volumique de l'air et celle de l'eau et C_{10} un coefficient de trainée qui par convention est référé à la vitesse du vent à 10 m au-dessus du niveau de la mer.

La valeur de C_{10} peut être estimée avec des mesures de terrain et par exemple Csanady (1982) propose :

$$C_{10} = 1.6 \times 10^{-3}, \quad (W \leq 7 \text{ m s}^{-1})$$

$$C_{10} = 2.5 \times 10^{-3}, \quad (W \geq 10 \text{ m s}^{-1})$$

avec un lissage entre les deux valeurs pour des vitesses du vent comprises entre 7 et 10 m s^{-1} . La raison de la variation de C_{10} avec la vitesse du vent est due au fait que avec une augmentation de la vitesse du vent, la surface de la mer devient de plus en plus irrégulière (rugueuse) avec la formation de vagues et leur éventuel déferlement.

Ces valeurs de C_{10} correspondent à celles pour une rugosité de Nikuradse (voir encadré) de 1.4 cm pour les vents faibles qui créent des ondes capillaires et 10 cm pour les vents forts qui créent des vagues écrêtées d'écume.

Pour une valeur typique de vitesse du vent de 7 m s^{-1} l'équation (1.23) donne $F = 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ où bien $\tau = 0.1 \text{ Pa}$.

Une autre raison de l'importance des termes $\tau_{13} = \rho \langle u_1' u_3' \rangle$ et $\tau_{23} = \rho \langle u_2' u_3' \rangle$ est qu'ils sont aussi responsables de la transmission du frottement au fond. L'inclinaison du fond en zone côtière est de l'ordre de grandeur de 10^{-2} - 10^{-3} donc pratiquement horizontale (NB: sur des distances de l'ordre des

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

kilomètres les irrégularités du fond peuvent être considérées comme de la « rugosité »).

Si les composantes du frottement du fond sont appelées B_i , on peut écrire, d'une façon similaire à (1.22),

$$\tau_{i3} = \rho B_i, \quad (x_3 = -H) \quad (1.25)$$

et le frottement au fond peut être traité avec une loi quadratique similaire à (1.23)

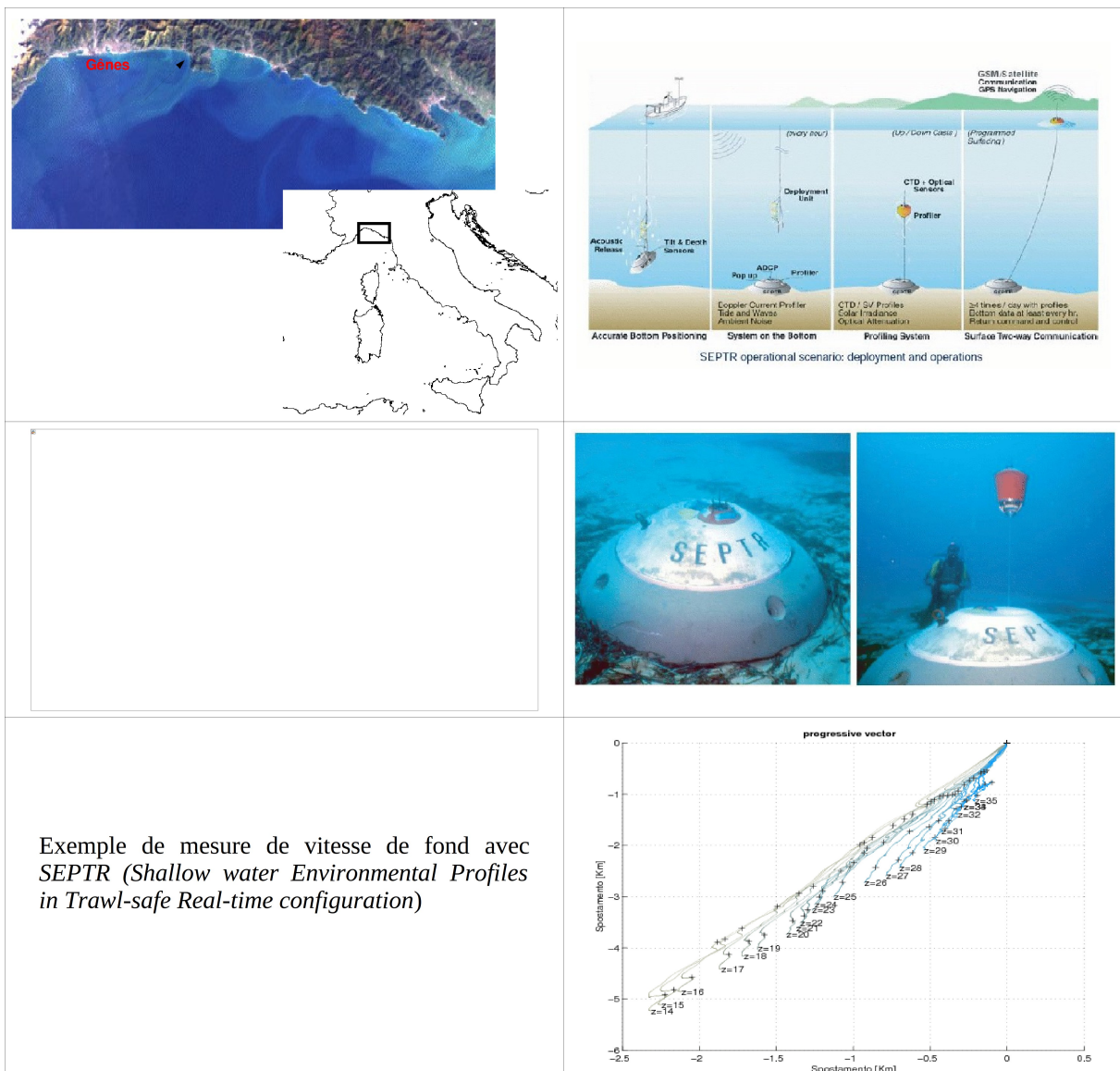
$$B_i = C_d u_i (u_1^2 + u_2^2)^{1/2} \quad (1.26)$$

ou C_d est un coefficient de traînée et u_i sont les composantes de la vitesse du courant à une certaine hauteur du fond, qui généralement est de 1 m.

L'estimation expérimentale à partir de données en mer n'est pas facile à obtenir et dans beaucoup de cas on fixe une valeur $C_d = 2 \cdot 10^{-3}$.

Toutefois cette valeur montre que l'intensité typique du frottement au fond correspondant à une vitesse sur le fond de 0.2 m s^{-1} est au peu près la même que celle d'un vent modéré, tandis que pour un courant de 1 m s^{-1} on a des valeurs équivalentes au vent d'un ouragan. Donc le terme de divergence

$\partial \tau_{i3} / \partial x_3$ du frottement au fond est par conséquent important comme celui du vent.



Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

2.6 La viscosité turbulente

Le frottement sur le fond et à la surface ne se distribuent pas uniformément dans une colonne d'eau de 100 m. Typiquement il y a deux mécanismes qui s'opposent à une distribution uniforme : la rotation et la stratification .

Dans un fluide visqueux et homogène en rotation, le frottement sur une surface de frontière non parallèle à l'axe de rotation génère des couches de profondeur limitées dans lesquelles le frottement est réduit à zéro (Ekman 1905). La profondeur de la couche d'Ekman visqueuse est de l'ordre de

$$\sqrt{2 \frac{\nu}{f}}$$

avec ν viscosité cinématique. En dehors de la couche d'Ekman l'écoulement reste pratiquement sans frottement. Quand la couche d'Ekman est turbulente, comme pratiquement toujours en eaux côtières, les tensions de Reynolds restent de la même façon confinées dans une couche de profondeur limitée, de sorte que dans ce cas la turbulence agisse comme la viscosité. Toutefois, l'épaisseur de la couche limite turbulente est indépendante des propriétés du fluide et elle est de l'ordre de

$$0.1 \frac{u_*}{f} \quad \text{où} \quad u_* = \left(\frac{\tau}{\rho} \right)^{1/2} \quad \text{est une vitesse de frottement, avec } \tau \text{ intensité de la tension à la frontière}$$

Pour un valeur typique de stress $t = 0.1 \text{ Pa}$, $u_* = 1 \text{ cm s}^{-1}$, l'épaisseur de la couche d'Ekman est de l'ordre de 10 m aux moyennes latitudes, tandis que pour un ouragan où on a des tensions de 3 Pa ou plus, les couches d'Ekman de fond et de surface peuvent se rejoindre et occuper un entière colonne d'eau de 100 m.

La stratification due au réchauffement de la surface ou à l'apport d'eau douce réduit l'épaisseur des couches de surface et de fond, bien que faiblement, sûrement pas d'un ordre de grandeur. Les couches de fond et de surface restent bien mélangées par l'action de la turbulence et alors toute la variation de densité est confinée à l'intérieur de la colonne d'eau entre les deux couches. Au dessous et au dessus des couches peuvent se former des zones de très forte variation de densité. Bien que des tensions de Reynolds peuvent être générées par le mouvement de type ondulatoire, elle sont plus faibles (environ de 2 ordres de grandeur) que les tensions générées par le frottement au fond et à la surface. On peut avoir des exceptions aux interfaces en correspondance avec des fortes variations de densité à l'intérieur du fluide, où les vitesse peuvent changer brusquement.

Afin de rendre les équations du mouvement traitables, il est nécessaire de paramétrer les tensions de Reynolds à l'intérieur du fluide τ_{13} , τ_{23} en termes de vitesses. Avec un peu d'attention et de connaissance de cause, on peut exprimer les tensions comme proportionnelles aux gradients de la vitesse

$$\tau_{i3} = \rho K \frac{\partial u_i}{\partial x_3} \quad \text{où } K \text{ est la viscosité turbulente} \quad (1.27)$$

Quand on utilise cette relation il faut toujours se rappeler que la viscosité turbulente K n'est pas une propriété du fluide, mais de l'écoulement. A priori il n'est donc pas raisonnable d'utiliser une seule valeur sur toute la colonne d'eau et non plus pour toute une couche limite. En effet, dans une couche limite de 1 m, K varie très rapidement avec la profondeur sur le fond et sous la surface et même en proximité des interfaces. En générale, le vecteur vitesse change rapidement à travers ces surfaces, mais pas la tension de Reynolds . Si on s'intéresse à des écoulements avec une distribution de la vitesse dans la couche limite on peut utiliser la loi logarithmique . En océanographie côtière l'étude des couches limites est très compliquée et leur connaissance est restée longtemps très limitée . Des instruments modernes de mesure permettent maintenant de commencer une étude *in situ* plus approfondie (voir figures des expériences avec le *SEPTR*).

En dehors des couches limites, mais dans une région d'écoulement avec un cisaillement turbulent homogène, la viscosité turbulente peut être considérée comme constante et proportionnelle à la vitesse et à une longueur d'échelle de l'écoulement. Dans les régions influencées par les stress de surface et de fond on peut avoir une relation de proportionnalité avec la vitesse de friction et la

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

profondeur de la couche mélangée :

$$K = \frac{u_* h}{Re} \quad \text{où } Re \text{ nombre de Reynolds turbulent.} \quad (1.28)$$

Des mesures sur le terrain suggèrent des valeurs de Re entre 12 et 20.

À l'intérieur d'une colonne d'eau stratifiée progressivement, donc sans interfaces de brusque variation de densité, il n'y a pas d'observations qui peuvent aider à spécifier K . Une estimation de l'ordre de grandeur est $K = 1 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} = 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, c'est à dire deux ordres de grandeur plus petit que la valeur typique pour une couche limite bien mélangée en appliquant la (1.28).

Aux interfaces de brusque variation de densité il est mieux d'utiliser un loi quadratique du type (1.23) et (1.26). Alors, si on indique les composantes des contraintes avec ρI_i ($i=1,2$), on peut écrire

$$I_i = C_s \Delta u_i (\Delta u_1^2 + \Delta u_2^2)^{1/2} \quad (1.29)$$

où C_s est un coefficient de frottement approprié pour ce type d'interface et Δu_i ($i=1,2$) sont les différences des vitesses à travers l'interface. Une valeur obtenue en laboratoire pour le coefficient est $C_s = 0.5 \times 10^{-3}$ mais il est très difficile de vérifier si cette valeur est réaliste en mer.

En résumé, il est possible d'utiliser l'équation (1.27) avec $K = \text{constante}$ dans une couche homogène et utiliser les équations (1.23), (1.26) et (1.29) au frontières (voir schéma ci-contre).

Bien évidemment dans ce cas la procédure pour calculer les contraintes et la distribution de la vitesse devient très complexe, avec l'application des lois quadratiques et le *scaling* de la viscosité turbulente avec les tensions aux frontières.

$$\tau_{i3} = \rho F_i \quad \text{avec} \quad F_i = \frac{\rho_a}{\rho_w} C_{10} W_i W \quad (1.23)$$

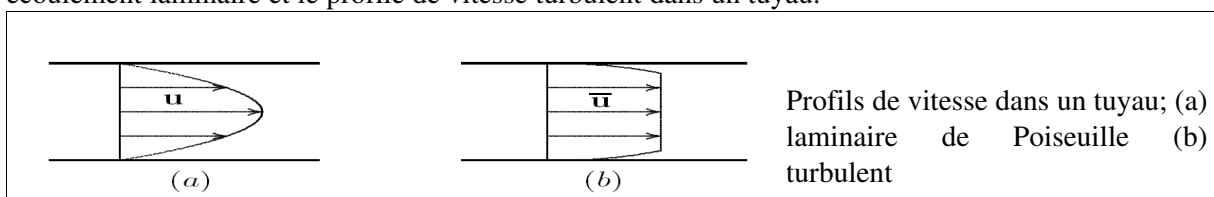
$$\tau_{i3} = \rho K \frac{\partial u_i}{\partial x_3} \quad \text{avec} \quad K = \frac{u_* h}{Re} \quad \text{ou} \quad K = 10^{-4} \quad (1.27)$$

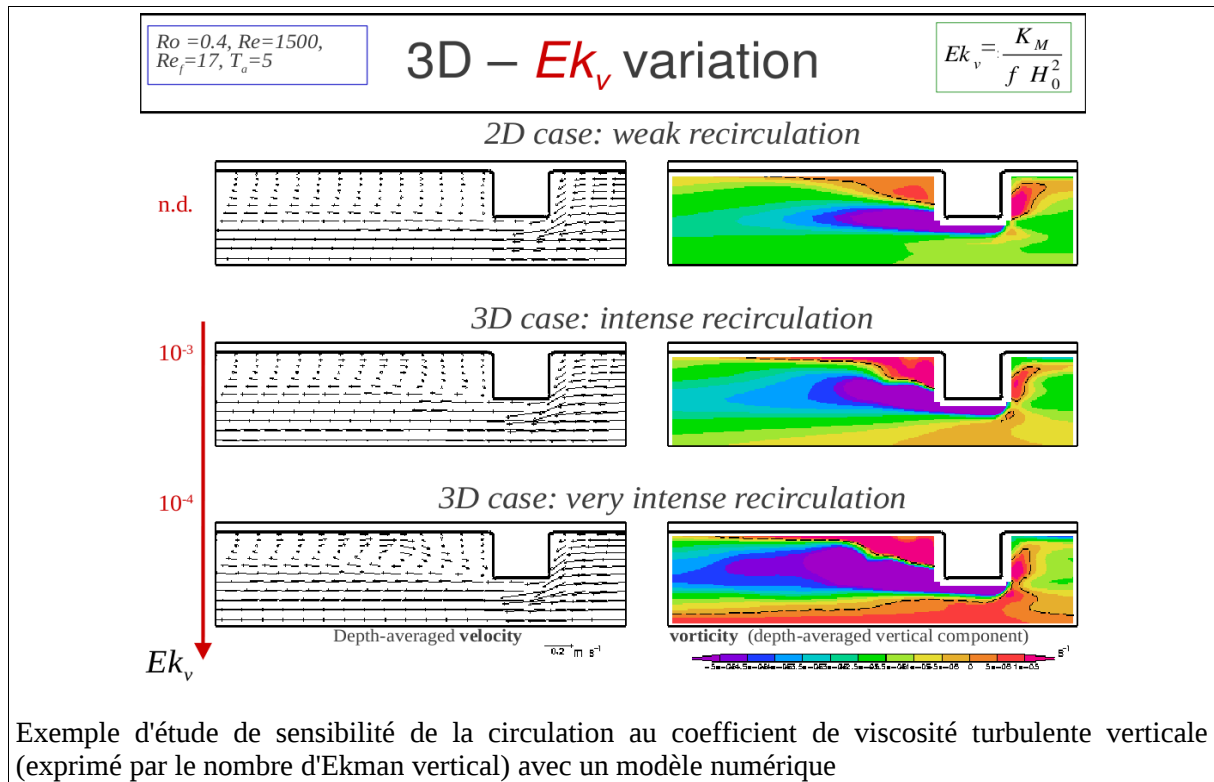
$$\tau_{i3} = \rho I_i \quad \text{avec} \quad I_i = C_s \Delta u_i (\Delta u_1^2 + \Delta u_2^2)^{1/2} \quad (1.29)$$

$$\tau_{i3} = \rho K \frac{\partial u_i}{\partial x_3} \quad \text{avec} \quad K = \frac{u_* h}{Re} \quad \text{ou} \quad K = 10^{-4} \quad (1.27)$$

$$\tau_{i3} = \rho I_i \quad \text{avec} \quad B_i = C_d u_i (u_1^2 + u_2^2)^{1/2} \quad (1.26)$$

Tandis qu'il est fréquemment possible de simplifier la relation paramétrique entre les contraintes aux frontières et à l'intérieur du fluide et la vitesse sans faire de grosses erreurs, il faut noter que négliger la présence des couches de fond et de surface n'est pas réaliste dans le calcul de la distribution interne de la vitesse. Si par exemple, pour un fluide visqueux on impose aux frontières solides une condition de *no-slip* et à l'intérieur on fait l'hypothèse de viscosité turbulente constante, on observera entre le profile calculé et celui mesuré la même différence qu'il y a entre la distribution de Poiseuille pour un écoulement laminaire et le profile de vitesse turbulent dans un tuyau.





2.8 Linéarisation des équations

Quand la relation (1.27) est introduite dans les équations horizontales de la quantité de mouvement, ces dernières assument la forme des équations de Navier-Stokes, qui dans leur forme non-linéaire sont notamment intraitables. Elles peuvent être simplifiées en négligeant les tensions intérieures qu'on suppose être distribuées d'une façon simplifiée, ou en négligeant les termes d'advection de la quantité de mouvement, un passage dit « linéarisation ».

