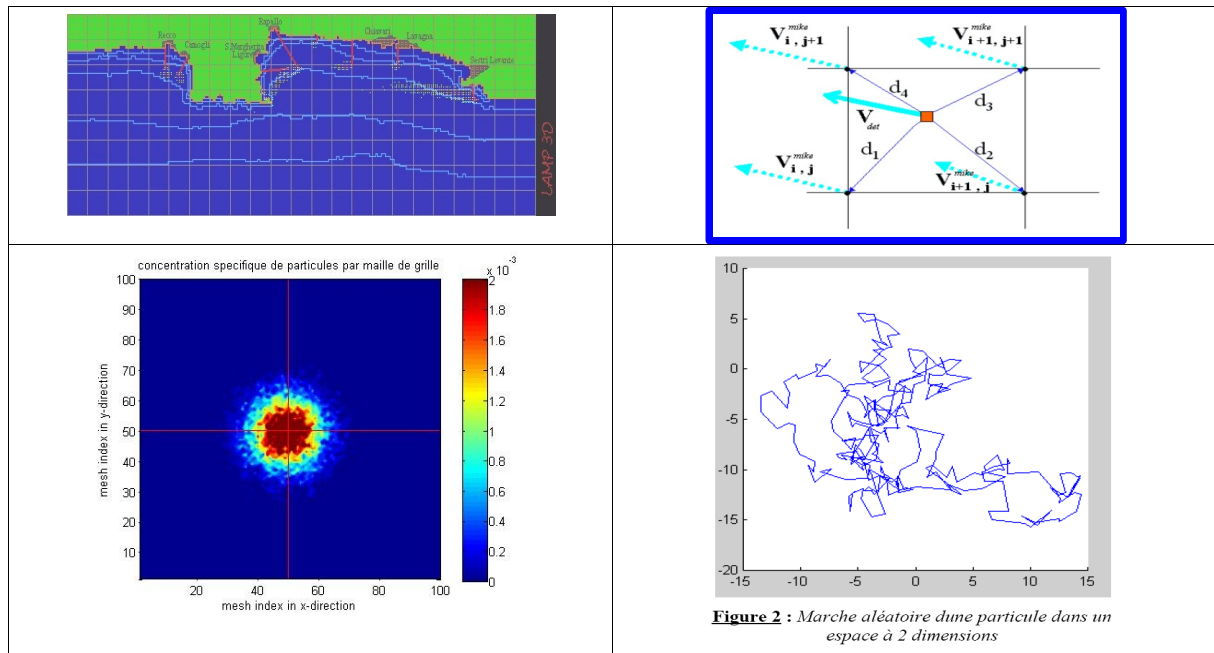


Andrea M. Doglioli

Notes du Cours

## Modèles à Particules Lagrangiennes



# *BROUILLON*

dernière révision 2 décembre 2011

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB344 - POLU_MER 2010-2011 Andrea M. Doglioli	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---	--

## Remerciements

Je désire remercier tous mes étudiants et mes collègues pour leur commentaires, questions, corrections et suggestions.

En particulier ces polycopies bénéficient des contributions de J. Bouffard, P. De Gaetano, G. Ginoux, R. Festa, F. Mattioli, F. Nencioli, Z. Qiu, D. Sacchetti .

Doglioli, A.M. (2010), *Notes du Cours Modèles à Particules Lagrangiennes*, Centre de Océanologie de Marseille, Université de la Méditerranée, Marseille, France.

[http://www.com.univ-mrs.fr/~doglioli/Doglioli\\_NotesCours\\_ParticulesLagrangiennes.pdf](http://www.com.univ-mrs.fr/~doglioli/Doglioli_NotesCours_ParticulesLagrangiennes.pdf)

Ce matériel est distribué selon la licence Créative Commons [<http://creativecommons.org/>]

Vous êtes libres :

- \* de reproduire, distribuer et communiquer cette création au public
- \* de modifier cette création

Selon les conditions suivantes :

- \* Paternité. Vous devez citer le nom de l'auteur original de la manière indiquée par l'auteur de l'oeuvre ou le titulaire des droits qui vous confère cette autorisation (mais pas d'une manière qui suggérerait qu'ils vous soutiennent ou approuvent votre utilisation de l'oeuvre).
- \* Pas d'Utilisation Commerciale. Vous n'avez pas le droit d'utiliser cette création à des fins commerciales.
- \* Partage des Conditions Initiales à l'Identique. Si vous modifiez, transformez ou adaptez cette création, vous n'avez le droit de distribuer la création qui en résulte que sous un contrat identique à celui-ci.



Cet ouvrage a été réalisé avec le logiciel libre OpenOffice <http://www.openoffice.org>

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB344 - POLU_MER 2010-2011 Andrea M. Doglioli	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---	--

## Table des matières

### 1 Introduction

Joseph Louis, comte de Lagrange et Leonhard Paul Euler  
Exemples de mesure Eulérienne et Lagrangienne  
Exemples de modèle Eulérien et Lagrangien  
Les processus d'advection et de dispersion  
La diffusion et le mouvement Brownien

### 2. Fondements

2.1 Théorème de conservation  
2.2 La turbulence comme un processus stochastique  
2.3 Approche Eulérienne et Lagrangienne dans la résolution de l'équation de conservation d'un soluté  
2.4 Modèles à particules lagrangiennes

### 3 Techniques

calcul des trajectoires, calcul du transport, coefficients de dispersion et turbulence, modèle “*random walk*” et calcul de la dispersion, introduction aux modèles autorégressifs d'ordre supérieur  
Modèles de régression du premier ordre  
Modèles autoregressive d'ordre zéro ou « random walk »  
Implémentation d'un modèle « random walk »  
Implementation d'un modèle d'advection-diffusion  
Applications Océanographiques  
échanges, temps de résidences, transport

### 4 Modélisation couplée physique/biogéochimie

dispersion de polluants, de sédiments et de sels nutritifs, modèles IBM, dynamique du zooplankton, effets de la micro-turbulence

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB344 - POLU_MER 2010-2011 Andrea M. Doglioli	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---	--

## Bibliographie et Liens utiles

Pizzigalli, C., V. Rupolo, E. Lombardi, and B. Blanke (2007), Seasonal probability dispersion maps in the Mediterranean Sea obtained from the Mediterranean Forecasting System Eulerian velocity fields, *J. Geophys. Res.*, 112, C05012, doi:10.1029/2006JC003870.

Griffa grl2008

Griffa, A. 1996. Applications of stochastic particle models to oceanographic problems, *in* Stochastic Modeling in Physical Oceanography, P. M. R. Adler and B. Rozovskii, eds., Birkhäuser Verlag, 114–140.

Gaspar, Grigoris, Lefevre, 1990, A Simple Eddy Kinetic Energy Model for Simulations of the Oceanic Vertical Mixing' Tests at Station Papa and Long-Term Upper Ocean Study Site, JGR

Monin A S and Ozmidov R V 1981 *Ocean turbulence* (Leningrad:Gidrometeoizdat)

Qiu, Z.F., Doglioli, A.M., Hu, Z.Y., Marsaleix, P., Carlotti, F. (2009), The influence of hydrodynamic processes on zooplankton transport and distributions in the North Western Mediterranean: estimates from a Lagrangian model. *J. Marine Syst.*, accepted.

Batchelder, H.P., Edwards, C.A., Powell T.M., 2002. Individualbased models of copepod populations in coastal upwelling regions: implications of physiologically and environmentally influenced diel vertical migration on demographic success and nearshore retention. *Progress in Oceanography*. 53, 307333

Bennett, J.R., Clites, A.H., 1987. Accuracy of trajectory calculation in a finitedifference circulation model. *J. comp. Phys.* 68(2), 272282.

Darmofal, D.L., Haimes, R., 1996. An analysis of 3D particle path integration algorithms. *Journal of computational physics*. 123, 182195.

Garcia, R.M., Flores, H.T., 1999. Computer Modeling of Oil Spill Trajectories With a High Accuracy Method. *Spill Science and Technology bulletin*. 5(5/6), 323330

Oliveira, L.A., Costa V.A.F., Baliga, B.R., 2002. A lagrangianEulerian model of particle dispersion in a turbulent plane mixing layer. *International Journal for numerical methods in fluids*. 40, 639653.

Parada, C., Van der Lingen C.D., Mullon, C., Penven, P., 2003. Modelling the effect of buoyancy on the transport of anchovy (*Engraulis capensis*) eggs from spawning to nursery grounds in the southern Benguela: an IBM approach. *Fisheries Oceanography*. 12(3), 170184

Tittensor, D.P., Deyoung, B., Tang, C.L., 2003. Modelling the distribution, sustainability and diapause emergence timing of the copepod *Calanus finmarchicus* in the Labrador Sea. *Fisheries Oceanography*. 12(4/5), 299316.

Visser, A.W., 1997. Using random walk models to simulate the vertical distribution of particles in a turbulent water column. *Marine Ecology Progress Series*. 158, 275281.

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB344 - POLU_MER 2010-2011 Andrea M. Doglioli	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---	--

## 1. Introduction

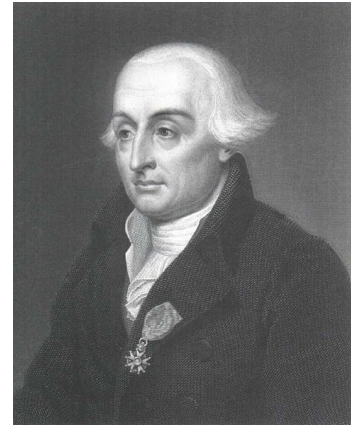
**Joseph Louis, comte de Lagrange** (en italien Giuseppe Lodovico Lagrangia), né à Turin le 25 janvier 1736 et mort à Paris le 10 avril 1813, est un mathématicien, mécanicien et astronome. Né en Italie, mais de famille française par son père, il passa 30 ans dans le Piémont, puis 21 ans à Berlin et le restant de ses jours à Paris.

Nommé très jeune professeur à l'école d'artillerie de Turin en 1755, il y fonde en 1758 l'Académie de Turin qui publie ses premiers travaux. Il est admis à l'Académie de Berlin par Euler, à qui il succède comme président. Transféré à Paris, où il avait fait publier sa Mécanique analytique (1787), peu avant la Révolution française, il doit à son génie d'échapper aux mesures de répression contre les étrangers. Des arrêtés spéciaux du Comité de salut public lui permettent de continuer d'exercer ses fonctions. Devenu associé étranger de l'Académie des sciences en 1772, il est directeur de l'Académie en 1788 et membre de la section de mathématiques en 1795.

Il est nommé sénateur au Sénat conservateur le 4 nivôse an VIII (25 décembre 1799). Avec Monge et Laplace, il fait partie des savants nommés à siéger dans cette assemblée.

Surtout connu pour avoir introduit la méthode analytique en géométrie, il n'en a pas moins étudié toutes les branches des mathématiques et a laissé d'importants travaux tant en géométrie qu'en trigonométrie et en mécanique.

Il est inhumé au Panthéon de Paris.



[http://fr.wikipedia.org/wiki/Joseph-Louis\\_Lagrange](http://fr.wikipedia.org/wiki/Joseph-Louis_Lagrange)

**Leonhard Paul Euler**, né le 15 avril 1707 à Bâle et mort le 18 septembre 1783 à Saint-Pétersbourg, est un mathématicien et physicien suisse, qui passa la plus grande partie de sa vie en Russie et en Allemagne.

Euler fit d'importantes découvertes dans des domaines aussi variés que le calcul infinitésimal et la théorie des graphes. Il introduisit également une grande partie de la terminologie et de la notation des mathématiques modernes, en particulier pour l'analyse mathématique, comme pour la notion d'une fonction mathématique. Il est également connu pour ses travaux en mécanique, en dynamique des fluides, en optique et en astronomie.

Euler est considéré comme un éminent mathématicien du XVIIIe siècle et l'un des plus grands de tous les temps. Il est aussi l'un des plus prolifiques, et une déclaration attribuée à Pierre-Simon Laplace exprime l'influence d'Euler sur les mathématiques : « Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous ».

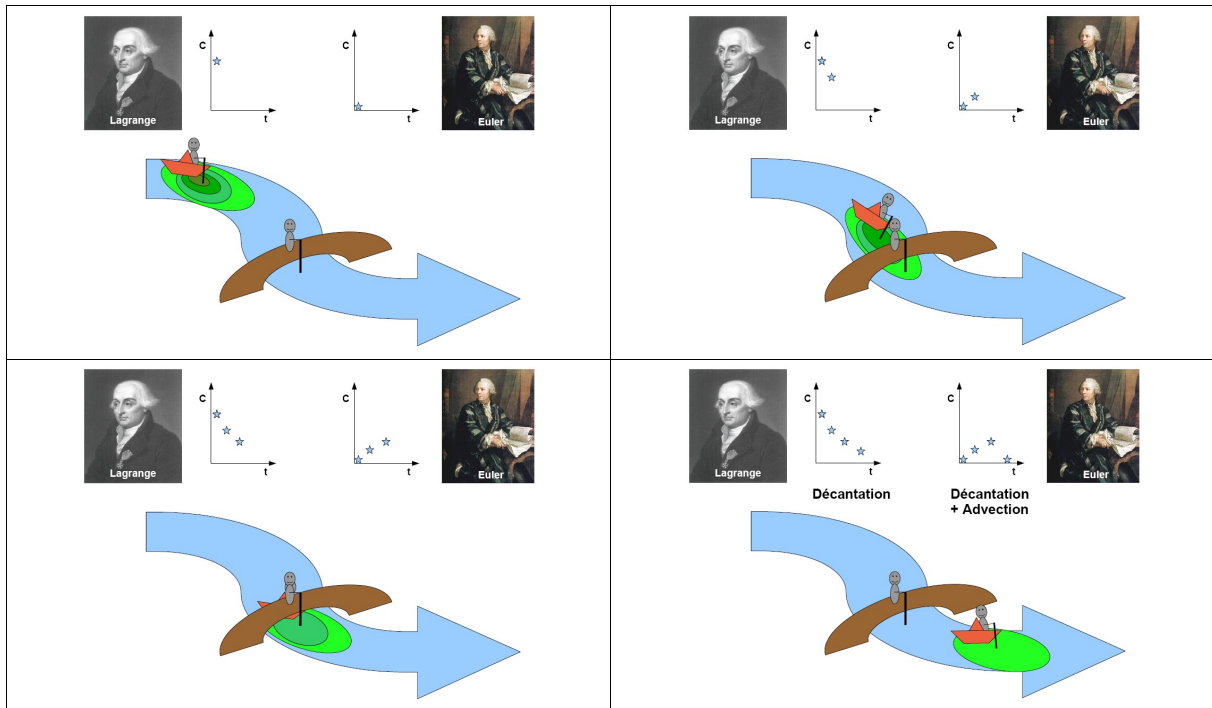


[http://fr.wikipedia.org/wiki/Leonhard\\_Euler](http://fr.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler)

## Approches Eulérienne et Lagrangienne

Schéma de comparaison entre approche Lagrangienne et Eulérienne dans la mesure de la concentration d'un traceur non-conservative.

$$\frac{DC}{Dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla C = \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z}$$

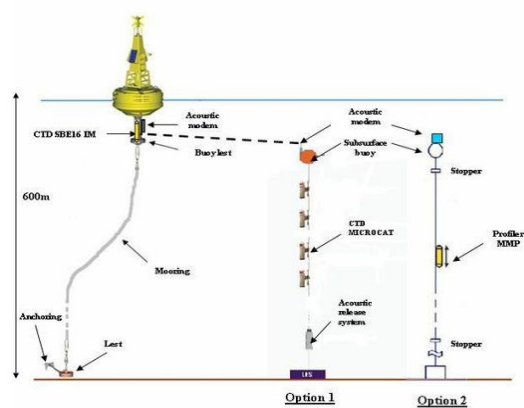


## Exemples de mesures Eulériennes et Lagrangiennes.

La plateforme automatisée autonome MOLA

<http://observation.obs-banyuls.fr/spip.php?article106>

Il s'agit d'une plate-forme de type bouée (MOBILIS modèle Jet) d'un diamètre de 3m et de 5.5m de hauteur environ. Une structure de type pyramidale y est intégrée pour supporter toutes les mesures externes (une station météorologique et un GPS), la signalisation, l'alimentation (panneaux solaires et batteries), le cerveau central électronique et les systèmes de communication. Une CTD SBE16+ sera placée en dessous des flotteurs sur le mat central pour les données de salinité, température de surface, fluorescence et turbidité, ainsi qu'une optode à oxygène et un capteur de GTD.



Pour simplifier les opérations de relevé et de maintenance sur les capteurs, une seconde ligne de mouillage sera déployée à proximité de la plateforme mère qui comportera l'ensemble de capteurs suivants : CTD, turbidité, fluorescence, O2d et courantomètre ADCP. Cette seconde ligne sera munie d'un largeur acoustique pour la récupération et la maintenance et d'un système de modem acoustique pour dialoguer avec la plateforme mère. Le but de cette seconde ligne de mouillage étant de réaliser des profils sur la colonne d'eau. A terme, un autre objectif est de compléter ce dispositif par un observatoire du milieu profond au même endroit et de se servir de la plateforme MOLA comme un champ d'investigation et d'intégration de capteurs biologiques.

## Bouées dérivantes

Ce système est un mouillage dérivant constitué d'une bouée de surface reliée à une ancre flottante par un câble (orin, câblot). Il doit suivre avec le plus de précision possible la masse d'eau dans laquelle l'ancre flottante est immergée. Cet ensemble est couramment appelé surdrift pour « surface drifter ».

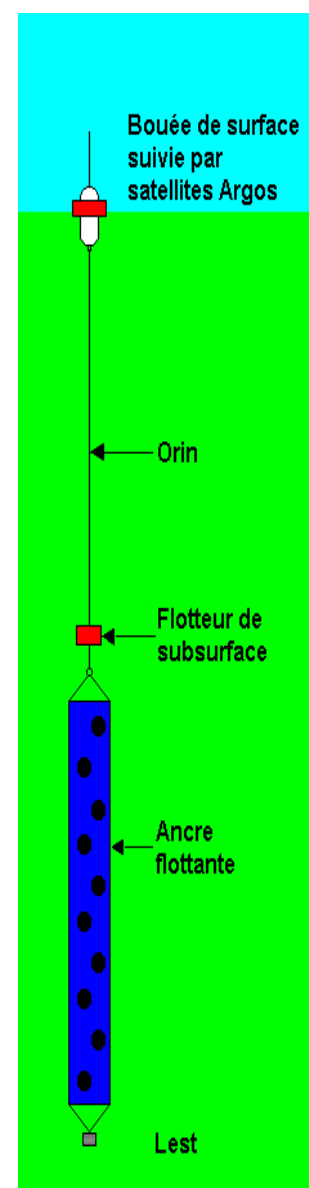
La bouée est de faible dimension afin d'offrir une traînée minimum et une faible prise au vent. Elle est positionnée par satellites Argos ou par GPS. Dans ce dernier cas, les positions sont stockées pendant plusieurs jours dans une mémoire interne à la bouée et elles sont ensuite transmises par le système Argos, Imersat ou autre. L'avantage de cette méthode est de diminuer le coût d'utilisation des satellites tout en obtenant plus souvent et à des périodes régulières des positions plus précises.

L'orin est de faible section, il ne fait que quelques millimètres de diamètre afin d'avoir une traînée parasite minimum. Comme il doit être suffisamment résistant il est généralement en Aramide (fibre très résistante). Il maintient l'ancre flottante à une immersion constante qui peut être de quelques dizaines de mètres à un millier de mètres.

L'ancre flottante doit offrir un maximum de traînée puisqu'elle doit suivre la masse d'eau à étudier. Sa traînée doit être au moins 30 fois plus grande que les autres éléments du mouillage. Les formes d'ancres les plus diverses sont utilisées mais les plus courantes sont cylindriques (Holey sock) ou en "diamant" (Tristar). Ces dernières sont constituées de 3 panneaux carrés en tissus montés à 90° les un des autres en se croisant suivant leurs diagonales. La forme des panneaux est maintenue par un système de tiges.

Un lest est fixé à la base de l'ancre flottante afin de maintenir l'ensemble vertical.

<http://www.univ-brest.fr/lpo/instrumentation/16.htm>



446 / David L. Mackas, William R. Crawford and Pearn P. Niiler

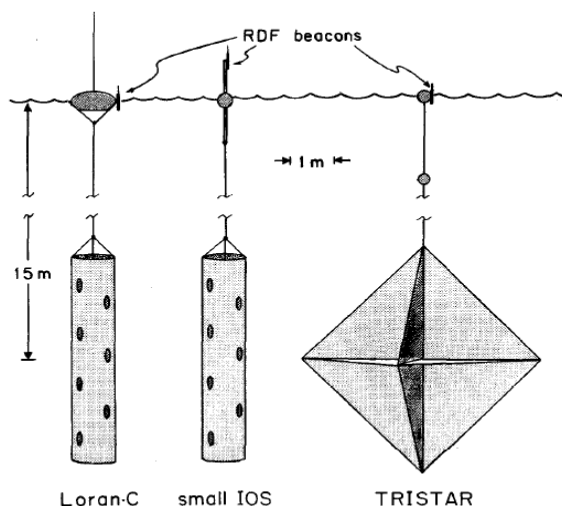


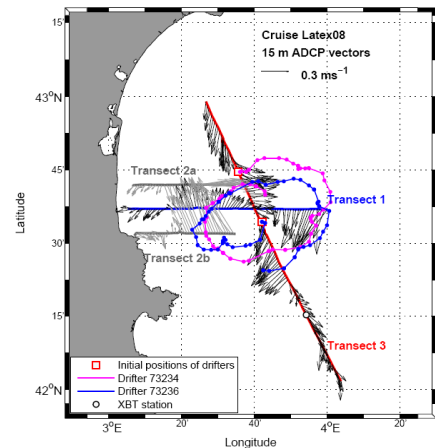
Fig.1 Relative size of float and drogue elements for the three drifter designs compared in this study. All drogues were centred at 15-m depth. Float : drogue frontal area ratios ranged from about 10 : 1 for the Loran drifter to about 50 : 1 for the TRISTAR and the IOS small drifter. The TRISTAR uses two flotation spheres, with most of the buoyancy provided by the deeper float, allowing the tether to the surface (ARGOS transmitter) float to be slack much of the time and thus transmit less surface wave energy to the drogue.

Superposition des vecteurs de vitesse du courant mesurés par l'ADCP (*Acoustic Doppler Currentmeter Profiler*) monté dessous la coque du bateau du CNRS Tethys II et les trajectoires de deux bouée dérivantes.

Mesures effectuée pendant la campagne LATEX 2008 :

les vecteurs sont dessinés tout les 4 minutes sur trois transepts: Transept 1 (Sept. 1), Transept 2a et 2b (Sept. 3), Transept 3 (Sept. 5);

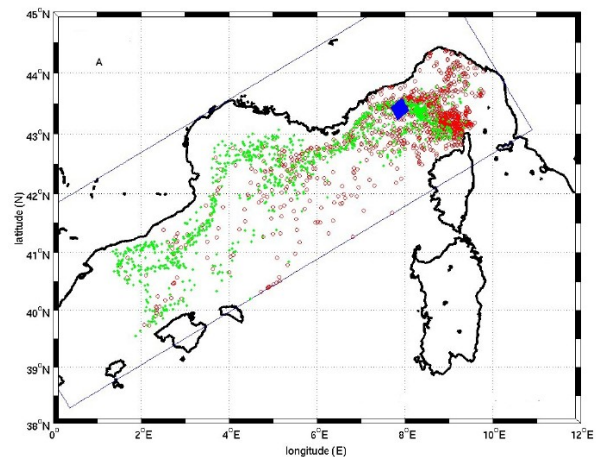
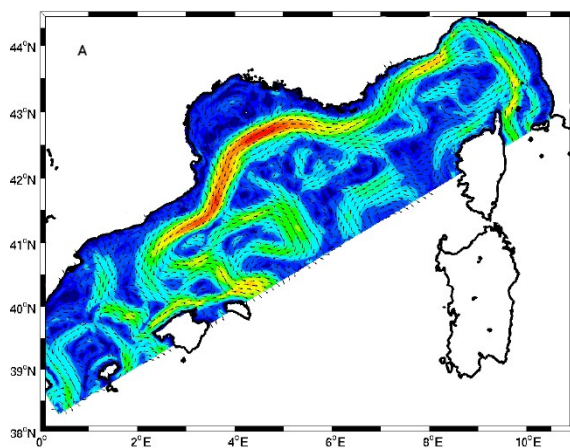
les lignes des trajectoires sont pointillés tous les heures (Sept. 5 – 11).



Tirée de Hu et al., 2009

### Exemples de modèle Eulérien et Lagrangien

Sortie d'un modèle de circulation Eulérien et d'une simulation Lagrangienne conjointe.

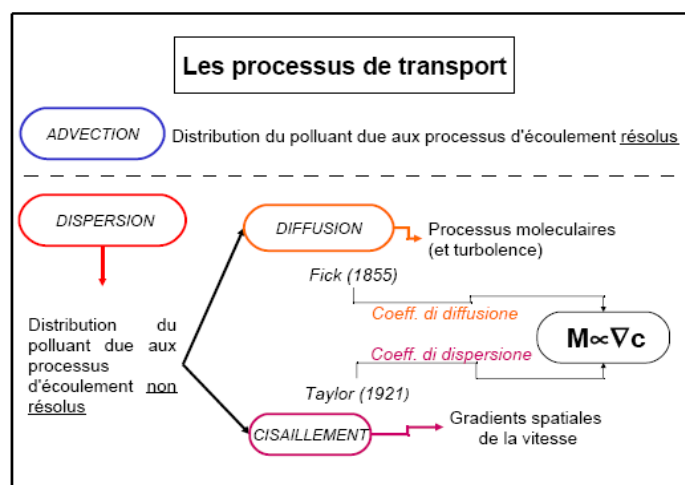


Application de modèles à particules lagrangiennes: dispersion polluant organique et inorganique, iceberg, oil spills, radiopolluant.

