Andrea M. Doglioli

La circolazione oceanica generale

29 aprile 2009 Dipartimentodi Fisica, Università di Genova

Equazioni di Navier-Stokes per l'oceano.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-g\frac{\partial \eta}{\partial x}+f\,v+A_h\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]+A_v\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-g\frac{\partial \eta}{\partial y}-f\,u+A_h\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial y}\right]+A_z\frac{\partial^2 v}{\partial z}$$

Equazioni integrate sulla verticale e linearizzate

$$U=\int_{-H}^{0} u\,dz\;, \qquad V=\int_{-H}^{0} v\,dz$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}-f\,V=-gH\frac{\partial \eta}{\partial x}+F_x-B_x$$
$$\frac{\partial V}{\partial t}+f\,U=-gH\frac{\partial \eta}{\partial y}+F_y-B_y$$

Soluzione di Ekman: la spirale, il trasporto ed il pompaggio

Allo stato stazionario, trascurando gli effetti della pressione e dell'attrito sul fondo le equazioni del trasporto diventano

$$-f\,V=0$$
$$+f\,U=F$$
$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=0$$

ed hanno per soluzione

$$U=\frac{F}{f}$$
$$V=0$$

cioé un trasporto sulla destra (nell'emisfero nord dove f e positivo.
Valori tipici $F = 10^{-4}$ m^2 s^{-2}, $f = 10^{-4}$ s^{-1} corrispondono a $U = 1$ m^2 s^{-1} (cioé una velocitá della corrente di 0.1 m s^{-1} su uno strato di 10 m).
Per avere il dettaglio della spirale, si deve usare la viscosità verticale turbolenta costante du tutto lo strato e le equazioni diventano

$$-f\,v=K\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$
$$f\,u=K\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

con come condizioni al bordo

$$K\frac{du}{\partial z}=0 \quad , \qquad K\frac{dv}{\partial z}=u_*^2 \quad , \qquad (z=0)$$

$$\frac{du}{dt}=\frac{dv}{dt}=0 \quad , \qquad (z\Rightarrow-\infty)$$

la scala spaziale e la profondita di ekman

$$D=\sqrt{\frac{2K}{f}} \tag{1.50}$$

e la solution si puó scrivere

$$\frac{u}{u_*}=\frac{u_*}{fD}e^{z/D}\left(\cos\frac{z}{D}-\sin\frac{z}{D}\right)$$

$$\frac{v}{u_*}=\frac{u_*}{fD}e^{z/D}\left(\cos\frac{z}{D}+\sin\frac{z}{D}\right)$$

RIPASSO: Approssimazioni del parametro di Coriolis

1) piano-*f*

$f = f_0 = 2\Omega \sin\phi_0$

ai poli $f_0 = 2\Omega \ \sin(\pi/2)= 4\pi/86400 = 1.45\ 10^{-4}$ rad s^{-1}

alle medie latitudini $f_0 = 2\Omega \sin(\pi/4) = 4\pi/86400 = 1.0310^{-4}$ rad s^{-1}

à l'équateur $f_0 = 0$

2) piano- β

$f = f_0 + \beta y$.

dove $\beta = \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial \Phi}\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = \dfrac{2\Omega\cos\phi}{R} \quad avec \qquad \partial y = R\partial\Phi$

$\beta_{45} = 1{,}63\ 10^{-11}$ $\qquad f = 1.03\ 10^{-4} + 1{,}63\ 10^{-11}\ 10^{6} = 1{,}19\ 10^{-4}$ rad s^{-1}

Definizioni

$$\boxed{w_E = \frac{\vec{k}(\nabla\times\vec{\tau})-\beta[M_y]_{-h}^{0}}{f\rho_o}}$$ pompaggio di Ekman

$$\boxed{[M_y]_{-H}^{0} = \frac{\vec{k}(\nabla\times\vec{\tau}_0)}{\beta}}$$ trasporto meridiano

7.4 Ordres de grandeur des termes

Soit un point à 35°N dans l'Atlantique nord où le vent d'Ouest souffle à $7 - 8ms^{-1}$. Alors $\tau_x \simeq 10^{-1} N/m^2$ et $\tau_y \simeq 0$:

$$\vec{k}.(\nabla \times \vec{\tau}) = -\frac{\partial \tau_x}{\partial y} \simeq \frac{10^{-1}\ N/m^2}{1000\ km} \simeq -10^{-7}\ Nm^{-3}$$

$$f \simeq 10^{-4}\ s^{-1} \quad ; \quad \beta \simeq 2\ 10^{-11}\ m^{-1}s^{-1}$$

$$\Rightarrow M_{ye} = -\frac{\tau_x}{f} = -10^3\ kg\ m^{-1}s^{-1}$$

$$M_y(w_b = 0) = \frac{\vec{k}.(\nabla \times \vec{\tau})}{\beta} \simeq -\frac{10^{-7}}{2\ 10^{-11}} = -5\ 10^3 kg\ m^{-1}\ s^{-1}$$

On voit que le transport méridien d'Ekman contribue au 1/5 du transport méridien total. Intégré sur la largeur de l'océan ($\simeq 5000km$) le transport est de $-25\ 10^9 kg\ s^{-1}$, soit en volume, $-25\ 10^6 m^3 s^{-1}$, ou 25 Sverdrup vers le sud.