Généralement on suppose que l'advection de la quantité du mouvement dans des problèmes géophysiques peut être négligée quand le rapport entre les termes non linéaires et la force de Coriolis (i.e. le nombre de Rossby) est petit:

$$\frac{u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1}}{f u_2} \simeq \frac{U}{f L} = Ro \ll 1 \quad (1.30)$$

où U et L sont les échelles appropriées pour la vitesse et la longueur respectivement. Ce critère se concentre sur le bilan de la quantité de mouvement à travers de l'écoulement .

Par contre si on veut faire un bilan le long de l'écoulement, vu qu'il n'y a pas de terme de Coriolis la comparaison est faite entre les termes non-linéaires et les termes de frottement du vent ou au fond. Les termes non-linéaires sont alors négligeables quand

$$\frac{u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1}}{\frac{u_*^2}{h}} \simeq \frac{U^2}{u_*^2} \cdot \frac{h}{L} \ll 1 \quad (1.31)$$

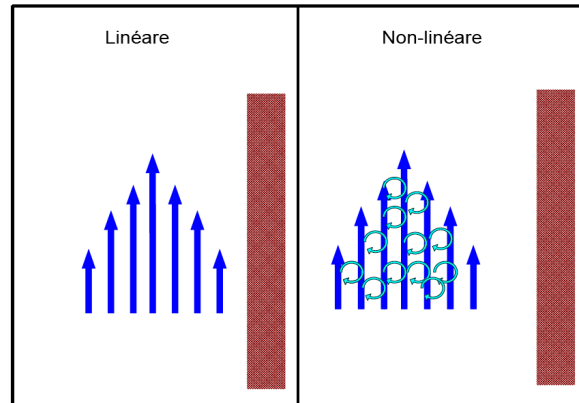
ou h est la profondeur de la couche sur laquelle la tension ρu_*^2 est distribuée.

En eaux côtières ni le critère (1.30) ni le critère (1.31) sont en générale satisfaits, vu que Ro est de l'ordre de 1 et de même pour le (1.31). L'advection de la quantité de mouvement est alors

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

potentiellement importante. Toutefois, si on examine attentivement quels sont les effets précis de l'advection de la quantité de mouvement, on trouve que ces effets sont des modifications assez compréhensibles et prévisibles des structures (*patterns*) créées et gouvernées par les termes linéaires (Coriolis, accélérations locales, frottement du vent et au fond). La raison de ce comportement est que les termes non-linéaires ont la forme d'une divergence, et donc ils disparaissent en proximité des frontières. Leur rôle est alors de transférer la quantité de mouvement d'une part à l'autre du bassin, sans modifier l'input de quantité de mouvement.

Par exemple, on prend le cas d'un jet côtier, i.e. un courant intense et plutôt étroit le long de la côte, généré par le vent. Selon le bilan des termes linéaires il reste en proximité de la côte, mais si on considère aussi les termes non-linéaires, on voit dans certains cas que l'advection de la quantité de mouvement déplace ce courant vers le large, mais sans modifier significativement les caractéristiques de base du courant, comme l'échelle horizontale ou la vitesse maximale.



Cet effet est clairement important et il faut le comprendre, mais il est également vrai qu'avec la théorie linéaire on peut déjà comprendre beaucoup de choses comme les échelles spatiales et temporelles, les fréquences d'oscillations et les nombre d'ondes des composantes ondulatoires du mouvement.

En résumé, l'utilisation d'une théorie linéaire a pour but de fournir de modèles théoriques assez simples pour mettre en évidence les relations physiques importantes dans des problèmes autrement trop compliqués.

Les principales limitations de la théorie linéaire sont surtout dans les fluides stratifiés avec des grands déplacements des particules fluides sur la verticale et l'horizontale, comme ceux générés par le vent ou par d'autres forçages dans une étroite bande côtière. Les effets de ces déplacements ne sont pas seulement inclus dans les termes de transport de la quantité de mouvement mais aussi dans les variations de premier ordre de la distribution de la pression provoquées par la distorsion du champ de densité. Comme déjà vu, les particules tendent à conserver leur température ou salinité pour des périodes d'environ un jour, alors un déplacement vertical rapide donne une surélévation similaire à un changement rapide de la hauteur dynamique η_a (1.12). Étant données que ces surélévations se produisent dans une bande côtière étroite, cela va créer des gradients de pression importants. Toutefois la théorie linéaire qui assume des petits déplacements sur la verticale, peut être encore utile pour comprendre seulement la phase initiale de ces mouvements.

2.8 Les équations en eaux peu profondes

Considérons maintenant un fluide avec une densité homogène constante et fixons la hauteur dynamique $\eta_a=0$ dans le calcul des gradients de pression. La théorie linéaire avec quelques simplification supplémentaire peut avoir une application immédiate pour les eaux côtières. En plus le comportement d'une mer stratifiée, peut être étudié comme la somme du comportement lié à un fluide homogène et celui lié à la stratification. Ou bien dans certaines circonstances la dynamique d'un fluide stratifié peut être décrite par un ensemble d'équations égal à celui qui gouverne un fluide stratifié.

En abandonnant la notation avec suffixes et en utilisant les coordonnées (x,y,z) et les composantes de la vitesse (u,v,w) , les équations linéarisées de la quantité de mouvement pour un fluide homogène deviennent :

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - f v &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + f u &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial v}{\partial z}\end{aligned}$$

(1.32)

Au bilan de la quantité de mouvement il faut ajouter l'équation de continuité et les relations cinématiques qui définissent la surface libre et le fond :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial w}{\partial z} \\ w &= \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad (z=0) \\ -w &= u \frac{dH}{dx} + v \frac{dH}{dy}, \quad (z=-H)\end{aligned}$$

(1.32a)

avec $H(x,y)$ profondeur totale de la colonne d'eau en (x,y) .

Les conditions à la surface et sur le fond sont

$$\begin{aligned}F_x &= K \frac{\partial u}{\partial z}, \quad F_y = K \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (z=0) \\ B_x &= K \frac{\partial u}{\partial z}, \quad B_y = K \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (z=-H)\end{aligned}$$

(1.33)

Tandis que les termes de frottement du vent (F_x, F_y) représente un des forçages extérieurs, les termes de frottement au fond peuvent être écrits avec la loi quadratique

$$B_x = C_d u (u^2 + v^2)^{1/2}, \quad B_y = C_d v (u^2 + v^2)^{1/2} \quad (z=-H)$$

Les vitesses à $z = -H$ sont physiquement les vitesses au-dessus de la couche de fond, mais souvent dans les calculs sont considérées comme les vitesses extrapolées avec viscosité turbulente constante à l'intérieur du fluide et le coefficient de traînée doit être adapté à cette vitesse.

L'ensemble des équations précédentes peut décrire assez bien la dynamique d'un fluide dans l'océan côtier bien mélangé et est connue comme équations en eaux peu profondes, (e.p.p.), ou *shallow water equations*, ou encore équations de Saint-Venant.

Problème local et problème global

Quand on applique les équations ci-dessus, le problème de prévoir la réponse d'un océan côtier soumis à un certain forçage peut être opportunément séparé en problème local et global.

Une fois qu'une approximation appropriée a été choisie pour $K(z)$, les équations (1.32) et (1.33) peuvent être résolues pour $u(z)$, $v(z)$ avec les gradients de surélévation η qui seront utilisés comme *input* extérieurs (forçage). La distribution de la vitesse viens alors d'un calcul « local » en chaque (x,y) pour un gradient de pression donné.

Il reste en suite à calculer la distribution de la pression, ou bien de la surélévation, à l'échelle du bassin, i.e. « globalement ». Cela peut être fait d'une façon appropriée avec les équation intégrées sur la verticale ou équations du transport. L'intégration sur la verticale implique qu'on définisse à partir des composantes de la vitesse les transports horizontaux

$$U = \int_{-H}^0 u dz, \quad V = \int_{-H}^0 v dz$$

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

(1.34)

on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} - fV &= -gH \frac{\partial \eta}{\partial x} + F_x - B_x \\ \frac{\partial V}{\partial t} + fU &= -gH \frac{\partial \eta}{\partial y} + F_y - B_y \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= -\frac{\partial \eta}{\partial t}\end{aligned}$$

(1.35)

Dans les équations (1.34) et (1.35) les petites variations de la surélévation $\eta(x,y)$ ont été négligées par rapport à la profondeur $H(x,y)$. Le frottement à la surface (F_x, F_y) est pris comme un input externe. Le frottement au fond peut être calculé à partir des vitesses issues de la solution du problème local.

Les équations ci-dessus, dites équations du transport, constituent un ensemble fermé de trois équations pour les trois inconnues U, V, η et la solution est dite globale.

En générale la solution du problème global est difficile, mais on peut pour simplifier négliger le frottement au fond ou bien l'exprimer en terme de transport

$$B_x = C_d U (U^2 + V^2)^{1/2}, \quad B_y = C_d V (U^2 + V^2)^{1/2}$$

en obtenant des solutions pour un bon nombre de problèmes intéressants.

Pour résoudre les équations du transport il est nécessaire de définir des conditions à la côte et aux frontières ouvertes. À la côte on peut imposer que le transport normal est nul (condition dite « *coastal constraint* ») tandis qu'aux frontières ouvertes le transport normal et la surélévation sont continus.

Malheureusement pas mal de problèmes surgissent quand une frontière ouverte est située entre l'océan côtier et l'océan profond et une solution simultanée des deux régions n'est pas toujours possible.

2.9 Modèles simples

Dans l'évolution de la compréhension des mouvements atmosphériques et océaniques une poignée de modèles de base ont joué un rôle important et ils peuvent aider à mieux comprendre le comportement complexe de l'océan côtier. Ci-dessous on étudie trois modèles élémentaires basés sur les équations en eaux peu profondes et qui illustrent des solutions pour le problème locale et global.

Bilan géostrophique

Si on considère le cas dans lequel i) le frottement dû au vent et celui au fond soient négligeables, ii) le fluide homogène et iii) le mouvement stationnaire, toutes les dérivées dans les équations du transport disparaissent. Ce cas est clairement peu réaliste, mais on peut penser à un courant d'abord généré par une quelque raison, en suite s'affaiblit très lentement.

Sans perdre de généralité, l'axe y peut être aligné dans la direction du transport, ainsi $U = 0$.

Alors les équations du transport deviennent :

$$\begin{aligned}-fV &= -gH \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ 0 &= -gH \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

(1.42)

La première et la troisième équations sont adéquates seulement si $\partial(H/f)/\partial y = 0$, donc si l'on

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

considère un transport le long des isobathes tandis que la surélévation varie en direction perpendiculaire à la côte.

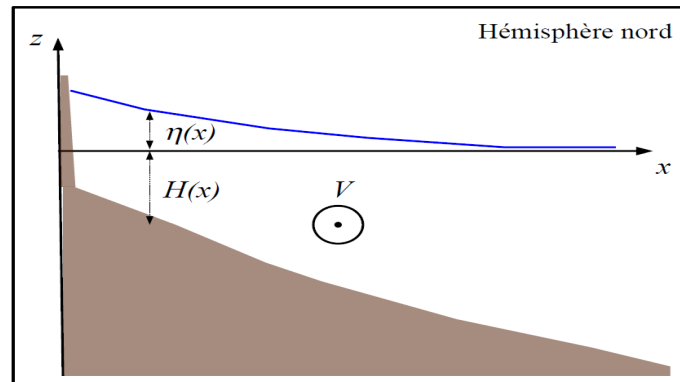
Le bilan des forces n'est pas triviale que dans la direction perpendiculaire à la côte, où la force de Coriolis est compensée par le gradient de pression.

Avec surélévation nulle et sans frottement au fond, la solution du problème local est simplement

$$v = \frac{V}{H} = \frac{g}{f} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \nabla_z \text{ et } y$$

avec $g \approx 10 \text{ m s}^{-2}$, $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ on a qu'un gradient de 10^{-5} (1 cm sur 1 km) donne une vitesse géostrophique de 1 m s^{-1} .

Ce type d'écoulement satisfait la condition « *coastal constraint* » pour chaque x et il est donc valable avec un ligne de côte parallèle à l'axe y . Il peut être considéré comme un écoulement côtier élémentaire.



Oscillations d'inertie

Si on considère un écoulement assez loin des côtes on peut considérer que, n'ayant pas de contraintes à la côte la surélévation reste nulle, $\eta = 0$ partout dans le modèle. En faisant l'hypothèse que le frottement au fond et du vent soient négligeables et que le mouvement aie été généré par une quelque action précédente. Alors les équations du transport deviennent

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} - f V &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + f U &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \tag{1.44}$$

Ce système, qui représente un bilan entre l'accélération locale et la force de Coriolis, a pour solution

$$U = U_o \cos f t \quad V = -U_o \sin f t$$

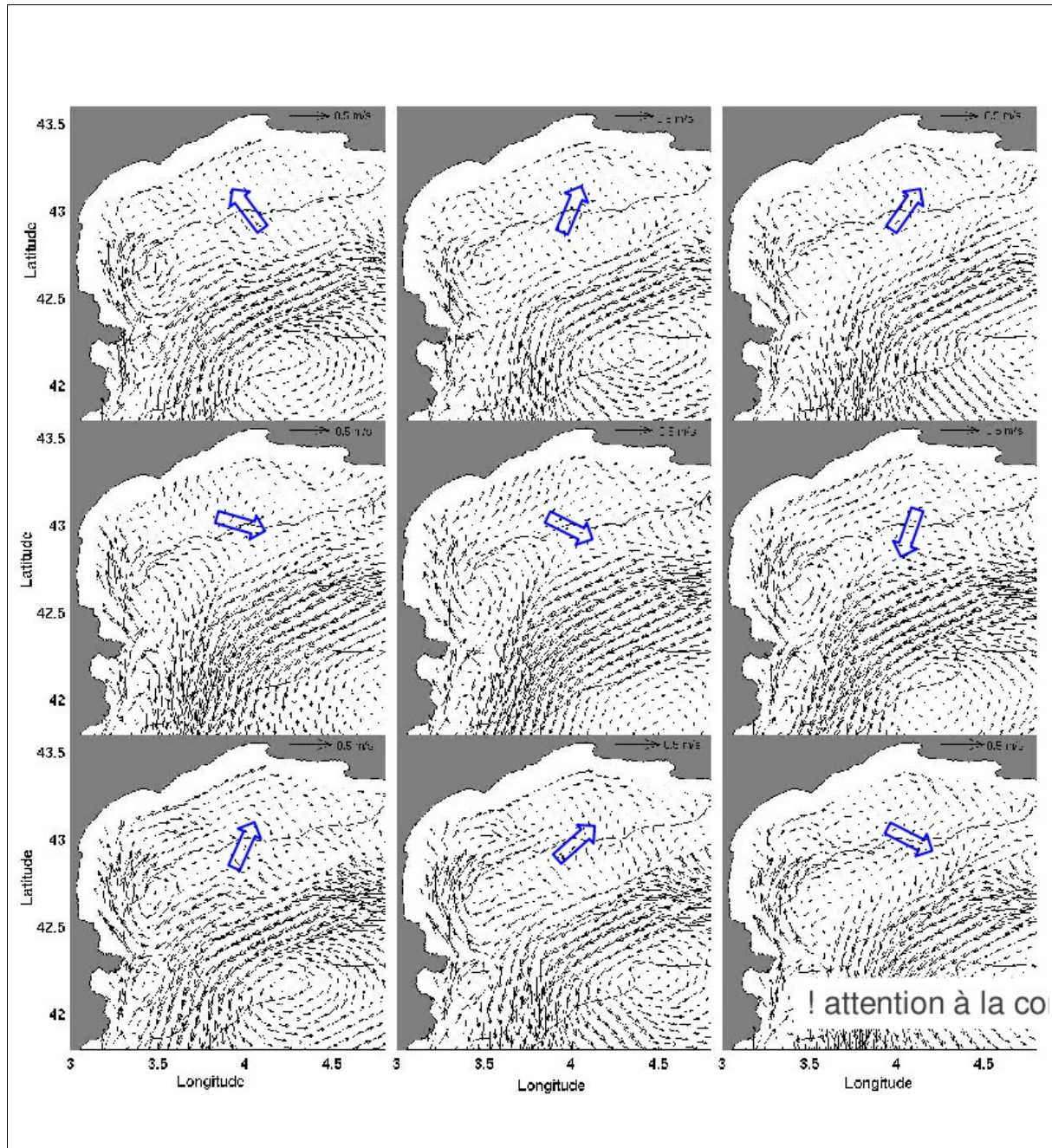
où $U_o = \text{const}$ et on choisit de positionner les axes d'une façon opportune ainsi $V = 0$ pour $t = 0$.

Les vitesses internes sont simplement

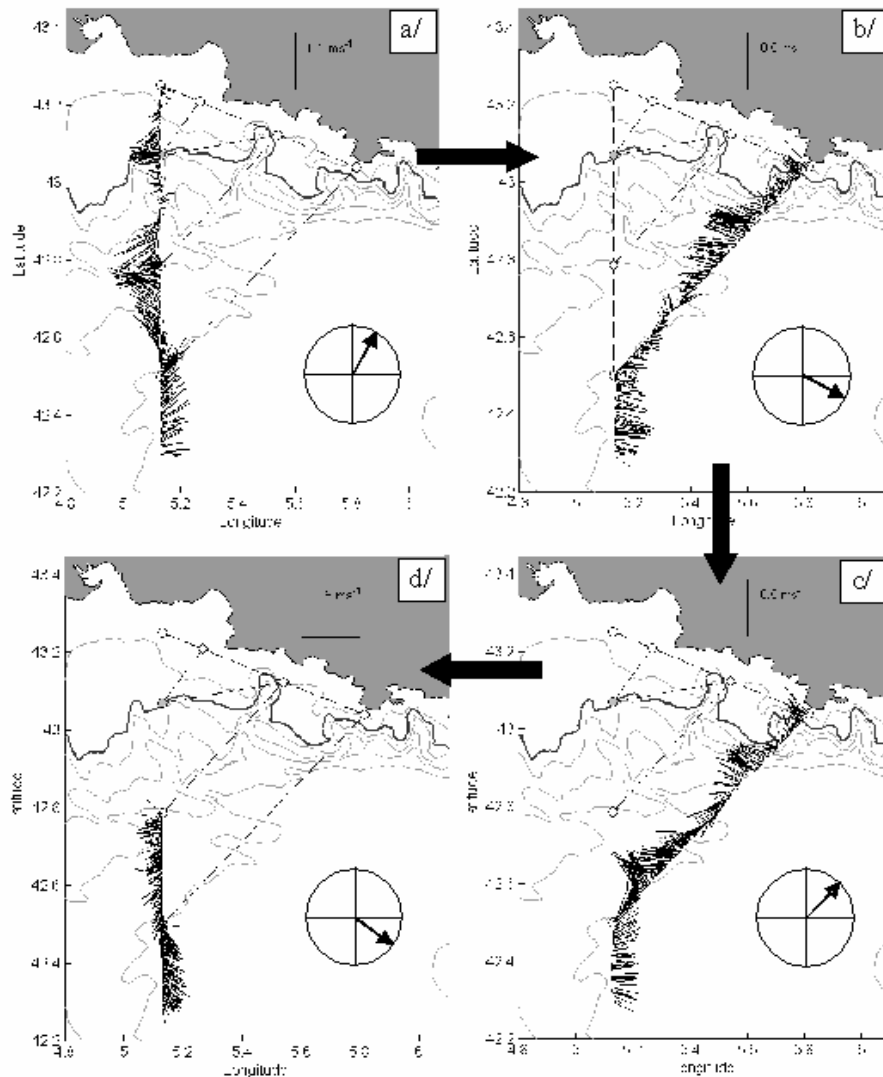
$$\begin{aligned} u &= \frac{U}{H} = u_o \cos f t, \\ v &= \frac{V}{H} = -u_o \sin f t \end{aligned}$$

Le mouvement est périodique avec une période $T = 2\pi/f$ qui est typiquement de 17 h aux moyennes latitudes. L'entière masse d'eau oscille en phase et les particules parcourent des trajectoires circulaires avec un rayon de u_o/f . Alors pour un $u_o = 1 \text{ m s}^{-1}$, vu que $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ on obtient un rayon de 10 km.