### Les processus d'advection et de dispersion

Le terme dispersion indique le processus qui fait que une certaine substance, immergée dans un fluide se distribuis à son interieur . L'advection est le transport par action des courants deterministes (moyens dans le sens de Reynolds), tandis que la dispersion depend de processus aléatoires (diffusion) et aussi du cisaillement du courant .

Fick (1855) et Taylor (1921) ont paramétrisé les flux de masse des solutés du aux mouvement moléculaires et turbulents, en assumant que ces flus soient proportionels aux gradients de concentration . Les constantes de proportionalité ont été appellées coefficients de diffusion moléculaire et turbulente . En suite Taylor a étendu cette approximation aussi au flux du aux effets combinés de la diffusion et du cisaillement, en introduisant les coefficients de dispersion .





Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB344 - POLU_MER 2010-2011 Andrea M. Doglioli	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---	--

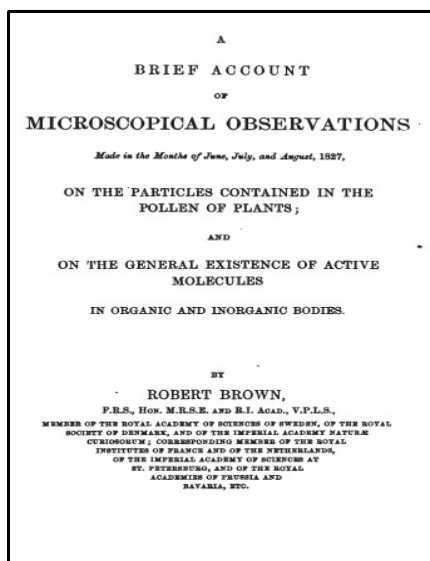
## La diffusion et le mouvement Brownien

Avec le terme diffusion on veut indiquer le processus qui se passe quand une substance immergée dans un liquide se distribue dans tout le milieu. Le même processus arrive aussi à l'intérieur du fluide même pour les propriétés tel que la densité ou la salinité, si la distribution n'est pas uniforme. En générale dans ces processus se redistribue d'un point à l'autre de l'espace de la matière, de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvement : ces trois processus ont beaucoup de similitude et sont très interconnectés entre eux. La diffusion est reductible au mouvement Brownien, du nom de Robert Brown qui décrit ce phénomène pour la première fois au début du 19<sup>ème</sup> siècle.

**Robert Brown**, né le 21 décembre 1773 à Montrose (Angus) et mort le 10 juin 1858 à Londres, est un botaniste écossais.

Il est paradoxalement connu pour une découverte non « botanique » : le mouvement brownien. Il est l'un des premiers à utiliser couramment un microscope dans son métier.

En 1827, il observe le pollen du *Clarkia pulchella* et constate au microscope la présence de très petites particules bougeant dans tous les sens. Il renouvelle cette observation chez d'autres plantes, croyant dans un premier temps en la manifestation d'un « fluide vital ». L'observation du même phénomène sur des particules inorganiques le fait changer d'avis.



<http://books.google.com/books?id=KwUAAAAYAAJ>

Il publie ses résultats en 1828 dans un opusculum reconnaissant qu'il avait été précédé par d'autres savants dans la constatation de ces mouvements erratiques. L'explication de ceux-ci ne sera donnée que bien plus tard par la théorie atomiste.

En observant des grains de pollens au microscope, il remarqua de très petites particules agitées d'un mouvement irrégulier, dans le fluide situé à l'intérieur des grains. Il attribua alors ce phénomène au domaine de la biologie. Plus tard il observa au microscope une goutte d'eau emprisonnée dans un morceau de quartz, n'ayant ainsi jamais pu être contaminé par des grains de pollens ou de spores. Il constata de nouveau que de petites particules étaient animées d'un mouvement chaotique et incessant. Il revint alors sur ses conclusions précédentes, et attribua ce mouvement, à juste titre, de nature physique et non biologique, sans pouvoir l'expliquer.

Plus tard, Albert Einstein considéra alors que le mouvement des grains de pollen pouvait se ramener à une marche au hasard : soumis aux chocs incessants des molécules d'eau, une grosse particule produit de petits déplacements de direction aléatoire (toutes équiprobables) et de longueur aléatoire. Einstein montre que la mesure de certaines propriétés de particules en mouvement brownien permet de déterminer plusieurs constantes physiques importantes, comme la masse des atomes, ou encore le nombre d'Avogadro. Beaucoup de mathématiciens se sont ensuite intéressés à ce phénomène.

Aujourd'hui, le mouvement brownien se retrouve partout : il fournit la base de la compréhension de tous les phénomènes diffusifs présents dans les systèmes chimiques et biologiques, mais aussi en économie. En 1900, Louis Bachelier avait développé une théorie des fluctuations boursières à partir d'une approche de marche aléatoire. Ces approches ont été reprises et enrichies dans les années 1970 et le mouvement brownien occupe désormais une place centrale dans les mathématiques financières.

Le modèle de la marche au hasard (représentant le mouvement brownien) peut expliquer le processus de diffusion. La diffusion est régie par deux types de diffusion distincte. (1) l'Auto-Diffusion : régie uniquement par le mouvement d'une espèce sous le seul effet du mouvement brownien. (2) S'y

superpose, la diffusion due à une force (électrostatique, chimique, physique) ou encore due à un gradient de température et/ou de concentration.

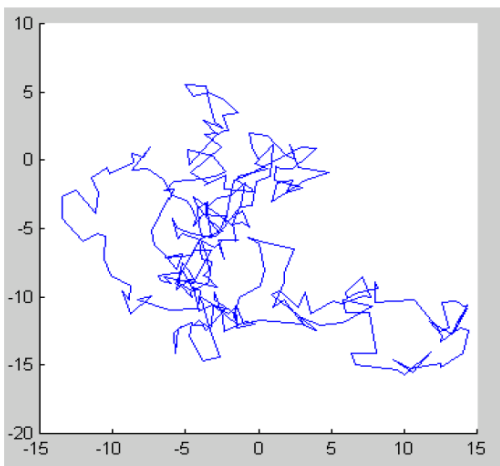
Un simple modèle à particules Lagrangiennes permet par exemple de modéliser l'évolution spatiale et temporelle d'une goutte d'encre dans un verre d'eau et d'en observer son Auto-Diffusion. Cela permet aussi de réfléchir sur comment le désordre microscopique génère un ordre macroscopique.



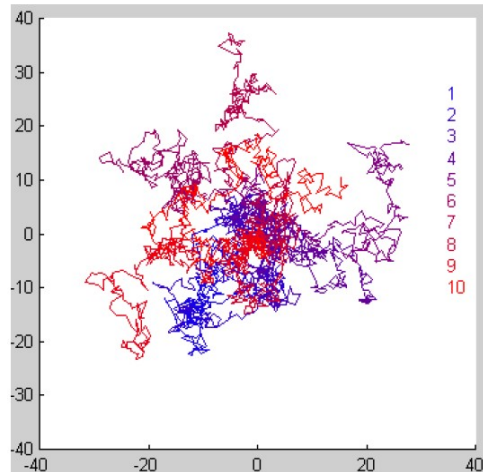
Yellow food coloring diffusing through water. The glass on the left contains hot water, while the glass on the right contains cold water. The food coloring was added to the cold water slightly before the coloring was added to the hot water, yet after a few seconds it has diffused more thoroughly through the hot water. The frames are roughly 1 second apart (so the animation is roughly 2x real-time).

en>User:CTho made this. It is available (along with the source images) at <http://ctho.ath.cx/pics/new/2006-09-24/> - It has been released into the public domain. [1]

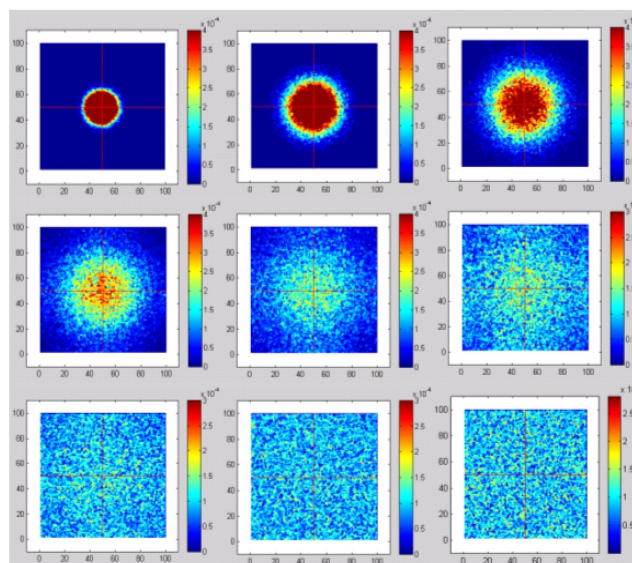
<http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Diffusion.gif>



**Figure 2 :** Marche aléatoire d'une particule dans un espace à 2 dimensions



**Figure 3 :** Marche aléatoire de 10 particules indépendantes



**Figure 5 :** Diffusion d'une goutte d'encre dans de l'eau

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB344 - POLU_MER 2010-2011 Andrea M. Doglioli	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---	--

## 2. Fondements

### 2.1 Théorème de conservation

La loi de conservation d'une quantité générique de densité  $\psi$  s'écrit

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \mathbf{u}) = 0,$$

un cas particulier de loi de conservation est l'équation de continuité dans laquelle est la masse volumique à se conserver

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0,$$

Une forme plus générale est la suivante

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \mathbf{u}) = \gamma.$$

dans laquelle on tient en compte aussi la présence éventuelle de puits et/ou sources de  $\psi$ , qui sont représentés par le terme  $\gamma$ . Ce terme peut être décomposé en deux autres termes, une contribution non divergente  $\xi$  et la divergence d'un certain vecteur  $-\chi$

$$\gamma = \xi - \nabla \cdot \chi.$$

pour obtenir

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \mathbf{u}) + \nabla \cdot \chi = \xi,$$

qui est la forme la plus générale pour une équation de conservation.

#### Théorème de flux-divergence

[http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème\\_de\\_flux-divergence](http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_flux-divergence)

En [analyse vectorielle](#), le **théorème de flux-divergence**, appelé aussi **théorème de Green-Ostrogradski**, affirme l'égalité entre l'intégrale de la [divergence](#) d'un [champ vectoriel](#) sur un volume dans  $\mathbb{R}^3$  et le [flux](#) de ce champ à travers la [frontière](#) du volume (qui est une [intégrale de surface](#)).

L'égalité est la suivante :

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

où  $V$  est le volume de référence et  $S$  la surface qui entoure ce volume

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB344 - POLU_MER 2010-2011 Andrea M. Doglioli	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---	--

En intégrant maintenant cette équation sur un volume fini de référence et en appliquant le théorème de flux-divergence, on obtient un forme intégrale du théorème de conservation

$$\frac{d}{dt} \int_V \psi dV + \oint_S \psi \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} + \oint_S \chi \cdot d\mathbf{S} = \int_V \xi dV ,$$

Cette formulation nous permet de mettre en évidence que la variation temporelle locale de la propriété  $\psi$  dans le volume  $V$  (premier terme) est liée à la somme de trois termes ;

- un terme de transport  $\psi \mathbf{v}$  , lié à l'entraînement de la propriété par le fluide en mouvement ;
- un terme de flux, i.e. des effets des actions de surface, liés à  $\chi$  qui génère une perte ou une augmentation de quantité dans des volumes finis d'espace, mais, dans le cas que  $\chi=0$  sur l'enveloppe du fluide, non pas forcément dans l'espace occupé complètement par le fluide . Il s'agit donc d'un terme de redistribution de la propriété à l'intérieur du fluide ou bien de distribution a cause d'actions qui cherchent d'introduire ou exporter à travers de l'enveloppe .
- un terme de dissipation ou de génération, i.e. effets des actions de volume, liés à  $\xi$  qui représente la croissance ou la diminution de  $\psi$  dues à des agents distribués dans l'espace, qui pourraient être aussi nul complexivement, bien que dans la plus grande partie de cas ce terme represente le fait que la propriété  $\psi$  n'est pas conservée, et en tout cas n'est jamais conservé localement .

EXEMPLE: estimation du la production nette à l'intérieur d'un tourbillon océanique (projet LATEX)  
NB : dans ces cas les coefficients de diffusion sont ceux turbulents (voir ci-dessous) et non pas ceux moléculaires.

### Mass budget for a Lagrangian control volume

$$\frac{d}{dt} \int_V \psi dV + \oint_S \psi \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} + \oint_S \chi \cdot d\mathbf{S} = \int_V \xi dV$$

where  $\psi = O_2, C, SF_6$

Temporal  
variation

Advection  
(to be neglected)

Boundary exchanges  
horiz+vert

Sources & sinks  
(null for  $SF_6$ )

This method makes possible to close the biogeochemical budgets

#### Net Community Production $\Delta t=5-6$ days

$$NCP_{O_2} = \Delta O_2 + F_{sea-air} + F_{hor} + F_{ver}$$

$$NCP_{DIC} = \Delta DIC + F_{sea-air} + F_{hor} + F_{ver}$$

& comparaison with incubations

NB :

$SF_6$  Sulfur  
hexafluoride

#### Carbon export

$$C_{exp} = NCP_{DIC} - \Delta POC - \Delta DOC$$

in situ                      bottle (in situ)

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB344 - POLU_MER 2010-2011 Andrea M. Doglioli	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---	--

On peut maintenant prendre la propriété  $\psi$  comme

$$\psi = \rho S$$

avec  $S$  salinité de l'eau de mer mesurée en part per mille.

En appliquant la loi de la conservation de la masse et la définition de dérivée lagrangienne on a que

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho S \mathbf{u}) &= \rho \frac{\partial S}{\partial t} + S \frac{\partial \rho}{\partial t} + S \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla S = \\ &= \rho \left( \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla S \right) + S \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right) = \rho \frac{dS}{dt}. \end{aligned}$$

L'équation de conservation de la salinité devienne alors

$$\rho \frac{dS}{dt} + \nabla \cdot \boldsymbol{\chi} = \xi$$

En générale on fait l'hypothèse que le flux d'une propriété est proportionnel en module et dirigé en sens opposé au gradient de la propriété, i.e.

$$\boldsymbol{\chi} = -k_s \nabla S$$

avec  $k_s$  une constante de proportionalité. L'équation de conservation devient alors

$$\rho \frac{dS}{dt} = \nabla \cdot (k_s \nabla S) + \xi$$

et puisque on peut aussi considérer la variation spatiale de  $k_s$  négligeable,

$$\frac{dS}{dt} = \kappa_s \nabla^2 S + \frac{\xi}{\rho}$$

avec  $\kappa_s = \frac{k_s}{\rho}$  coefficient de diffusivité moléculaire.

Les processus de diffusion moléculaire ont des échelles temporelles très longues par rapport à celle du mouvement et de la diffusion turbulente et dans la suite on les négligera, mais si le mouvement est absent alors sont les seuls responsables de la redistribution d'une certaine propriété. En absence de sources/puits, la diffusion moléculaire, en accord avec le second principe de la thermodynamique, agit pour réduire les gradients du champ.

Il est utile pour la suite d'étudier le cas de diffusion moléculaire dans un fluide à repos.

Dans ces conditions on a

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \kappa_s \nabla^2 S + \frac{\xi}{\rho}.$$

Si  $\xi = 0$  une solution possible est la suivante

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(4\pi\kappa_s t)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4\pi\kappa_s t}},$$

avec  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ . Cette solution représente une gaussienne tridimensionnelle centrée dans l'origine et avec variance  $\sigma^2 = 2\kappa_s t$ .

À l'état initial la propriété  $S$  est initialement toute concentrée dans un point (l'origine des axes pour simplicité), en suite la concentration de la propriété  $S$ , s'étale avec une vitesse  $\sqrt{\frac{2\kappa_s}{t}}$ . Le rayon de

la région occupée par le fluide augmente avec la racine carrée du temps tandis que la vitesse d'expansion diminue avec la même quantité; en générale pour des valeurs réalistes du coefficient de diffusivité, le processus est très très lent.

En mer le coefficient de diffusion du sel  $\kappa_s$  vaut environ  $1.5 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ . Cette valeur nous dit que une

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB344 - POLU_MER 2010-2011 Andrea M. Doglioli	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---	--

« tache » d'eau salée d'un metre carré s'élargira par diffusion moléculaire d'un demi metre carré en 10 000 jours (1 jour = 86400 s  $\sim 10^5$  s)! Le coefficient de diffusion thermique  $\kappa_T$  vaut environ  $1.5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ . Cela comporte que la diffusion de la chaleur soit environ 100 fois plus rapide que celle du sel, restant toutefois très lente. Le coefficient de viscosité cinématique (i.e. de diffusion moléculaire de la quantité de mouvement) à la température de 20 °C et à une salinité de 39 ‰ vaut  $1.0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ .

Cette lenteur des processus de transport permet l'utilisation des traceurs pour marquer le champ de mouvement (e.g. une veine de courant).

En plus cette solution 3D homogène peut être décomposée dans le produit de trois solution unidimensionnelles :

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(4\pi\kappa_s t)^{3/2}} \left( e^{-\frac{x^2}{(4\pi\kappa_s t)}} \right) \left( e^{-\frac{y^2}{(4\pi\kappa_s t)}} \right) \left( e^{-\frac{z^2}{(4\pi\kappa_s t)}} \right)$$

chacune d'entre elles étant la solution de l'équation de diffusion unidimensionnelle

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \kappa_s \frac{\partial^2 S}{\partial x_i^2},$$

in cui  $x_i = x, y, z$  per  $i = 1, 2, 3$ .

La solution trouvée permet de construire des solutions dans le cas où  $\xi \neq 0$  à partir d'un certain instant initial ou si on a une concentration initiale  $S_0$  :

$$S(\mathbf{r}, t) = \int_0^t \int_V \mathcal{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \frac{\xi(\mathbf{r}', t')}{\rho} d\mathbf{r}' dt' + \int_V \mathcal{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) S_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'.$$

Donc pour suivre l'évolution de la distribution d'une certaine substance qui diffuse, on peut considérer la distribution présente au début, ou ajoutée dans la suite, comme la somme de plusieurs sources ponctiformes, suivre l'évolution de chacune d'entre elles et enfin sommer tous les différents contributions au champs de concentration. La prévision de la diffusion est donc relativement simple, jusqu'à quand il n'y a pas de mouvement et de la turbulence.

## 2.2 La turbulence comme un processus stochastiques

La turbulence peut être considérée comme le résultat d'un flux instable, ou bien d'un flux dans lequel les perturbations infinitésimales dues à des mouvements à niveau moléculaire ont tendance à grandir, jusqu'à rejoindre une intensité comparable à celle de l'écoulement de base.

Le passage de stable à instable est aléatoire, la vitesse à laquelle il y a les premiers phénomènes turbulents est en générale plus haute que la vitesse à laquelle l'écoulement revient à être laminaire.

En plus des vibrations, la rugosité des surfaces solides et d'autres irrégularités peuvent favoriser la transition à l'état turbulent.

Le nombre de Reynolds fournit un seuil pour déterminer le passage de laminaire à turbulent.

Quand un écoulement devient turbulent il n'a pas de sens de vouloir décrire son évolution dans tous ses détails vu que les fluctuations intéressent toutes les échelles spatiales et temporelles et aussi que ces fluctuations n'ont aucune régularité. On utilisera plutôt une approche probabiliste et on se concentre plutôt sur le mouvement moyen.

<p>Moyenne temporelle :</p> $\bar{\xi} = \frac{1}{T} \int_0^T \xi dt$ <p>avec <math>T</math> une période de temps assez longue pour comprendre un numéro assez grand des fluctuations qu'on veut négliger.</p>	<p>Moyenne spatiale :</p> $\bar{\xi} = \frac{1}{V} \int_V \xi dV$ <p>avec <math>V</math> une région de l'espace avec volume <math>V</math> autour du point d'intérêt assez grande pour englober assez des fluctuations spatiales.</p>
--	---

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB344 - POLU_MER 2010-2011 Andrea M. Doglioli	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---	--

La moyenne d'ensemble  $\langle \xi \rangle(\mathbf{r}, t)$  est définie comme la moyenne dans chaque instant de temps et pour chaque point de l'espace entre les valeurs obtenues par la répétition d'un nombre indéfini de fois de la même expérience .

Dans une situation stationnaire, l'hypothèse d'ergodicité considère  $\bar{\xi} = \langle \xi \rangle$  pour permettre d'avoir des informations sur les moyennes d'ensemble à partir d'une seule expérience, à travers de moyennes temporelle ou spatiales .

[http://fr.wikipedia.org/hypothèse\\_ergodique](http://fr.wikipedia.org/hypothèse_ergodique)

L'hypothèse ergodique, ou hypothèse d'ergodicité, est une hypothèse fondamentale de la physique statistique. Elle fut formulée initialement par Boltzmann en 1871 pour les besoins de sa théorie cinétique des gaz. Elle s'appliquait alors aux systèmes composés d'un très grand nombre de particules, et affirmait qu'à l'équilibre, la valeur moyenne d'une grandeur calculée de manière statistique est égale à la moyenne d'un très grand nombre de mesures prises dans le temps. La première valeur est celle que permet de calculer la physique statistique, la seconde est proche de ce qu'on peut expérimentalement mesurer. L'hypothèse ergodique est donc fondamentale pour un bon rapprochement entre la théorie et l'expérience.

Un système pour lequel l'hypothèse ergodique est vérifiée sera qualifié de système ergodique. Dans la plupart des cas, il est très difficile de démontrer rigoureusement si un système est ergodique ou non. L'analyse mathématique de ce problème a donné naissance à la théorie ergodique qui précise la nature mathématique de l'hypothèse et donne des résultats sur ses conditions de validité. Mais l'hypothèse ergodique reste souvent une simple hypothèse, jugée vraisemblable a posteriori quand elle permet de faire des prédictions correctes. En ce sens, elle constitue un point faible de la physique statistique.

L'hypothèse d'ergodicité intervient également en traitement du signal, où elle consiste à admettre que l'évolution d'un signal aléatoire au cours du temps apporte la même information qu'un ensemble de réalisations. Elle est importante dans l'étude des chaînes de Markov, les processus stationnaires et pour l'apprentissage numérique.

Dans l'étude de la turbulence, on aussi considère que cette hypothèse soit valable .

### 2.3 Approche Eulerienne et Lagrangienne dans la résolution de l'équation de conservation d'un soluté en cas d'écoulement turbulent

Comme vu dans l'introduction, la relation entre dérivé totale par rapport au temps dans un système de référence Lagrangien et les dérivées partielles par rapport au temps et à l'espace dans un système Eulerien est

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$$

L'approche mathématique au problème de l'advection-dispersion peut donc être de deux types :

- schéma Eulerien : on assume un système de référence fixe ; les bilans de quantité de mouvement, d'énergie, de masse dépendent des flux du fluide qui traversent le paroi d'un volume  $V$  qui est fixe par rapport aux axes de référence . Dans un tel système on intègre les équations d'advection-diffusion .

- schéma Lagrangien : le fluide est interprété comme un ensemble de particules et à chaque particule sont attribuées des caractéristiques propres, comme une certaine concentration de polluant et une certaine aléatoricité dans la dynamique ; dans tel schéma on utilise le concept de trajectoire comme le chemin d'une particule imaginaire ; le long des trajectoires sont simulées les transformations que les particules subissent en fonction des conditions ambiantes .

#### Approche Eulerien

Ce type d'approche est basé sur la résolution de la loi de conservation de la masse de chaque particule d'une certaine espèce (polluant, plankton, sel, etc.) à laquelle est associée une certaine concentration  $c(x,y,z,t)$ . L'équation de conservation peut s'écrire :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) c = \kappa_s \nabla^2 c + \frac{\xi}{\rho},$$

et on assume que la vitesse  $\mathbf{v}$  peut être représenté comme la somme d'une composante moyenne et d'une composante fluctuante (décomposition de Reynolds) :

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB344 - POLU_MER 2010-2011 Andrea M. Doglioli	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---	--

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'$$

Tandis que  $\bar{\mathbf{v}}$  représente la portion de l'écoulement qui peut être décrite avec des mesures expérimentales ou calculé avec de modèles hydrodynamiques,  $\mathbf{v}'$  est une variable stochastique qui contient les informations sur la diffusion turbulente et dont la moyenne temporelle est nulle par définition  $\overline{\mathbf{v}'} = 0$ . De la même façon pour la concentration on écrit

$$c = \bar{c} + c' \quad \text{avec} \quad \overline{c'} = 0$$

Dans les mouvements turbulents en mer on a la superposition de plusieurs échelles temporelles avec une amplitude variable avec continuité et on ne peut donc pas fixer d'une façon univoque l'intervalle temporel  $T$ . Il dépendra d'un choix arbitraire sur ce qu'on veut considérer mouvement moyen ou pas.

Une fois fixé  $T$  selon le problème en examen, on pourra formuler l'hypothèse que il est possible de décomposer le mouvement dans deux composantes :

- le mouvement moyen, lentement variable ;
- le mouvement turbulent, rapidement variable .