Circolazione de Sverdrup

Sverdrup a trouvato una soluzione analitica per la funzione di corrente nel cas di un bacino rettangolare largo a e alto b su cui soffia un vento zonale, la cui tensione é schematizzata con una formula sinusoidale $\tau_x = -\tau_o \cos(\pi y/b), \tau_y = 0$.

$$\beta M_y = \vec{k} \nabla \times \vec{\tau} = \frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} = -\tau_0 \frac{\pi}{b} \sin \frac{\pi y}{b}$$

$$M_y = -\frac{\tau_0 \pi}{\beta b} \sin \frac{\pi y}{b} = +\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\psi(x, y) = \int \left(-\frac{\tau_0 \pi}{\beta b} \sin \frac{\pi y}{b} \right) dx = -\frac{\tau_0 \pi}{\beta b} \sin \frac{\pi y}{b} x + K(y)$$

Sui bordi ψ deve annullarsi, ma é impossibile con questa soluzione porre 2 condizioni a $x = 0$ et $x = a$, ma una sola. Sverdrup scelse di soddisfare la condizione $\psi = 0$ sul bordo Est sulla base del seguente ragionamento:

- le misure indicano per il vento una circolazione ciclonica ;
- tale tipo di circolazione genera una cicolazione oceanica dello stesso segno ;
- la relazione de Sverdrup dice che una vorticita negativa corrisponde ad un trasporto meridiano verso sud e questo avviene solo nella parte est del bacino ;

Allora

$$K_{x=0} = +\frac{\tau_o \pi}{\beta b} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) a$$

e infine

$$\psi(x, y) = -\frac{\tau_0 \pi}{\beta b} \sin \frac{\pi y}{b} (x - a)$$

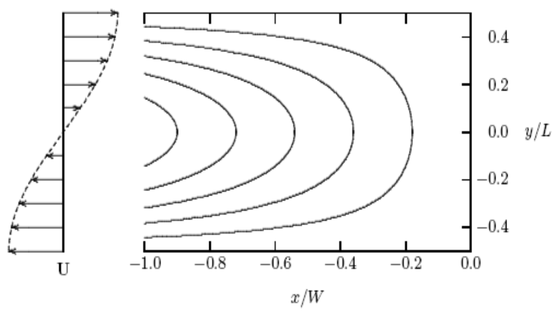

Fig. 52.1 Andamento del vento **U** e della corrispondente soluzione di Sverdrup in prossimità del contorno orientale di un bacino oceanico.

Mattioli (1995) Principi Fisici di Oceanografia e Meteorologia

Applicazioni della legge della conservazione della vorticità potenziale

RIPASSO: vorticità relativa $\zeta = \vec{k}(\nabla \times \vec{V}) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$

Legge della conservazione della vorticità potenziale

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\zeta + f}{D}\right) = 0}$$

dove D é profondità dell'oceano

Raggio di rossby

Un modo per valutare l'incidenza dei fenomeni associati alla rotazione è quello di calcolare la quantità

$$\delta_R = \frac{\sqrt{gh}}{f}, \tag{38.22}$$

detto *raggio di deformazione barotropico di Rossby*, dato dal rapporto fra la velocità di propagazione delle onde di gravità in acqua bassa $\sqrt{gh}$ e il parametro di Coriolis f. Esso rappresenta lo spazio che percorrerebbe un'onda di gravità in acqua bassa in assenza di rotazione nel tempo pari al periodo inerziale diviso 2π. In altre parole, esso rappresenta la scala tipica di moto per la quale gli effetti di gravità sono paragonabili a quelli inerziali dovuti alla rotazione terrestre. Basta infatti porre la relazione di dispersione (38.21) nella forma

$$\omega^2 = f^2\left(1 + k^2\delta_R^2\right). \tag{38.23}$$

Se il secondo termine entro parentesi è minore del primo allora gli effetti di rotazione sono prevalenti, se è maggiore sono prevalenti gli effetti gravitazionali. Ma questo equivale a dire che se le onde hanno la scala tipica di variazione, definita come la lunghezza d'onda diviso 2π, maggiore del raggio di deformazione di Rossby gli effetti di rotazione prevalgono e viceversa nel caso contrario.

La quantità

$$\delta'_R = \frac{\sqrt{g' D_0}}{f}$$

viene detta *raggio di deformazione baroclinico di Rossby* (da confrontare con quello barotropico visto nella (38.22). Essa rappresenta quindi la scala spaziale tipica alla quale si manifestano gli effetti legati contemporaneamente alle variazioni di densità e al parametro di Coriolis.

dove

$$g' = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} g$$

è la stessa *accelerazione di gravità ridotta* vista nella (40.9).