Ce type de mouvement, dit oscillations d'inertie, n'est pas consistant avec la présence de la côte et apparemment il semble pas réaliste pour l'océan côtier, mais le bilan des forces représenté par le système (1.44) est observé souvent dans des zones caractérisées par la présence de forts coups de vent tel que le Golf du Lion .



Simulation de la circulation dans le Golfe du Lion pendant la campagne Moogli-2 (Juin 1998) effectuée avec le modèle Symphonie. Le flèches représentent l'évolution temporelle de la vitesse à 32 m de profondeur toutes les 3 heures. Au centre du golfe on peut observer une oscillation d'inertie. (C. Dufau et A. Petrenko)



Courants mesurés par l'ADCP de coque à 16 m dans l'ordre chronologique (indiqué par les flèches pleines noires) sur les trajets a/ 1-66b, b/ 66-6a et 6-7a, c/ 7-6a et 6-66a, d/ 66-4a. L'orientation des courants à la station 6 est représentée sur le cercle trigonométrique en bas à droite de chaque figure.

Station 6	Date et heure	Direction des courants	$\Delta t = t_i - t_{i-1}$ en heure	$\Delta \theta_{\text{obs}} = \theta_i - \theta_{i-1}$ en degré	$\Delta \theta_{\text{calc}} = \theta_i - \theta_{i-1}$ en degré
sur 1-66b	13 juin à 20h13	35°	XXXXXX	XXXXXX	XXXXXXX
sur 66-6a / 6-7a	14 juin à 00h47	124°	4,57h	89°	94°
sur 7-6a / 6-66a	14 juin 15h15	49°	14,47h	285°	298°
sur 66-4a	14 juin 18h59	128°	3,73h	79°	77°

Tableau III.XX : pour chaque trajet de la campagne GOLTS juin 2002, au passage à la station 6, le tableau donne : la date du passage, la direction des courants mesurés, le laps de temps écoulé et la différence d'orientation des courants mesurés entre deux passages et la rotation que doit effectuer une oscillation d'inertie pendant le laps de temps mesuré.

(figure et tableau fournies par J.Gatti) .

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

Dérive d'Ekman

En considérant encore un écoulement loin des frontières, on suppose $h = 0$ partout. Si on considère que le mouvement soit forcé par un frottement du vent rF en direction de l'axe y et on fait l'hypothèse d'un écoulement stationnaire. On suppose aussi que la masse d'eau est assez profonde pour que le frottement au fond soit négligeable (on reverra cet hypothèse *a posteriori*).

Les équation du transport (1.35) deviennent

$$\begin{aligned} -fV &= 0 \\ +fU &= F_y \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

qui sont satisfaites par la solution

$$\begin{aligned} U &= \frac{F_y}{f} \\ V &= 0 \end{aligned}$$

On a donc un transport sur la droite (dans l'hémisphère Nord, où f est positive) avec une intensité de F/f . Pour des valeurs typiques de $F = 10^4 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$, $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ on obtient $U = 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ (équivalent à une vitesse du courant de 0.1 m s^{-1} sur une profondeur de 10 m). Ce transport est connu comme transport d'Ekman et le mouvement qui entame ce transport est dit dérive d'Ekman.

La solution du problème local dans ce cas n'est pas triviale. Si on utilise pour la viscosité turbulente l'équation (1.27) et on considère un K constant au dessous d'une couche de surface d'épaisseur négligeable.

Les gradients horizontaux sont nuls par hypothèse et les équation (1.32) deviennent

$$\begin{aligned} -fv &= K \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ fu &= K \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \end{aligned}$$

avec comme conditions aux frontières

$$\begin{aligned} K \frac{du}{dz} = 0, \quad K \frac{dv}{dz} = F_y, \quad (z=0) \\ \frac{du}{dz} = \frac{dv}{dz} = 0, \quad (z \rightarrow -\infty) \end{aligned}$$

L'échelle spatiale est la profondeur d'Ekman

$$D = \sqrt{\frac{2K}{f}} \tag{1.50}$$

et la solution peut s'écrire

$$\begin{aligned} u &= \frac{F_y}{fD} e^{z/D} \left(\cos \frac{z}{D} - \sin \frac{z}{D} \right) \\ v &= \frac{F_y}{fD} e^{z/D} \left(\cos \frac{z}{D} + \sin \frac{z}{D} \right) \end{aligned} \tag{1.51}$$

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

À une profondeur $-z \gg D$ vitesse et tensions turbulentes disparaissent, ainsi il est raisonnable de considérer négligeable le frottement au fond pour des eaux assez profondes.

On a déjà vu empiriquement que pour une couche d'Ekman turbulente la profondeur d'Ekman est

$$D \approx 0.1 \frac{u_*}{f} \quad (1.52)$$

alors pour la (1.50) on a

$$K = \frac{u_*^2}{200 f} = \frac{u_* D}{20}$$

qui a la même forme de la (1.28) et nous dit que pour une couche d'Ekman homogène le nombre de Reynolds turbulent est environ 20.

L'équation (1.52) montre en plus que le facteur u_*^2/fD qui est dans l'équation (1.51) vaut au peu près 10. Alors les composantes de la vitesse à $z=0$, i.e. jusqu'au dessous de la couche limite de surface, sont $u = v = 10 u_*$ et ici la direction de la vitesse est à 45 degrés par rapport au vent.

Les propriétés de la couche de surface ne sont pas bien connues, mais on peut prendre un profil logarithmique

$$\frac{v_s - v}{u_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{|z|}{r} + 8.5$$

où k est la constante de Von Karman (≈ 0.4) et r la rugosité équivalente en grain de sable de la surface. Cette dernière peut devenir très large (de l'ordre du mètre pour un vent modéré) ainsi la contribution du terme logarithmique pour une profondeur $-z = 1$ m devient négligeable. La variation de vitesse importante à travers la couche de surface est alors environ $8.5u_*$ entre la surface libre et la limite inférieure de la couche qui se situe à $z = -r$.

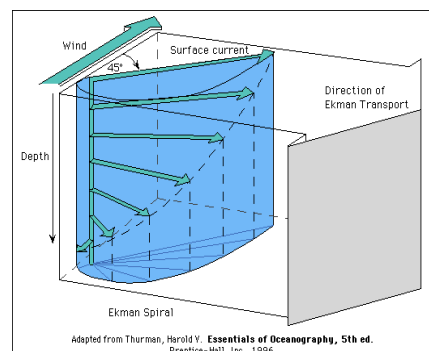
La distribution des vitesses dans une couche d'Ekman turbulente avec la couche limite de surface est représentée sous forme de hodographe.

La vitesse de surface est environ de 45 degrés sur la droite du vent et a une intensité de quelque $20u_*$, ce qui constitue selon l'équation (1.23) environ 3% de la vitesse du vent.

Pour une valeur typique de $u_* = 0.01 \text{ m s}^{-1}$ qui correspond à une vitesse du vent $W = 7 \text{ m s}^{-1}$ et de $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ la profondeur d'Ekman D est 10 m.

La vitesse du courant devient négligeable à une profondeur d'environ $z = -3D$ ou bien 30 m. Souvent la colonne d'eau est suffisamment homogène pour que cette profondeur soit réaliste.

Au contraire il faut se rappeler que dans ce modèle la côte est supposée être absente. En effet la distribution de vitesse montrée en figure est incompatible avec un profil de côte de n'importe quelle direction, vu que l'écoulement aurait toujours une composante normale à elle pour toutes les profondeurs. Toutefois il est aussi possible d'insérer une fine couche latérale pour régler le problème.



www-pord.ucsd.edu/~ltalley/sio210/Wind_forcing/

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité FLuides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

3. Ondes dans l'océan côtier

Dans ce chapitre sont montrées plusieurs solutions analytiques ondulatoires des équations du transport

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} - fV &= -gh \frac{\partial \eta}{\partial x} + F_x - B_x \\ \frac{\partial V}{\partial t} + fU &= -gh \frac{\partial \eta}{\partial y} + F_y - B_y \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= -\frac{\partial \eta}{\partial t} \end{aligned}$$

Ce système est fermé avec trois équations pour trois inconnues

À partir de ces équations on peut trouver plusieurs solutions ondulatoires analytiques, correspondantes à plusieurs classes d'ondes qui peuvent se propager dans l'océan . En général, ces ondes sont engendrées par des perturbations des forçages océaniques . Quand ces dernières disparaissent, la distorsion qu'elles ont engendrée ne disparaît pas forcément et peut se propager dans l'océan comme une onde libre .

Une première classe d'ondes est constituée par les ondes de gravité longues .

3.1 Les ondes de gravité longues

Les équations linéarisées pour des ondes se propageant dans un océan de profondeur constante sans frottement ($\vec{B}=0$) se déduisent des équations en eaux peu profondes en posant:

$$\begin{aligned} h &= \text{constant} \\ \vec{F} &= 0 \end{aligned}$$

En plus, pour étudier d'abord un cas simplifié, on suppose aussi que

- le domaine est non tournant, i.e. $f = 0$;
- le mouvement ne dépend que de x , i.e. en est dans un cas unidimensionnel.

On a alors à résoudre :

$$(B.1.a) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = -gh \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$(B.1.b) \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

On différencie la première équation par rapport à x et la seconde équation par rapport à t et en

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

soustrayant les deux équations résultantes, on obtient :

$$(B.2) \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - g h \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0$$

Cette équation est une équation classique des ondes dont la solution est une onde progressive

$$\eta = \eta(x - ct)$$

qui se propage avec vitesse $c = \sqrt{gh}$

Donc, la surélévation η se propage sans se déformer avec la célérité c .

Ondes progressives

De façon à mieux comprendre le comportement de ces ondes, étudions le cas d'ondes périodiques. Soit la surélévation, fonction périodique du temps et de l'espace, de la forme :

$$\eta \equiv \eta_o \cos(kx - \omega t)$$

où

η_o amplitude

k nombre d'onde avec par définition $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ longueur d'onde

ω pulsation avec par définition $\omega = \frac{2\pi}{T}$, T période d'onde

En posant cette expression de η dans la (B.2) on obtient la condition

$$\omega^2 - ghk^2 = 0$$

Cette relation montre une interdépendance entre σ et k et s'identifie à une relation de dispersion .

En mettant l'équation de η dans la (B.1.a) on obtient :

$$U = U_o \cos(kx - \omega t)$$

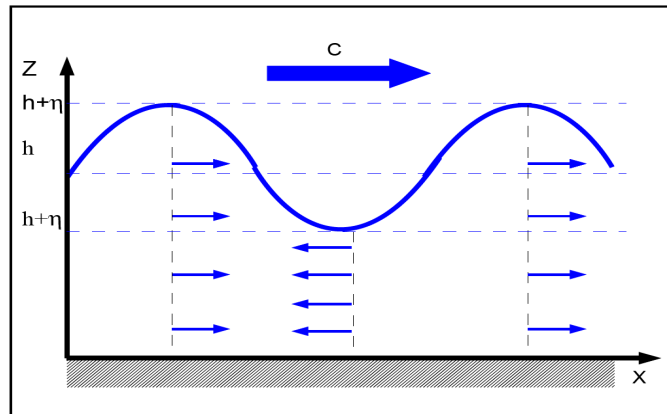
où

$$U_o = gh \frac{k}{\omega} \eta_o = \sqrt{gh} \eta_o = c \eta_o$$

on voit que η et U sont en phase . Il y a coïncidence entre le maximum de la surélévation et le maximum de transport :

$$U = c \eta \quad \text{et} \quad u = \frac{U}{h} = \frac{c}{h} \eta = \sqrt{\frac{g}{h}} \eta$$

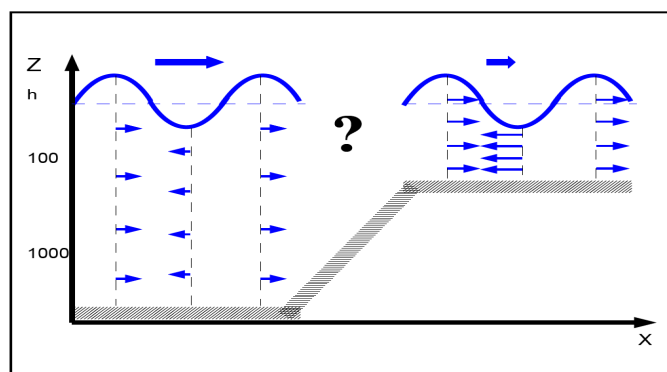
On a donc une onde progressive . C'est le cas par exemple de la propagation de la marée dans la Manche.



EXERCICE : On peut aussi utiliser la même approche que celle pour obtenir l'équation (B.2), mais cette fois il faut différencier la (B.1.a) par rapport à t et la (B.1.b) par rapport à ??? et aussi multiplier par ???

EXERCICE : Ce type d'onde est plus rapide au large ou à la côte ? Qu'est-ce qu'il arrive au valeur du transport U quand une onde de ce type s'approche à la côte ? Et à la vitesse u ?

SOLUTION :



$$\begin{aligned}
 h &= 1000 \text{ m} \\
 \eta &\equiv \eta_o \cos(kx - \omega t) \\
 U &= \sqrt{gh} \eta = 10^2 \eta \\
 u &= \sqrt{\frac{g}{h}} \eta = 10^{-1} \eta
 \end{aligned}$$

du large à la côte :
l'onde décélère
le transport diminue
la vitesse augmente

$$\begin{aligned}
 h &= 100 \text{ m} \\
 \eta &\equiv \eta_o \cos(kx - \omega t) \\
 U &= \sqrt{gh} \eta \approx 32 \eta \\
 u &= \sqrt{\frac{g}{h}} \eta \approx 0.3 \eta
 \end{aligned}$$

NB: dimensions et unités de mesure de variables

$$\begin{aligned}
 \eta &\Rightarrow [L] \Rightarrow [m] \\
 U &\Rightarrow \sqrt{\frac{[L]}{[T^2]}} [L] [L] \Rightarrow [m^2 s^{-1}] \\
 u &\Rightarrow \sqrt{\frac{[L]}{[T^2]} \frac{1}{[L]}} [L] \Rightarrow [m s^{-1}]
 \end{aligned}$$

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

Ondes stationnaires

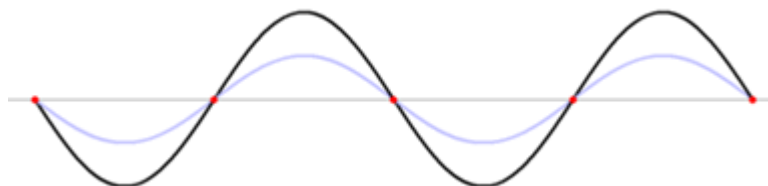
Cherchons maintenant des solutions sous forme d'ondes stationnaires, i.e. de la forme

$$(B.3) \quad \eta = \eta_o \cos(\omega t) \cos(kx)$$

ces mouvements stationnaires peuvent être analysée comme la superposition de deux ondes progressives de même amplitude se propageant en sens contraire.

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{\eta_o}{2} \cos(kx + \omega t) \\ \eta_2 &= \frac{\eta_o}{2} \cos(kx - \omega t) \\ \eta &= \eta_1 + \eta_2 = \frac{\eta_o}{2} [2 \cos(kx) \cos(\omega t)] \end{aligned}$$

ANIMATION: Onde stationnaire comme superposition de deux ondes progressives



http://fr.wikipedia.org/wiki/Onde_stationnaire

NB: pour réviser les formules trigonométriques d'addition et de différence

http://fr.wikipedia.org/wiki/Identité_trigonométrique

En portant (B.3) dans (B.1.a) on obtient:

$$(B.4) \quad U = gh\eta_o \frac{k}{\omega} \sin(\omega t) \sin(kx)$$

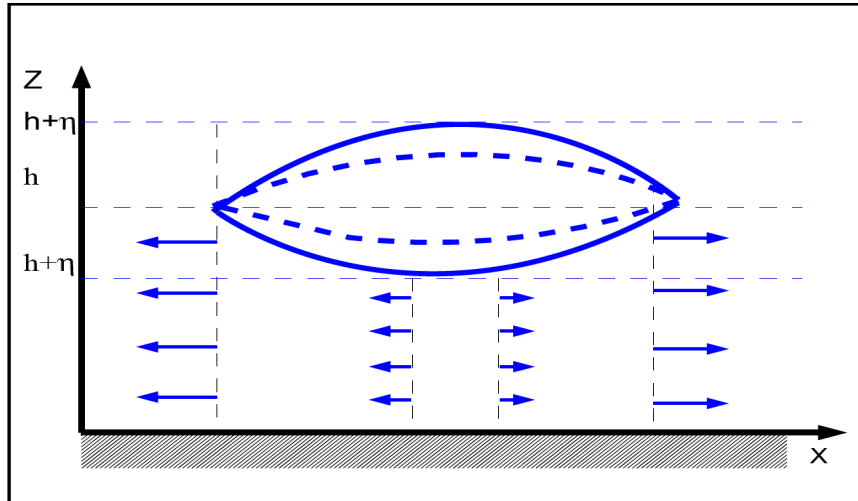
Analyse dans l'espace

La vitesse u a par rapport à la surélévation un déphasage de $\frac{\pi}{4} \Rightarrow$ *quadrature*

Les courants sont maximaux là où les amplitudes de niveau sont nulles \Rightarrow *nœuds*
et ils sont nuls là où les amplitudes de niveau sont maximales \Rightarrow *ventres*

noeuds: $\eta=0 \quad \forall t$ si $\cos(kx)=0 \Rightarrow kx = \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2}, \dots = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ avec $n=0,1,2,3\dots$

ventres: $U=0 \quad \forall t$ si $\sin(kx)=0 \Rightarrow kx = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots = n\pi$ avec $n=0,1,2,3\dots$



Les ondes stationnaires peuvent bien schématiser les oscillations de bassins fermés (seiches), puisque on peut en certains points réaliser la condition de vitesse nulle quelque soit le temps, ces points sont les ventres.