Enfin l'hypothèse ergodique comporte que

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \bar{\mathbf{v}} \quad \langle \mathbf{v}' \rangle = \overline{\mathbf{v}'} = 0 \quad \langle c \rangle = \bar{c} \quad \langle c' \rangle = \overline{c'} = 0$$

On remplaçant dans l'équation de conservation on obtient :

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \frac{\partial c'}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') \cdot \nabla (\bar{c} + c') = \kappa_c (\nabla^2 \bar{c} + \nabla^2 c') + \frac{\xi}{\rho}$$

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \frac{\partial c'}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{c} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla c' + \mathbf{v}' \cdot \nabla \bar{c} + \mathbf{v}' \cdot \nabla c' = \kappa_c (\nabla^2 \bar{c} + \nabla^2 c') + \frac{\xi}{\rho}$$

on moyennant toute l'équation et en appliquant les définitions ci-dessous

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{c} + \overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla c'} = \kappa_c (\nabla^2 \bar{c}) + \left\langle \frac{\xi}{\rho} \right\rangle$$

on voit apparaître un "nouveau" terme, qui peut être re-écrit dans la façon suivante

$$\overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla c'} = \overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla c'} + \overline{c' \nabla \cdot \mathbf{v}'} = \nabla \cdot \overline{c' \mathbf{v}'}$$

étant que le terme  $\overline{c' \nabla \cdot \mathbf{v}'} = 0$  vu que si on applique la décomposition des vitesses à l'équation de continuité pour un fluide incompressible

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad , \quad \nabla \cdot (\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') = \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} + \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0 \quad \text{avec} \quad \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = \overline{\nabla \cdot \mathbf{v}} = 0 \quad \text{et donc} \quad \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0$$

Le terme  $\overline{c' \mathbf{v}'} = \langle c' \mathbf{v}' \rangle$  représente la diffusion turbulente ; la théorie  $K$  (ou fermeture newtonienne) suggère de prendre

$$\langle c' \mathbf{v}' \rangle = -\mathbf{K} \nabla \langle c \rangle$$

avec  $\mathbf{K}$  tenseur diagonale de diffusivité turbulente, dont les éléments sont estimés à partir de mesures expérimentales ou modèles : pour ce qui concerne les écoulements océaniques on distingue entre phénomènes horizontaux et phénomènes verticaux et donc



Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB344 - POLU_MER 2010-2011 Andrea M. Doglioli	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---	--

$$\langle c'u' \rangle = -K_H \frac{\partial c}{\partial x} \quad \langle c'v' \rangle = -K_H \frac{\partial c}{\partial y} \quad \langle c'w' \rangle = -K_V \frac{\partial c}{\partial z}$$

ou  $K_H, K_V$  sont les coefficients de diffusivité turbulente .

Vu que l'ordre de grandeur de ces coefficients est en générale de plusieurs ordres de grandeurs plus grand de celui des coefficients de diffusivité moléculaire, le terme relative à ces dernières termes peut être négligé .

La principale différence entre coefficients de diffusivité turbulente et moléculaire est que les premiers ne sont pas une caractéristique du fluide mais de l'écoulement ; souvent ils sont déterminés à posteriori pour satisfaire les données expérimentales . Les coefficients de diffusivité sont du même ordre de ceux de viscosité turbulente, qui est d'ailleurs la diffusivité de la quantité de mouvement .

En considérant par exemple des polluants qui ne se dégradent pas (  $\langle \xi/\rho \rangle = \xi/\rho$  ), l'équation 3.5 devient

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{c} = K_H (\nabla_H^2 \bar{c}) + K_V \left( \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial z^2} \right) + \left\langle \frac{\xi}{\rho} \right\rangle$$

Les symboles qui indiquent la moyenne temporelle sont négligé, et le même est fait dans la littérature, mais il faut jamais oublier le raisonnement (e.g. décomposition de Reynolds) et les approximations (e.g. fluide incompressible) et les hypothèses (e.g. ergodicité) qui mènent à la formulation des équations de conservation d'un soluté où apparaissent les coefficients de mélange turbulent .

Des solutions de type  $\langle c(\mathbf{r}, t) \rangle$  pour cette équation peut être trouvées analytiquement avec des opportunes hypothèses de simplification (e.g. stationairité) ou numériquement, avec différents méthode (différences finies, éléments finis, spectrale) .

### Approche Lagrangien

L'approche Lagrangien est basé sur l'équation de la dispersion d'un certain soluté caractérisé par la concentration  $c(x,y,z,t)$  :

$$\langle c(\mathbf{r}, t) \rangle = \int_{-\infty}^t \int_V P(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) \xi(\mathbf{r}_0, t_0) d\mathbf{r}_0 dt_0$$

dans laquelle  $P(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)$  est la densité de probabilité de transition qui établit la probabilité que une particule qui se trouve en  $\mathbf{r}_0$  au moment  $t_0$  puisse se retrouver en  $\mathbf{r}$  à l'instant  $t$ . Comme dans le cas eulerien, cette équation peut être intégrée analytiquement, en assumant pour  $P$  une certaine distribution de probabilité (souvent on utilise une gaussienne et on parle de modèles gaussiens) et des simplifications opportunes, ou bien avec une intégration numérique .

### 2.4 Modèles numériques à particules lagrangiennes

La dispersion peut être simulée avec des modèles à particules lagrangiennes dans deux façons :

- modèles à une seule particule : le mouvement de chaque particule est indépendant de celui des autres ;
- modèles à deux (ou plus) particules : reproduisent la dispersion relative entre les particules .

Das le modèles à une seule particule, les particules bougent à chaque pas de temps avec une vitesse  $\mathbf{v}_e$  équivalente à la vitesse réelle  $\mathbf{v}$ . Si  $\mathbf{v}$  définit le déplacement d'une particule dans l'intervalle de temps

$\Delta t = t_2 - t_1$  selon la relation

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t) dt,$$

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB344 - POLU_MER 2010-2011 Andrea M. Doglioli	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---	--

la vitesse équivalente est définie comme :

$$\mathbf{v}_e = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t) dt.$$

Une estimation de  $\mathbf{v}_e$  est faite en utilisant les mesures ou les modèles euleriens de  $\mathbf{v}$  en définissant

$$\mathbf{v}_e = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}',$$

où

- $\bar{\mathbf{v}}$  représente la partie déterministe du transport, basée sur les mesures euleriennes de courant ou fournie par un modèle hydrodynamique ;
- $\mathbf{v}'$  représente la vitesse de diffusion, i. e. une perturbation numérique artificiel qui est liée à l'intensité de la turbulence et aux caractéristiques des plus petits tourbillons qui ne sont pas considérée dans le champs moyen .

Pour estimer  $\mathbf{v}'$  il y a deux possibilités :

- dans le calcul déterministe on utilise une relation obtenue en partant de l'équation de la théorie  $K$  de la diffusion appliquée dans une maille de grille :

$$\mathbf{v}' = -\frac{\mathcal{K}}{c} \nabla c,$$

ou  $c$  est la concentration calculée à partir du nombre de particules dans la maille ;

- dans le calcul statistique il y a par contre une évaluation stochastique de  $\mathbf{v}'$  en utilisant des méthodes appelées de type Monte Carlo .

Tiré de [http://fr.wikipedia.org/wiki/Méthode\\_de\\_Monte-Carlo](http://fr.wikipedia.org/wiki/Méthode_de_Monte-Carlo)

On appelle méthode de Monte-Carlo toute méthode visant à calculer une valeur numérique, et utilisant des procédés aléatoires, c'est-à-dire des techniques probabilistes. Le nom de ces méthodes, qui fait allusion aux [jeux de hasard](#) pratiqués à [Monte-Carlo](#), a été inventé en 1947 par [Nicholas Metropolis](#)<sup>[1]</sup>, et publié pour la première fois en 1949 dans un article co-écrit avec [Stanislas Ulam](#)<sup>[2]</sup>.

Les méthodes de Monte-Carlo sont particulièrement utilisées pour calculer des intégrales en dimensions plus grandes que 1 (en particulier, pour calculer des surfaces, des volumes, etc.).

La méthode de simulation de Monte-Carlo permet aussi d'introduire une approche statistique du risque dans une décision financière. Elle consiste à isoler un certain nombre de variables-clés du projet telles que le chiffre d'affaires ou la marge... et à leur affecter une distribution de probabilités. Pour chacun de ces facteurs, on effectue un grand nombre de tirages aléatoires dans les distributions de probabilité déterminées précédemment, afin de déterminer la probabilité d'occurrence de chacun des résultats.

Le véritable développement des méthodes de Monte-Carlo s'est effectué, sous l'impulsion de [John von Neumann](#) et [Stanislas Ulam](#) notamment, lors de la [Seconde Guerre mondiale](#) et des recherches sur la fabrication de la [bombe atomique](#). Notamment, ils ont utilisé ces méthodes probabilistes pour résoudre des équations aux dérivées partielles dans le cadre de la [Monte-Carlo N-Particle transport](#).

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB344 - POLU_MER 2010-2011 Andrea M. Doglioli	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---	--

Tiré de [http://fr.wikipedia.org/wiki/Régression\\_lineaire](http://fr.wikipedia.org/wiki/Régression_lineaire)

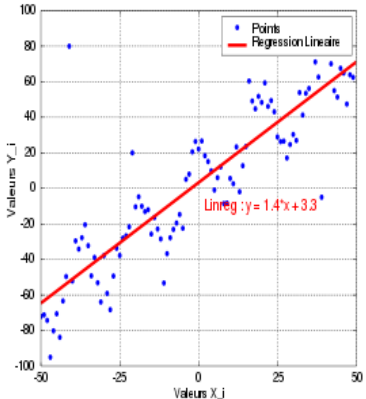
En statistiques, étant donné un échantillon aléatoire  $(Y_i, X_i), i = 1, \dots, n$  un modèle de régression simple suppose la relation affine suivante entre  $Y_i$  et  $X_i$ :

$$Y_i = aX_i + b, \quad i = 1, \dots, n$$

La **régression linéaire** consiste à déterminer une estimation des valeurs  $a$  et  $b$  et à quantifier la validité de cette relation grâce au **coefficient de corrélation linéaire**. La généralisation à  $p$  variables explicatives de ce modèle est donnée par

$$Y_i = a_0 + a_1X_{i1} + a_2X_{i2} + \dots + a_pX_{ip}$$

et s'appelle la régression linéaire multiple.



Ce deuxième type d'approche est plus flexible et le plus utilisé dans plusieurs domaines .

La distribution de la vitesse des particules qui se dispersent dans un fluide en écoulement turbulent peut être décrite en utilisant les modèles autoregressives.

Un processus autorégressif est un modèle de régression pour séries temporelles dans lequel la série n'est expliquée par d'autres variables que par ses valeurs passées.

Le modèle autoregressives sont donc des modèles discrets dans lesquels la valeur de la vitesse à un instant donné est un combinaison linéaire de ses valeurs dans le passé plus un terme aléatoire à l'instant donné .

Un modèle autoregressive d'ordre  $p$  est indiquée avec la sigle  $AR(p)$  et dans le cas de notre vitesse

$$v'_n = \alpha_1 v'_{n-1} + \alpha_2 v'_{n-2} + \dots + \alpha_p v'_{n-p} + v$$

avec  $v$  une vitesse stochastique aléatoire .

### Modèles autoregressifs d'ordre zéro ou « random walk »

Dans ce type de modèles on fait l'hypothèse que le mouvement brownien peut être décrit par un modèle autoregressive d'ordre zéro  $AR(0)$  en se disant que la composante stochastique de la vitesse de la particule est purement aléatoire à chaque instant, étant le résultat de collisions aléatoires avec les molécules du fluide, i.e. :

$$v'_n = v$$

En utilisant l'analogie entre diffusion moléculaire et diffusion turbulente pour les particules immergées dans fluide en écoulement turbulent, on considère les déplacements dus aux tourbillons comme purement aléatoires . Un modèle numérique qui utilise cette approximation, calcule les déplacements d'une particule dans la façon suivante :

$$r_{n+1} - r_n = \bar{v}_n \Delta t + \mu_n$$

où  $\mu = v \Delta t$  . À chaque composante de  $\mu = (\mu_x, \mu_y, \mu_z)$  on assigne une valeur tirée au sort en respectant une fonction de densité de probabilité choisie .

### Modèles autorégressifs du premier ordre

Un modèle autorégressif du premier ordre,  $AR(1)$ , s'applique si on considère les particules de polluant assez petites pour que les molécules qui sont autour produisent des variations aléatoires de

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB344 - POLU_MER 2010-2011 Andrea M. Doglioli	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---	--

leur vitesse, mais aussi assez grandes pour que avvertissent le frottement avec les molécules du liquide qui provoque une réduction de leur vitesse.

L'équation du mouvement prend la forme de l'équation stochastique de Langevin

$$\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = -\beta\mathbf{v}' + \mathbf{v}$$

Dans cette équation l'accélération de la particule est séparée en deux termes qui décrivent différemment l'interaction entre chaque particule et le reste du fluide:

$\beta\mathbf{v}'$  décrit le comportement du fluide comme un milieu continu, macroscopique, qui exerce sur la particule une force de frottement proportionnelle à sa vitesse;

$\mathbf{v}$  est un terme représentant le forçage stochastique dû aux collisions, qui décrit donc le comportement du fluide comme un ensemble de variations aléatoires en raison de l'accélération stochastique de la particule.

Le déplacement d'une particule immergée dans un fluide en mouvement avec une vitesse  $\bar{\mathbf{v}}$  sera alors donné par la somme de la vitesse de l'écoulement du fluide et de la composante aléatoire décrite par l'équation stochastique de Langevin . Il faudra donc résoudre numériquement le système :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_n &= [\bar{\mathbf{v}}_n + \mathbf{v}'_n]\Delta t \\ \mathbf{v}'_n - \mathbf{v}'_{n-1} &= -\beta[\mathbf{v}'_{n-1} + \mathbf{v}_n]\Delta t \end{aligned}$$

La deuxième équation devient

$$\mathbf{v}'_n - \mathbf{v}'_{n-1} = (1-\beta\Delta t)\mathbf{v}'_{n-1} + \mathbf{v}_n\Delta t = \Phi\mathbf{v}'_{n-1} + \mathbf{v}_n\Delta t$$

Etant la série  $\{\mathbf{v}_n\}$  purement aléatoire et stationnaire et avec moyenne nulle, la moyenne d'ensemble

$$\langle \mathbf{v}'_n \rangle = \Phi \langle \mathbf{v}'_{n-1} \rangle$$

et à l'état stationnaire on aura  $\langle \mathbf{v}'_n \rangle = 0$  .

La covariance sera

$$\langle \mathbf{v}'_n \mathbf{v}'_{n-1} \rangle = \Phi \langle \mathbf{v}'_{n-1}^2 \rangle$$

étant donné que le terme  $\langle \mathbf{v}_n \mathbf{v}'_n \rangle = 0$  , puisque  $\mathbf{v}$  est indépendant de  $\mathbf{v}'$  .

À l'état stationnaire, en appelant la covariance  $C_o = \langle \mathbf{v}'^2_n \rangle$  la formule précédente peut être écrite dans la forme

$$C_1 = \Phi C_o$$

et plus en générale

$$C_k = \Phi C_{k-1} \text{ ou bien } C_k = \Phi^k C_o$$

On peut définir un coefficient de corrélation

$$\rho_k = \frac{C_o}{C_k} = \Phi^k$$

qui, puisque  $|\Phi| < 1$  , aura l'évolution montrée en figure ci-contre

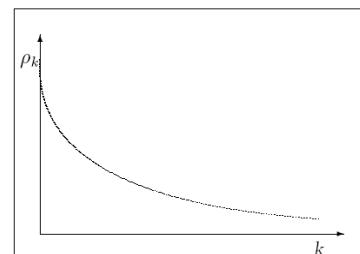


Figura 3.4: Andamento del coefficiente di correlazione.

La variance de  $\{\mathbf{v}'_n\}$  est liée à celle de  $\{\mathbf{v}_n\}$  par la relation suivante dans laquelle  $2\Phi\langle \mathbf{v}_n \mathbf{v}'_{n-1} \rangle = 0$

$$\langle \mathbf{v}'^2_n \rangle = \Phi^2 \langle \mathbf{v}'^2_{n-1} \rangle + \langle \mathbf{v}^2_n \rangle \text{ ou bien } \langle \mathbf{v}'^2_n \rangle = \frac{1}{1-\Phi^2} \langle \mathbf{v}^2_n \rangle$$

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB344 - POLU_MER 2010-2011 Andrea M. Doglioli	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---	--

La série  $\{v'_n\}$  peut donc être calculé par iteration :

$$\begin{aligned}
v'_1 &= \Phi v'_o + v_1 \\
v'_2 &= \Phi^2 v'_o + \Phi v_1 + v_2 \\
&\dots \\
v'_n &= \Phi^n v'_o + \sum_{i=0}^{n-1} \Phi^i v_{n-1}
\end{aligned}$$

mais puisque  $\Phi^n$  décroît rapidement,  $v'_n$  perd rapidement mémoire de son état initial. Asymptotiquement (en régime stationnaire) on aura

$$v'_n \approx \sum_{i=0}^{\infty} \Phi^i v_{n-1}$$

La série  $\{v'_n\}$  tend donc à être une moyenne mobile pesée exponentiellement sur l'hystoire passée de  $\{v_n\}$ .

### Implémentation d'un modèle « random walk »

Pour le moment on considère vitesse moyenne nulle, en se mettant vraiment dans les conditions comparable à la diffusion d'une goutte d'encre dans un verre d'eau.

On aura alors que notre modèle est simplement

$$r_{n+1} - r_n = \mu$$

Il faut maintenant calculer  $\mu$ .

De vrais nombres aléatoires peuvent être produits avec du matériel qui tire parti de certaines propriétés physiques stochastiques (e.g. bruit d'une résistance), mais cela serait peu pratique pour un code numérique. Alors on utilise des générateur de nombres pseudo-aléatoires, pseudorandom number generator (PRNG) en anglais, qui est un algorithme qui génère une séquence de nombres présentant certaines propriétés du hasard. Par exemple, les nombres sont supposés être approximativement indépendants les uns des autres, et il est potentiellement difficile de repérer des groupes de nombres qui suivent une certaine règle (comportements de groupe). Cependant, il faut pas oublier que les sorties d'un tel générateur ne sont pas entièrement aléatoires ; elles s'approchent seulement des propriétés idéales des sources complètement aléatoires. [John von Neumann](#) insista sur ce fait avec la remarque suivante : « Quiconque considère des méthodes arithmétiques pour produire des nombres aléatoires est, bien sûr, en train de commettre un péché ». Une analyse mathématique rigoureuse est nécessaire pour déterminer le degré d'aléa d'un générateur pseudo-aléatoire.

Les méthodes pseudo-aléatoires sont souvent employées sur des ordinateurs, dans diverses tâches comme la [méthode de Monte-Carlo](#), la simulation ou les applications [cryptographiques](#).

La plupart des algorithmes pseudo-aléatoires essaient de produire des sorties qui sont uniformément distribuées, typiquement avec distribution de probabilité uniforme entre les valeurs 0 et 1, tandis que pour la diffusion dans un liquide on a plutôt nécessité de avoir une densité de probabilité gaussienne.

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB344 - POLU_MER 2010-2011 Andrea M. Doglioli	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---	--

### Obtention d'un tirage d'une loi normale à partir d'un tirage d'une loi uniforme.

Afin d'obtenir un tirage gaussien, d'espérance et d'écart type paramétrable, une manipulation du tirage uniforme est à effectuée :

Une variable  $r$  possède une distribution de probabilité uniforme, entre 0 et 1. On définit une variable  $r' = r - 1/2$ , qui aura alors une distribution de probabilité uniforme entre  $-1/2$  et  $1/2$ , une moyenne  $\langle r' \rangle = 0$  et une variance :

$$\sigma^2 = \int_{-1/2}^{+1/2} r'^2 \cdot dr = \left[ \frac{r'^3}{3} \right]_{-1/2}^{+1/2} = 1/12$$

Considérons maintenant la variable  $R$  définie tel que

$$R = \sum_{i=1}^n r'_i$$

$$\langle R \rangle = \sum_{i=1}^n \langle r'_i \rangle$$

On a donc

$$\sigma_R^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_{r'_i}^2$$

En sommant des nombres  $r'$  tirés uniformément entre  $-1/2$  et  $+1/2$ , on change la distribution de probabilité : une suite de  $n$  variable aléatoire indépendante (comme  $R$ ) tend pour  $n \rightarrow \infty$  à une distribution gaussienne  $G(\langle R \rangle, \sigma^2)$ . Lorsque  $n$  est grand,  $R$  a effectivement plus de chance d'être égale à 0 qu'à  $1/2$  (où il faudra  $n$  tirages de  $r'$  égal à  $1/2$  !).

Si nous prenons  $n=12$ , nous avons  $\langle R \rangle = 0$  et  $\sigma_R^2 = 1$ , nous tombons sur le théorème centrale limite.

$$g = \left[ \sum_{i=1}^{12} r'_i \right] \cdot \sigma$$

Nous pouvons calculer maintenant le nombre  $g$  tel que

Le nombre  $g$  est alors un nombre tiré d'une distribution de probabilité gaussienne approximativement avec une moyenne nulle et un écart type  $\sigma$ , comme le montre la figure 1.

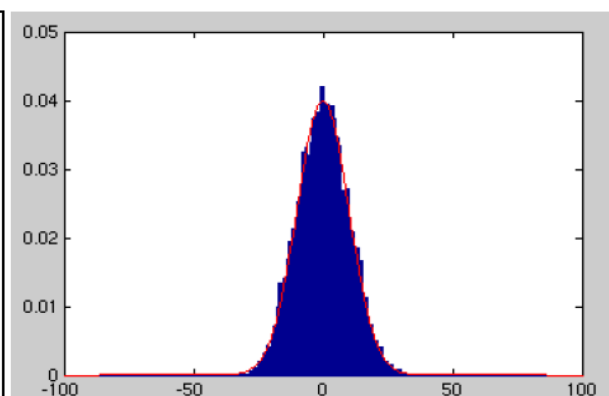
```
devst=10;
imax=1000;

for j=1:imax
    g=0;
    for i=1:12
        r=rand(1);
        g=g+(r-0.5);
    end
    gg(j)=g.*devst;
end

edges=[-100:1:100];
N=histc(gg,edges);
bar(edges,N./imax,'histc')

var=devst^2;
y=1/sqrt(2*pi*var).*exp(-edges.^2/(2*var));

line(edges,y,'color','r')
```



**Figure 1** : Comparaison de l'histogramme de  $gg$  (en bleu) avec  $y$  une gaussienne théorique (en rouge)

## Marche aléatoire à deux dimensions d'espace

Afin de simplifier la modélisation du mouvement brownien, nous considérerons tout le long de notre étude un espace à deux dimensions spatiale seulement. Considérons le cas d'une seule particule isolée pour l'instant. Cette particule décrit une marche aléatoire quand chaque pas est de direction aléatoire et de longueur aléatoire. Par exemple si l'on note  $(x_i, y_i)$  les coordonnées du point après  $i$  pas, alors le  $(i+1)^{\text{ème}}$  pas est tel que :

$$\begin{aligned}x(i+1) &= x(i) + \text{dep}x \\ y(i+1) &= y(i) + \text{dep}y\end{aligned}$$

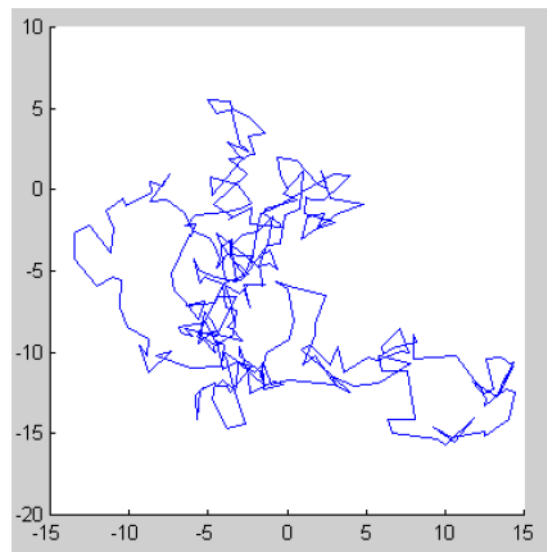
Où  $\text{dep}x$  et  $\text{dep}y$  sont des variables aléatoires tirées de la distribution gaussienne énoncée auparavant, centrée en 0 et d'écart type 1 ( $\text{dev}st$  dans le code). Le chemin parcouru par la particule est une marche aléatoire à pas indépendants que l'on peut visualiser sur la figure (2) :

```
figure(1);hold on;
devst=1;
x(1)=0;
y(1)=0;
itmax=300;

for it=2:itmax
    g=0;
    for j=1:12
        r=rand(1);
        g=g+(r-0.5);
    end
    depx=g.*devst;
    g=0;
    for j=1:12
        r=rand(1);
        g=g+(r-0.5);
    end
    depy=g.*devst;

    x(it)=x(it-1)+depx;
    y(it)=y(it-1)+depy;
end

line(x,y)
hold off;
```



**Figure 2 :** Marche aléatoire d'une particule dans un espace à 2 dimensions

Il suffit alors d'implémenter une boucle supplémentaire afin de modéliser le mouvement de plusieurs particules indépendantes ( $ipmax$  représente le nombre de particules).

```
figure(1);hold on;
ipmax=10;

for ip=1:ipmax

--
script précédent
--

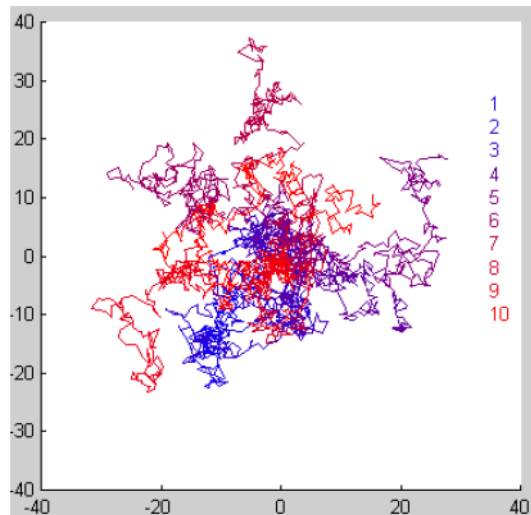
line(x,y,'color',[ip/ipmax 0 1-ip/ipmax])

text(20,30-ip*4,num2str(ip),
'color',[ip/ipmax 0 1-ip/ipmax])

end

axis([-40 40 -40 40])

hold off;
```



**Figure 3 :** Marche aléatoire de 10 particules indépendantes

## Calcul de la concentration spatiale

On a obtenu le tracé de plusieurs particules, au cours du temps. Nous souhaitons cependant axer notre étude sur le phénomène de diffusion. Pour ce faire, il est utile d'imaginer un petit domaine, de forme arbitraire, entourant un espace où les particules peuvent diffuser. Nous avons choisis ici un carrée, de côté 100 unités arbitraires (*la matrice **CONC** dans le code*). Nous voulons donc afficher la concentration dans l'espace à **chaque instant it**. Pour cela, il faut d'abord inverser la boucle temporelle (*it dans le code*) avec la boucle sur les particules (*ip dans le code*). Ensuite nous centrons initialement toutes les particules en (50,50) (pour *it=1*) et nous les faisons bouger (d'un déplacement *dep<sub>x</sub>* et *dep<sub>y</sub>*).

```

devst=1;ipmax=4;itmax=10;
xold(1:ipmax)=50;
yold(1:ipmax)=50;

for it=1:itmax
CONC=zeros(100,100);

    for ip=1:ipmax
        g=0;
        for i=1:12
            r=rand(1);
            g=g+(r-0.5);
        end
        depx=g.*devst;

        g=0;
        for i=1:12
            r=rand(1);
            g=g+(r-0.5);
        end
        depy=g.*devst;

        xnew(ip)=xold(ip)+depx;
        ynew(ip)=yold(ip)+depy;

        if xnew(ip)<1 | xnew(ip)>100 | ynew(ip)<1 |
            ynew(ip)>100

            xnew(ip)=xold(ip);
            ynew(ip)=yold(ip);
        end

        ii=fix(xnew(ip));
        jj=fix(ynew(ip));
        CONC(jj,ii)=CONC(jj,ii)+1;

        xmem(ip)=xnew(ip);
        ymem(ip)=ynew(ip);

        xold(ip)=xnew(ip);
        yold(ip)=ynew(ip);

    end %pour ip

figure(1);hold on;
grid;
contour(CONC)

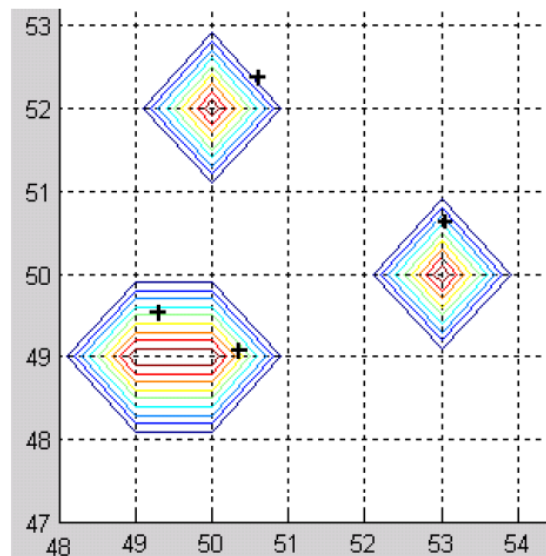
plot(xmem,ymem,'k+')
waitforbuttonpress
clf;

end %pour it

```

A chaque instant *it*, on compte combien il y a de particules dans chaque maille de grilles (*CONC dans le code*).

On remarque sur la figure un léger décalage des iso lignes de concentration, par rapport aux positions réelles des particules (croix noire). Ceci parce que l'on rapporte toutes les particules d'une maille de grille (de *i* à *i+1*, et de *j* à *j+1*) à un point de coordonnées (*i,j*). Mais avec un très grand nombre de particule, ceci n'a plus d'importance

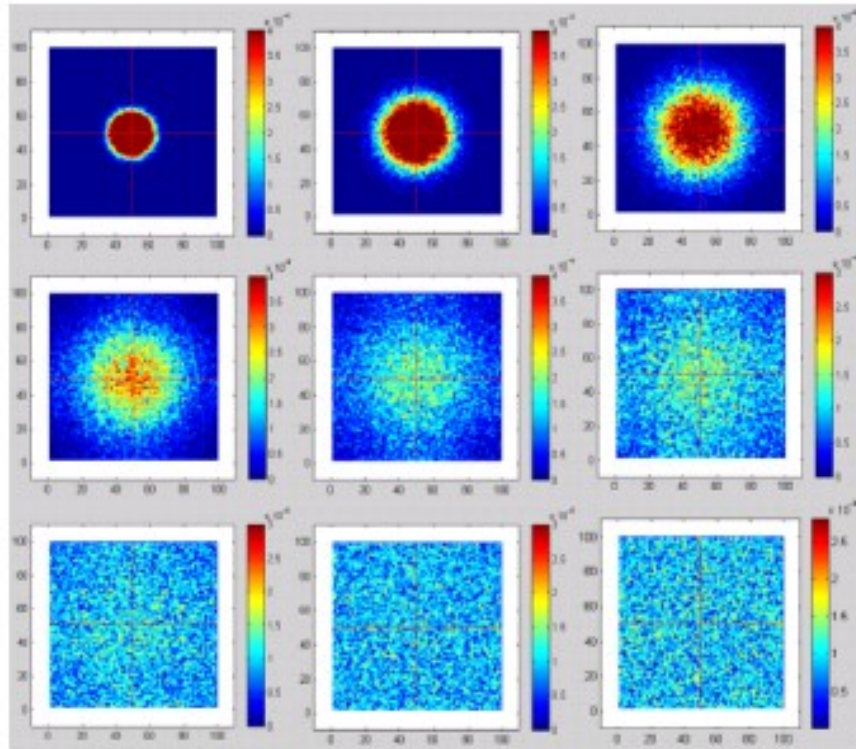


**Figure 4 :** Calcul de la concentration dans notre espace à l'instant *it=1*

Il ne nous reste maintenant plus qu'à augmenter le nombre de particules représentant la goutte d'encre.

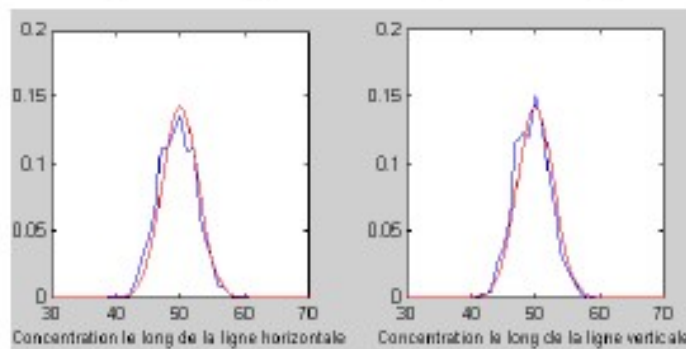


La figure 5 montre 9 étapes de la diffusion d'une goutte d'encre au cours du temps. La goutte d'encre est d'abord centrée en (50,50), puis diffuse dans la boîte.



**Figure 5 :** Diffusion d'une goutte d'encre dans de l'eau

En suivant la concentration le long de l'axe horizontal et vertical (croix rouge sur la figure 5), et en la comparant avec la gaussienne théorique, on obtient la figure 6.



**Figure 6 :** Concentration (courbe en bleu) le long d'un axe horizontal (à gauche) et vertical (à droite) comparée à la gaussienne théorique (en rouge) à l'instant  $t=300$

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB344 - POLU_MER 2010-2011 Andrea M. Doglioli	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---	--

La figure 2 nous montre la marche aléatoire d'une particule brownienne. Bien que toutes les directions soient équivalentes, la marche aléatoire ne révèle aucune isotropie. En fait la marche aléatoire n'est que statistiquement isotrope : c'est-à-dire que l'isotropie ne se révèle que sur un grand nombre de marches. C'est ce que nous dévoile la figure 5 qui nous montre l'évolution d'une goutte d'encre plongée dans un fluide. Nous constatons aisément que cette goutte d'encre diffuse au cours du temps, c'est-à-dire qu'elle se répand, se propage, jusqu'à obtenir un espace idéologiquement homogène. Nous constatons maintenant que l'étalement ne suit pas une direction particulière mais toutes les directions de l'espace. L'isotropie se révèle macroscopiquement car il s'agit d'une propriété statistique.

Nous pouvons constater également sur la figure 5 que l'étalement de la goutte d'encre diminue au cours du temps. Effectivement, Dans un fluide fermé, l'équation de diffusion proposé par A. Fick est égale à :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = k_s \cdot \nabla^2 S + \xi$$

Avec  $k_s$  coefficient de diffusion,  $\nabla^2$  opérateur Laplacien,  $\xi$  la source et le puit.

Lorsqu'il n'y a pas de source ni de puit,  $\xi=0$ , une solution possible de l'équation de diffusion est :

$$K(x,t) = \frac{1}{(4 \cdot \pi \cdot k_s \cdot t)^{1/2}} \exp^{-r^2 / (4 k_s \cdot t)} \quad (1)$$

Où  $r^2=x^2$  (pour un espace à 1 dimensions)

Cette solution représente une gaussienne tridimensionnelle de variance  $\sigma^2 = 2 \cdot k_s \cdot t$

L'écart-type  $\sigma$  (grandeur mathématique qui décrit l'étalement) est proportionnel à la racine carrée du temps, fonction dont la croissance est très forte avant de devenir quasi nulle. **Au cours du temps, l'écart type va augmenter rapidement, c'est ce qui va faire diffuser notre goutte d'encre. L'écart-type augmente de moins en moins rapidement d'où une diffusion de plus en plus lente.**

En remplaçant le terme  $2 \cdot k_s \cdot t$  par  $\sigma^2$  dans l'équation 1, nous obtenons une gaussienne de formule :

$$f_x = \frac{1}{(\sigma \cdot \pi)^{1/2}} \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{2 \cdot \sigma^2}\right) \quad (2)$$

Les courbes de la figure 6 permettent de comparer la densité des particules le long de l'axe horizontal et vertical de la boîte avec la distribution théorique que l'on souhaite observée, à partir de l'équation gaussienne (2) (en prenant  $r^2=(x-50)^2$  pour centrer la gaussienne en 50). Les courbes concordent bien, la modélisation est donc réussie.

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB344 - POLU_MER 2010-2011 Andrea M. Doglioli	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---	--

## Implementation d'un modèle d'advection-diffusion

Maintenant on se focalise sur la partie d'advection.

L'équation qu'il faut résoudre numériquement pour un modèle lagrangien à 1 seule particule est

$$\frac{dX}{dt} = V_a(X, t) + V_d(X, t)$$

avec  $X$  position de la particule,  $V_a$  vitesse d'advection et  $V_d$  vitesse stochastique liée à la turbulence. En considérant maintenant  $V = V_a + V_d$  et en mettant l'équation en forme intégrale on a

$$X(t^{n+1}) = X(t^n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} V(X, t) dt \quad (1)$$

plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour résoudre cette équation.

Here  $\Delta t$  is the time step with  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$  and  $n$  is the time index such that  $t^n = n \Delta t$

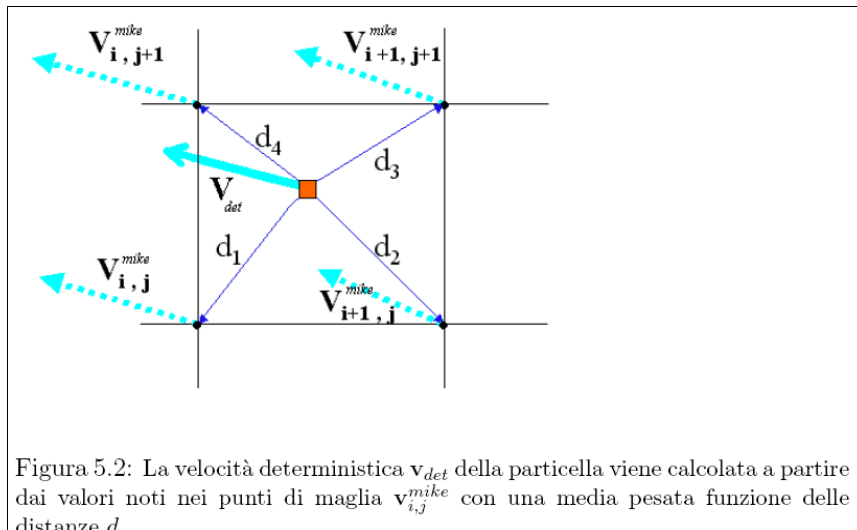
### Méthode d'Euler

Cette méthode est largement utilisée car très simple à coder. En générale on écrit le schéma numérique dans la forme

$$X^{n+1} = X^n + V(X^n, t^{n+1}) \Delta t$$

Un avantage de cette méthode est que on a besoin d'un seul champ de vitesse (la vitesse à un instant donné), i.e.  $V(X, t^{n+1})$ .

En pratique pour une particule qui se trouve dans une certaine position il faut interpoler le champ de vitesse des quatre points de grille qui l'entourent.



Une méthode est celle de effectuer une moyenne pesée par rapport à la distance entre la particule et les points de grille.

Le coefficients, ou poids (*weight*), sont proportionnels à l'inverse de la distance et peuvent être calculé avec la formule suivante

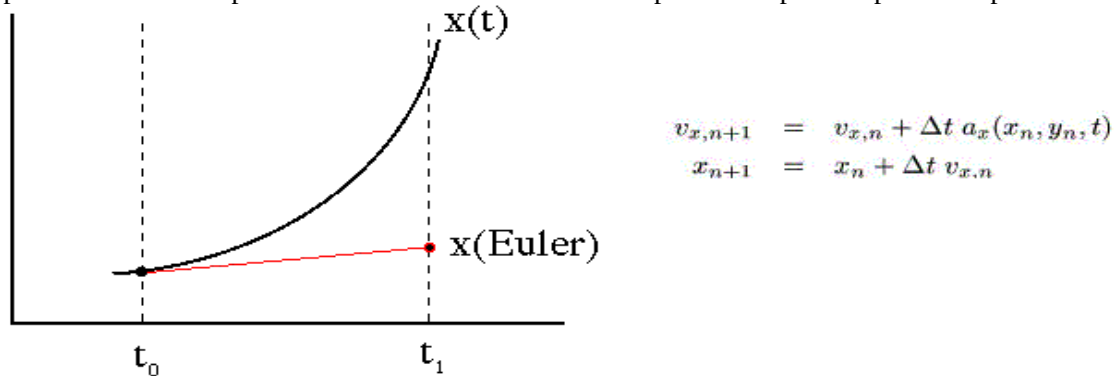
Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB344 - POLU_MER 2010-2011 Andrea M. Doglioli	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---	--

$$v_{det} = w_1 v_{i,j}^{mike} + w_2 v_{i+1,j}^{mike} + w_3 v_{i+1,j+1}^{mike} + w_4 v_{i,j+1}^{mike},$$

I pesi  $w_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ), inversamente proporzionali alla distanza  $d_k$  dai corrispondenti punti di griglia, vengono calcolati mediante la formula numerica

$$w_k = \frac{d_1 d_2 d_3 d_4}{d_k (d_1 d_2 d_3 + d_1 d_3 d_4 + d_1 d_2 d_4 + d_2 d_3 d_4)} \quad \text{con } k = 1, 2, 3, 4.$$

Le défaut principal de la methode d'Euler est sa faible precision (ordre 1) qui fait que les trajectoires peuvent s'ecarter rapidement de la solution exacte si le pas de temps n'est pas assez petit.



<http://rainman.astro.uiuc.edu/ddr/ddr-galaxy/parameters.html>

### La methode de Runge-Kutta

Les méthodes de Runge-Kutta sont des méthodes d'analyse numérique d'approximation de solutions d'équations différentielles. Elles ont été nommées ainsi en l'honneur des mathématiciens Carl Runge et Martin Wilhelm Kutta lesquels élaborèrent la méthode en 1901.

Ces méthodes reposent sur le principe de l'itération, c'est-à-dire qu'une première estimation de la solution est utilisée pour calculer une seconde estimation, plus précise, et ainsi de suite.

Selon le nombre d'itérations on parle d'ordre différent. La méthode de Runge-Kutta d'ordre 1 (RK1) est équivalente à la méthode d'Euler.

La méthode de Runge-Kutta classique d'ordre quatre est un cas particulier d'usage très fréquent. Dénomé RK4, il peut être écrit de la façon suivante :

$$X^{n+1} = X^n + \frac{1}{6} (a + 2b + 2c + d)$$

avec

$$a = \Delta t \left[ V(X^n, t^n) \right]$$

$$b = \Delta t \left[ V \left( X^n + \frac{1}{2} a, t^n + \frac{\Delta t}{2} \right) \right]$$

$$c = \Delta t \left[ V \left( X^n + \frac{1}{2} b, t^n + \frac{\Delta t}{2} \right) \right]$$

$$d = \Delta t \left[ V(X^n + c, t^{n+1}) \right]$$

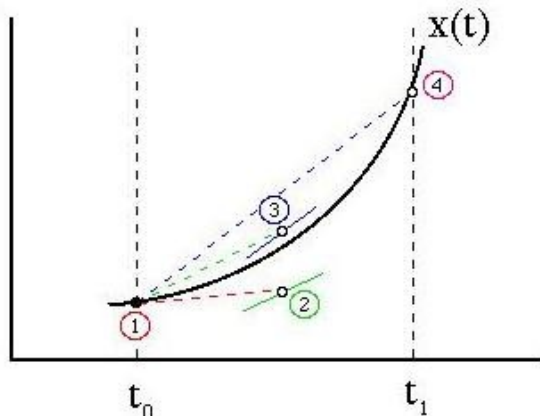
L'idée est que la valeur suivante ( $X_{n+1}$ ) est approchée par la somme de la valeur actuelle ( $X_n$ ) et du produit de la taille de l'intervalle  $\Delta t$  par la pente estimée (i.e. la vitesse, qui est la dérivée de la position). La pente est obtenue par une moyenne pondérée de différentes pentes :

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB344 - POLU_MER 2010-2011 Andrea M. Doglioli	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---	--

$a$  est le déplacement basé sur la pente au début de l'intervalle ;  
 $b$  est le déplacement basé sur la pente au milieu de l'intervalle de temps et au point au milieu du déplacement  $a$  calculé par le biais de la méthode d'Euler ;  
 $c$  est de nouveau le déplacement basé sur la pente au milieu de l'intervalle de temps, mais au point obtenu cette fois en utilisant le déplacement  $b$  ;  
 $d$  est le déplacement à la fin de l'intervalle basé sur la pente au milieu de l'intervalle de temps et au point au milieu du déplacement  $c$ .

Dans la moyenne des quatre pentes, un poids plus grand est donné aux pentes au point milieu.

$$\text{pente} = (a + 2b + 2c + d)/6.$$



$$\begin{aligned} dx_1 &= \Delta t v_{x,n} \\ dv_{x1} &= \Delta t a_x(x_n, y_n, t) \\ dx_2 &= \Delta t (v_{x,n} + \frac{dv_{x1}}{2}) \\ dv_{x2} &= \Delta t a_x(x_n + \frac{dx_1}{2}, y_n + \frac{dy_1}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}) \\ dx_3 &= \Delta t (v_{x,n} + \frac{dv_{x2}}{2}) \\ dv_{x3} &= \Delta t a_x(x_n + \frac{dx_2}{2}, y_n + \frac{dy_2}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}) \\ dx_4 &= \Delta t (v_{x,n} + dv_{x3}) \\ dv_{x4} &= \Delta t a_x(x_n + dx_3, y_n + dy_3, t + \Delta t) \\ x_{n+1} &= y_n + \frac{dx_1}{6} + \frac{dx_2}{3} + \frac{dx_3}{3} + \frac{dx_4}{6} \\ v_{x,n+1} &= v_{x,n} + \frac{dv_{x1}}{6} + \frac{dv_{x2}}{3} + \frac{dv_{x3}}{3} + \frac{dv_{x4}}{4} \end{aligned}$$

<http://rainman.astro.uiuc.edu/ddr/ddr-galaxy/parameters.html>

La méthode RK4 est une méthode d'ordre 4, ce qui signifie que l'erreur commise à chaque étape est de l'ordre de  $h^5$ , alors que l'erreur totale accumulée est de l'ordre de  $h^4$ .

Le problème est que cette méthode nécessite des vitesses au temps intermédiaires entre 2 pas temporels. Alors il faut ne pas seulement interpoler sur l'horizontale mais aussi dans le temps. L'interpolation dans le temps doit aussi assurer la même précision que celle de la méthode d'intégration. Alors une interpolation du 4eme ordre est

$$V^{\frac{n+1}{2}}(X) = \frac{5}{16} V^{n+1}(X) + \frac{5}{16} V^n(X) - \frac{5}{16} V^{n-1}(X) + \frac{1}{16} V^{n-2}(X)$$

Du point de vu informatique cela implique que il faut garder aussi en mémoire plus d'information, pratiquement tout les quatres champs de vitesses pour la durée de la simulation, parce que on peut pas savoir a priori où ira la particule, et donc avoir plus de mémoire vive.

### La méthode de Adams-Bashford-Multon (ABM)

Cette méthode est basée sur 2 étapes : une partie predictive (Adams-Bashford method) et une partie corrective (Adams-Multon method).

La partie predictive s'obtient en faisant une interpolation polynomiale de la variable  $V(X,t)$  à travers les points  $X_n, X_{n-1}, X_{n-2}$  et  $X_{n-3}$  et après en intégrant l'équation (1) entre  $X_n$  et  $X_{n+1}$

$$\tilde{X}^{n+1} = X^n + \frac{\Delta t}{24} (55V^n - 59V^{n-1} + 37V^{n-2} - 9V^{n-3}) \quad (6)$$

La partie corrective s'obtient en faisant une interpolation polynomiale de la variable  $V(X,t)$  à travers

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB344 - POLU_MER 2010-2011 Andrea M. Doglioli	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---	--

les points  $\sim X_{n+1}$  (que on vient de calculer),  $X_n$ ,  $X_{n-1}$  et  $X_{n-2}$  et en intégrant l'eq(1) entre  $X_n$  et  $X_{n+1}$

$$X^{n+1} = X^n + \frac{\Delta t}{24} (9 \tilde{V}^{n+1} + 19V^n - 5V^{n-1} + V^{n-2}) \quad (7)$$

where  $\tilde{V}^{n+1} = V(\tilde{X}^{n+1}, t^{n+1})$ .

La methode ABM est du 4 ordre et son erreur est donc du 5 ordre.

Avec l'expansion en série de Taylor on peut déduire les erreurs sur la partie predictive

$$X(t^{n+1}) - \tilde{X}^{n+1} \approx \frac{251}{720} X^{(5)n} (\Delta t)^5 \quad (8)$$

et sur la partie corrective

$$X(t^{n+1}) - X^{n+1} \approx -\frac{19}{720} X^{(5)n} (\Delta t)^5 \quad (9)$$

avec  $X(t^{n+1})$  à indiquer le vrai valeur

En mettant ensemble les eq 8 et 9

$$X(t^{n+1}) = \frac{251}{270} X^{n+1} + \frac{19}{720} \tilde{X}^{n+1} \quad (10)$$

Combine Eq. (6), (7) and (10), we can finally derive the advanced ABM scheme.

$$X^{n+1} = \frac{1}{270} \left[ 19 \tilde{X}^{n+1} + 251 \left[ X^n + \frac{\Delta t}{24} (9 \tilde{V}^{n+1} + 19V^n - 5V^{n-1} + V^{n-2}) \right] \right] \quad (11)$$

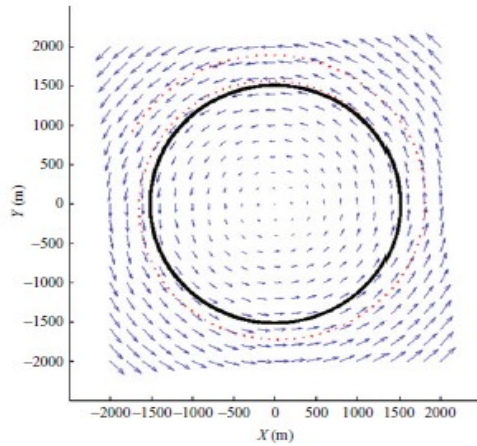
Here  $\tilde{X}^{n+1}$  is computed using Eq. (6). Special attention should be concerned that the scheme is not self starting. Therefore the RK method is needed to initiate the sheme, i.e. the locations in the first four time step are computed using the RK method.

One velocity field  $V(X, t^{n+1})$ , the previous particle position  $X^n$  and four previous particle velocities ( $V(X^n, t^n)$ ,  $V(X^{n-1}, t^{n-1})$ ,  $V(X^{n-2}, t^{n-2})$  and  $V(X^{n-3}, t^{n-3})$ ) are needed to calculate the new particle position. In a 3D flow field, the total internal memory usage for the advanced ABM scheme is as  $(\text{memory} \leq N_f + 15N_p \text{ words})$ .