EXERCICE : calculer la distance entre 2 nœuds consécutifs en terme de longueur d'onde

$$\eta=0 \forall t \Rightarrow \cos(kx)=0 \Rightarrow kx=\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \dots \quad kx=(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x_n=(2n+1)\frac{\pi}{2k} \Rightarrow \text{vu que } k=\frac{2\pi}{\lambda} \text{ par définition} \Rightarrow x_n=(2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

$$x_1=\frac{3}{4}\lambda \quad x_2=\frac{5}{4}\lambda \quad x_2-x_1=\frac{\lambda}{2}$$

deux nœuds consécutifs sont distants d'une demi longueur d'onde

EXERCICE : calculer la distance entre 2 ventres consécutifs en terme de longueur d'onde

$$U=0 \forall t \Rightarrow \sin(kx)=0 \Rightarrow kx=n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$x_n=\frac{n\pi}{k} \Rightarrow \text{vu que } k=\frac{2\pi}{\lambda} \text{ par définition} \Rightarrow x_n=\frac{n}{2}\lambda$$

$$x_1=\frac{1}{2}\lambda \quad x_2=\lambda \quad x_2-x_1=\frac{\lambda}{2}$$

deux ventres consécutifs sont distants d'une demi longueur d'onde

EXERCICE : calculer la distance entre 1 nœud et 1 ventre consécutifs en terme de longueur d'onde

$$\eta=0 \quad \forall t \Rightarrow \cos(kx_{nd})=0 \quad kx_{nd}=\frac{\pi}{2}$$

$$\eta=\max \quad \forall t \Rightarrow \cos(kx_{vt})=1 \quad kx_{vt}=\pi$$

$$x_{nd}=\frac{\pi}{2k}=\frac{\lambda}{4} \quad x_{vt}=\frac{\pi}{k}=\frac{\lambda}{2} \quad x_{nd}-x_{vt}=\frac{\lambda}{4}-\frac{\lambda}{2}=\frac{\lambda}{4}$$

un ventre et un nœud consécutifs sont distants d'un quart de longueur d'onde

Analyse dans le temps

EXERCICE : trouver les instants t auxquels la surélévation est nulle pour chaque valeur de x

$$\forall x \exists t \text{ t.q. } \eta=0 \Rightarrow \cos(\sigma t x_{nd})=0 \Rightarrow \sigma t=(2n+1)\frac{\pi}{2} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$t_n=(2n+1)\frac{\pi}{2\sigma} \Rightarrow \text{vu que } \sigma=\frac{2\pi}{T} \text{ par définition } \Rightarrow t_n=(2n+1)\frac{T}{4}$$

$$t_2-t_1=\frac{T}{2}$$

toutes les demi-périodes la surélévation est nulle partout

NB: À ces instants toute l'énergie de l'onde est sous forme d'énergie cinétique! En effet

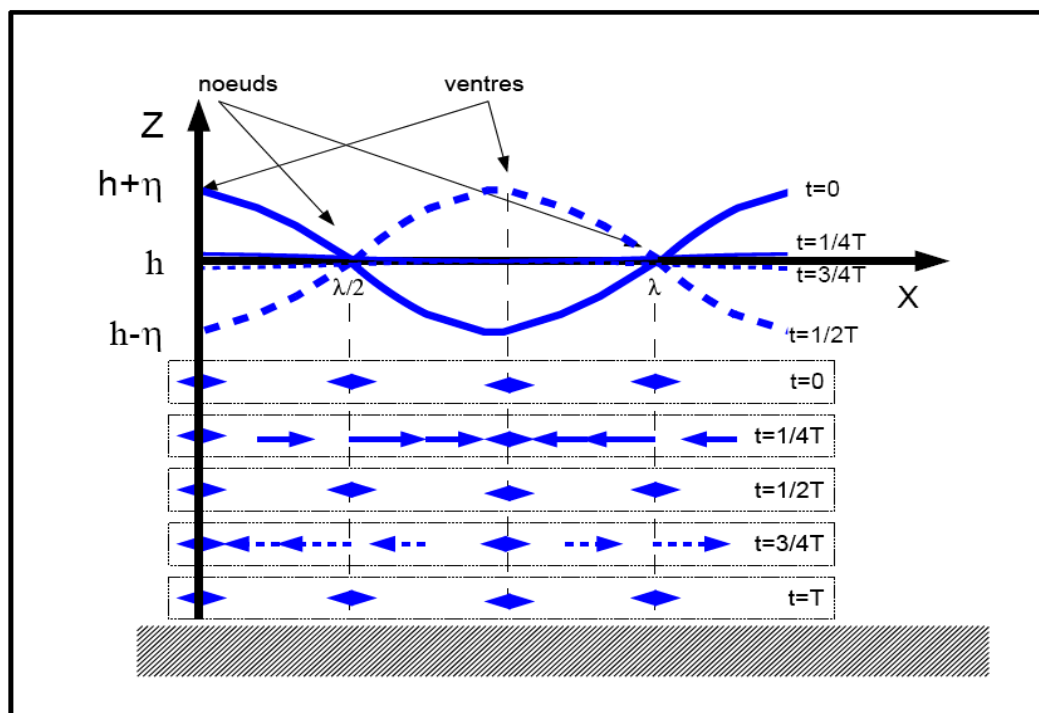
$$U(x, t_n)=\max$$

EXERCICE : trouver les instants auxquels toute l'énergie de l'onde est sous forme de énergie potentielle en terme de pulsation et de période.

$$\eta=\max \Rightarrow \cos(\sigma t)=1 \quad \sigma t=n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$t_n=\frac{n\pi}{\sigma} \Rightarrow \text{vu que } \sigma=\frac{2\pi}{T} \text{ par définition } \Rightarrow t_n=\frac{n}{2}T$$

Résumé schématique



Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

Longueur d'onde de la marée

La relation entre la longueur d'onde et la célérité est notamment

$$\lambda = c T$$

EXERCICE : calculer la longueur d'onde de la marée semi-diurne, dont la période est environ 12h, se propageant en plein océan ($h=4000\text{ m}$) ou en proximité de la côte ($h=40\text{ m}$).

$$\lambda = \sqrt{g H T} \quad \begin{array}{l} c_{4000} = \sqrt{4 \cdot 10^4} = 200 \text{ m s}^{-1} = 720 \text{ km h}^{-1} \\ c_{400} = \sqrt{4 \cdot 10^2} = 20 \text{ m s}^{-1} = 72 \text{ km h}^{-1} \end{array} \quad \begin{array}{l} \lambda_{4000} = 720 \times 12 = 8640 \text{ km} \\ \lambda_{400} = 72 \times 12 = 864 \text{ km} \end{array}$$

Oscillations 1D dans un bassin fermé.

Dans le cas d'un bassin fermé aux deux extrémités on peut réaliser une oscillation avec vitesse nulle au bords, i.e. poser un condition de imperméabilité . Si on considère un bassin de largeur L , la condition d'imperméabilité est $U(x=0,t) = U(x=L,t) = 0$, qui implique

$$\text{sen}(k 0) = 0 \quad \text{triviale!}$$

$$\text{sen}(k L) = 0 \quad \text{si} \quad k L = n \pi \Rightarrow k_n = n \frac{\pi}{L} \quad n \in \mathbb{Z}$$

d'où on déduit que la longueur d'onde générique pour les oscillations qui respectent la condition d'imperméabilité et leur période sont respectivement

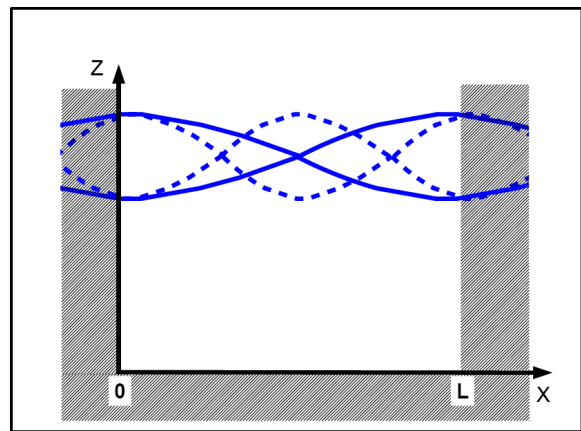
$$\lambda_n = \frac{2}{n} L \quad \text{et} \quad T_n = \frac{\lambda}{c} = \frac{2L}{n \sqrt{g h}}$$

Pour $n=1$ on a l'harmonique fondamentale caractérisée par

$$\lambda_1 = 2L \quad \text{et} \quad T_1 = \frac{2L}{\sqrt{g h}}$$

Pour $n=2$

$$\lambda_2 = L \quad \text{et} \quad T_2 = \frac{L}{\sqrt{g h}}$$



Dans certains cas, lorsque la période du bassin est voisine de celle de la force de marée, il peut y avoir résonance, phénomène qui produit des amplitudes énormes, comme par exemple dans la Baie de Fundy (http://fr.wikipedia.org/wiki/Baie_de_Fundy).

C'est aussi pour cette raison que l'océan Atlantique ($L \sim 5000[\text{km}]$) réagit principalement aux périodes semi-diurnes, tandis que le Pacifique ($L \sim 10000[\text{km}]$) réagit aux périodes diurnes.

EXERCICE : Vérifier cette dernière affirmation!

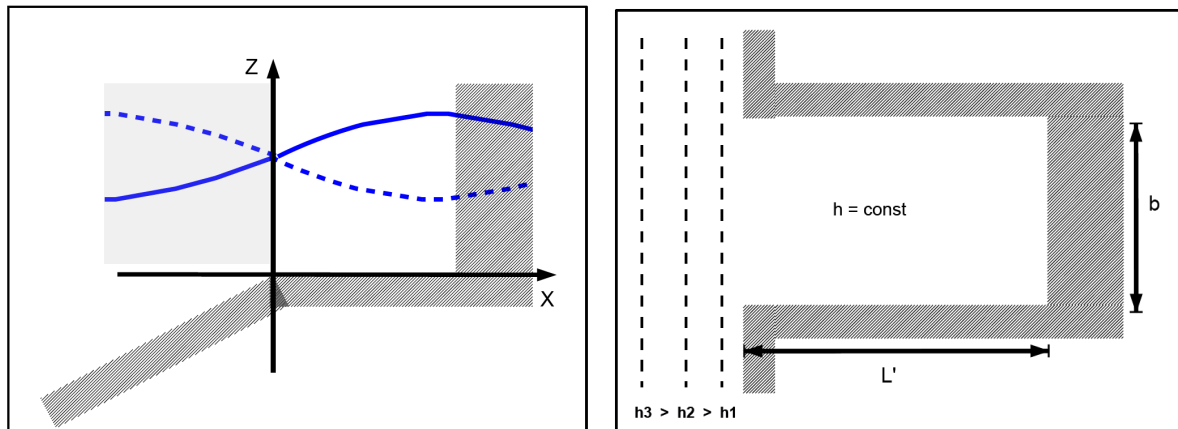
$$T_{\text{Atlantique}} = \frac{2L}{\sqrt{g h}} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^6}{\sqrt{10 \cdot 4 \cdot 10^3}} = 5 \cdot 10^4 \approx 43200 \text{ s} = 12 \text{ h} \quad T_{\text{Pacifique}} = \frac{L}{\sqrt{g h}} = 10 \cdot 10^4 \approx 86400 \text{ s} = 24 \text{ h}$$

EXERCICE : Le mode fondamentale $n=1$, $T=2L/c$ d'une onde de gravité stationnaire oscille dans un bassin fermé de longueur L et profondeur uniforme $h=30\text{ [m]}$. Avec un marégraphe on mesure sur les bords du bassin une surélévation d'amplitude 10 [cm] . En sachant que l'accélération de gravité $g = 9.8\text{ [m/s}^2]$ et en utilisant la condition de imperméabilité aux bords (i.e. $U(x=0,t) = U(x=L,t) = 0$), calculer la vitesse du courant au centre du bassin.

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

Oscillation 1D dans une baie semi-fermée

Avec le même approche on peut résoudre le cas d'une baie semi-fermée à fond plat de l'extension $L'=L/2$.



Si b/L' est petit (i.e. la baie est étroite et longue) on peut négliger les variations de niveau à l'extérieur de la baie (on considère que l'océan ne varie pas de niveau pour remplir/vider la baie) et insérer un terme correctif $\epsilon \equiv \epsilon(b)$ dans la formule de la période.

$$T_n = \frac{4L'}{n\sqrt{gh}}(1+\epsilon) \quad \text{avec par exemple} \quad \begin{array}{ll} \epsilon=0.4 & \text{si } b/L' \sim 1 \\ \epsilon=0.1 & \text{si } b/L' \sim 0.1 \end{array}$$

Ces valeurs correspondent à une oscillation qui a un noeud situé à l'entrée de la baie où la profondeur commence à diminuer.

Il peut aussi y avoir des cas avec adaptation de la longueur L' pour une autre valeur de période excitatrice, par exemple le noeud peut se trouver plus au large.

Les limites du modèle 1D

Le modèle 1D est suffisamment explicatif pour un certain nombre de phénomènes.

Par exemple la propagation de la marée dans les estuaires qui peuvent être considérés comme des canaux relativement étroits.

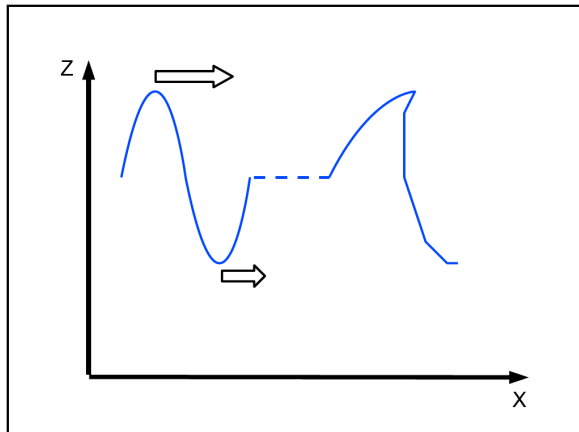
Il marche assez bien aussi pour la marée semi-diurne ($T = 12 \text{ h } 35'$) dans la Manche où on a $\lambda \gg h$ vu que $h \approx 100 \text{ m}$, $\lambda = 1350 \text{ km}$.

Si la condition $\eta \ll h$ n'est pas vérifiée, on peut ajouter un terme correctif dans la formule de la vitesse $c = \sqrt{gh}(1+\epsilon)$ avec $\epsilon \equiv \epsilon(\eta/h)$.

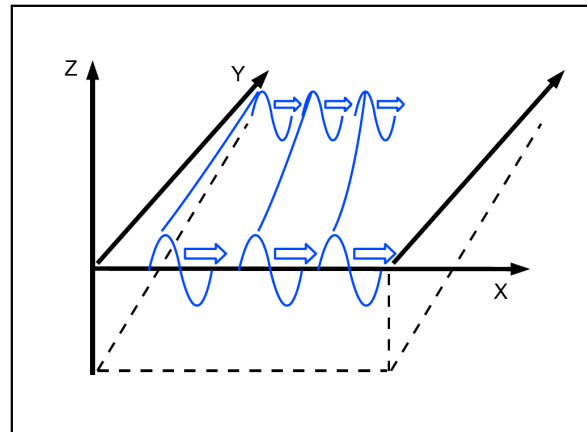
Cette correction permet de tenir en compte le fait que les crêtes se déplacent plus rapidement que les creux. En effet $c_{\text{crête}} = \sqrt{g(h+\eta)} > c_{\text{creux}} = \sqrt{g(h-\eta)}$.

Ce fait crée une dissymétrie entre la montée et la descente des eaux (la durée de la montée est supérieure à celle de la descente) mais aussi d'autres phénomènes tels que le **ressaut** dans les estuaires (une crête rattrape un creux) ou le **mascaret** (quand la bathymétrie n'est pas uniforme, les fronts d'ondes se rejoignent).

Ressaut



Mascaret

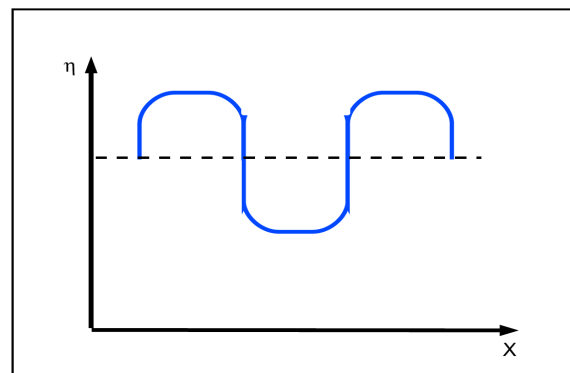


Le mascaret est une brusque surélévation de l'eau d'un fleuve ou d'un estuaire, survenant lors des grandes marées, provoqué par l'onde de la marée montante. C'est une vague, déferlante ou non, remontant le cours d'eau, s'accroissant généralement lorsque son lit se resserre. Parfois utilisée par les surfeurs. En Gironde, il est particulièrement visible sur la Dordogne, un peu avant Libourne, à Vayres.



Vagues déferlantes dès que le lit se resserre
<http://archaero.com/mascaret.htm>

Enfin, il faut aussi tenir compte des effets non linéaires, avec création d'harmoniques qui vont déformer le signal. Par exemple la « tenue du plein », un signal presque carré au Havre.



NB:

Le terme français « tenue du plein » désigne deux phénomènes qui semblent pouvoir être décrits dans une définition qui le confondrait. Une traduction en anglais implique nécessairement de distinguer deux noeuds sémantiques, conformément au principe d'équivalence :

tenue du plein ; durée significative de l'étale de plein mer ;

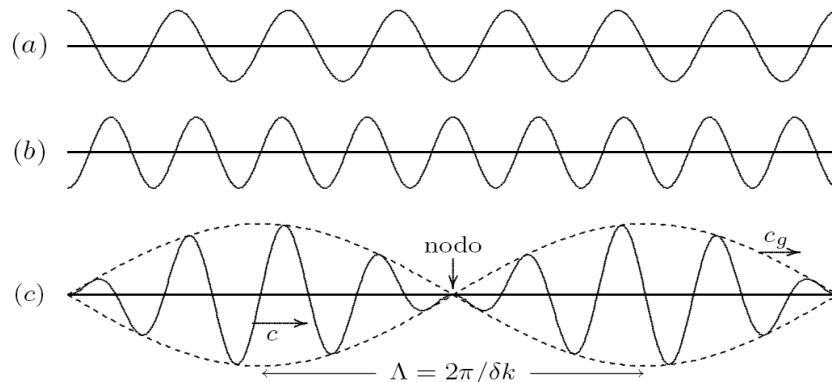
High water stand ; stand of tide ; stand : the condition at high tide or low tide when there is no change in the height of the water. It may be called high water stand if it occurs at the time of high tide, and low stand if it occurs at low tide .