In general, the storage for the field information is much greater than the number of particles. Therefore, on memory considerations alone, the Euler scheme and the advanced ABM scheme are much less required than the RK scheme.

During one timestep particle integration, the Euler scheme only need to evaluate one new function, however, the RK scheme involves four velocity evaluations, and the advanced ABM scheme adds one velocity evaluation. Therefore, on numerical computation considerations alone, the Euler scheme is the most efficient scheme. And the advanced ABM scheme is efficiently faster than the RK scheme.

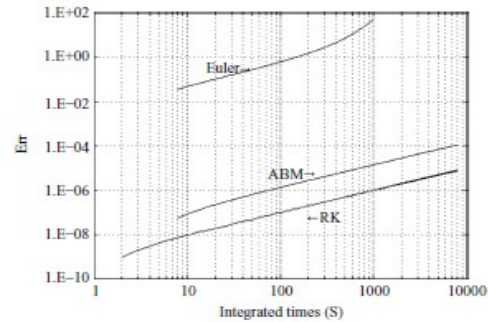
Qiu, Z.F., Doglioli, A.M., He, Y.J., Carlotti, F.(2011), *Lagrangian model of Zooplankton dispersion: numerical schemes comparisons and parameter sensitivity tests*. Chin. J. Oceanol. Limn., Vol. 29/2, pp.438-445, doi: 10.1007/s00343-011-0015-9



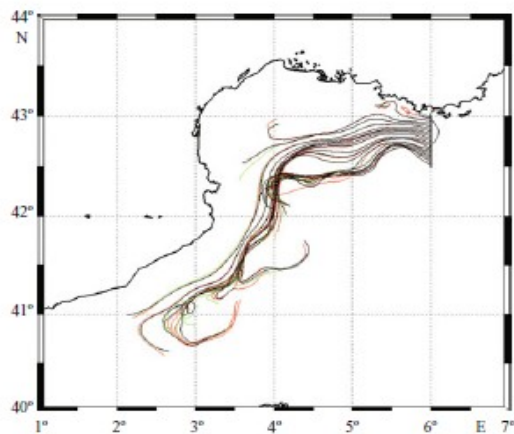
**Fig.1** Circular flow field given by Eq.8 for ( $\alpha=0$ ,  $b=0.001$ ) and the trajectories of the 1000 particles starting in a 10 m diameter circular cluster centered at the point (1500, 0)

The simulations with  $dt=60$  s of the Euler method and the advanced Adams-Bashfold-Moulton scheme are marked in red and black, respectively

We performed a convergence test where all 1000 particles were tracked for 5 h using the three schemes, with different time steps. The errors were computed using Eq.10 and are presented in Fig.3. The RK scheme and the advanced ABM scheme can attain very high precision. For example the errors were  $3.6E-06$  and  $5.0E-05$  with  $dt=100$  s, respectively. Note that to reach an error of 0.025,

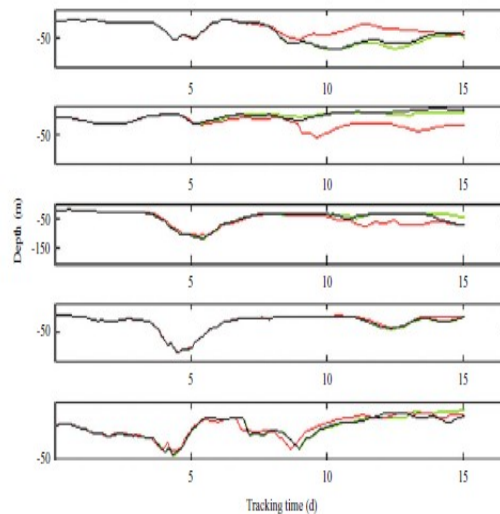


**Fig.2** Error evaluations for the Euler method, the Runge-Kutta scheme and the advanced Adams-Bashfold-Moulton scheme simulated with the time step  $dt=60$  s



**Fig.4** Trajectories of the 21 particles tracked 15 days with three different time steps

The initial locations are marked in black circulations and lines in black, green and red represent the trajectories of particles simulated with time steps  $dt=60$  s,  $dt=300$  s and  $dt=900$  s, respectively




**Fig.5** Depth variations of the 5 particles (of total 21) simulated with three different time steps

The lines in black, green and red represent the depth variations of the particles simulated with time steps  $dt=60$  s,  $dt=300$  s and  $dt=900$  s, respectively

## Lagrangian Coherent Structures and transport analysis in the oceans: theory and applications

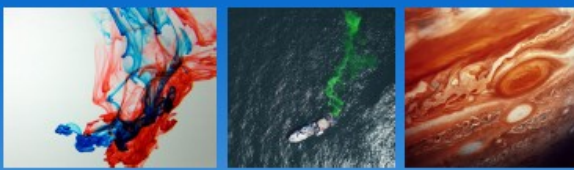
F. Nencioli <sup>1</sup>, F. d'Ovidio <sup>2</sup>, A.M. Doglioli <sup>1</sup> and A.A. Petrenko <sup>1</sup>

(1) Aix-Marseille Université, CNRS, IRP, LOPB-UMR 6635, Laboratoire d'Océanographie Physique et Biogéochimique, OSU/Centre d'Océanologie de Marseille, France  
(2) Laboratoire d'Océanographie et du Climat: Experimentation et Approches Numériques, IPSL, Paris, France



Student Seminar  
November 15, 2011, Marseille

### 1. Intro Transport in fluids



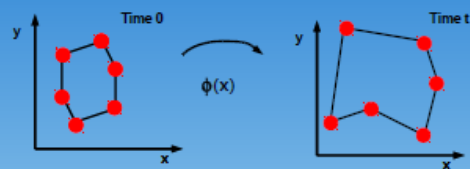
- Complex due to chaotic and turbulent nature of flow field
- Structures and patterns are present
- Mathematical methods to detect those patterns:
  - Finite Size Lyapunov Exponents (FSLE)
  - Lagrangian Coherent Structures (LCS)
- Developed for the analysis of DYNAMICAL SYSTEMS

### 2. Math Basic Definitions

#### Dynamical System

Mathematical concept consisting of

- 1) Space state (space where system can evolve)
- 2) Time (during which the system evolves)
- 3) Evolution Rule (which describes the temporal evolution of the system in the space state)



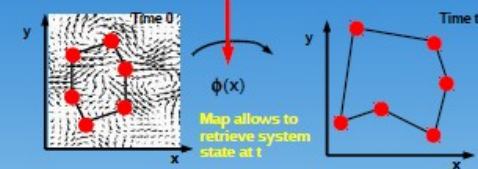
### 2. Math Basic Definitions

**Evolution Rule**  $\frac{dx}{dt} = f(x)$  with  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  State vector

**Map/Flow**  $x(t) = x(0) + \int_0^t f(x) dt$

**Velocity field**  $f(x) = \begin{pmatrix} f_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$

**Trajectory** (Temporal ordered collection of successive states)



### 2. Math Basic Definitions

- Trajectories in system space highly influenced by spatial distribution of **FIXED or EQUILIBRIUM POINTS**  $x^e$

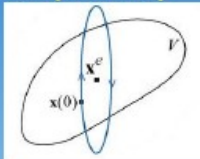
Characteristics:

- 1) Constant position in time  $x(t) = x^e$
- 2) Vector field is 0  $\frac{dx^e}{dt} = f(x^e) = 0$

- Classified depending on **LYAPUNOV STABILITY**:
- Fixed point is a **STABLE EQUILIBRIUM** point if trajectories of any point around it remains close to it with time (**UNSTABLE** if the contrary)

Further characterization:

- **ASYMPTOTIC** stable
- **EXPONENTIALLY** stable



### 2. Math Basic Definitions

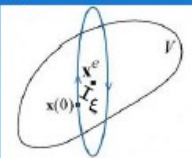
- To define type of equilibrium point **STABILITY ANALYSIS**

**System Linearization**:  $\frac{dx}{dt} = f(x) \rightarrow \frac{d(x^e + \xi)}{dt} = f(x^e + \xi)$

$\frac{dx^e}{dt} + \frac{d\xi}{dt} = f(x^e) + J(x^e)\xi + \mathcal{O}(|\xi|^2)$

$\frac{d\xi}{dt} = J(x^e)\xi$

**Jacobian matrix**

$$J(x^e) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{x=x^e} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=x^e}$$


### 2. Math Basic Definitions

- To define type of equilibrium point **STABILITY ANALYSIS**

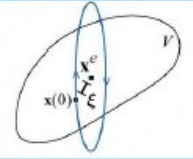
**System Linearization**:  $\frac{d\xi}{dt} = J(x^e)\xi$

**Solution to ODE**  $\xi(t) = \xi(0) \exp^{Jt}$

Eigenvalues of  $J$  can tell if the fixed point is stable or not

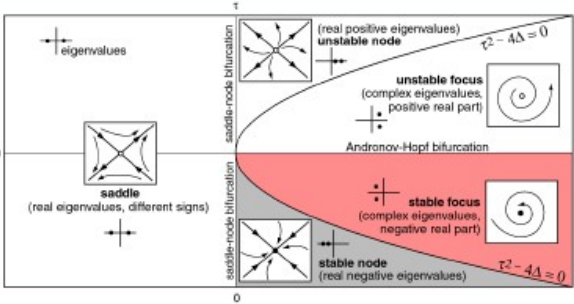
$$\det[J(x^e) - \lambda I] = 0$$

- Real or imaginary
- Positive or negative



### 2. Math Basic Definitions

- Types of equilibrium points



Regions defined by  $r^2 - 4\Delta = 0$  and  $r = 0$ .

- unstable node (real positive eigenvalues)
- unstable focus (complex eigenvalues, positive real part)
- saddle (real eigenvalues, different signs)
- stable focus (complex eigenvalues, negative real part)
- stable node (real negative eigenvalues)



**2. Math Basic Definitions**

- Particle dispersion around an hyperbolic point
- Manifolds separate distinct regions of the flow!!!

- Particles move along and spread across converging direction: STABLE MANIFOLD
- Particles align along diverging direction (transport barrier) UNSTABLE MANIFOLD

**3. LCS Finite Size Lyapunov Exponents**

- Theory for manifold analysis developed by Alexandr Lyapunov (June 6 1857 – November 3 1918)

- Lyapunov exponents introduced at the end of 1800
- Based on the rate of separation of initially close trajectories
- Assumes infinite temporal evolution and permanent equilibrium points

- Problem of applications with measured data:
  - 1) Temporally finite time series
  - 2) Time varying velocity field
  - 3) Only transient Hyperbolic points and Manifolds
- Finite Size/Time Lyapunov Exponent techniques developed in the late '80s to apply Lyapunov analysis to measured (temporally finite) velocity fields.

**3. LCS Finite Size Lyapunov Exponents**

- Based on local relative dispersion of initially near trajectories (integrate information of evolving velocity field)
- <http://mmae.iit.edu/shadden/LCS-tutorial/examples.html>

**Example STEADY FLOW:**

- Maximum values at points from where trajectories will diverge
- High Lyapunov Exponent values map the manifolds
- Ridges of Lyapunov Exponents are LAGRANGIAN COHERENT STRUCTURES

**3. LCS Finite Size Lyapunov Exponents**

- At each grid point deployed an array of four floats

$\xi(0) = \delta_0$

- Advected in time (forward or backward) with a Runge-Kutta 4<sup>th</sup> order (linear spatial and temporal interpolation)
- Recorded the time ( $\tau$ ) at which one of the distances becomes larger than a fixed spatial threshold (fixed size)

$\xi(\tau) = \delta_\tau$

- Lyapunov exponent is the inverse of that time

$$\xi(t) = \xi(0) \exp^{\lambda t} \quad \rightarrow \quad \delta_\tau = \delta_0 \exp^{\lambda \tau} \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{\tau} \log \left( \frac{\delta_\tau}{\delta_0} \right)$$

- Quantify separation of trajectories due to presence of hyperbolic point (exponential separation)

**3. LCS Finite Size Lyapunov Exponents**

$\lambda = \frac{1}{\tau} \log \left( \frac{\delta_\tau}{\delta_0} \right)$

- Grid resolution and separation distance (initial and final) all affect FSLE
- They must be accurately defined depending on the application

- FSLE Values:
  - The closer to the hyperbolic point the stronger the FSLE
  - The more intense the divergence/convergence at the hyperbolic point the stronger the FSLE
- IMPORTANT CONDITIONS:
  - Hyperbolic point must be persistent during integration
  - Its translation must be slower than local advection

**4. Apps Open ocean LCSs**

- Open ocean: LCSs from altimetry velocity fields using Lyapunov Exponents
- Detected structures compared to advected tracers

**LCSs (red) and SST - SW Mediterranean** (d'Oviedo et al., 2009)

**LCSs (black) and Chl - N Atlantic** (Lehahn et al., 2007)

- Accuracy still relatively untested in coastal areas

**4. Apps Coastal ocean LCSs**

- Coastal ocean: LCSs from HF Radar velocities (Monterey Bay, CA)

<http://mmae.iit.edu/shadden/LCS-tutorial/oceancurrents.html>


**4. Apps Biological impact of LCSs**

- Creation of ecological niches
- Structuring of phytoplankton communities

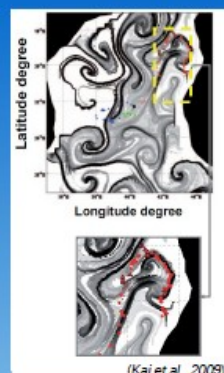
(d'Oviedo et al., 2010)

**4. Apps Biological impact of LCSs**

- Influences on marine top-predator (e.g. Frigates in Mozambique)



<http://www.migratoryconnectivityproject.org/tracking/satellite>




(Kai et al., 2009)

**Real-time in-situ tracking of Lagrangian coherent structures in a coastal region**

F. Nencioli <sup>1</sup>, F. d'Ovidio <sup>2</sup>, A.M. Doglioli <sup>1</sup> and A.A. Petrenko <sup>1</sup>

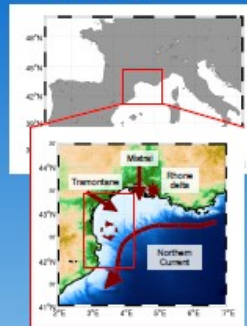
(1) Aix-Marseille Université; CNRS; IRD; LOPB-UMR 6535, Laboratoire d'Océanographie Physique et Biogéochimique, OBU/Centre d'Océanologie de Marseille, France  
(2) Laboratoire d'Océanographie et du Climat: Expérimentation et Approches Numériques, IPSL, Paris, France



EGU General Assembly 2011  
April 8, 2011, Vienna

**1. Intro The Gulf of Lion**

- Altimetry LCSs compared to *in-situ* LCSs in the Gulf of Lion (GoL)



- Large continental shelf
- Three main forcings:
  - Mistral & Tramontane
  - Delta of Rhone river
  - Northern Current
- NC dynamical barrier to cross-shelf exchanges
- (Sub)mesoscale anticyclones in the western part

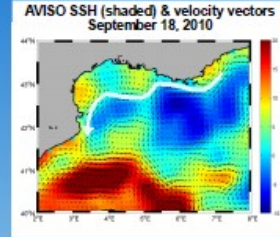
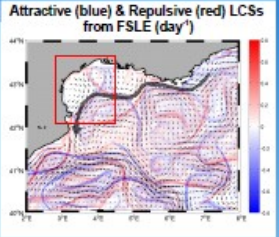
**Lagrangian Transport Experiment**  
Latex10, September 1-24, 2010

Transport and biogeochemistry in the western part of the GoL.

3 of 13

**2. Methods Altimetry LCSs**

- Altimetry LCSs from AVISO velocities using Finite-size Lyapunov exponents analysis (FSLE; d'Ovidio et al., 2004)
- Geostrophic surface velocity fields derived from SSH
- 1/8 degree, daily

4 of 13

**2. Methods In-situ LCSs**

**Latex10 Adaptive Sampling Strategy for detection of *in-situ* LCSs:**

- Position of large scale LCSs estimated from altimetry derived FSLE
- In-situ* deployment of drifters
- Mapping of *in-situ* velocities (hull mounted ADCP)

Deployment of 3 drifter arrays:

- Lyap01 (September 12)
- Lyap02 (September 18)
- Lyap03 (September 21)

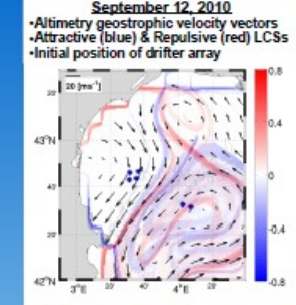


5 of 13

**3. Results Lyap01 – Sept 12 - 14**

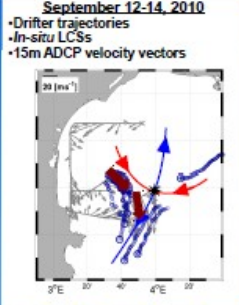
**September 12, 2010**

- Altimetry geostrophic velocity vectors
- Attractive (blue) & Repulsive (red) LCSs
- Initial position of drifter array



**September 12-14, 2010**

- Drifter trajectories
- In-situ* LCSs
- 15m ADCP velocity vectors



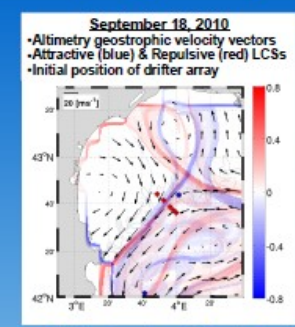
- Repelling LCS on the continental shelf not detected
- Confirmed by ADCP velocities

6 of 13

**3. Results Lyap02 – Sept 18 - 20**

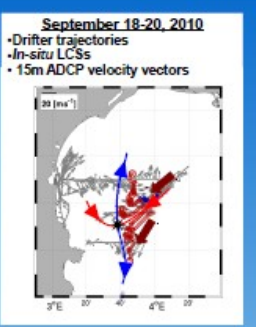
**September 18, 2010**

- Altimetry geostrophic velocity vectors
- Attractive (blue) & Repulsive (red) LCSs
- Initial position of drifter array



**September 18-20, 2010**

- Drifter trajectories
- In-situ* LCSs
- 15m ADCP velocity vectors



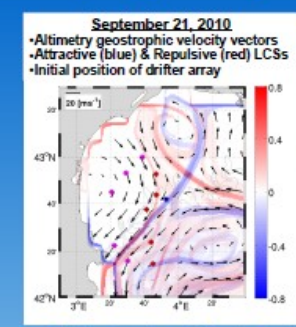
- Satellite structures similar to Sept. 12
- Accurate identification of LCSs and hyperbolic point

7 of 13

**3. Results Lyap03 – Sept 21 - 24**

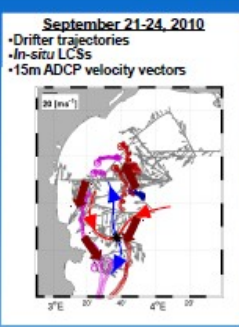
**September 21, 2010**

- Altimetry geostrophic velocity vectors
- Attractive (blue) & Repulsive (red) LCSs
- Initial position of drifter array



**September 21-24, 2010**

- Drifter trajectories
- In-situ* LCSs
- 15m ADCP velocity vectors



- Satellite structures similar to Sept. 12
- Cyclonic circulation on the continental shelf
- ADCP indicate presence of southward coastal jet

8 of 13

**3. Results** | **Lyap03 – Sept 21 - 24**

**September 21, 2010**

- Altimetry geostrophic velocity vectors
- Attractive (blue) & Repulsive (red) LCSs
- Initial position of drifter array

**September 21-24, 2010**

- Drifter trajectories
- In-situ LCSs
- 15m ADCP velocity vectors

- Satellite structures similar to Sept. 12
- Cyclonic circulation on the continental shelf
- ADCP indicate presence of southward coastal jet

8 of 13

**3. Results** | **LCSs and satellite imagery**

**September 14, 2010**

- AVHRR SST field
- Lyap01 drifter trajectories

**September 14, 2010**

- MODIS Chlorophyll concentrations (4 km resolution)

- In-situ LCSs associated with a front (NC and coastal waters)
- They identify coastal corridor along which water exit the GoL
- Importance of those structures to study cross-shelf exchanges
- Importance of those exchanges for biogeochemistry

10 of 13

**4. Concl.** | **Conclusions**

- Adaptive sampling strategy allowed to detect and track *in-situ* LCSs for two weeks
- Translational speed of hyperbolic point satisfies assumption for FSLE analysis
- LCSs identified a corridor along which coastal waters left the continental shelf of the GoL
- Altimetry LCSs showed some limitations in the coastal region
- Corrections are required to improve coastal transport analysis from altimetry velocity fields

11 of 13

**4. Concl.** | **Future Work**

- Quantification of transport
- Improve satellite velocity field:
  - + Different processing schemes for raw data
  - + Add ageostrophic components (Ekman, MIO...)
  - + HF Radar velocities
- Numerical models:
  - + Extend transport analysis to the whole GoL
  - + Test corrections
- Analysis of previous Latex datasets
- Further Lyap experiments (???)

**Final goal**  
Method for estimate & predict coastal transport/exchanges (pollutants, oil spill, larval/jellyfish transport, fisheries)

12 of 13

**LOPB** Jérôme Bouffard (LOPB-MIO, Marseille)  
Séminaire M2 **CNRS**

### Partie 1: Préambule

#### Apport de l'altimétrie pour l'observation de surface de la dynamique méso-échelle et sub méso-échelle régionale

2

### Définitions

**Méso-échelle:** échelle caractéristique des processus hydrodynamiques contrôlés par la *quasi-géostrophie* (eg Gill, 1982)

Tourbillon méso-échelle (campagne LATEX 2008, **crédit: LOPB-MIO**)

Equilibre rotation/stratification - Premier rayon interne de Rossby (10-100 km, Chelton et al., 1998)

**Sub-méso-échelle:** échelles < méso-échelle (-1-10 km)

Filaments sub-méso-échelles (campagne ELISA, **crédit: LOPB-MIO**)

**Dans cette exposé:** « (sub)méso-échelle » = méso-échelle + sub-méso-échelle

### Enjeux scientifiques et sociétaux

**Au niveau global**

- La (sub)méso-échelle influe sur le système climatique terrestre et les budgets de productivité primaire (Lavy, 2008)
- Essentiel des études dans l'océan ouvert à partir de simulations numériques (Klein et al., 2008)

**Aux échelles régionales et côtières ?**

- Peu d'études, pourtant 95% des enjeux socio-économiques localisés dans les régions côtières (Cohern et al., 1997)
- Moitié des côtes méditerranéennes **urbanisées** d'ici 2025 (Bergametti et Vaudin, 2008).
- Scénario en Méditerranée (GIEC, 2007): **Ouinotrophisation** de l'océan ouvert et **Eutrophisation** en zone côtière

**Etudier les facteurs physiques qui contrôlent les réponses des écosystèmes côtiers**

### Questions ouvertes

Quelles sont les échelles de variabilité temporelle de l'activité (sub)méso-échelle côtière ?

Quel est son rôle dans le mélange des masses d'eaux et de matières aux interfaces côte-large ?

Quelle théorie décrit le mieux les processus (sub)méso-échelles en zone côtière ?

**Défi**  
Observer à long terme la circulation régionale

**Moyen**  
S'appuyer sur des observations multi-sources complémentaires

### Approches classiques et limitations

- **Modélisation régionale + in-situ** (Hu et al., 2009, 2011; Alcou et al., 2010)
- **Campagnes en Mer** (LOPB/MIO; LATEX, IMEDA; SINOCOP ...)  
- « Cible les processus » mais **périodes courtes et/ou région limitée**  
- Courants verticaux **inaccessibles**
- **Les mouillages permanents** - marégraphes - radars HF (observatoires marins MOOSE - radar ECCOP du LSEET/MIO, SOCIB)  
Séries temporelles longues **mais** couverture spatiale restreinte

**Capter un spectre large de variabilité océanique**  
→ Augmenter l'échantillonnage → Recours aux observations satellites

### Principe général de l'altimétrie satellite

■ Mesure de la topographie de surface des océan

**Corrections environnementales**

- Troposphérique sèche
- Troposphérique humide
- Ionosphérique

**Corrections de biais d'état de mer**

- Biais électromagnétique
- Biais d'orbitalité

**Topographie dynamique absolue:**  
 $h_a = SSH / E - corrections - Géolide / E$

### Principe général de l'altimétrie satellite

■ Vocabulaire

**-Topographie dynamique absolue (1):**  
 $h_a = SSH / E - corrections - Géolide / E$   
Mesures altimétriques

**Comment ?** Sat. qui mesurent la gravité (GOCE, GRACE)  
**Problème:** Erreur

**-Anomalie de hauteur de Mer (2):**  
 $SLA = SSH / E - cor_{(SSH)} + cor_{(GEO)}$   
Mesures altimétriques

**Comment ?** Répétitivité du sat. Alti.  
**Problème:** pas hauteur relative

$Géolide / E - MDT / E$  **Comment ?** Cf. Rio et al. 2007

**D'où  $hd = SLA + MDT / E$**   
hd - Zeta (modèles numériques, cf Greatbatch et al., 1994; Bouffard et al., 2008)  
hd - Hauteur Dynamique (niveau ref ou courant = 0) (cf Pascual et al., 2003, Ruiz et al., 2008)

### Principe général de l'altimétrie satellite

Principe simplifié de l'altimétrie

Traces altimétriques et marégraphes

L'altimétrie satellite adaptée pour l'étude de la dynamique hauturière (El Nino, La Nina, Gulf Stream ...)