Tenue du plein ; double pleine mer : pleine mer comportant deux maximums de la hauteur d'eau à peu près égaux séparés par un minimum relativement peu marqué.

Double high water : a high water consisting of two maxima of nearly the same height separated by a relatively small depression .

NB: Vitesse de phase et vitesse de groupe

Pour mieux comprendre la signification de vitesse de groupe nous considérons un train d'ondes donnée par superposition de deux ondes de fréquences légèrement différentes qui se propagent dans la même direction. La période de l'enveloppe est plus grande quand la fréquence de ces deux composantes est plus proche.



ω_1 et k_1 sont la pulsation et le nombre d'onde de la première onde et ω_2 et k_2 ceux de la seconde. L'onde totale est donnée par

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = \frac{a}{2} \cos(k_1 x - \omega_1 t) + \frac{a}{2} \cos(k_2 x - \omega_2 t).$$

Si on fixe

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega - \frac{\delta\omega}{2}, & k_1 &= k - \frac{\delta k}{2}, \\ \omega_2 &= \omega + \frac{\delta\omega}{2}, & k_2 &= k + \frac{\delta k}{2}, \end{aligned}$$

appliquant les formules trigonométriques on a

$$\begin{aligned} \eta &= a \cos \left[\frac{1}{2} (k_1 - k_2) x - \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega_2) t \right] \cos \left[\frac{1}{2} (k_1 + k_2) x - \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2) t \right] = \\ &= a \cos \left[\frac{1}{2} \delta k \left(x - \frac{\delta\omega}{\delta k} t \right) \right] \cos(kx - \omega t). \end{aligned}$$

L'onde résultante est donc une onde de fréquence angulaire ω modulée en amplitude par un coefficient qui varie dans l'espace avec périodicité

$$\Lambda = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\delta k/2} = \frac{2\pi}{\delta k},$$

et qui se propage avec vitesse

$$c_g = \frac{\delta\omega}{\delta k} = \frac{d\omega}{dk}.$$

L'enveloppe de l'onde se propage avec la vitesse de groupe; et l'énergie aussi, vu que en correspondance des lignes nodales où la pression dynamique est nulle, il ne peut pas y avoir transmission d'énergie.

En eau de profondeur infinie chaque onde bouge avec sa vitesse de phase, tandis que l'enveloppe bouge avec la vitesse de groupe, ainsi les ondes semblent bouger du nœud postérieur au nœud antérieur. En eaux peu profondes, les deux vitesses sont identiques et alors chaque onde semble bloquée dans son propre enveloppe.

La formule de la vitesse montre que plus est petit δk , plus est grande Λ . Dans le cas le plus générale et réaliste d'un train d'ondes constitué par la superposition de plusieurs ondes monochromatiques de fréquence similaire avec une fréquence moyenne donnée, plus est grande l'extension du paquet d'ondes plus petite la dispersion en fréquence des différentes composantes. Le maximum du paquet d'onde se déplacera avec la vitesse de groupes relative à la vitesse moyenne, tandis que à cause des effets de la dispersion, sa configuration spatiale se modifiera et s'élargira dans le temps.

Traduction depuis *Mattioli, Principi fisici di Oceanografia e Meteorologia, seconda edizione, Università di Bologna*.

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

3.2 Les effets de la rotation de la terre.

Jusqu'à maintenant on a négligé la rotation terrestre. Toutefois on a vu que pour les ondes de gravité quand la longueur d'onde augmente, la période augmente elle aussi. Il y aura alors certaines longueurs d'onde aux quelles la rotation de la terre ne sera plus négligeable.

En continuant à négliger le frottement, les équations deviennent

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - f v + g \frac{\partial \eta}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + f u + g \frac{\partial \eta}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (hu)}{\partial x} + \frac{\partial (hv)}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

Dans l'hypothèse de fond constant et de oscillation harmonique, on peut fixer pour toutes les variables une variation temporelle de type $e^{-i\omega t}$, i.e. on fait la transformation

$$u = \tilde{u} e^{-i\omega t}, \quad v = \tilde{v} e^{-i\omega t}, \quad \eta = \tilde{\eta} e^{-i\omega t}$$

Les équations du mouvement deviennent donc

$$-i\omega \tilde{u} - f \tilde{v} + g \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x} = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$-i\omega \tilde{v} + f \tilde{u} + g \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial y} = 0 \quad (\text{B.6})$$

$$-i\omega \tilde{\eta} + h \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + h \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0 \quad (\text{B.7})$$

en multipliant la première par $i\omega$ et la deuxième par $-f$ et en suite en ajoutant les deux équations résultantes, on obtient :

$$(\omega^2 - f^2) \tilde{u} + g \left(i\omega \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x} - f \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial y} \right) = 0$$

En suite, en multipliant la première par $+f$ et la deuxième par $i\omega$ et en suite en ajoutant les deux équations résultantes, on obtient :

$$(\omega^2 - f^2) \tilde{v} + g \left(f \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x} + i\omega \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial y} \right) = 0$$

Enfin, en substituant ces deux expressions pour \tilde{u} et \tilde{v} dans l'équation de continuité on obtient

$$\begin{aligned}-i\omega \tilde{\eta} - \frac{gh}{\omega^2 - f^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(i\omega \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x} - f \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(f \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x} + i\omega \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial y} \right) \right] &= \\ = -i\omega \tilde{\eta} - \frac{gh}{\omega^2 - f^2} i\omega \left[\frac{\partial^2 \tilde{\eta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\eta}}{\partial y^2} \right] - \frac{gh}{\omega^2 - f^2} \beta \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x} &= 0\end{aligned} \quad \text{où } \beta = \frac{\partial f}{\partial y}$$

En réarrangeant les termes et en se posant sur un plan f (i.e. $\beta = 0$) on obtient finalement

$$\nabla_H^2 \tilde{\eta} + \frac{\omega^2 - f^2}{gh} \tilde{\eta} = 0$$

On a ainsi obtenu une équation pour la seule variable η .

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

Les ondes de Poincaré – Sverdrup

On peut obtenir une solution de l'équation ci-dessus en supposant que la variation spatiale de la surélévation soit elle aussi sinusoïdale. Plus précisément on assume que l'onde soit progressive dans la direction x , c'est-à-dire

$$\tilde{\eta} = a e^{ikx}$$

ou bien que la surélévation ait une variation spatio-temporelle de type

$$\eta = \Re \left\{ a e^{i(kx - \omega t)} \right\} = a \cos(kx - \omega t)$$

Si on substitue cette expression dans l'équation pour la seule variable η , on obtient

$$-k^2 + \frac{\omega^2 - f^2}{gh} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = f^2 + k^2 gh$$

qui constitue la relation de dispersion pour les ondes de Poincaré – Sverdrup ou "ondes à crête horizontale".

La relation de dispersion dit que la pulsation ω de ce type d'ondes doit être toujours inférieur à la période inertielle. Donc, la période continue à augmenter en augmentant la longueur d'onde, comme par les ondes sans rotation terrestre, mais cette fois-ci il y a une limite qu'on peut pas dépasser. Cette limite sont les ondes inertielles, qui sont uniformes dans l'espace et donc peuvent être considérées comme ayant longueur d'onde infinie.

Une façon pour évaluer le poids des effets de la rotation est de calculer le **rayon barotrope de déformation de Rossby**

$$\delta_R = \frac{\sqrt{gh}}{f} \quad \frac{\text{vitesse des ondes en e.p.p.}}{\text{parmètre de Coriolis}}$$

cette quantité représente l'espace parcouru par une onde de gravité en eaux peu profondes sans rotation dans un intervalle de temps égal à la période inertielle divisée par 2π .

C'est à dire que il représente l'échelle spatiale typique à la quelle les effets dues à la gravité sont comparables aux effets de la rotation.

EXERCICE : les effets de la rotation sont plus fort dans la Mer du Nord ($h = 40$ m) ou dans l'océan Atlantique ($h = 4000$ m)?

Calculer les rayons barotropes de déformation de Rossby pour les deux bassins aux moyennes latitudes ($f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$) et, en faisant une comparaison, répondre à la question.

$$\delta_R^{\text{Atlantique}} = \frac{\sqrt{gh}}{f} = \frac{\sqrt{10 \times 4 \times 10^3}}{10^{-4}} = 2000 \text{ km}$$

$$\delta_R^{\text{Mer du Nord}} = \frac{\sqrt{gh}}{f} = \frac{\sqrt{10 \times 4 \times 10}}{10^{-4}} = 200 \text{ km}$$

Dans la mer du Nord le rayon est plus petit, donc la rotation plus importante.

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

La célérité (ou vitesse de phase) est donnée par

$$c^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{f^2}{k^2} + gh$$

Si on la compare à la célérité des ondes sans rotation, elle est supérieure d'une quantité qui augmente avec la longueur d'onde . Ces ondes sont dispersives, i.e. la vitesse des ondes dépend de la longueur d'onde et de la période . Dans ce cas particulier les ondes plus longues sont plus rapides que les ondes courtes .

Le fait d'avoir fixé une direction de propagation de l'onde, n'implique pas que la vitesse soit parallèle à cette direction, mais ayant fixé comme direction de propagation l'axe x , l'équation (B.6) dit que on a plutôt que les deux composantes sont proportionnelles l'une à l'autre ($i\omega\tilde{v} = f\tilde{u}$). Si une composante n'est pas nulle, l'autre non plus.

A partir des équations (B.5) et (B.6) et en utilisant la relation de dispersion, on peut calculer les équations pour les deux composantes de la vitesse

$$\tilde{u} = -\frac{i\omega}{k^2 h} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x} = a \frac{\omega}{k h} e^{ikx}$$

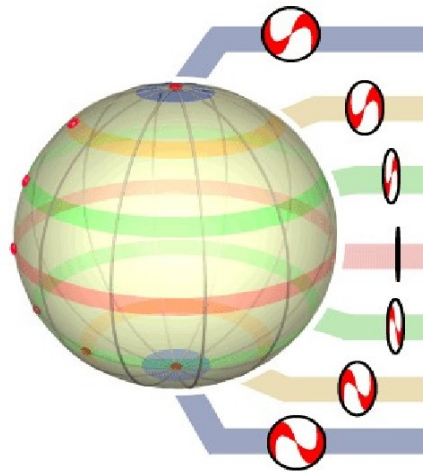
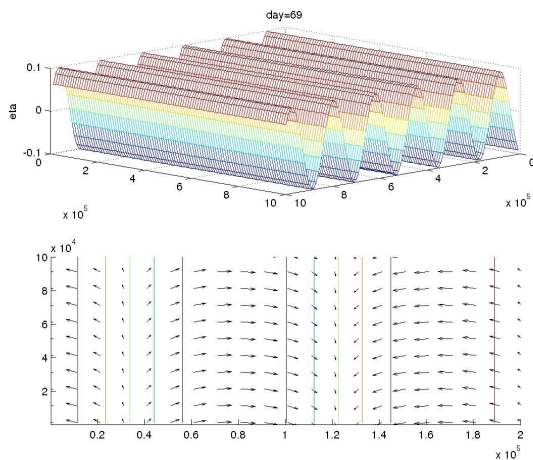
$$\tilde{v} = -\frac{f}{k^2 h} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x} = -a \frac{if}{k h} e^{ikx}$$

En multipliant pour $e^{-i\omega t}$ et en considérant seulement la partie réelle on trouve

$$u = a \frac{\omega}{k h} \cos(kx - \omega t)$$

$$v = a \frac{f}{k h} \sin(kx - \omega t)$$

qui disent que les particules de fluide parcourent des trajectoires elliptiques avec l'axe en direction de la propagation de grandeur proportionnelle à ω et l'axe perpendiculaire à la direction de propagation de grandeur proportionnelle à f .



Champs de surélévation et de vitesse pour une onde de Poincaré-Sverdrup.

(voir scripts Matlab en Annexe)

La sphère de Poincaré montre l'ellipticité et l'orientation d'une onde complètement polarisée sur la surface d'une sphère.

http://cct.rncan.gc.ca/glossary/index_e.php?id=3092

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

Les ondes de Kelvin

Une autre classe d'ondes est donnée par les ondes de Kelvin qui sont des ondes progressives guidées par une côte où on suppose que les vitesses restent partout parallèles aux berges. Si on suppose que la côte est représentée par l'axe x , on a que la composante y de la vitesse est nulle:

$$\tilde{\eta} = a e^{i(kx+ly)} \quad (\text{B.26})$$

$$\tilde{u} = a_u e^{i(kx+ly)} \quad (\text{B.27})$$

$$\tilde{v} = 0$$

en substituant dans les (B.5), (B.6) et (B.7) on obtient

$$-i\omega a_u + i k g a = 0 \quad (\text{B.28})$$

$$+ f a_u + i l g a = 0 \quad (\text{B.29})$$

$$-i\omega a + i k h a_u = 0 \quad (\text{B.30})$$

A partir de la dernière équation on peut calculer l'amplitude de la composante x de la vitesse

$$a_u = \frac{\omega}{k h} a \quad (\text{B.31})$$

En substituant cette valeur dans la (B.28), on obtient

$$-i \frac{\omega^2}{k h} + i k g = 0$$

qui est la relation de dispersion des ondes de gravité progressives en eaux peu profondes sans rotation et peut être re-écrite dans la forme

$$k^2 h = \frac{\omega^2}{g}$$

À partir de cette relation on peut obtenir la vitesse de phase des ondes en direction x

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{g h}$$

qui est évidemment la même que dans le cas sans rotation!

En substituant la (B.31) dans la (B.29) on tire

$$\frac{f \omega}{k h} + i l g = 0,$$

d'où

$$l = -\frac{f \omega}{i k g h} = -\frac{f}{i c}$$

En utilisant les (B.26), (B.27) et (B.31)

$$\tilde{\eta} = a e^{i k x} e^{i l y} = a e^{-f y/c} e^{i k x},$$

$$\tilde{u} = \frac{\omega}{k h} a e^{i k x} e^{i l y} = a \frac{c}{h} e^{-f y/c} e^{i k x}$$

qui peuvent être réécrites explicitement en fonction du temps

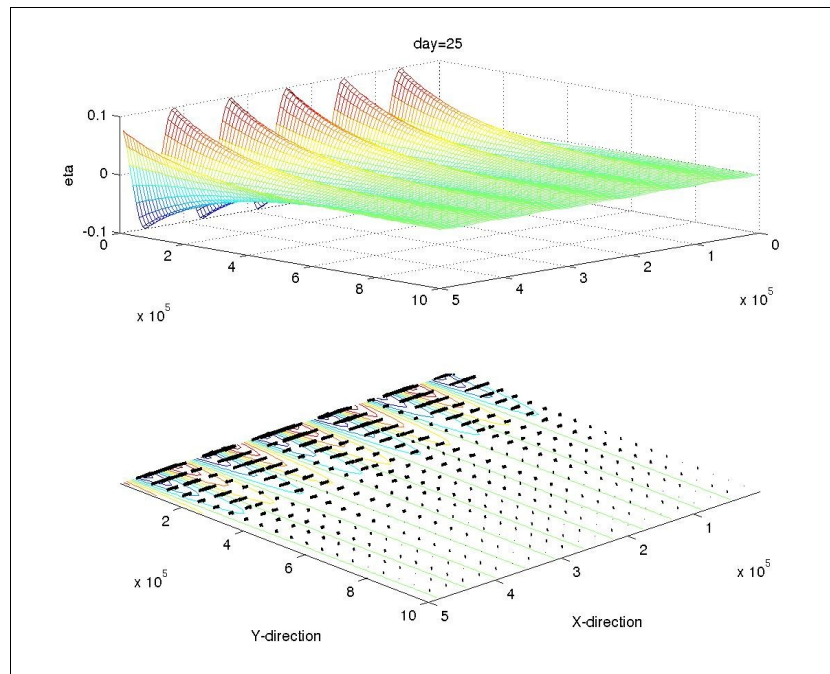
Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

$$\eta = a e^{-f y/c} \cos(kx - \omega t),$$

$$u = a \frac{c}{h} e^{-f y/c} \cos(kx - \omega t)$$

Ce type d'onde se propage avec vitesse $c = \sqrt{gh}$ dans une direction (ici direction x) et décroît exponentiellement dans l'autre (ici direction y), plus précisément à gauche de la direction de propagation dans l'hémisphère nord. Ce fait est dû à la force de Coriolis, qui doit être équilibrée par la force de pression.

Évidemment, pour ce type de ondes il faut toujours considérer des domaines limités dans la direction perpendiculaire à la direction de propagation, autrement la surélévation va croître indéfiniment!!! L'astuce plus réaliste est de faire l'hypothèse que à $y = 0$ il y aie une côte. Donc les ondes de Kelvin se propagent le long de la côte en "s'y appuyant" et elles décroissent exponentiellement vers le large.



Champs de surélévation et de vitesse pour une onde de Kelvin
(voir scripts Matlab en Annexe)

Les points amphidromiques

Le champ d'ondes à l'intérieur d'un canal de longueur infinie peut être représenté par la somme de deux ondes de Kelvin se propageant en direction x et en vers opposé

$$\eta = \frac{1}{2} a e^{-f y/c} \cos(kx - \omega t) + \frac{1}{2} a e^{-f y/c} \cos(-kx - \omega t) =$$

$$= \frac{1}{2} a \Re \left\{ e^{-f y/c} e^{i(kx - \omega t)} + e^{-f y/c} e^{i(-kx - \omega t)} \right\} \quad (\text{B.32})$$

Cette solution ne représente pas une onde stationnaire, parce que l'amplitude des ondes est maximale aux bords!

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

Seulement au centre du canal (qui on peut mettre par simplicité à $y = 0$) ce système représente l'onde stationnaire

$$\eta(x,0) = a \cos kx \cos \omega t .$$

Cette onde est nulle dans les points

$$kx = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad n=0, \pm 1, \dots$$

qui sont appelés *points amphydromiques* .