... mais inadaptée pour les études aux échelles régionales et côtières

### Principe général de l'altimétrie satellite

- Altimétrie côtière de nouvelle génération
- Nouvelles méthodologies développées afin d'améliorer les **mesures côtières** (Vignudelli et al., 2005; Bouffard, 2007; Roblou et al., 2011; Cipolini et al., 2010)
- Leur exploitation scientifique a permis de caractériser des structures fine (R~20km) jusque là inaccessible (courant ouest Corse: Bouffard et al., 2008b; CN: Bouffard, 2007; Biral et al., 2010; Bouffard et al., 2011)
- L'utilisation conjointe avec la modélisation et les mesures in-situ a permis de mieux appréhender l'**origine, les mécanismes** et les **structures verticales** associées (Bouffard et al., 2008a; Hermann et al., 2009; Bouffard et al., 2012)

14

### Principe général de l'altimétrie satellite

- Altimétrie côtière de nouvelle génération
- Amélioration des données
  - CLASSIQUE
  - AMELIORE
- Caractérisation de **courants côtiers**
  - Aux échelles (sub)saisonnnières, saisonnières
  - Courantomètres virtuels**
  - et inter-annuelles

15

### Principe général de l'altimétrie satellite

- De la mesure de hd au calcul du courant...
- The slope of the sea surface relative to the geoid ( $\partial z / \partial x$ ) is directly related to surface geostrophic currents. The two components ( $u_s, v_s$ ) of the surface geostrophic current

$$u_s = -\frac{g}{f} \frac{\partial \zeta}{\partial y}; \quad v_s = \frac{g}{f} \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

where  $g$  is gravity,  $f$  is the Coriolis parameter, and  $\zeta$  is the height of the sea surface above a level surface.

- Across-track currents

From Biral et al., 2010

### Principe général de l'altimétrie satellite

Très bien ...

...MAIS ...

...Données le long des traces **difficilement exploitables** pour étudier la turbulence mésoéchelle

**Nécessité de générer des champs 2D à haute résolution partit de l'Interpolation Optimale multi-satellite**

### Principe général de l'altimétrie satellite

- Qu'est ce que l'Interpolation Optimale

Champs de courants 2D pouvant être utilisé pour étudier le mélange et le transport lagrangien de particules (cf. présentation de Francesco)

**LOPB**

Partie 2: Une application

**On the influence of coastal mesoscale dynamics on the jellyfish trajectories and distributions**

*JELLYWATCH project*  
Modelling of jellyfish transport and stranding in the NWmed

### Main characteristics of *Pelagia Noctiluca*

- Sparse information on the Jellyfish repartition and the associated forcing (Temperature ? Currents ? Wind ? Food ? Predators ?)
- Numerous all along the year, in the NW-MED (Morand et al., 1992)
- At the surface during the night | migration at depth during the day (**Dial vertical motion (DVM)**: down to 400 m, Gorsky personal communication)

#### Main issues

- What are the impacts of mesoscale and coastal dynamics on the jellyfish trajectories / distribution ?
- In which way coastal-altimetry could be a powerful tool ?

### Strategy and data used

- **Strategy**: Using altimetry to simulate the advection of Jellyfish at the surface and at depth
- **Motivation**: altimetry provides almost synoptic currents that should allow a long-term monitoring of Jellyfish transport

**⚠ Limitation in coastal zone**

- Sub-sampling of coastal dynamics
- Significant error

Develop / use alti. products dedicated to coastal zone\*

*\* Dessaugat et al 2011, Escudier et al 2011 ...*

**⚠ NO subsurface information**

- Dial vertical motion of jellyfish !!!!
- Rely SSH to sub-surface geostrophic currents\*\*

Use of statistics from a realistic regional model

*Pascual et al 2003 (Vertical EQE de mesure in situ + SSH altimétrie)*

23

### Strategy and data used

- The symphonie model (POC-SIROCO, Toulouse) and study area characteristics

**Model: SYMPHONIE**  
(GoL config., Hu et al., 2008)

- Boussinesq model
- One way Nesting: 3km -> 1km
- Period 2001-2010

**Study area :NWMed**

- Northern Current (NC): seasonal variability (Gostan, 1967)
- Intense mesoscale variability: eddies, meanders (Millot, 1991)
- NC intrusion over the GoL continental shelf (Goi et al., 2008)
- Winter deep water formation characterized by a high interannual variability (Martins and schott, 1998; Homman, 2008)

Current (m/s) at 50 m

### Strategy and data used

- Altimetry: products used

- 2 kinds of (M)SLA: From regional AVISO and Higher Resolution (HR) product (correlation scales: 5 days/30km) from IMEDEA (Escudier et al., 2011)
- Validations with *in-situ* measurements from the LATEX08 experiment \*

\* Influence of submesoscale coupled physics - biogeochemistry on cross-shelf exchange: <http://www.com.univ-lyon.fr/LOBI/ITEX>

### Strategy and data used

- Methodology

- Step 1: Build daily Dynamic Height (DH) from T,S of SYMPHONIE model (period 2001-2010)
- Step 2: Compute a database of daily vertical EOF from the model DH
- Step 3: Create an EOF climatology from 10 years of simulation
- Step 4: If 1st mode highly dominant, reconstruct DH at a given depth by projecting altimetric ADT with the EOF climatology of the model

Advection with geostrophic currents by considering Jellyfish as passive particules with dial vertical migations

Is the 1st EOFmode highly dominant ?  
Is the climatology representative of daily EOF ?

### Reconstruction of sub-surface currents

- What is an EOF ?

Décomposition d'un champ Phi en somme de N mode propre *i*  
(~ diagonalisation de matrice)

$$DH(p) = \sum_{i=1}^N A_i(x, y) EOF_i(p)$$

Profil vertical fonction de la profondeur p

Amplitude (indépendante de p)

Si Mode 1 dominant: variance(Mode1) >> variance(Modei)

$$\Phi_{x,y}(p) = A_1(x, y) EOF_1(p)$$

$$DH(p) = A_1(x, y) EOF_1(p)$$

### Reconstruction of sub-surface currents

- Create an EOF climatology from 10 years of simulation

Weights of mode 1 / month

Climatology vertical EOF (mode 1)

1st mode : 70 % < weights < 84 %

Representativity of the climatology 8% < error < 14 %

### Reconstruction of sub-surface currents

- Create an climatology of EOF from 10 years of simulation:
- If the first mode is highly dominant (as noted in Pascual et al., 2003):

$$DH(t, 250m) = DH(t, 0m) EOF_1(t, 250m) / EOF_1(t, 0m)$$

DH rebuilt at 250 m

Altimetric ADT (AVISO and HR products)

EOF Climatology (from SYMPHONIE)

Geostrophic current at 250m

Are model and altimetric currents sufficiently consistents ?

### Validations / comparisons

- Altimetry vs SYMPHONIE model currents (April - october 2008)
- At the surface (m/s):

MEAN

STD

Good agreement between model and altimetry (NC intensity/position ...)

### Validations / comparisons

- Altimetry vs LATEX08 drifters comparisons (U & V components)

Method

- Altimetry: current space/time interpolation at 3 drifter locations
- Drifters: current calculated by finite differences (5 days filtered)
- Ekman current removed

Comparisons (with HR Dob)

- Drifter 1 and 2: Good agreement for both (U,V) (absolute mean difference < mean absolute, correlations > 0.5)
- Drifter 3: Strong Disagreement (lag between the coastal structures)
- Statistics slightly better with AVISO than with the HR product

What about the trajectories ?

### Validations / comparisons

- Altimetry vs LATEX08 drifters comparisons (lagrangian)

**Method**

- Virtual particles launched around the LATEX drifters initial positions.
- Particles advected 47 days using RK4 and surface altimetric currents

**Results (with HR-Dobricic)**

- The particles follow the main temperature fronts
- Very good agreement between the drifters 1 and 2 and the advected particles
- No particle follows the drifter 3 which is advected by a coastal eddy (cf. Hu et al., 2009)

Particles advection from altimetry (HR (M)SLA + MDT Dob) and drifters trajectories

### Validations / comparisons

- Altimetry vs LATEX08 drifters comparisons (lagrangian)
- Sensitivity to altimetric product used

« AMELIORE » allows a better agreement with drifter 2  
No product allows advection by the coastal eddy (observed with drifters3) Why ?

### Validations / comparisons

- Altimetry vs LATEX08 drifters comparisons (lagrangian)
- Particles advection with a 10 day delay

In that case, altimetric currents capture the coastal Eddy (2 coastal tracks intercept the structure) → Importance of track availability

### Jellyfish trajectories (preliminary results)

- Simple 40 day forward advection with altimetric surface currents
- Virtual Jellyfish launched each month from 3 different locations

North GoL: Most of the particles remain on the GoL  
West/East GoL: Advection southern by the NC in direction of the Balearic Sea.

### Jellyfish trajectories (preliminary results)

- 40 day forward advection by taking into account the DVM
- Virtual Jellyfish launched each month from 3 different locations

North GoL: Much more particles advected to the south (3 times more)  
West/East GoL: Differences, but patterns also depending on the NC dynamics

### Jellyfish trajectories (preliminary results)

- Statistics: differences due to DVM and altimetric products used
- % of particles shored (/ total particles launched) over 4 areas

**Advection at the surface**

**Advection with DVM**

**Spatial repartition**

- Much more particles over the GoL (~50%...)
- Significant differences (e.g. West GoL > 10%)

**Influence of the DVM**

Also significant (e.g. AVISO RIO)

### Conclusions and perspectives

- Conclusions**
  - Lagrangian approach is a powerful tool to evaluate coastal altimetry
  - Our simple approach to simulate jellyfish trajectories shows:
    - The influence of the NC (results in agreement with Qin et al., 2008)
    - The importance of the DVM
- Perspectives (on-going work)**
  - The landfall of Jellyfish needs to be validated with independent data (observations of life guard: number of bite per season etc...)
  - The effect of the wind has to be considered
  - Complexity in the Jellyfish behavior by coupling coastal altimetric current with an ecological model (LAGOO, Qin et al., 2008)
  - Study the interannual variability of jellyfish distribution and better understand its potential relation with climatological indexes

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB344 - POLU_MER 2010-2011 Andrea M. Doglioli	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---	--

*Seminar*

*Title*

*Modelling of aquaculture waste dispersion and benthic degradation in Ligurian coastal waters*

*Authors*

*Patrizia De Gaetano, Andrea M. Doglioli, Marcello G. Magaldi, Paolo Vassallo, Marco Bartoli*

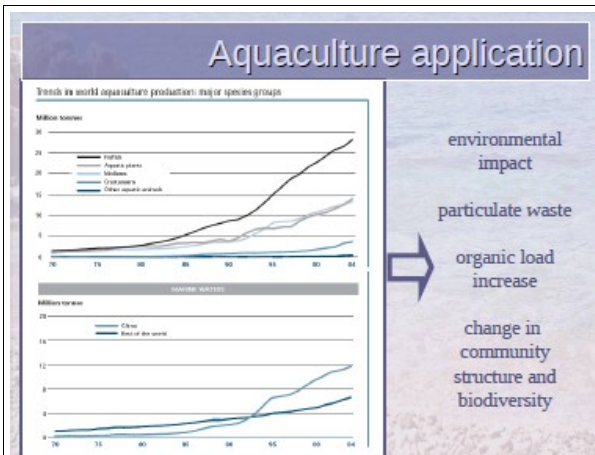
*Abstract*

*A new numerical benthic degradative module FOAM (Finite Organic Accumulation Module) has been coupled with the advection-dispersion model POM-LAMP3D in order to improve the prediction of the potential impact of marine fish farms. Moreover real historic current-meter data are employed to force the hydrodynamic and dispersion simulations and recent measurements of settling velocity values specifically targeting Mediterranean fish species are considered.*

*FOAM uses the output of the other functional units of the modeling framework to calculate the organic load on the seabed. It considers the natural capability of the seafloor in absorbing part of the organic load. Different remineralization rates reflect the sediment stress levels and are used to compute the organic carbon concentration remaining on the seabed after degradation. Two sampling campaigns have been performed in a typical Mediterranean fish farm in the warm and cold season in 2006 in order to measure the benthic response to the organic load and the mineralization rates in the Mediterranean conditions. Organic degradation for both uneaten feed and faeces is evaluated by changing release modality (continuous and periodical) and by varying the settling velocities. The results show that in the Mediterranean conditions, the benthic response to the organic enrichment of the bottom depends on water temperature.*

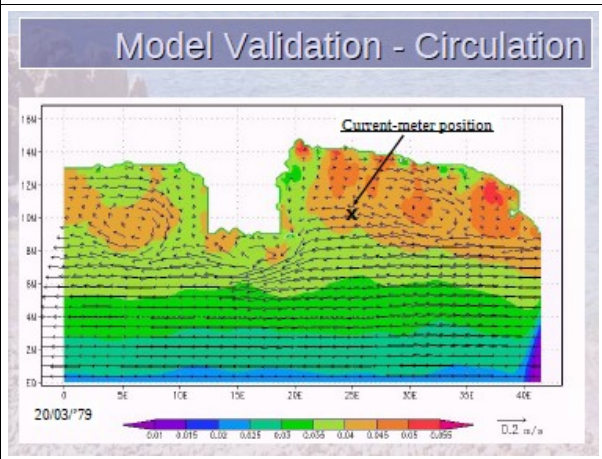
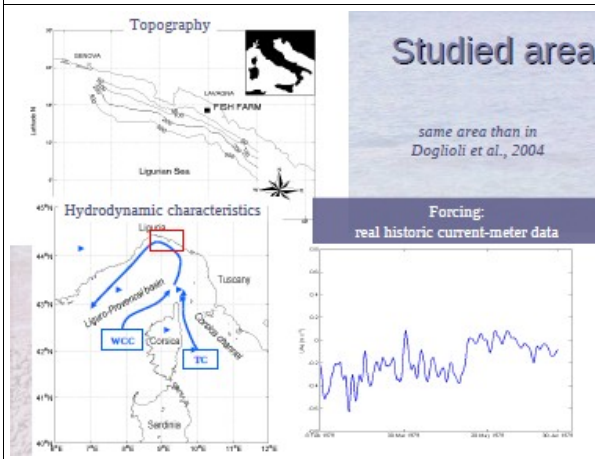
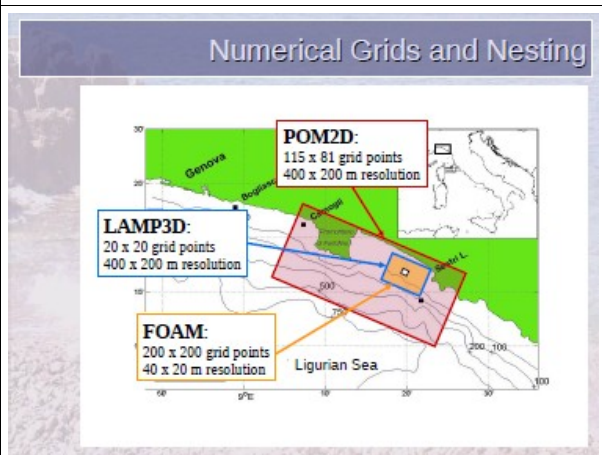
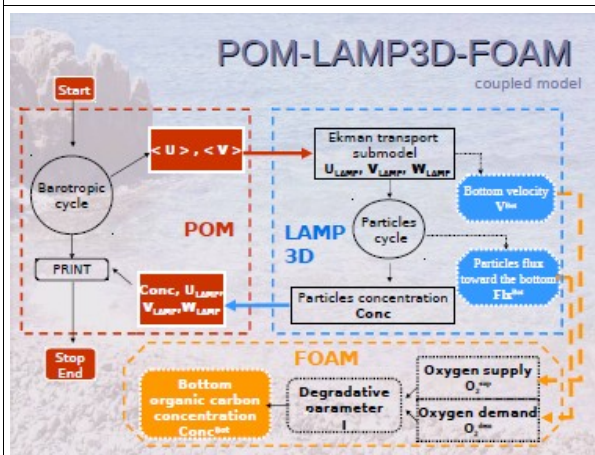
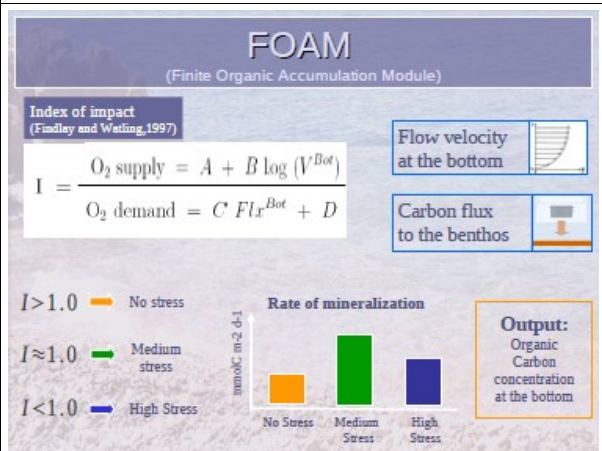
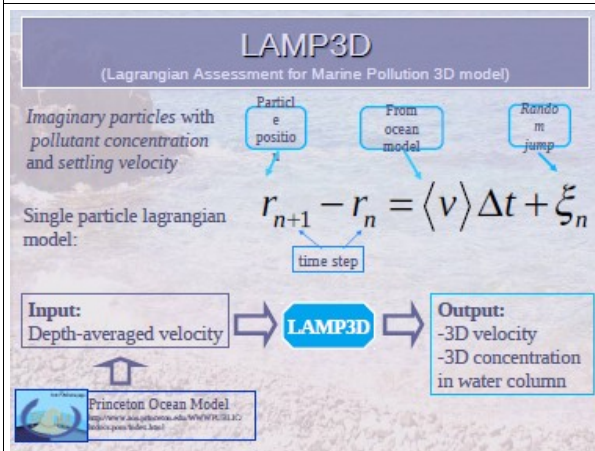
*We find that the introduced modeling framework successfully improves capability predictions. It can therefore represent an important tool in decision making processes, for planning and monitoring purposes.*

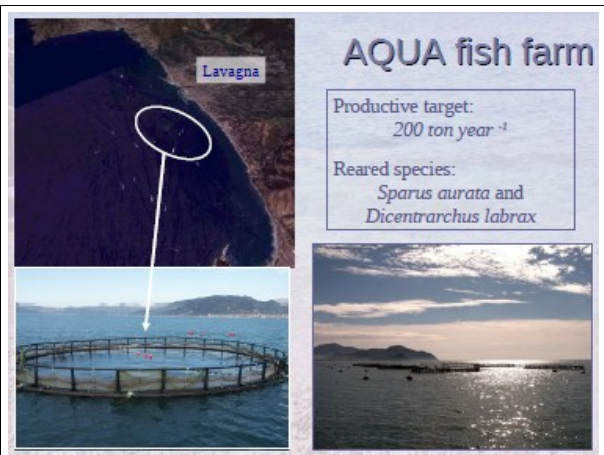
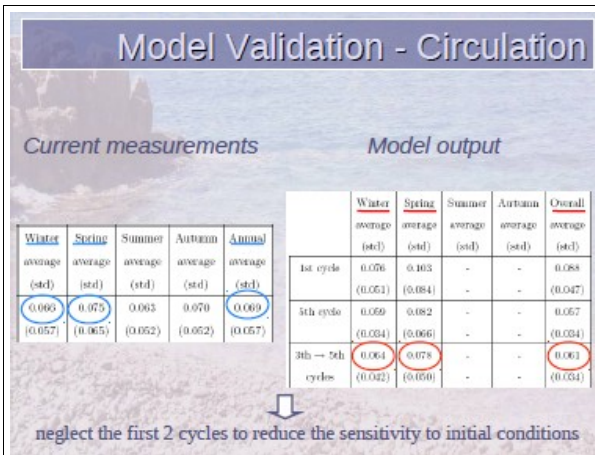




**MAIN QUESTION:**  
potential impact on surrounding environment

**METHOD:**  
implementation of advection-dispersion model POM-LAMP3D and add a new coupled benthic module FOAM.  
evaluation and assess the environmental impact from marine fish farm





### Wastes Particles

620000 Numerical particle released

	Uneaten feed	Faecal matter
	Feed conversion factor = 1.3 kg pellet/kg fish % of feed supplied = 5%	Faecal production = 1.9 g/kg fish
<b>C</b>	% in feed = 45% <b>1 particles = 308.6 mmol C</b>	% organic carbon = 28% <b>1 particles = 5.8 mmol C</b>
<b>N</b>	% in feed = 6.6% <b>1 particles = 167.8 mmol N</b>	% particulated = 22% <b>1 particles = 66.4 mmol N</b>

### Settling velocity

uneaten feed and faeces values specifically targeting Mediterranean fish

Vassallo et al, 2006		Magill et al, 2006	
Food pellets		Faecal pellets	
Diameter (mm)	V <sub>sed</sub> (m s <sup>-1</sup> )	Fish species   size (g)	V <sub>sed</sub> (m s <sup>-1</sup> )
3	0.087	<i>S. Aurata</i> [380]	0.004
3.5	0.118	<i>S. Aurata</i> [60]	0.005
4.5	0.103	<i>D. Labrax</i> [280]	0.006
5	0.144	<i>D. Labrax</i> [80]	0.007
6	0.088		

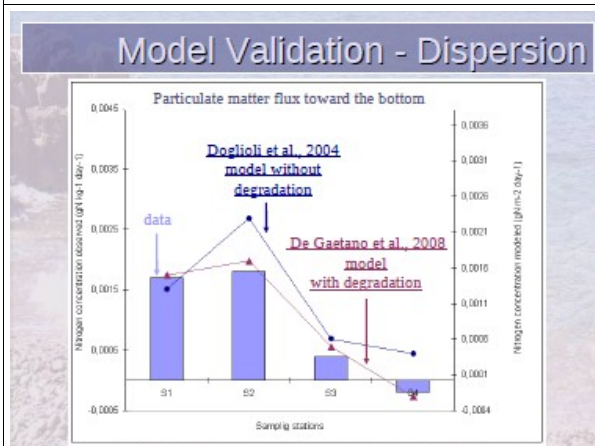
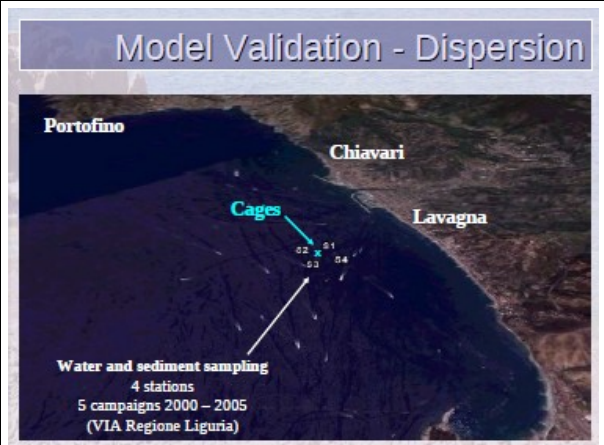
### Model Set Up

Different scenarios

- waste typology { feed, faeces
- settling velocity { slowly sinking, quickly sinking
- release conditions { continuous, periodical

Indicators

- Impacted area extension
- Barycenter positions
- I parameter
- Organic Carbon concentration



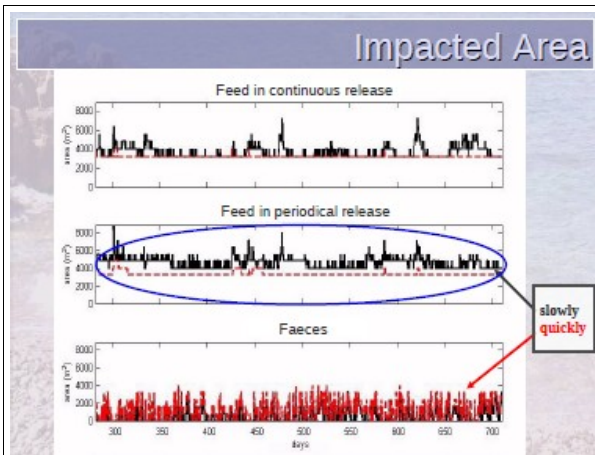
### Impacted Area

Impacted Area  
sum of the grid meshed areas where particles are still present after the degradation.

$$Area = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M \phi(Conc_{i,j}^{Bot}) \Delta x_i \Delta y_j$$

$$\phi(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi > 0 \\ 0 & \text{if } \xi = 0 \end{cases}$$

M = mesh number in x direction  
 N = mesh number in y direction  
 Δx = mesh grid length in x direction (m)  
 Δy = mesh grid length in y direction (m)  
 Conc<sup>Bot</sup> = organic carbon concentration remaining of the bottom after degradation



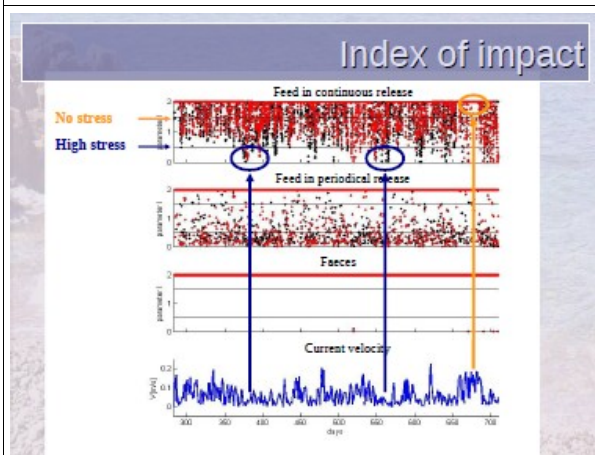
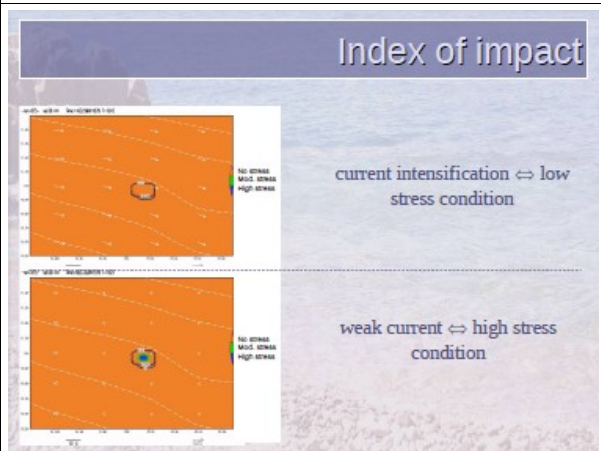
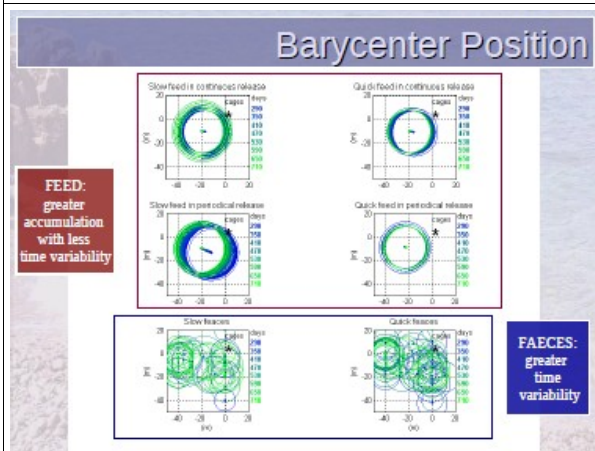
### Barycenter Position

*Barycenter position:*  
*position weighted by particles number left in each cell*

$$x_b = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M i \cdot n_{i,j}^{left}}{n_{Tot}^{left}}$$

$$y_b = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M j \cdot n_{i,j}^{left}}{n_{Tot}^{left}}$$

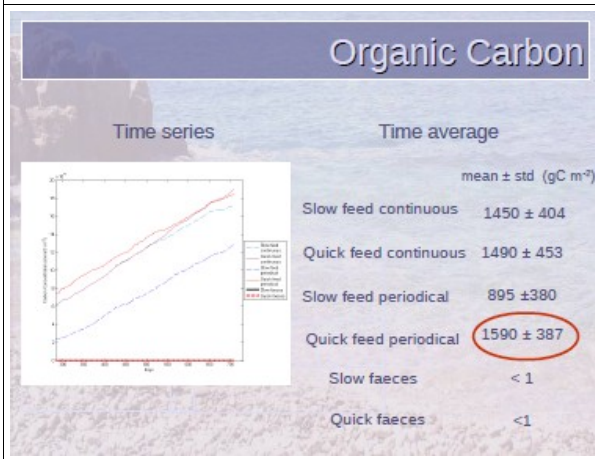
M = number of meshes in x direction  
N = number of meshes in y direction  
 $n_{i,j}^{left}$  = particle number left on the bottom in mesh ij  
 $n_{Tot}^{left}$  = total number of particles left on the bottom after degradation



### Index of impact

Occurrence

	No stress I > 1.5	Medium Stress I = 1	High Stress I < 0.5
Feed periodical released	87 %	4 %	9 %
Feed continuous released	71 %	27 %	2 %
faeces	98 %	1 %	1 %



### Summary

**Aquaculture Research**  
Aquaculture Research, 2018, 1-14  
doi:10.1080/20920909.2018.1500000

**FOAM, a new simple benthic degradative module for the LAMP3D model: an application to a Mediterranean fish farm**

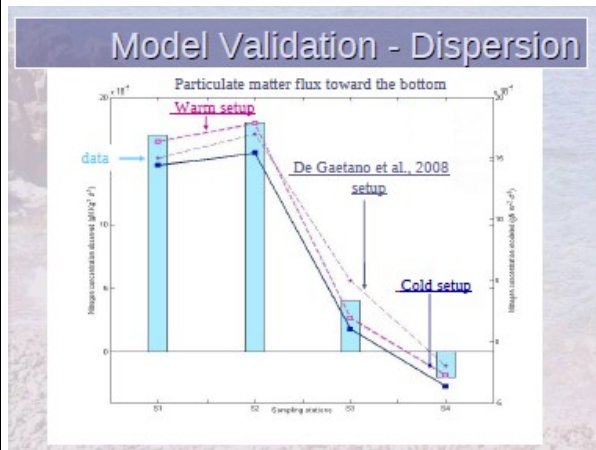
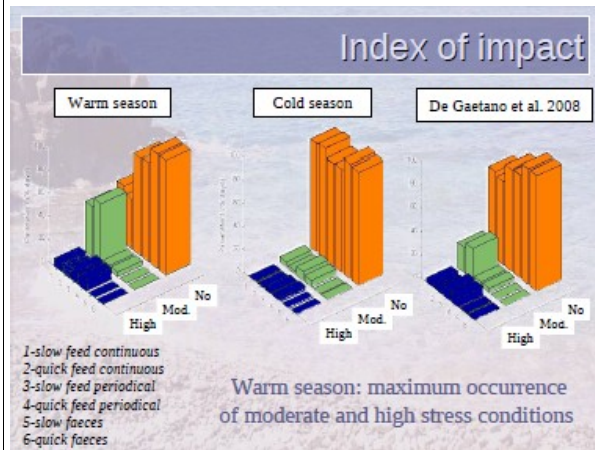
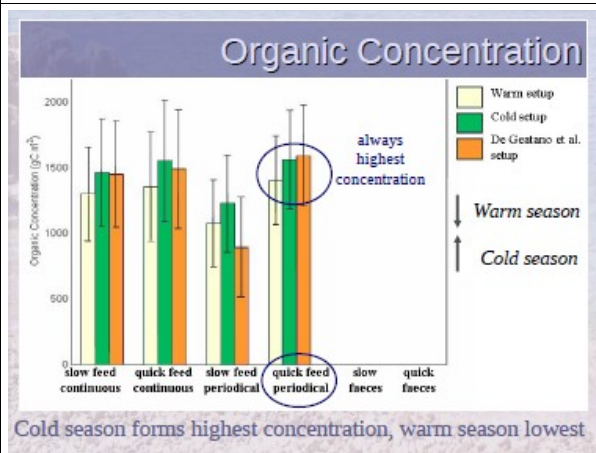
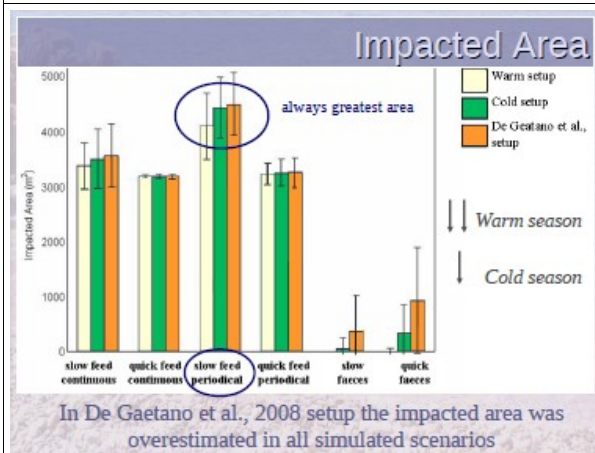
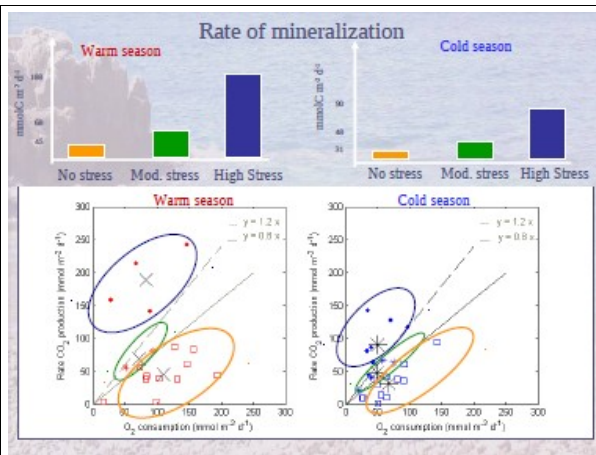
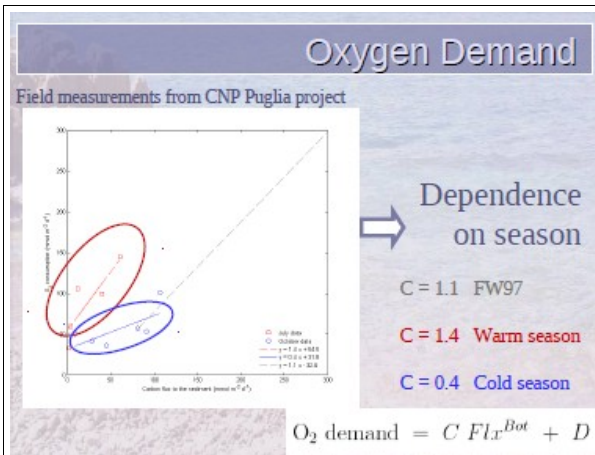
Paola De Gennaro<sup>1</sup>, Andrea M. Doglioli<sup>1</sup>, Marcello G. Magalhães<sup>2</sup>, Paolo Turchillo<sup>3</sup> & Marco Fodda<sup>4</sup>  
<sup>1</sup>VSB Dipartimento di Pesca, Università di Genova, Genova, Italy  
<sup>2</sup>Laboratoire d'Océanographie Pélagique et Régionale, LOPR/UMR 7073, CNRS, Océan de Génève et de la Méditerranée, Université de Savoie, Savoie, France  
<sup>3</sup>Università di Scienze del Mare, Dipartimento di Scienze del Mare e dell'Atmosfera, Università di Scienze del Mare, Università del Salento, Lecce, Italy  
<sup>4</sup>IRAP/UMR, Dipartimento per lo Studio dell'Interazione delle Acque Oceaniche, Università di Genova, Genova, Italy

Correspondence: P. De Gennaro, IRAP, Dipartimento di Pesca, Università di Genova, Via Polignone 15, 16139 Genova, Italy. Email: pdegen@unige.it

Uneaten feed  
primary  
cause of impact

Periodical release  
worst condition of  
sediment stress and  
carbon concentration

Open question: Mineralization rates in Mediterranean conditions improve modelling reliability?



### Conclusion and Outlook

A new calibration of FOAM based on experimentally measured Mediterranean mineralization rates in cold and warm seasons

Patricia De Gaetano<sup>1</sup>, Paolo Yasullo<sup>1</sup>, Marco Bartoli<sup>2</sup>, Davide Nizzoli<sup>3</sup>, Andrea M. Doglioli<sup>4</sup>, Marcello G. Manzoli<sup>5</sup>, Mauro Fabiano<sup>6</sup>

<sup>1</sup> IORF, Dipartimento di Pesca, Università di Genova, Genova, Italy  
<sup>2</sup> DIPPEDES, Dipartimento per lo Studio del Territorio e delle sue Risorse, Università di Genova, Genova, Italy  
<sup>3</sup> DSA, Dipartimento di Scienze Ambientali, Università di Parma, Parma, Italy  
<sup>4</sup> Laboratorio di Oceanografia Fisica e Oceanografia Biologica, Università di Genova, Genova, Italy  
<sup>5</sup> Dipartimento di Scienze Fisiche, Chimiche e Geologiche, Università di Bari, Bari, Italy  
<sup>6</sup> Dipartimento di Scienze Fisiche, Chimiche e Geologiche, Università di Bari, Bari, Italy

Benthic metabolism depends on season

Results depend on simulated season:  
warm setup  
maximum impact while  
minimum area and  
concentration

Better prediction capability

**OUTLOOKS:**

- sampling campaign for benthic metabolism dependence on water temperature
- improve reliability of hydrodynamic model

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB344 - POLU_MER 2010-2011 Andrea M. Doglioli	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité FLuides, Environnement et Risques
--	---	--

*Seminar*

*Title*

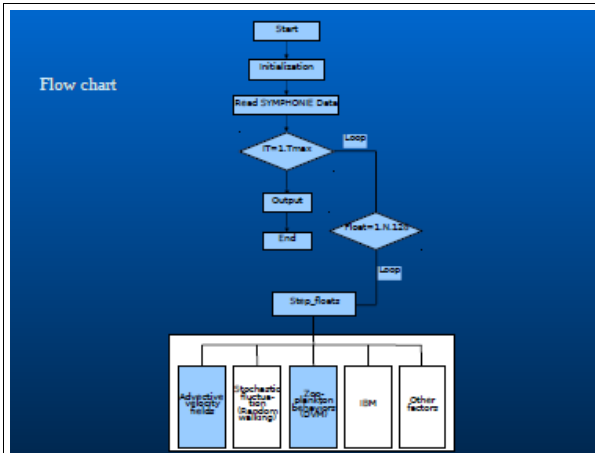
*The influence of hydrodynamic processes on zooplankton transport and distributions in the North Western Mediterranean Sea: estimates from a Lagrangian model*

*Authors*

*Z. F. Qiu, A. M. Doglioli, Z.Y.Hu, P. Marsaleix, F. Carlotti*

*Abstract*

*A Lagrangian module has been developed to simulate the transport and distributions of zooplankton individuals coupling with the 3D circulation model SYMPHONIE. The influence of hydrodynamic processes on zooplankton transport and distributions in the North Western Mediterranean Sea (NWMS) has been investigated from March to August 2001. The individuals are either considered as passive particles or able to realize diel vertical migrations (DVM) with a simple swimming pattern. The individuals are released every 3 days from two areas: the surrounding of the DYFAMED sampling station in the central Ligurian sea and the plume of the Rhone river. The individuals are tracked during 40 days. Results suggest strong seasonal patterns appear in the distributions of the individuals released at DYFAMED sampling station. Individuals could be spread all over the NWMS basin after 40 days but different patterns occurs following the season, the depth of release of the individuals, and the capacity of DVM or not. An offshoreshelf transport only occur in April and May with particles ending in the Gulf of Lions (GoL) in low concentrations. For the other months, the north current can be properly considered as a barrier for particles entering into the GoL from the offshore sea. At the end of the 40 days, passive individuals released in the plume of the Rhone River are spread on the GoL shelf or in the Catalan sea. Following the season between a quarter to an half of the initial released individuals stay in the Gulf. Simple DVM behavior does not increase the retention on the shelf.*



### Lagrangian Model

We use a Lagrangian particle-tracking code based on the ROMS Offline Floats (ROFF, introduced in details by Carr et al. 2007)

- an advanced fourth-order accurate Adams-Bashford-Moulton predictor-corrector scheme is used for the tracking algorithm

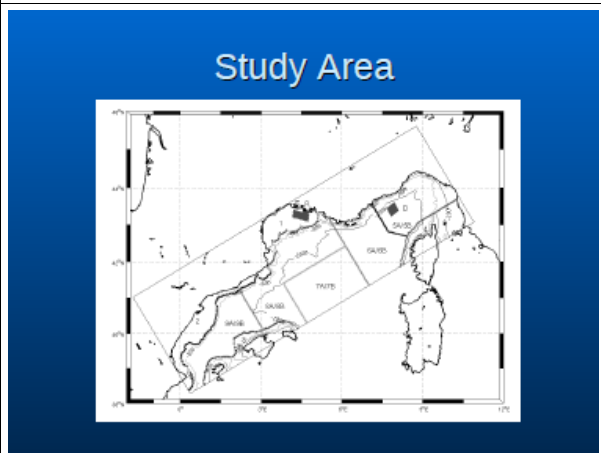
$$\frac{d\vec{x}/dt = \vec{u}(\vec{x}, t)}$$

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{u}_{sym} + \vec{u}_{DVM}$$

- $\vec{u}_{sym}$  are linearly interpolated from the velocity values of the 8 nearest grid cells, which are daily averaged simulations of the SYMPHONIE model, provided every 24 hours.

### DVM scheme

- if upper than -50m on 06:00, swim down with the velocity 50 m/h from 06:00 to 08:00
- otherwise the zooplankton transport processes are only determined by the velocity fields of the model circulation
- from 18:00 to 20:00, swim up from deeper depth to near-surface depth with the velocity 50 m/h.



### Model Approach

- Time step: 300s
- SYMPHONIE data: spatial resolution of 3KM
- Starting time: March 1 ~ August 31, 2001, every 3 days
- Simulating time: 40 days
- Particles release information:
  - Location: R(Rhone river plume), D(Dyffamed station)
  - Number: 200 particles each location
  - Depth: -5m and -20m (R) -5m and -100m(D)
- Zooplankton behaviour: passive drift and with DVM

### Particles release at D

- After being transported for 40 days, the particles could launch almost anywhere in the NWMS.
- With the influence of the vertical variability of the currents, the final distributions are different with the particles released at different depths.

Blue square: release locations  
Red circles: final positions of particles released at -5m  
Green points: final positions of particles released at -100m.

- Strong seasonal patterns appear in the final distributions of the particles, which dues to the seasonal variability of the circulations, especially the North Current.
- Very few particles can enter into the GoL. The North Current is a barrier for particles entering the continental shelf in the GoL from the offshore seas.

### Particles release at R

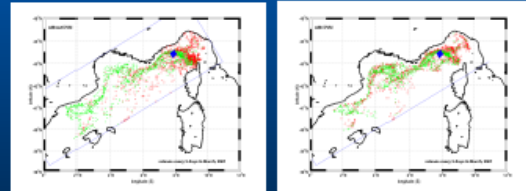
- Final distributions are separated into two parts: one remains in the GoL and the other goes out to scatter in the path of the North Current and in the Catalan Sea.

	1	2	3	
March	24	3	5	
Avril	47	1	1	

- After 40 days, 1/4-1/2 particles remain in the GoL. The GoL could be considered as a retention area for the zooplankton transport and distributions.
- Weak seasonal patterns appear in the final distributions of the particles. No one particle enters into the Ligurian Sea during the simulations.

## With DVM

- Final distributions of the particles released at D are mainly similar as the particles simulated without DVM, however more concentrated at the path of the main currents

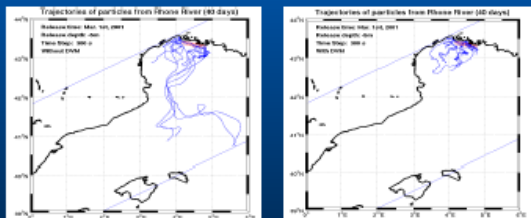


without DVM

with DVM

## DVM discuss

In an upwelling region, there are often offshore currents at the surface and onshore currents at deeper depths. Consequently DVM reduces the transport of the particles away from the region, compared to the particles transport passively at the surface.



without DVM

with DVM

## Conclusion

- A Lagrangian module has been developed to simulate the transport and distributions of zooplankton individuals coupling with SYMPHONIE
- Strong seasonal patterns appear in the distributions of the individuals released at DYFAMED sampling station. Individuals could be spread all over the NWMS basin after 40 days but different patterns occurs following the season, the depth of release of the individuals, and the capacity of DVM or not.

## Next Step

- An offshore-shelf transport only occur in April to June. In the other months, the North Current can be properly considered as a barrier for particles entering into the GoL from the offshore sea.
- At the end of the 40 days, passive individuals released in the plume of the Rhone River are spread on the GoL shelf or in the Catalan sea. Following the season between a quarter to a half of the initial released individuals stay in the Gulf. Simple DVM behavior does not increase the retention on the shelf.

- Random Walk Scheme
- Nest codes
- Individual Based Model
- ...

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB344 - POLU_MER 2010-2011 Andrea M. Doglioli	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---	--

#### **4 Modélisation couplée physique/biogéochimie**

*Lagrangian particle-tracking models coupled with hydrodynamic models are particularly efficient tools to examine the role played by various physical processes, to study transport processes over an entire basin and to simulate complex and interactive processes acting at different scales.*

*Indeed the Lagrangian technique allows simplicity in adding different components: on the basis of a purely passive particle advection, modelers can linearly add sub-grid diffusion and biological behavior with different degrees of complexity.*

*In the following we concentrate on the coupling Eulerian and Lagrangian hydrodynamics.*

*As pointed out by Miller\_MarEcolProgSer07\_ContributionIBMUnderstandingRecruitment.pdf in a recent review paper on application of Individual Based Models (IBM) in fish recruitment studies, that models are frequently described as coupled physical–biological models, but, except some works (e.g. Hinckley96, Mullon03, Guizen06), the coupling of numerical simulation models was typically offline rather than in real time for computational reasons.*

*In this scheme, runs of the hydrodynamic model are completed and output is stored at set intervals. Then the IBM uses stored velocity data to move and track individual eggs and larvae throughout the model domain.*

*Adopting this approach it becomes crucial to provide subgrid-scale resolution of fluid flows. Indeed the horizontal and vertical spatial resolution of the hydrodynamic models are several orders of magnitude larger than the length scales of larvae.*

*Early models used a simple scheme that updates the position of tracked particles based on spatially interpolated model velocities with small random components.*

*As the field has developed, the particle tracking algorithms have become more sophisticated, with increasing attention being paid to the statistical aspects of the subgrid-scale motion. The stochasticity at subgrid scales creates an ensemble of trajectories for each starting location depending on the small-scale features of the flow critical for eggs and larva.*

*Then, individual particle movements are tracked offline with Lagrangian Statistical Models (LSM), assuming that the evolution of particle velocity and position in non-homogeneous, non-stationary*



Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB344 - POLU_MER 2010-2011 Andrea M. Doglioli	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---	--

turbulence can be represented as a Markovian process (e.g. Griffa 1996).

Generally a zero order Markovian process is adopted, also if recently some authors choose higher order (e.g. Paris et al. 07), to take into account the rotation of trajectories driven by submesoscale coherent vortices .

The Lagrangian single-particle tracking algorithms for a zero order Markovian process, are based on the following equation:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u} + \vec{u}' + \vec{u}_{larva} \quad (1)$$

where  $\vec{x} \equiv (x, y, z)$  is the 3D location,  $t$  is the time,  $\vec{u} \equiv \vec{u}(\vec{x}, t)$  is the flow velocity at the resolved scale,  $\vec{u}' \equiv \vec{u}'(\vec{x}, t)$  is the subgrid-scale fluctuating turbulent component of the velocity field and  $\vec{u}_{larva} \equiv \vec{u}_{larva}(\vec{x}, t)$  is the individual larva's velocity.

In the following we present a review of several papers to compare the different approaches to solve (1), as schematically presented in Table 4.1

The deterministic resolved-scale velocity  $\vec{u} \equiv \vec{u}(\vec{x}, t)$  is generally provided by an Eulerian model also if some authors obtained it directly from in situ data (Heat et al., 94). In both case, an interpolation of these data is necessary to obtain a value in each particle position from gridded data at each Lagrangian timestep.

Regarding horizontal interpolation, generally a linear one is done.

For example, Miller (98) interpolated from a finite triangular elements grid, while more frequently is performed an interpolation from a orthogonal curvilinear grid such as the one of ROMS model (e.g. Carr et al., Lett et al.) or SYMPHONIE model (Cianelli et al.). Moreover, Peliz et al (04) adapted AGRIF package ( <http://www-lmc.imag.fr/MOISE/AGRIF/> ) to manage the communication of floats through the different nested model domains.

In the vertical an interpolation is necessary too, in particular from terrain-following coordinate Eulerian models. Again a linear interpolation is generally adopted (e.g. Lett07, Cianelli07) .

In temporal dimension, some author proposed a linear interpolation when the time interval of the Lagrangian module is shorter than Eulerian model one (Miller98) but frequently the interpolation is not performed (Speirs, Lett, Cianelli, Paris) .

In this case, as pointed out by Guizen, the Lagrangian-model integration timestep is constrained by 2 factors.

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB344 - POLU_MER 2010-2011 Andrea M. Doglioli	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---	--

#### Markovian process order

> 0 <i>Paris07</i>	= 0 other all
-----------------------	------------------

#### U from ADCP data & linear interpolation

<i>Heat94</i>
---------------

#### U from eulerian model

Horizontal interpolation linear <i>Miller98 finite elements</i> <i>Cianelli07</i>	Vertical interpolation linear <i>Lett07 SIGMA</i> <i>Cianelli07</i>	Temporal interpolation	
		None <i>Speirs06</i> <i>Lett07</i> <i>Cianelli07</i> <i>Paris07</i>	linear <i>Miller98</i> <i>Lett08</i>

#### U' horizontal

nodiffusion <i>Lett07</i>  <i>Allain03</i>  <i>Cianelli07</i>	white noise <i>Speirs06</i>	randow walk <i>Guizen06 gaussian with</i> <i>s proportionale eulerian</i> <i>TKE</i> <i>Lett08, Peliz07</i> <i>disrrate+unresolvescale</i>
--	--------------------------------	---

#### U' vertical

nodiffusion <i>Lett07</i> <i>Allain03</i> <i>Cianelli07</i>	randow walk <i>Guizen06 from</i> <i>a gaussian with sigma</i> <i>proportional to</i> <i>eulerian TKE</i>	no-naif random walk <i>Peliz07</i> <i>Lett08 following</i> <i>Visser07 con cubic</i> <i>spline interp of diffusivity</i>	inertial eddies??? <i>Heat94</i>
--	--	--	-------------------------------------

#### ULARVA

<i>ontogenic changes+sensitivity to the light+interindividual varaibility (Guizen)</i>
--

#### schemes

Euler <i>Guizen06</i> <i>Lett07</i> <i>Lett08</i>	Adams-Bashford-Multon <i>Carr06</i> <i>Lett07</i> <i>Peliz07</i>	RungeKutta <i>Lett08</i>
--	---	-----------------------------

#### coupling with thermohydrodynamics

<i>Lett07, Lett08, Hinckley96, Mullon03</i>
---

#### AGRIF

<i>Peliz07</i>
----------------

Table 4.1

First, it depends on Stokes number, i.e. the ratio of the particle to fluid response times.