En tout cas, pour chaque valeur de y le champs est déterminé par la superposition d'ondes sinusoïdales en x de la même longueur d'onde. Le champ totale peut donc être subdivisé en cellules similaires séparées les unes des autres par les lignes d'équation

$$kx = n\frac{\pi}{k}, \quad n=0, \pm 1, \dots$$

Pour des petits valeurs de x et y l'équation (B.32) peut être développé en série de Taylor :

$$\begin{aligned} \eta &= \Re \left\{ \frac{1}{2} a \left[\left(1 - \frac{f}{c} y\right) e^{ikx} + \left(1 + \frac{f}{c} y\right) e^{-ikx} \right] e^{-i\omega t} \right\} = \\ &= \Re \left\{ a \left(\cos kx - i \frac{f}{c} y \sin kx \right) (\cos \omega t - i \sin \omega t) \right\} = \\ &= a \cos kx \cos \omega t - a \frac{f}{c} y \sin kx \sin \omega t. \end{aligned}$$

On peut noter que à nouveau on a $\eta=0$ pour $ikx = \pi/2, y=0$

Si on fait une translation le long de l'axe x pour mettre ce point a l'origine des axes, l'équation de la surélévation devient

$$\eta = a \sin kx \cos \omega t + a \frac{f}{c} y \cos kx \sin \omega t.$$

Les lignes de phase constante peuvent être calculées en posant la condition

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = a\omega \sin kx \sin \omega t + a\omega \frac{f}{c} y \cos kx \cos \omega t = 0,$$

qui fournit

$$y = \frac{c}{f} \tan kx \tan \omega t.$$

Cette équation représente un système de lignes de phase constante qui tournent en sens cyclonique avec vitesse angulaire ω .

Pour des petits valeurs de x et y ces lignes sont des lignes droites représentées par l'équation

$$y = \frac{kc}{f} x \tan \omega t,$$

qui toujours tournent avec vitesse constante .

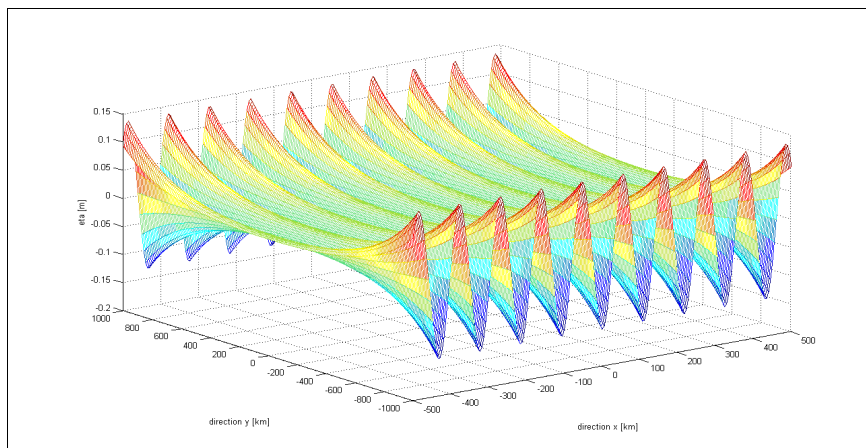
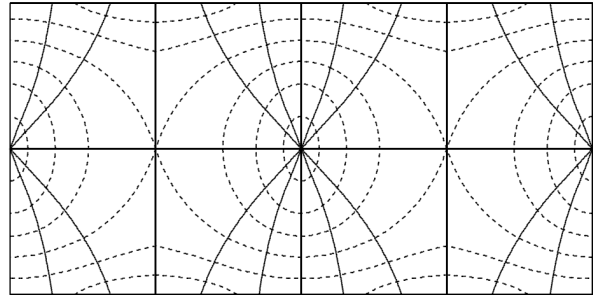
Les lignes de amplitude constante ont équation

$$\sin^2 k x + \frac{f^2}{c^2} y^2 \cos^2 k x = \text{const}$$

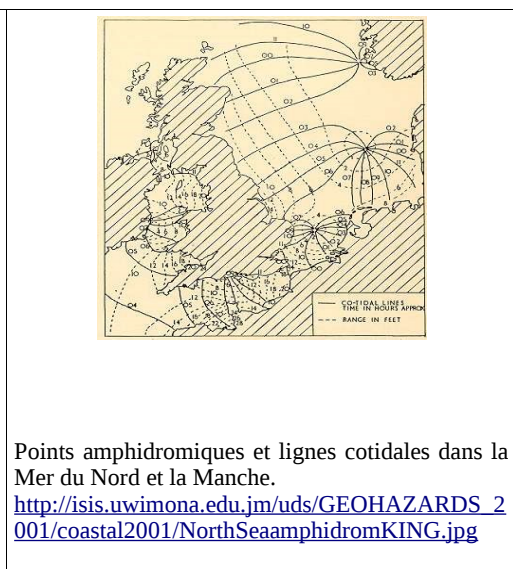
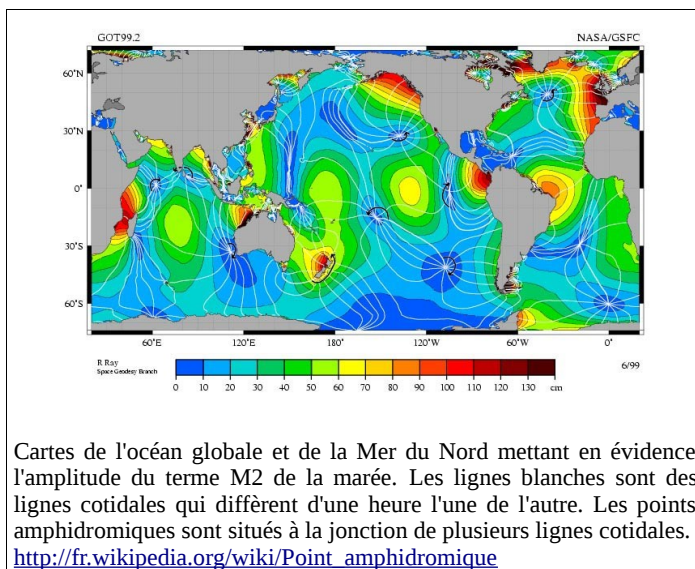
qui, pour des petites valeurs de x et y devient l'équation d'une ellipse

$$k^2 x^2 + \frac{f^2}{c^2} y^2 = \text{const.}$$

La figure ci-contre représente un champ oscillant caractérisé par la présence de points amphydromiques autour de quels tournent les lignes de phase constante (lignes continues) et l'amplitude du mouvement oscillatoire augmente en s'éloignant de ces points (les lignes pointillées représentent les ligne d'amplitude constante).



Champs de surélévation pour deux ondes de Kelvin dans un canal
(voir scripts Matlab en Annexe)



Cartes de l'océan globale et de la Mer du Nord mettant en évidence l'amplitude du terme M2 de la marée. Les lignes blanches sont des lignes cotidiales qui diffèrent d'une heure l'une de l'autre. Les points amphidromiques sont situés à la jonction de plusieurs lignes cotidiales.
http://fr.wikipedia.org/wiki/Point_amphidromique

Points amphidromiques et lignes cotidiales dans la Mer du Nord et la Manche.
http://isis.uwimona.edu.jm/uds/GEOHAZARDS_2001/coastal2001/NorthSeaamphidromKING.jpg

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité FLuides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

ANNEXE : Scripts Matlab

```
#####
ONDA_SVERDRUP.M
#####

clear;close all;

xmax=1000; %[km]
ymax=1000; %[km]
x=[1:xmax/100:xmax]*1e+3;
y=[1:ymax/100:ymax]*1e+3;

g=9.8; %[ms^-2]
H=50; %[m]
f=1.03e-4; %[s^-1]

lambda=8*1e+3;
etazero=0.1;

c=sqrt(g*H);
k=xmax/lambda;
sigma=k*c;

[xx,yy] = meshgrid(x,y);
[i,j]=size(xx);
%v=zeros(i,j);
w=zeros(i,j);
zz=zeros(i,j);

figure(1)
it=86400; %[s]
eta=etazero.*cos(k.*xx-sigma*it);
u=etazero*sigma/k/H.*cos(k.*xx-sigma*it);
v=etazero*f/k/H.*sin(k.*xx-sigma*it);

subplot(2,1,1)
mesh(x,y,eta)
view(135,34)
title(['day=',num2str(it/86400)])
xlabel('eta')

r=6;
subplot(2,1,2)
hold on
contour(xx,yy,curl(u,v))
h=quiver(xx(1:r:100),yy(1:r:100),1:r:100,1:r:100,u(1:r:100,1:r:100),v(1:r:100,1:r:100),0.5,'k');
set(h,'LineWidth',2);
axis([1 xmax*1e3 1 ymax*1e3])
view(155,90)
xlabel('X-direction')
ylabel('Y-direction')

disp('click!')
waitforbuttonpress
hl=line([xx(1,1) xx(1,10) xx(10,10)
xx(10,1)], [yy(1,1) yy(1,10) yy(10,10)
yy(10,1)]);
set(hl,'LineWidth',5,'color','k');

disp('click!')
waitforbuttonpress

figure(2)
contour(xx,yy,curl(u,v))
r=1;

h=quiver(xx(1:r:10),yy(1:r:10),1:r:10,1:r:10,u(1:r:10,1:r:10),v(1:r:10,1:r:10),0.5,'k');

coefv=input('coefv? ');
figure(2)
contour(xx,yy,curl(u,v))
r=1;
h=quiver(xx(1:r:10),yy(1:r:10),1:r:10,1:r:10,u(1:r:10,1:r:10),coefv*v(1:r:10,1:r:10),0.5,'k');

disp('click!')
waitforbuttonpress

anim_onda_sverdrup

#####
ANIM_ONDA_SVERDRUP.M
#####
close(1)

h2=figure(2);
%for it=[1:1:1000]*86400; %[s]
it=1;
pippo=1;

disp('close!')

while pippo==1
it=it+86400; %[s]

eta=etazero.*cos(k.*xx-sigma*it);
u=etazero*sigma/k/H.*cos(k.*xx-sigma*it);
v=etazero*f/k/H.*sin(k.*xx-sigma*it);

subplot(2,1,1)
mesh(x,y,eta)
view(135,34)
title(['day=',num2str(it/86400)])
xlabel('eta')

subplot(2,1,2)
hold on
contour(x,y,u)
r=5;
h=quiver(xx(1:r:100),yy(1:r:100),1:r:100,1:r:100,u(1:r:100,1:r:100),v(1:r:100,1:r:100),1,'k');
set(h,'LineWidth',2);
axis([1 xmax*1e3 1 ymax*1e3])
view(155,90)
pause(0.1)
clf

if gcf==1;
pippo=0;
clf;
disp('FINE anim1');
end%if

end%while

anim_onda_sverdrup2
```

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

```
#####
ANIM_ONDASVERDRUP2.M
#####
close(1)

h2=figure(2);
%for it=[1:1:1000]*86400;%[s]
it=1;
pippo=1;

disp('close!')

while pippo==1
it=it+86400;%[s]

eta=etazero.*cos(k.*xx-sigma*it);
u=etazero*sigma/k/H.*cos(k.*xx-sigma*it);
v=etazero*f/k/H.*sin(k.*xx-sigma*it);

subplot(2,1,1)
mesh(x,y,eta)
view(135,34)
title(['day=',num2str(it/86400)])
zlabel('eta')

subplot(2,1,2)
hold on
contour(xx,yy,curl(u,v))
r=1;
h=quiver(xx,yy,u,coefv*v,0.5,'k');
axis([1 200*1e3 1 100*1e3])

pause(0.1)
clf

if gcf==1;
pippo=0;
clf;
disp('FINE anim 2');
end%if

end%while

%it=86400;%[s]
eta=etazero.*cos(k.*xx-sigma*it);
u=etazero*sigma/k/H.*cos(k.*xx-sigma*it);
v=etazero*f/k/H.*sin(k.*xx-sigma*it);

subplot(2,1,1)
mesh(x,y,eta)
view(135,34)
title(['day=',num2str(it/86400)])
zlabel('eta')

r=6;
subplot(2,1,2)
hold on
contour(xx,yy,curl(u,v))
h=quiver(xx(1:r:100),yy(1:r:100),u(1:r:100),v(1:r:100),0.5,'k');
set(h,'LineWidth',2);
axis([1 xmax*1e3 1 ymax*1e3])
view(155,90)
xlabel('X-direction')
ylabel('Y-direction')
```

```
#####
ONDA_KELVIN
#####
close(1)

h2=figure(2);
%for it=[1:1:1000]*86400;%[s]
it=1;
pippo=1;

disp('close!')

while pippo==1
it=it+86400;%[s]

eta=etazero.*cos(k.*xx-sigma*it);
u=etazero*sigma/k/H.*cos(k.*xx-sigma*it);
v=etazero*f/k/H.*sin(k.*xx-sigma*it);

subplot(2,1,1)
mesh(x,y,eta)
view(135,34)
title(['day=',num2str(it/86400)])
zlabel('eta')

subplot(2,1,2)
hold on
contour(xx,yy,curl(u,v))
r=1;
h=quiver(xx,yy,u,coefv*v,0.5,'k');
axis([1 200*1e3 1 100*1e3])

pause(0.1)
clf

if gcf==1;
pippo=0;
clf;
disp('FINE anim 2');
end%if

end%while

%it=86400;%[s]
eta=etazero.*cos(k.*xx-sigma*it);
u=etazero*sigma/k/H.*cos(k.*xx-sigma*it);
v=etazero*f/k/H.*sin(k.*xx-sigma*it);

subplot(2,1,1)
mesh(x,y,eta)
view(135,34)
title(['day=',num2str(it/86400)])
zlabel('eta')

r=6;
subplot(2,1,2)
hold on
contour(xx,yy,curl(u,v))
h=quiver(xx(1:r:100),yy(1:r:100),u(1:r:100),v(1:r:100),0.5,'k');
set(h,'LineWidth',2);
axis([1 xmax*1e3 1 ymax*1e3])
view(155,90)
xlabel('X-direction')
ylabel('Y-direction')
```

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité FLuides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

```
#####
ANIM-ONDA-KELVIN end
#####
close(1) end

h2=figure(2);
%for it=[1:1:1000]*86400;%[s] #####
it=1; ANFIDROMICI
pippo=1; #####
clear;close all;

disp('close!')
xmax=500;%[km]
ymax=1000;%[km]
reso=99;
x=[-xmax:xmax/reso:xmax]*1e+3;
y=[-ymax:ymax/reso:ymax]*1e+3;

while pippo==1
it=it+86400;%[s]
eta=etazero*exp(-f*yy./c).*cos(k.*xx-
sigma*it);
u=etazero*c/H*exp(-f*yy./c).*cos(k.*xx-
sigma*it);
g=9.8;%[ms^-2]
H=100;%[m]
f=1.03e-4;%[s^-1]

subplot(2,1,1)
mesh(x,y,eta)
view(135,34)
title(['day=',num2str(it/86400)])
zlabel('eta')
lambda=2*1e+6;%[m]
etazero=0.01;%[m]
c=sqrt(g*H);%[ms^-1]
k=xmax*1e+3/lambda;
sigma=k*c;

subplot(2,1,2)
hold on
contour(x,y,u)
r=5;
h=quiver(xx(1:r:100),yy(1:r:100),
:r:100),u(1:r:100,1:r:100),v(1:r:100,1:r:
100),1,'k');
set(h,'LineWidth',2);
axis([1 xmax*1e3 1 ymax*1e3])
view(155,90)

h1=figure(1);

pause(0.1)
it=1*86400;%[s]
clf
eta1=1/2*etazero*exp(-
f*yy./c).*cos(+k.*xx-sigma*it);
eta2=1/2*etazero*exp(+f*yy./c).*cos(-
k.*xx-sigma*it);
eta=eta1+eta2;

subplot(3,1,1)
mesh(x,y,eta1)
view(135,34)
title(['day=',num2str(it/86400)])
zlabel('eta1')

disp('click!')
waitforbuttonpress

subplot(3,1,2)
mesh(x,y,eta2)
view(135,34)
zlabel('eta2')

disp('click!')
waitforbuttonpress

subplot(3,1,3)
mesh(x,y,eta)
view(135,34)
zlabel('eta=eta1+eta2')

disp('click!')
waitforbuttonpress
```

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité FLuides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

```

anim_anfidromici
#####
ANIM_ANFIDROMICIM
#####
hl=figure(2);

it=1;
pippo=1;

disp('close!')

while pippo==1
it=it+86400; %[s]

eta1=1/2*etazero*exp(-
f*yy./c).*cos(+k.*xx-sigma*it);
eta2=1/2*etazero*exp(+f*yy./c).*cos(-
k.*xx-sigma*it);
eta=eta1+eta2;

subplot(3,1,1)
mesh(x,y,eta1)
view(135,34)
title(['day=',num2str(it/86400)])
xlabel('eta1')

subplot(3,1,2)
mesh(x,y,eta2)
view(135,34)
xlabel('eta2')

subplot(3,1,3)
mesh(x,y,eta)
view(135,34)
xlabel('eta=eta1+eta2')

pause(0.2)
clf

if(gcf==1)
pippo=0;
clf;
anfidromici2
%disp('FINE');
end

end%while

#####
ANFIDROMICI2.M
#####
hl=figure(1);clf;hold on;

it=86400; %[s]

eta1=1/2*etazero*exp(-
f*yy./c).*cos(+k.*xx-sigma*it);
eta2=1/2*etazero*exp(+f*yy./c).*cos(-
k.*xx-sigma*it);
eta=eta1+eta2;

mesh(x,y,eta)
view(-40,52)
xlabel('eta=eta1+eta2')
%axis([1 xmax*1e3 -ymax*1e3 ymax*1e3 -0.1
0.1])

grid on;
hl=line(xx(50,:),yy(50,:),eta(50,:));
set(hl,'Color','b');
hl=line(xx(100,:),yy(100,:),eta(100,:));
set(hl,'Color','k');
hl=line(xx(150,:),yy(150,:),eta(150,:));
set(hl,'Color','r');

disp('click!')
waitforbuttonpress
clf
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure(2)
it=1;
pippo=1;

disp('close!')

while pippo==1
it=it+86400; %[s]

eta1=1/2*etazero*exp(-
f*yy./c).*cos(+k.*xx-sigma*it);
eta2=1/2*etazero*exp(+f*yy./c).*cos(-
k.*xx-sigma*it);
eta=eta1+eta2;

plot(xx(50,:),eta(50,:),'b',xx(100,:),eta
(100,:),'k',xx(150,:),eta(150:),'r');
axis([-1e5 +1e5 -.03 0.03]);

ht=text(26500,0,'o');
set(ht,'FontSize',20);
ht=text(-28000,0,'o');
set(ht,'FontSize',20);

grid

pause(0.1)
clf
if(gcf==1)
pippo=0;
end

end%while
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
etay0=etazero*cos(k*x)*cos(sigma*it);
plot(xx(50,:),eta(50:),'b',xx(100,:),eta
(100:),'k',xx(150,:),eta(150:),'r',x,et
ay0,'g--');
axis([-1e5 +1e5 -.03 0.03]);

ht=text(26500,0,'o');
set(ht,'FontSize',20);
ht=text(-28000,0,'o');
set(ht,'FontSize',20);

grid

disp('click!')
waitforbuttonpress
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
contourf(x,y,eta);
colorbar; shading flat;

ht=text(26500,0,'o');
ht=text(-27500,0,'o');

```

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

```

waitforbuttonpress
it=86400;
fasecost=c/f*tan(k*xx)*tan(sigma*it);
hl=line(xx,fasecost);
set(hl,'linewidth',6,'color','k')

disp('click!')
waitforbuttonpress
axis([-1e5 1e5 -2e5 2e5])

disp('click!')
waitforbuttonpress
clf
anim_anfidromici2

#####
ANIM_ANFIDROMICI2.M
#####
hl=figure(2);hold on;
clf

it=1;
pippo=1;

disp('close!')

while pippo==1
it=it+86400/48; %[s]

etal=1/2*etazero*exp(-
f*yy./c).*cos(+k.*xx-sigma*it);
eta2=1/2*etazero*exp(+f*yy./c).*cos(-
k.*xx-sigma*it);
eta=etal+eta2;

contourf(x,y,eta);
colorbar; shading flat;

ht=text(26500,0,'o');
ht=text(-27500,0,'o');

fasecost=c/f*tan(k*xx)*tan(sigma*it);
hl=line(xx,fasecost);
set(hl,'linewidth',6,'color','k')
axis([-1e5 1e5 -10e5 10e5])

pause(0.1)
clf

if gcf==1;
pippo=0;
close all;
disp('FINE');
end

end%while

```

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

4. Courants levés par le vent au voisinage d'une côte

Dans ce chapitre sont montrés plusieurs solutions analytiques des équations du transport linéarisée

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} - fV &= -gH \frac{\partial \eta}{\partial x} + F_x - B_x \\ \frac{\partial V}{\partial t} + fU &= -gH \frac{\partial \eta}{\partial y} + F_y - B_y \quad H = h + \eta \simeq h \quad \text{si } h \gg \eta \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= -\frac{\partial \eta}{\partial t} \end{aligned}$$

4.1 L'équilibre dit "wind setup"

On considère un bassin fermé avec profondeur constante h et on suppose que le vent souffle uniformément sur toute la surface avec un frottement en direction y égale à $F_y = u_*^2$ où

$$u_* = \left(\frac{\tau_y^s}{\rho} \right)^{1/2} \text{ est une vitesse de frottement, avec } \tau \text{ intensité de la tension à la frontière}$$

Dans ce cas on a alors que les dérivées spatiales du forçage sont nulles, mais pas le forçage

$$\nabla \cdot \vec{F} = 0 \quad \nabla \times \vec{F} = 0 \quad \vec{F} \neq 0$$

La présence de la côte empêche un transport normale, mais pour chercher de déterminer le changement dans la surélévation en proximité de la côte, on peut imposer en première approximation que le transport soit nul dans toutes les deux directions

$$U = V = 0$$

On ajoute encore une hypothèse: le frottement sur le fond reste négligeable:

$$B_x = B_y = 0$$

Enfin, on décide de chercher une solution stationnaire.

Dans ces conditions, les équations du transport se simplifient beaucoup et deviennent :

$$\begin{aligned} 0 &= -gh \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ 0 &= -gh \frac{\partial \eta}{\partial y} + F_y \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

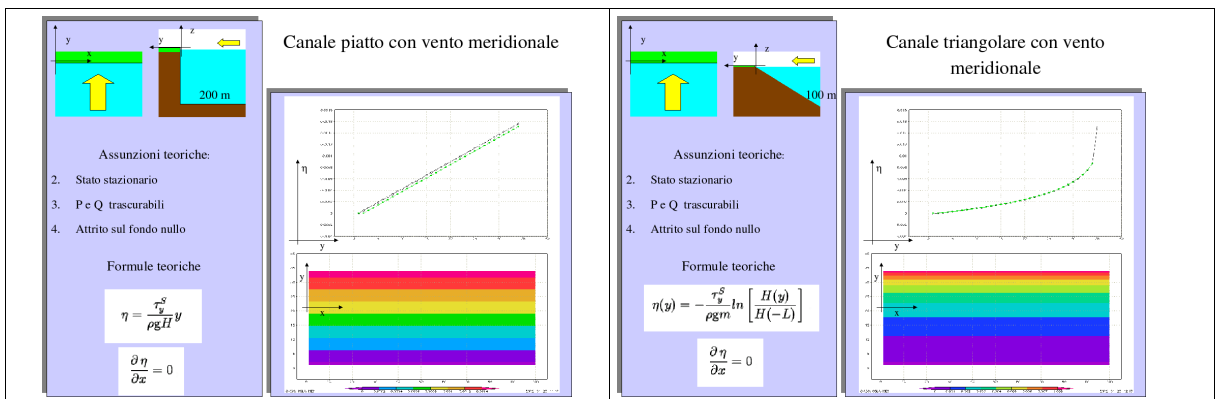
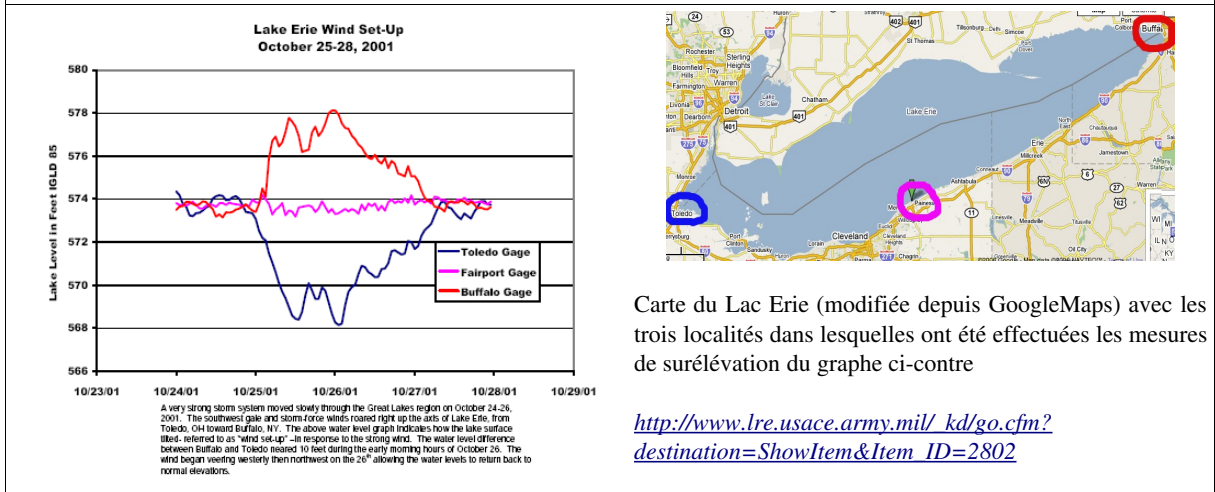
dont la solution non triviale est

$$\eta = \frac{F_y}{gh} y (+ const) \tag{2.3}$$

qui implique seulement de poser l'axe y dans une façon consistante avec la conservation de la masse totale.

Cette solution est connue comme *wind setup* et représente un simple bilan entre la force du vent et un gradient de pression horizontale associé à une variation de surélévation qui ne dépend pas du temps (i.e. cas stationnaire).

EXERCICE: calculer le gradient de surélévation provoqué par les fort vents ($F = 25 \text{ cm/s}$), qui soufflent sur le lac Erie (Amérique du Nord) qui est long 300 km et profonde 30 m. En sachant que 1 foot = 0.3048 m, confrontez votre résultat avec la variation de niveau du lac enregistré dans 3 différents sites pendant une tempête.



Comparaison entre résultats numériques (modèle POM) et analytiques pour le *wind setup* dans un lac à fond plat et à fond incliné. (Thèse M. Magaldi)

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

Le wind setup dans un bassin de forme arbitraire

Dans la solution précédente nous avons fixé $U=V=0$ et trouvé une solution pour un bassin fermé, maintenant cherchons d'éviter une hypothèse si contraignant .

Reprendrons les équations du transport en eaux peu profondes en négligeant toujours le frottement sur le fond on se disant qu'il agisse seulement dans la couche limite de fond.

$$\frac{\partial U}{\partial t} - fV = -c^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + F_x \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + fU = -c^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} + F_y \quad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (3)$$

où $c = \sqrt{gH}$

La géométrie du problème est la suivante

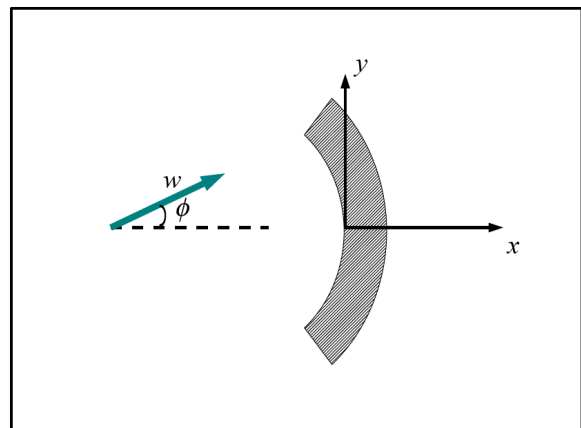
axe x normale à la côte

axe y tangent à la côte

les composantes de la tension su vent sont

$$F_x = F \cos \phi$$

$$F_y = F \sin \phi$$



Hypothèses:

plan $f \Rightarrow f = \text{constante}$

bathymétrie plane $\Rightarrow h = \text{constante}$

vent uniforme \Rightarrow dérivées spatiales nulles
mais pas le forçage $\nabla \cdot F = 0 \quad \nabla \times F = 0 \quad F \neq 0$

Notation:

$$D = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = \nabla_H \cdot \vec{U} \quad \text{divergence du transport}$$

$$R = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = \hat{k}(\nabla \times \vec{U}) \quad \text{rotationnel du transport}$$

$$\frac{\partial *}{\partial x} \Rightarrow \partial_x *$$

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

(A) $\partial_x(1) + \partial_y(2)$

En différentiant l'équation (1) par rapport à x et l'équation (2) par rapport à y , en ajoutant les deux équations ainsi obtenues, on tire

$$\partial_t(\partial_x U + \partial_y V) - f(\partial_x V - \partial_y U) = -\partial_x(c^2 \partial_x \eta) - \partial_y(c^2 \partial_y \eta) + \partial_x F_x + \partial_y F_y$$

$$\partial_t D - f R = -c^2 \nabla^2 \eta + \nabla \cdot \vec{F}$$

(B) $\partial_x(2) - \partial_y(1)$

En différentiant l'équation (2) par rapport à x et l'équation (1) par rapport à y , en soustrayant les deux équations ainsi obtenues, on tire

$$\partial_t(\partial_x V - \partial_y U) + f(\partial_x U + \partial_y V) = c^2 \partial_{yx}^2 \eta - c^2 \partial_{xy}^2 \eta + \partial_x F_y - \partial_y F_x$$

$$\partial_t R + f D = \nabla \times \vec{F}$$

(C)

Enfin on peut reformuler l'équation (3) sous la forme

$$D = -\partial_t \eta$$

En se rappelant que le vent est uniforme on récrit le système (1-3) sous la forme

$$(A) \quad \partial_t D - f R = -c^2 \nabla^2 \eta$$

$$(B) \quad \partial_t R + f D = 0$$

$$(C) \quad D = -\partial_t \eta$$

Maintenant on cherche d'obtenir une seule équation pour la seule surélévation.

On substituant D dans l'équation (B) avec l'équation (C) on obtient

$$\partial_t R - f \partial_t \eta = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_t (R - f \eta) = 0$$

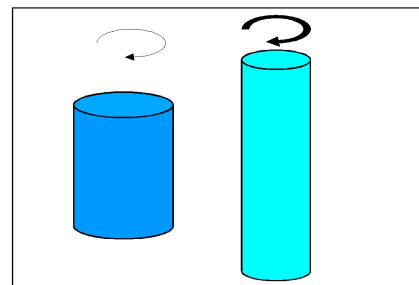
À l'état initial

$$R - f \eta = R_o - f \eta_o \quad \forall x, y \quad \text{avec} \quad R_o \equiv R(t=0) \quad \eta_o \equiv \eta(t=0)$$

Si on considère une situation initiale de repos, on a

(D) $R = f \eta$

Cette équation nous dit que la vorticité varie selon l'étiement de la colonne d'eau où on se déplaçant avec la latitude (voir la loi de la conservation de la vorticité potentielle).



Maintenant, si on substitue D et R dans l'équation (A) en utilisant les équations (C) et (D)

$$\partial_t(-\partial_t \eta) - f(f \eta) = -c^2 \nabla^2 \eta$$

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

on obtient finalement une équation aux dérivées partielles de type hyperbolique

$$(E) \quad \partial_t^2 \eta + f^2 \eta - c^2 \nabla^2 \eta = 0$$

NB: si on cherche une solution pour l'équation (E) de type
on retrouve la relation de dispersion des ondes de Poincaré-Sverdrup

$$\eta = \eta_0 e^{i(kx - \sigma t)}$$

$$\sigma^2 = f^2 + g h k^2$$

Conditions aux limites et initiale du problème

imperméabilité à la côte $\Rightarrow U(x=0) = 0$
état de repos au départ $\Rightarrow U(t=0) = 0$ et $V(t=0) = 0$

$$\partial_t(1) + f \cdot (2)$$

En différenciant l'équation (1) par rapport à t et multipliant l'équation (2) par f , en soustrayant les deux équations ainsi obtenues, on tire

$$\partial_t^2 U + f^2 U = -c^2 \partial_{tx}^2 \eta - f c^2 \partial_y \eta + \partial_t F_x + f F_y$$

En appliquant la condition d'imperméabilité on a que la partie gauche de l'équation ci-dessus est nulle. Si en plus on s'intéresse à une solution stationnaire ($\partial_t = 0$), on obtient

$$-f c^2 \partial_y \eta + f F_y = 0$$

Ainsi on retrouve le *wind setup* linéaire

$$\partial_y \eta = \frac{F_y}{c^2}$$

que maintenant constitue non plus un solution globale du problème mais une condition limite à la côte, dans le cas d'état de repos initial, pour résoudre l'équation (E).

Cette équation nous dit que à la côte il se met en place un équilibre entre la composante parallèle à la côte et le gradient de pression dans la même direction, tandis que la force de Coriolis associée à la composante perpendiculaire disparaît.

On a aussi mis en évidence que pour maintenir ce gradient de pente, il faut que le profil de la côte soit courbe, car avec un profil rectiligne, la surélévation engendre une onde qui se propage le long de la côte et donc qui ne vérifie plus la stationnarité. On avait dit avant qu'il fallait choisir attentivement la position de la côte!

La solution ci-dessus est une solution élémentaire d'un problème globale. Les limites de cette solution deviennent évidents quand il faut étudier un problème locale, comme étudier la distribution de la vitesse associé au *wind setup*.

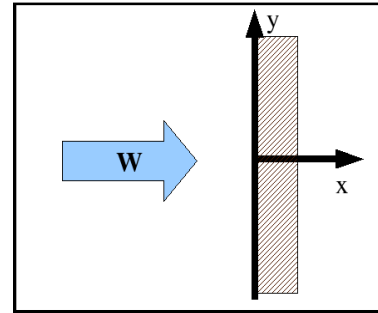
Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

4.2 Vent perpendiculaire à une côte rectiligne

La géométrie du problème implique que

$$F_y = 0$$

$$\partial_y * = 0$$



On reprend l'équation (E) et on cherche une solution stationnaire (i.e. $\partial_t * = 0$)

$$f^2 \eta - c^2 \nabla^2 \eta = 0 \quad \text{vu que } \partial_y * = 0 \quad f^2 \eta - c^2 \partial_{xx}^2 \eta = 0$$

Pour ce type d'équation on peut trouver une solution de type

$$\eta(x) = A e^{f \frac{x}{c}} + B e^{-f \frac{x}{c}}$$

où mieux, vu que η est bornée pour $x \rightarrow -\infty$ $|\eta| < \infty$ alors $B = 0$

$$(F) \quad \eta(x) = A e^{f \frac{x}{c}}$$

Conditions limites et initiales

Étant la côte rectiligne ($\partial_y * = 0$) et le vent perpendiculaire à la côte ($F_y = 0$), l'équation (2) devient

$$\frac{\partial V}{\partial t} + f U = 0 \quad \text{et si on cherche une solution stationnaire} \quad U = 0 \quad \forall x$$

NB: maintenant cette condition est valable partout et pas seulement à la côte

Avec un état initial de repos ($U(t=0) = 0$ et $V(t=0) = 0$), l'équation (1) devient

$$0 = -c^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + F_x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{F_x}{c^2}$$

NB: dans le cas de solution stationnaire ($\partial_t U = 0$), cette condition est valable aussi comme condition limite à la côte où $V(x=0) = 0$.