Second, fluctuating velocities should be updated every time a larva encounters a new eddy. This particle-eddy interaction time can be defined as the minimum between the eddy life time and the eddy transit time through a cell. The authors estimate that the particle-eddy interaction time is the transit time of fast moving surface waves through a cell, i.e. close to the barotropic mode timestep of the 3D

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB344 - POLU_MER 2010-2011 Andrea M. Doglioli	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---	--

eulerian model. Then, theoretically the integration timestep for Eq. (1) should be lower than this particle-eddy interaction time. At the same time, several studies in physical oceanography suggest methods to evaluate error and sensitivity to time sampling for off line lagrangian particles, using for example *Finite Liapunov Exponents* (Judicone et al. OceanModel02\_SensitivityNumericalTracerTrajectories.pdf) or the ensemble-averaged position deviations from a reference case (Valdivieso\_Blanke\_OceanModel04\_lagrangianmethodsClimatologyTrajectoryError.pdf).

In practice, Guizen06 integrated Eq.(1) over the baroclinic timestep, considering that however i) the circulation flow velocity and the larva's own velocity vary slowly and ii) the turbulent velocities provided by the Eulerian model are averaged over the baroclinic timestep.

The subgrid-scale fluctuating turbulent component of the velocity field  $\vec{u}' \equiv \vec{u}'(\vec{x}, t)$  is sometime completely neglected in zooplankton studies and Lagrangian particles treated as purely passive particles (Lett07, Allain03, Cianelli07). Other authors simulate the horizontal subgrid turbulence as a white noise (Speirs06). In Guizen06 the turbulent velocity both in horizontal and vertical is obtained by randomly sampling a Gaussian distribution with standard deviation  $\sqrt{2k/3}$  where  $k$  is the Turbulent Kinetic Energy provided by the eulerian model (in this specific case by the Gaspar et al, 1990, turbulence closure submodel).

A more sophisticated model is developed by Peliz04, and successively adopted by Lett08, as regarding the horizontal diffusion. Indeed, horizontal diffusion is based on a random component introduced to the horizontal velocity vector using

$$|\vec{u}'| = \delta \sqrt{2 K_h / \Delta t}$$

where  $\delta \in [-1, 1]$  is a real uniform random number and  $K_h$  is the imposed explicit Lagrangian horizontal diffusion of the form  $K_h = \epsilon^{1/3} l^{4/3}$  where  $l$  is the unresolved subgrid scale (taken as the cell size) and  $\epsilon = 10^{-9} \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$  is the turbulent dissipation rate (e.g., Monin and Ozmidov, 1981).

In the vertical Peliz04 compute the random fluctuation associated with unresolved vertical turbulent fluxes:

$$w' = \delta \sqrt{\frac{2K}{1/3 \Delta t} + \frac{dK}{dz}}$$

where  $K$  is the vertical heat turbulent diffusivity taken from the KPP (Large et al., 1991) turbulent closure submodel. According to Ross and Sharples (2004) a correct implementation of this equation

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB344 - POLU_MER 2010-2011 Andrea M. Doglioli	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---	--

requires a timestep constraint  $\Delta t \ll \min \left( 1 / \left| \frac{d^2 K}{dz^2} \right| \right)$ . This implies that the Lagrangian model has to be implemented in a sub-timestep relative to the main baroclinic model timestep.

In the vertical Lett08 implemented a so-called “no-naive” random walk (Visser97) where with respect to classical random walk model a correction term to make the random walk consistent with the physical description of non-uniform diffusivity.

$$Z_{n+1} = Z_n + K'(z_n)\delta t + R\{2r^{-1}K[z_n + 1/2 K'(z_n)\delta t]\delta t\}^{1/2}$$

where  $K' = \delta K / \delta z$  represent the gradient of diffusivity.

Concerning the individual larva's velocity  $\vec{u}_{larva} \equiv \vec{u}_{larva}(\vec{x}, t)$ , the reader is referred to the previous paragraph?????

In order to solve numerically eq.1, several numerical schemes are used. The three widely used schemes are the Euler method (Parada et al, Guizien et al., 2006; Lett et al., 2007), the Runge-Kutta (RK) method (Batchelder et al., 2002; Oliveira et al., 2002; Tittensor et al., 2003) and the Adams-Bashfold-Moulton (ABM) method (Peliz et al., 2007; Carr et al., 2008; Qiu et al., 2008).

An advantage of the Euler scheme is that only one velocity field is needed to calculate the particle velocity at the new particle position, assuring a saving of computer memory.

$$X^{n+1} = X^n + \vec{V}(X^n, t^n) \Delta t \quad (3)$$

The main drawback of this method is that it is only first order accurate and therefore particle trajectories may diverge from the real ones as the time advances unless the timestep is very small (Bennett and Clites, 1987).

The Runge-Kutta scheme is based on iterative method of estimation of solutions. Generally the order 4 scheme is adopted which requires more calculations but it has a fourth order accuracy.

$$X^{n+1} = X^n + \frac{\Delta t}{6} (a + 2b + 2c + d) \quad (4)$$

where

$$\begin{aligned} a &= \vec{V}(X^n, t^n) \\ b &= \vec{V}\left(X^n + \frac{\Delta t}{2} a, t^n + \frac{\Delta t}{2}\right) \\ c &= \vec{V}\left(X^n + \frac{\Delta t}{2} b, t^n + \frac{\Delta t}{2}\right) \\ d &= \vec{V}(X^n + c \Delta t, t^{n+1}) \end{aligned}$$

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB344 - POLU_MER 2010-2011 Andrea M. Doglioli	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---	--

The advanced ABM method is a predictor-corrector method, combining the Adams-Bashford method (the predictor step) and the advanced Adams-Moulton method (the corrector step).

$$\tilde{X}^{n+1} = X^n + \frac{\Delta t}{24} (55 \tilde{V}^n - 59 \tilde{V}^{n-1} + 37 \tilde{V}^{n-2} - 9 \tilde{V}^{n-3}) \quad (6)$$

$$X^{n+1} = \frac{1}{270} \left\{ 19 \tilde{X}^{n+1} + 251 \left[ X^n + \frac{\Delta t}{24} (9 \tilde{V}^{n+1} + 19 \tilde{V}^n - 5 \tilde{V}^{n-1} + \tilde{V}^{n-2}) \right] \right\} \quad (7)$$

where  $\tilde{V}^{n+1} = \tilde{V}(\tilde{X}^{n+1}, t^{n+1})$ .

Different numerical schemes have different impacts on the accuracy, efficiency and memory requirements of the particle integration. Indeed Darmofal and Haines (1996) found that multistage schemes required at least three times more internal data storage than multistep schemes of equal order and for timesteps within the stability bounds, multistage schemes were generally more accurate.

Garcia et al. (1999) have also compared the Euler method and the RK method by using simple numerical experiments.

Finally, in more advanced IBM where larval behavior depends on thermodynamics, coupling between Lagrangian and Eulerian model is also activated for temperature and salinity fields, with generally trilinear interpolation in the particle position (Lett07, Lett08, Hinckley96, Mullon03).

\*\*\*\*\*

## REFERENCES

- Miller\_etal\_FishOceanogr98\_CouplingIBMCirculationModelGeorgesBank.pdf  
 Heath\_etal\_FishOceanogr98\_DispersalLarvalJapaneseSardine.pdf  
 Guizen\_etal\_MarEcolProgSer06\_DispersalOweniaWinddrivenCurrents.pdf  
 Speirs\_etal\_MarEcolProgSer06\_OceanScaleModellingCalanus.pdf  
 Lett\_etal\_MarEcolProgSer07\_AssessmentBarrierIchthyoPlanktonBenguela.pdf  
 Lett\_etal\_EnvironModellSoftw08\_Ichthyop.pdf  
 Peliz\_etal\_JMarineSyst07\_CrabLarvaeDispersalWesternIberianShelf.pdf  
 Hinckley\_etal96\_DevelopmentSpatiallyExplicitIBM.pdf  
 Mullon\_etal\_FishOceanogr03\_FromParticlesToIndividualsAnchovy.pdf  
 Carr\_Capet\_et\_al\_FishOc06\_VerticalMigrationZooplanktonTransportRecruitmentCoupledBehavioralPhysicalModel.pdf  
 Allain\_etal\_FishOceanogr03\_AnchovyBiscayLagrangianSimulations.pdf  
 Paris\_etal\_MarEcolProgSer07\_SurfingSpinningDivingPopulationConnectivity.pdf  
 Iudicone\_etal\_OceanModel02\_SensitivityNumericalTracerTrajectories.pdf  
 Valdivieso\_Blanke\_OceanModel04\_lagrangianmethodsClimatologyTrajectoryError.pdf.

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB344 - POLU_MER 2010-2011 Andrea M. Doglioli	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité FLuides, Environnement et Risques
--	---	--

## Programmes matlab

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB344 - POLU_MER 2010-2011 Andrea M. Doglioli	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité FLuides, Environnement et Risques
--	---	--

```
%% programme qui montre que le nombre sont PSUEDO-aléatoires
%% et non pas vraiment aléatoires
```

```
clear;close;
disp('PROGRAM TEST_RANDOM')
disp('*** without reset ***')

s = rand('state');
u1 = rand(10,1);
%rand('state',s);
u2 = rand(10,1); % contains exactly the same values as u1
[u1';u2']

disp('*** with reset ***')

%Save the current state, generate 10 values, reset the state, and repeat the sequence.
s = rand('state');
u1 = rand(10,1);
rand('state',s);
u2 = rand(10,1); % contains exactly the same values as u1
[u1';u2']
```

```
%% programme qui extrait des nombre pseudo-aléatoires
%% 1) entre 0 et 1 avec pdf uniforme
%% 2) entre -inf et +inf avec pdf gaussienne à moyenne nulle
```

```
disp('PROGRAM HISTOGRAMS')
clear;close all;

imax=10000;

for i=1:imax
    r(i)=rand(1);
end

figure(1)
subplot(2,1,1)
intedge=0.1;
edges=[0:intedge:1];
N=histc(r,edges);
bar(edges,N./imax*100,'histc')
y(1:size(edges'))=intedge;
line(edges,y*100,'color','r')
ylabel('%')

pause(2)

devst=10;
for i=1:imax
    g=0;
    for ig=1:12
        r=rand(1);
        g=g+(r-0.5);
    end
    gg(i)=g.*devst;
end

subplot(2,1,2)
intedge=0.25;
edges=[-100:intedge:100];
N=histc(gg,edges);
bar(edges,N./imax*100,'histc')
var=devst^2;
y=1/sqrt(2*pi*var).*exp(-(edges).^2/(2*var));
line(edges,y.*intedge*100,'color','r')
ylabel('%')
```

```
%% programme qui exarit des nombre pseudo-aléatoires
```

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB344 - POLU_MER 2010-2011 Andrea M. Doglioli	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---	--

```
%% 1) entre 0 et 1 avec pdf uniforme
%% 2) entre -inf et +inf avec pdf gaussienne à moyenne nulle
```

```
disp('PROGRAM HISTOGRAMS')
clear;close all;

imax=10000;

for i=1:imax
    r(i)=rand(1);
end

figure(1)
subplot(2,1,1)
intedge=0.1;
edges=[0:intedge:1];
N=histc(r,edges);
bar(edges,N./imax*100,'histc')
y(1:size(edges'))=intedge;
line(edges,y*100,'color','r')
ylabel('%')

pause(2)

devst=10;
for i=1:imax
    g=0;
    for ig=1:12
        r=rand(1);
        g=g+(r-0.5);
    end
    gg(i)=g.*devst;
end

subplot(2,1,2)
intedge=0.25;
edges=[-100:intedge:100];
N=histc(gg,edges);
bar(edges,N./imax*100,'histc')
var=devst^2;
y=1/sqrt(2*pi*var).*exp(-(edges).^2/(2*var));
line(edges,y.*intedge*100,'color','r')
ylabel('%')
```



```
%% programme pour la marche aléatoire de plusieurs particules
clear;close;
```

```
disp('PROGRAM RANDOM_WALK_NPART');

ipmax=10;%nombre de particules
itmax=100;%[s]
devst=1;%[m]

figure(1);hold on;
axis([-50 50 -50 50])
text(-1,-1,'*', 'color','red', 'fontsize',20)
grid on;
xlabel('distance en direction x [m]');
ylabel('distance en direction y [m]');

for ip=1:ipmax

    x(1)=0;
    y(1)=0;

    for it=2:itmax
        %extraction déplacement en direction x
        g=0;
        for ig=1:12
            r=rand(1);
            g=g+(r-0.5);
        end
    end
end
```



Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB344 - POLU_MER 2010-2011 Andrea M. Doglioli	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---	--

```

end
depx=g.*devst;
%extraction déplacement en direction y
g=0;
for ig=1:12
    r=rand(1);
    g=g+(r-0.5);
end
depy=g.*devst;
%asignation nouvelle position
x(it)=x(it-1)+depx;
y(it)=y(it-1)+depy;

end%for it

line(x,y,'color',[ip/ipmax 0 1-ip/ipmax])
text(51,51-ip*4,num2str(ip),'color',[ip/ipmax 0 1-ip/ipmax])
end%for ip
hold off;

```

%% programme qui calcule la concentration de particule par maille de grille

```

clear;close all;
Xsource=5; %position en x initiale des particules
Ysource=5; %position en y initiale des particules
ipmax=5; %nbre de particules
itmax=100; %nbre de pas de temps en jour
imax=10; %taille de la matrice CONC en m (boite où sont enfermée les particules)
jmax=10; %taille de la matrice CONC en m
deltatime=50; %pas de temps (pour calculer et tracer CONC)
k=1.5*10^(-7); %coeff diffusion [m²/s]
xold(1:ipmax)=Xsource; %initial position
yold(1:ipmax)=Ysource;

scrsz = get(0,'ScreenSize');
figure('Position',[1 scrsz(4) scrsz(3) scrsz(4)]);

for it=1:itmax
    devst=sqrt(2*k*3600*24); %ecart type (en m)
    %condition initiale de concentration nulle
    CONC=zeros(10,10);
    for ip=1:ipmax
        %extraction déplacement en direction x
        g=0;
        for ig=1:12
            r=rand(1);
            g=g+(r-0.5);
        end
        depx=g.*devst;
        %extraction déplacement en direction y
        g=0;
        for ig=1:12
            r=rand(1);
            g=g+(r-0.5);
        end
        depy=g.*devst;
        %asignation nouvelle position
        xnew(ip)=xold(ip)+depx;
        ynew(ip)=yold(ip)+depy;
        %condition à la frontière: frontière fermée
        if(xnew(ip)<1 | xnew(ip)>100 | ynew(ip)<1 | ynew(ip)>100)
            xnew(ip)=xold(ip);
            ynew(ip)=yold(ip);
        end%if
        %calcul de la concentration
        ii=fix(xnew(ip));
        jj=fix(ynew(ip));
        CONC(jj,ii)=CONC(jj,ii)+1;
        %sauvegarde de la position des particules pour comparaison
        xmem(ip)=xnew(ip);
        ymem(ip)=ynew(ip);
        xold(ip)=xnew(ip);
        yold(ip)=ynew(ip);
    end%for ip

```

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB344 - POLU_MER 2010-2011 Andrea M. Doglioli	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité FLuides, Environnement et Risques
--	---	--

```

subplot(1,2,1);hold on;
title(['it=',num2str(it)]);
pcolor(CONC);
colorbar;
plot(xmem,ymem,'k+')
axis([1 10 1 10])
axis square
xlabel('mesh index in x-direction');
ylabel('mesh index in y-direction');

subplot(1,2,2);hold on;
axis([0 10 0 10])
plot(xmem,ymem,'k+')
contour(CONC)
colorbar
axis([1 10 1 10])
axis square
xlabel('mesh index in x-direction');
ylabel('mesh index in y-direction');
title([' CLICK ON THE FIGURE TO CONTINUE']);
waitforbuttonpress
hold off; clf;
end %pour it

```



```

%% programme pour la diffusion d'une goutte d'encre dans un verre
%% contribution G.Ginoux

clear all;close all;scrsz = get(0,'ScreenSize');

disp('PROGRAM DIFFUSION')

Xsource=50; %position en x initiale des particules
Ysource=50; %position en y initiale des particules
ipmax=10000; %nbre de particules
itmax=1000; %nbre de pas de temps en jour
imax=100; %taille de la matrice CONC en m (boite où sont enfermée les particules)
jmax=100; %taille de la matrice CONC en m
deltatime=50; %pas de temps (pour calculer et tracer CONC)
k=10.5*10^(-7); %m²/s
devst=sqrt(2*k*3600*24); %ecart type (en m)
xold(1:ipmax)=Xsource; %initial position
yold(1:ipmax)=Ysource;

for it=1:itmax
it
for ip=1:ipmax
g=0;
for i=1:12
r=rand;
g=g+(r-0.5);
end
depX=g*devst;
h=0;
for i=1:12
r=rand;
h=h+(r-0.5);
end
depy=h*devst;
X(ip)=xold(ip)+depX;
Y(ip)=yold(ip)+depy;
% condition à la frontiere
if X(ip)<1 | X(ip)>100 | Y(ip)<1 | Y(ip)>100
%frontière fermée
X(ip)=xold(ip);
Y(ip)=yold(ip);
end
xold(ip)=X(ip);
yold(ip)=Y(ip);
end %pour ip

```

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB344 - POLU_MER 2010-2011 Andrea M. Doglioli	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---	--

```
%Afin de n'afficher la figure que tous les 'deltatimes' pas de temps
if rem(it,deltatime)==0
    CONC=zeros(jmax,imax);
    devst
    for ip=1:ipmax
        %Calcule le nombre de particules dans chaque maille
        ii=fix(X(ip));
        jj=fix(Y(ip));
        CONC(jj,ii)=CONC(jj,ii)+1;
    end

    close all
    figure('Position',[1 scrsz(4)/2 scrsz(3)/2 scrsz(4)/2]);
    hold on;
    contourf(CONC(:, :)./ipmax,[0:1:20]./ipmax);shading flat;
    axis([-10 imax+10 -10 jmax+10])
    box on;
    colorbar;
    title('concentration specifique de particules par maille de grille');
    axis([1 100 1 100])
    axis square
    xlabel('mesh index in x-direction');
    ylabel('mesh index in y-direction');

    % Croix rouge (centée en 50,50)
    cf= repmat(50,1,100);
    cs=1:100;
    plot(cf,cs,'r-')
    plot(cs,cf,'r-')

    CONCF1=CONC(50, :)/sum(CONC(50, :));
    CONCF2=CONC(:, 50)/sum(CONC(:, 50));
    xx=[1:0.1:100];
    moy=50;
    yy=1/sqrt(2*pi*devst^2*it).*exp(-1/2*((xx-moy)./(devst.*sqrt(it)).^(2));

    figure('Position',[scrsz(3)/2 scrsz(4)/2 scrsz(3)/2 scrsz(4)/2]);
    subplot(1,2,1), plot(CONCF1); axis([40 60 0 0.3]); hold off;
    %Superposition de la gaussienne
    line(xx,yy,'color','r')
    xlabel('Concentration le long de la ligne horizontale');
    subplot(1,2,2), plot(CONCF2); axis([40 60 0 0.3]); hold off;
    %Superposition de la gaussienne
    line(xx,yy,'color','r')
    xlabel('Concentration le long de la ligne verticale');
    hold off;
    title([' CLICK ON THE FIGURE TO CONTINUE']);
    waitforbuttonpress;

end %pour if
end %pour it
```

```
%% programme pour la advection diffusion d'une goutte d'encre
%% dans un champs de vitesse uniforme

clear all;close all;
figure(1)
disp('PROGRAM ADVECTION-DIFFUSION')

Xsource=50; %position en x initiale des particules
Ysource=50; %position en y initiale des particules
ipmax=10000; %nbre de particules
itmax=1000; %nombre de pas de temps en jour
imax=100; %taille de la matrice CONC en m (boite où sont enfermées les particules)
jmax=100; %taille de la matrice CONC en m
deltatime=50; %pas de temps (pour calculer et tracer CONC)
k=10.5*10^(-7); %m²/s
devst=sqrt(2*k*3600*24); %ecart type (en m)
xold(1:ipmax)=Xsource; %initial position
yold(1:ipmax)=Ysource;
U=0.1;%[m/s]
V=0;%[m/s]
deltaT=1;%[s]
```

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB344 - POLU_MER 2010-2011 Andrea M. Doglioli	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité FLuides, Environnement et Risques
--	---	--

```

for it=1:itmax
it
for ip=1:ipmax
g=0;
for i=1:12
r=rand;
g=g+(r-0.5);
end
depx=g*devst;
h=0;
for i=1:12
r=rand;
h=h+(r-0.5);
end
depy=h*devst;
X(ip)=xold(ip)+depx+U*deltaT;
Y(ip)=yold(ip)+depy+V*deltaT;
% condition à la frontière
if X(ip)<1 | X(ip)>100 | Y(ip)<1 | Y(ip)>100
%frontière fermée
X(ip)=xold(ip);
Y(ip)=yold(ip);
end
xold(ip)=X(ip);
yold(ip)=Y(ip);
end %pour ip

% Afin de n'afficher la figure que tous les 'deltatimes' pas de temps
if rem(it,deltatime)==0
CONC=zeros(jmax,imax);
devst
for ip=1:ipmax
%Calcule le nombre de particules dans chaque maille
ii=fix(X(ip));
jj=fix(Y(ip));
CONC(jj,ii)=CONC(jj,ii)+1;
end
figure(1);hold on;
contourf(CONC(:, :)./ipmax,[0:1:20]./ipmax);shading flat;
axis([-10 imax+10 -10 jmax+10])
box on;
colorbar;
title('concentration spécifique de particules par maille de grille');
% Croix rouge (centée en 50,50)
cf=repmat(50,1,100);
cs=1:100;
plot(cf,cs,'r-')
plot(cs,cf,'r-')
pause(1)
hold off; clf reset
end %pour if

end %pour it

```



```

%% programme pour la advection diffusion avec un source de particules
%% dans un champs de vitesse uniforme
clear all;close all;
figure(1)
disp('PROGRAM ADVECTION-DIFFUSION CONTINOUS RELEASE')

Xsource=50; %position en x initiale des particules
Ysource=50; %position en y initiale des particules
ipmax=5000000; %nbre de particules
iprelease=100;
itmax=ipmax/iprelease; %nbre de pas de temps en jour
imax=100; %taille de la matrice CONC en m (boite où sont enfermée les particules)
jmax=100; %taille de la matrice CONC en m
deltatime=50; %pas de temps (pour calculer et tracer CONC)
k=1.5*10^(-7); %m2/s
devst=sqrt(2*k*3600*24); %ecart type (en m)
U=0.1; %[m/s]
V=0; %[m/s]
deltaT=1; %[s]

```

Master d'Océanographie Spécialité Océanographie Physique, Chimique, Biologique	OPCB344 - POLU_MER 2010-2011 Andrea M. Doglioli	Master Mécanique, Physique et Ingénierie Spécialité Fluides, Environnement et Risques
--	---	--

```

activity(1:ipmax)=0;

for it=1:itmax
    it
    activity(it:it+9)=1;
    xold(it:it+iprelease-1)=Xsource;
    yold(it:it+iprelease-1)=Ysource;
    for ip=1:ipmax
        if activity(ip)==1;
            g=0;
            for i=1:12
                r=rand;
                g=g+(r-0.5);
            end
            depx=g*devst;
            h=0;
            for i=1:12
                r=rand;
                h=h+(r-0.5);
            end
            depy=h*devst;
            X(ip)=xold(ip)+depx+U*deltaT;
            Y(ip)=yold(ip)+depy+V*deltaT;
            % condition à la frontière
            if X(ip)<1 | X(ip)>100 | Y(ip)<1 | Y(ip)>100
                %frontière fermée
                X(ip)=xold(ip);
                Y(ip)=yold(ip);
                %e particules sortantes (non plus actives)
                activity(ip)=0;
            end
            xold(ip)=X(ip);
            yold(ip)=Y(ip);
            end%if activity(ip)=1;
        end %pour ip

%Afin de n'afficher la figure que tous les 'deltatimes' pas de temps
if rem(it,deltatime)==0
    CONC=zeros(jmax,imax);
    devst
    for ip=1:ipmax
        if activity(ip)==1;
            %Calcule le nombre de particules dans chaque maille
            ii=fix(X(ip));
            jj=fix(Y(ip));
            CONC(jj,ii)=CONC(jj,ii)+1;
            end%if activity(ip)=1;
        end
        figure(1);hold on;
        contourf(CONC(:, :)./ipmax, [0:1:20]./ipmax);shading flat;
        axis([1 imax 1 jmax])
        box on;
        colorbar;
        title('concentration spécifique de particules par maille de grille');
        % Croix rouge (centée en 50,50)
        cf= repmat(50,1,100);
        cs=1:100;
        plot(cf,cs,'r-')
        plot(cs,cf,'r-')
    pause(1)
    hold off; clf reset
    end %pour if
end %pour it

```