Si on applique ces conditions à l'équation (F) on a

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = f \frac{A}{c} e^{f \frac{x}{c}} = \frac{F_x}{c^2}$$

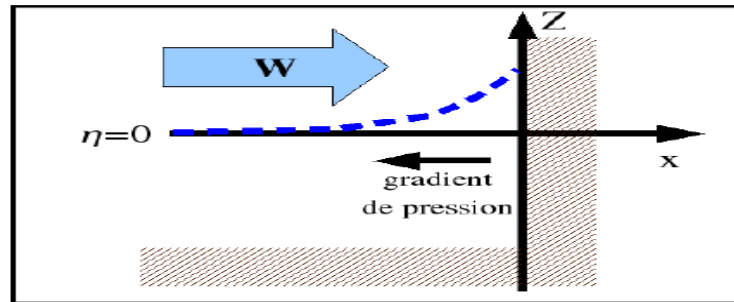
en se mettant en $x = 0$ on retrouve le coefficient $A = \frac{F_x}{fc}$

Ainsi on a finalement

(G)

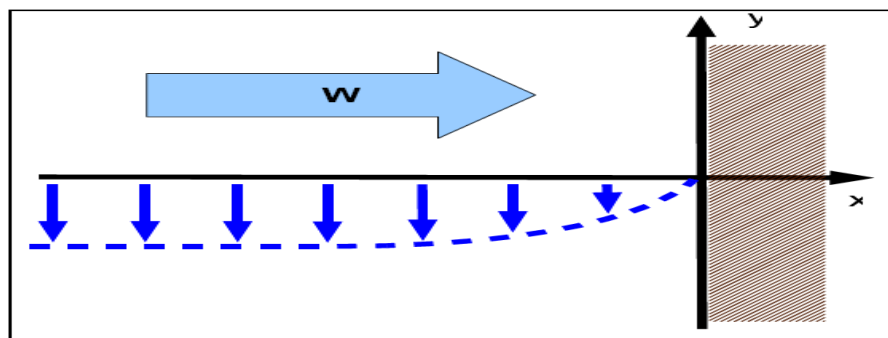
$$\eta(x) = \frac{F_x}{fc} e^{\frac{x}{R_b}} \quad \text{où } R_b = \frac{c}{f} \text{ est dit rayon de Rossby ou rayon externe de déformation}$$

Il y a une dénivellation qui crée un gradient de pression près de la côte



Si on met l'équation (G) dans la (1) à l'état stationnaire on trouve finalement une solution pour le transport le long de la côte

$$-fV = -c^2 \left(\frac{F_x}{fc} e^{\frac{x}{R_b}} \frac{f}{c} \right) + F_x \Rightarrow V = \frac{F_x}{f} \left(e^{\frac{x}{R_b}} - 1 \right)$$



hauturier $x \rightarrow -\infty$ côtier $x \simeq R_b$ à la côte $x=0$

$$V = -\frac{F_x}{f}$$

$$V = -\frac{F_x}{f} + \frac{F_x}{f} e^{\frac{x}{R_b}}$$

$$V = 0$$

Décomposition du problème

Maintenant qu'on a la solution pour le transport on cherche celles pour le vitesses internes.
On prend les équations du mouvement

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - f v &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + f u &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

et on fait la décomposition suivante:

$$\vec{u} = \vec{u}_G + \vec{u}_E \quad \text{avec } \vec{u}_G \equiv (u_G, v_G) \text{ et } \vec{u}_E \equiv (u_E, v_E)$$

où \vec{u}_G est la solution du sous-système

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_G}{\partial t} - f v_G &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial v_G}{\partial t} + f u_G &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned}$$

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

qui dans le cadre de nos hypothèses ($\partial_t^* = 0$, $\partial_y^* = 0$) a pour solution un courant géostrophique stationnaire en équilibre avec la pente de η

$$u_G = 0 \quad \text{et} \quad v_G = \frac{g}{f} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

Tandis que \vec{u}_E est la solution du sous-système

$$\begin{aligned} -f v_E &= \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial u_E}{\partial z} \right) \\ +f u_E &= \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial v_E}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

qui a pour solution notamment la spirale d'Ekman

$$\begin{aligned} u_E &= \frac{F_x}{f D_E} e^{z/D_E} \left(\cos \frac{z}{D_E} - \sin \frac{z}{D_E} \right) \\ v_E &= \frac{F_x}{f D_E} e^{z/D_E} \left(\cos \frac{z}{D_E} + \sin \frac{z}{D_E} \right) \end{aligned} \quad \text{avec} \quad D_E = \sqrt{\frac{2K}{f}} \quad \text{profondeur d'Ekman.}$$

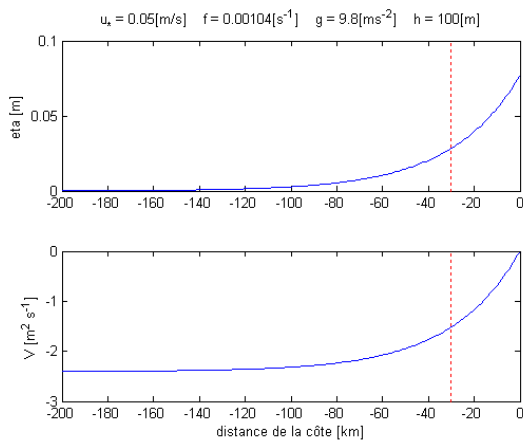
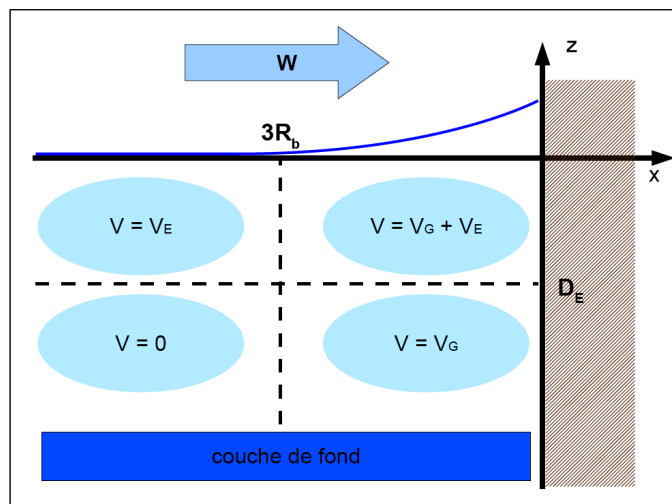
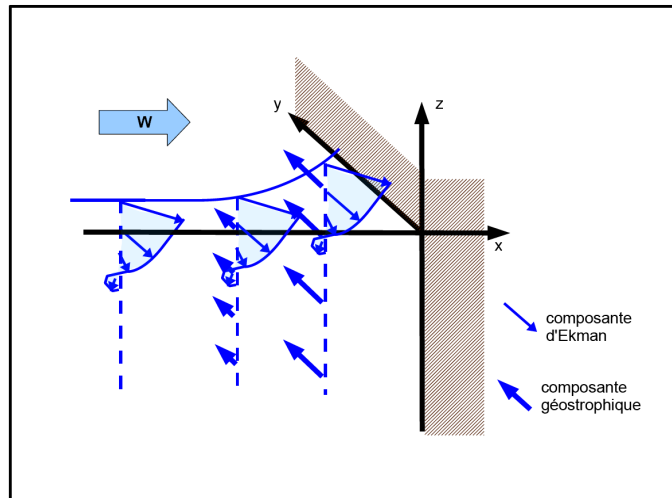
Enfin, on peut vérifier le calcul précédent du transport total en faisant la somme des transport des deux régimes

$$V_G = \int_{-h}^{\eta} \frac{g}{f} \frac{\partial \eta}{\partial x} dz \simeq \int_{-h}^0 \frac{g}{f} \left(\frac{F_x}{f c} e^{\frac{x}{R}} \frac{f}{c} \right) dz = \frac{g}{f} \frac{F_x}{g h} e^{\frac{x}{R}} h = \frac{F_x}{f} e^{\frac{x}{R}}$$

$$V_E = -\frac{F_x}{f} \quad (\text{voir section 2.9})$$

$$V = V_G + V_E = \frac{F_x}{f} e^{\frac{x}{R}} - \frac{F_x}{f}$$

Résumé schématique :



Exemple de calcul (voir script MATLAB en annexe) :

ici $R_b = 30 \text{ km}$,

donc à $x = R_b$ le transport d'Ekman est réduit du 36%,

à $x = 3R_b$ du 5% et

à $x = 7R_b$ seulement du 1%

NB: la couche d'Ekman n'existe pas tout près de la côte

NB: si $D = h$ alors il faut aussi compter la couche de fond.

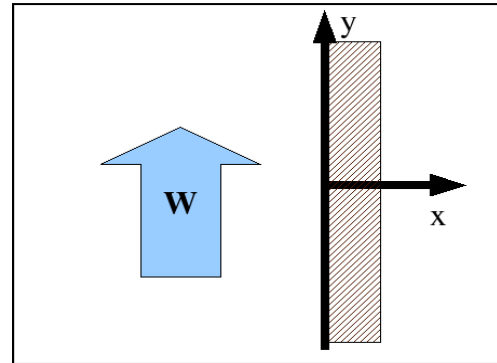
Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

4.3 Vent parallèle à la côte

La géométrie du problème implique que

$$F_x = 0$$

$$\partial_y * = 0$$



Si on se met sur un tout petit domaine tel que $f = 0$, dès la (2) on tire

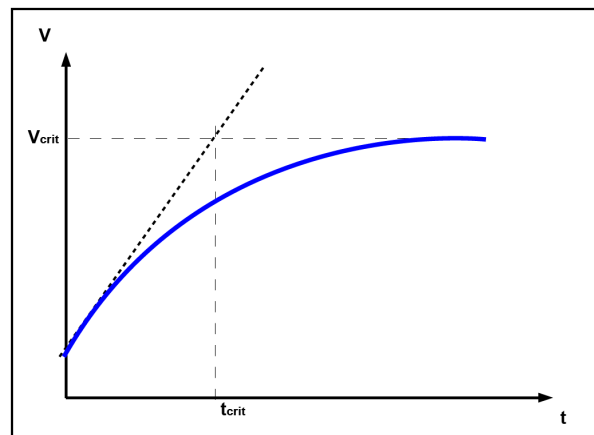
$$\frac{\partial V}{\partial t} = F_y \Rightarrow V = V_o + F_y t$$

Il y a donc une accélération constante du fluide par le vent et $V \rightarrow \infty$ s'il n'y a pas de frottement sur le fond.

Si par contre $B_y = C_D V^2$ alors on a

$$\partial_t V = F_y - C_D V^2$$

et le transport aura un certain valeur critique V_{crit} à ne pas dépasser.



Si par contre on retourne à considérer le frottement sur le fond négligeable en dehors de la couche limite et on se met sur un domaine assez grande tel que maintenant $f \neq 0$, alors on a que

$$\frac{\partial V}{\partial t} = F_y \Rightarrow V(x=0) = V_o + F_y t$$

est vérifiée seulement à la côte où $U(x=0)=0$. Cette fois il s'agit donc non pas d'une solution globale, mais d'une condition limite. En mettant cette condition dans la (1) on trouve

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = f \frac{F_y t}{c^2}$$

qui indique que le courant à la côte est dans une espèce d'équilibre géostrophique avec la pente de la surélévation.

La dépendance de la surélévation du temps mets en évidence que il ne peut pas exister une solution stationnaire $\forall x, y$.

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

Ces conditions sont satisfaites par l'équation (E), qui peut être attaquée avec la transformée de Laplace. Avec cette méthode de résolution on obtient

$$\eta = \frac{F_y}{f c} \left[f t e^{\frac{x}{R}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos(ft - \pi/4)}{\sqrt{f t}} + O(ft)^{-3/2} \right]$$

Si on étudie un régime lentement variable, on peut garder seulement la partie non ondulatoire de la solution

$$(H) \quad \eta = \frac{F_y}{f c} \left[f t e^{\frac{x}{R}} \right]$$

En mettant cette expression de la surélévation dans l'équation de continuité (3) avec $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$, on peut calculer la composante du transport normale à la côte

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{F_y}{f c} f e^{\frac{x}{R}} = -\frac{F_y}{c} e^{\frac{x}{R}}$$

$$U(x) = \int_0^x -\frac{F_y}{c} e^{\frac{\hat{x}}{R}} d\hat{x} = -\frac{F_y}{c} R \left[e^{\frac{\hat{x}}{R}} \right]_0^x = -\frac{F_y c}{f} \left(e^{\frac{x}{R}} - 1 \right) = -\frac{F_y}{f} e^{\frac{x}{R}} + \frac{F_y}{f}$$

NB: cette composante ne dépende pas de t , elle est donc (dans le cadre de nos approximations!) stationnaire, alors que la surélévation ne l'est jamais.

La composante perpendiculaire à la côte et sa condition limite à la côte sont calculées en mettant l'équation (H) dans l'équation (1)

$$V = \frac{c^2}{f} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{c^2}{f} \left(\frac{F_y}{f c} f t e^{\frac{x}{R}} \frac{1}{c} \right) = F_y t e^{\frac{x}{R}} \quad \text{et} \quad V(x=0) = -F_y t$$

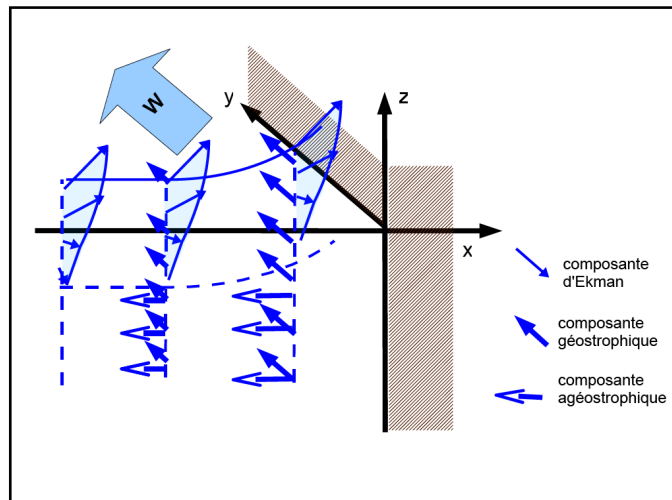
Cette composante constitue la contribution au transport de la vitesse géostrophique en équilibre avec la pente de la surélévation.

La partie du transport due à l'équilibre géostrophique peut être calculée comme auparavant avec la décomposition du problème, mais cette fois $u_G \neq 0$, le sous-système est donc

$$\left\{ \begin{array}{l} -f v_G = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial v_G}{\partial t} + f u_G = 0 \end{array} \right. \quad \text{qui a pour solution} \quad \left\{ \begin{array}{l} v_G = g \frac{F_y}{c^2} t e^{\frac{x}{R}} \\ u_G = -\frac{F_y}{f h} e^{\frac{x}{R}} \end{array} \right.$$

v_G est un jet côtier géostrophique, tandis que u_G est une composante agéostrophique d'ajustement qui est là pour contrecarrer le transport d'Ekman en surface.

Résumé schématique :



Évolution temporelle

$$\eta \equiv \eta(t) \propto t$$

$$V \equiv V(t) \propto t$$

dans le temps l'élévation augmente et le jet en surface aussi

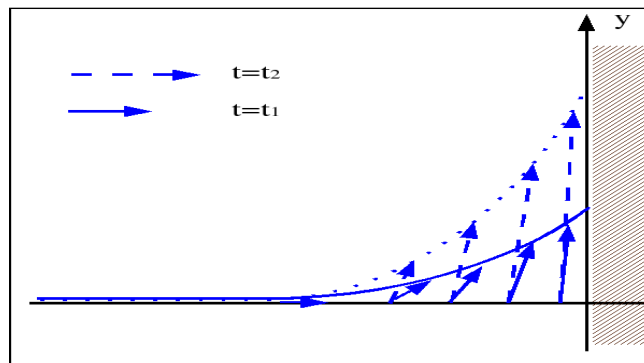
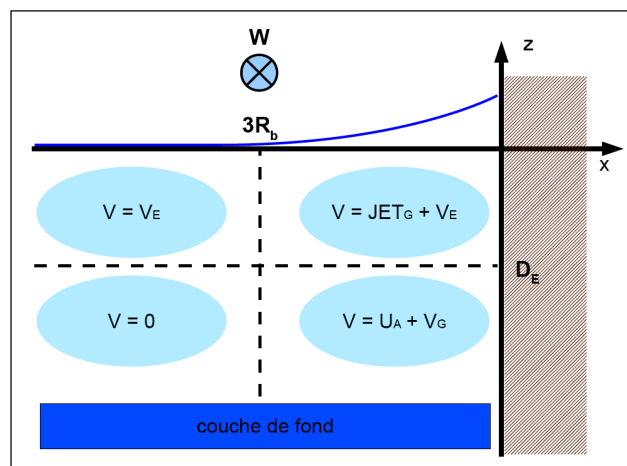


Schéma verticale

il y a plongées des eaux (downwelling)



Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

ANNEXE : Script MATLAB

```

clear;close all;
x=[-200:1:0]*1000;%[m]
ustar=0.05; %[m/s]
f=1.04*10e-4; %[s^{-1}]
g=9.8; %[m/s^2]
h=100; %[m]

c=sqrt(g*h);%[m/s]
Rb=c/f ; %[m]
eta=ustar^2/f/c.*exp(x./Rb);

V=ustar^2/f*(exp(x./Rb)-1);

figure(1);

subplot(2,1,1);hold on;box on;
plot(x./1000,eta)
plot([-Rb -Rb]./1000,[0 0.1], 'r:');

ylabel('eta [m]');
title(['u_* = ',num2str(ustar), '[m/s]
f = ',num2str(f), '[s^{-1}] g =
',num2str(g), '[ms^{-2}] h =
',num2str(h), '[m]']);

subplot(2,1,2);hold on;box on;
plot(x./1000,V)
plot([-Rb -Rb]./1000,[-3 0], 'r:');
ylabel('V [m^2 s^{-1}]');
xlabel('distance de la côte [km]');

V=ustar^2/f*(exp(-Rb/Rb))
V*100/2.4
V=ustar^2/f*(exp(-3*Rb/Rb))
V*100/2.4
V=ustar^2/f*(exp(-7*Rb/Rb))
V*100/2.4

```

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité FLuides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

***Textes d'examens
des années précédentes***

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité FLuides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

Examen Partiel

mercredi 5 novembre 2008

DURÉE : 2h

L'usage de tout document est interdit .

Chaque question vaut 4 points .

Les réponses doivent être le plus possible concises et précises .

- 1) Expliquer la linéarisation des équations horizontales de la quantité de mouvement .
- 2) Décrire l'équilibre dit "*wind setup*" .
- 3) Écrire et expliquer la solution analytique des équations du transport dans le cas de vent perpendiculaire à une cote rectiligne .
- 4) Décrire les ondes stationnaires .
- 5) Expliquer la différence entre ondes de Poincaré-Sverdrup et ondes de Kelvin .

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

Examen Partiel

mardi 10 novembre 2009

DURÉE : 2h

L'usage de tout document est interdit .

Chaque question vaut 4 points .

Les réponses doivent être le plus possible concises et précises .

- 1) Expliquer l'approximation hydrostatique et l'approximation de Boussinesq .
- 2) Décrire les oscillations d'inertie .
- 3) calculer la distance entre 2 nœuds consécutifs d'une onde stationnaire en terme de longueur d'onde .
- 4) Quels sont les limites du modèle d'onde unidimensionnel ?
- 5) Quels sont les effets sur la surélévation et le transport d'un vent qui souffle perpendiculaire à une cote rectiligne ?

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

Examen Partiel

mercredi 27 octobre 2010

DURÉE : 2h

L'usage de tout document est interdit .

Chaque question vaut 4 points .

Les réponses doivent être le plus possible concises et précises .

- 1) Écrire et expliquer l'équation de continuité et les approximations qu'on peut y apporter en zone côtière .
- 2) Comment peut-on modéliser les effets de la viscosité turbulente sur la circulation océanique en zone côtière ?
- 3) Décrire les ondes progressives .
- 4) Qu'est-ce qu'un point amphidromique ?
- 5) Dans quelles conditions de vent peut-on avoir formation d'un jet côtier ? Comment cela se produit ?

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB342 - POLU_MER 2010-2011	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---------------------------------	--

Examen Partiel

mercredi 1 décembre 2010

DURÉE : 2h

*L'usage de tout document est interdit .
Chaque question vaut 4 points .
Les réponses doivent être le plus possible concises et précises .*

- 1) Expliquer la linéarisation des équations horizontales de la quantité de mouvement .
- 2) Décrire les oscillations d'inertie .
- 3) Expliquer la différence entre ondes de Poincaré-Sverdrup et ondes de Kelvin .
- 4) Qu'est-ce qu'un point amphidromique ?
- 5) Écrire et expliquer la solution analytique des équations du transport dans le cas de vent perpendiculaire à une cote rectiligne .