TD V

Exercice 1

$$f(x) \begin{cases} x \to 0 & \text{si } x<0 \text{ ou si } x>1 \\ x \to ax(1-x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$ avec $a>0$

1) 2 conditions pour $f(x)$ = densité de proba

- $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \Rightarrow ax(1-x)>0$ donc $a>0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

donc $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$

$f(x) = ax - ax^2$

$F(x) = \frac{ax^2}{2} - \frac{ax^3}{3} + C$

$\int_0^1 f(x)\,dx = F(1) - F(0) = \frac{a}{2} - \frac{a}{3} = 1 \Leftrightarrow a = 6$

$$f(x) \begin{cases} x \to 0 & \text{si } x<0 \text{ ou } x>1 \\ x \to 6x(1-x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

b) $$F(x) \begin{cases} x \to 0 & \text{si } x<0 \\ 3x^2 - 2x^3 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

c) mode : $f(x)$ maximum pour $f'(x) = 0$ et $f''(x) < 0$

$f(x) = 6x - 6x^2$

$f'(x) = 6 - 12x \qquad f'(x) = 0$ ssi $x = 1/2$

$f''(x) = -12 \qquad$ donc mode $= 1/2$

médiane pour $F(x) = 0,5$

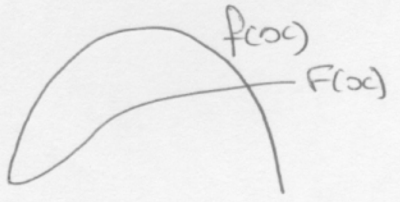
$F(x) = 3x^2 - 2x^3 = 1/2 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x^3 - 1/2 = 0 \qquad$ solution "évidente" : $x = 1/2$

$\Leftrightarrow (x - 1/2)\underbrace{(2x - 2x^2 + 1)}_{\Delta = b^2 - 4ac = 12} = 0 \qquad$ 3 solutions : $x = 1/2$

$x = -0,366$

Médianne $= 1/2$ car seule solution sur $[0;1] \qquad x = 1,366$

d)



$P(\geq 0,8) = \int_{0,8}^{+\infty} f(x)dx = 1 - \int_{-\infty}^{0,8} = 1 - F(0,8) = 1 - 0,896$

$P(< 0,2) = \int_{-\infty}^{0,2} f(x)dx = F(0,2) = 0,104$

$0,2 < P < 0,8 = \int_{0,2}^{0,8} f(x)dx = F(0,8) - F(0,2) = 0,792$

Exercice 2

$C \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma) \quad f(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-1/2 \left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \quad c \in \mathbb{R}$

$\mu = 65 \text{ mg.cl}^{-1} \quad \sigma = 25 \text{ mg.cl}^{-1}$

a) $f(c)$ max pour $f'(c) = 0$

on pose $X = \frac{c-\mu}{\sigma}$

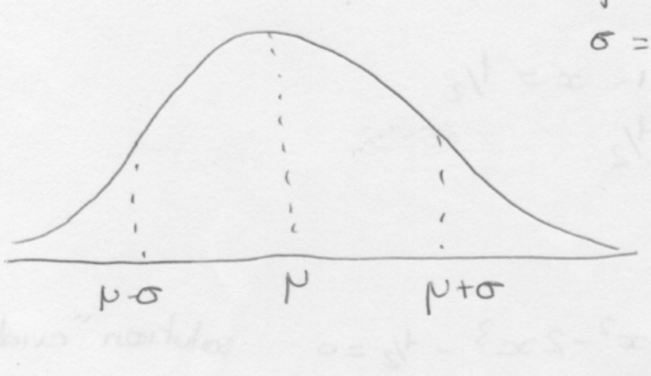
$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-1/2 X^2)$

$f'(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} X \exp(-1/2 X^2)$ $f'(X) = 0$ si $X = 0$ càd si $\frac{c-\mu}{\sigma} = 0$

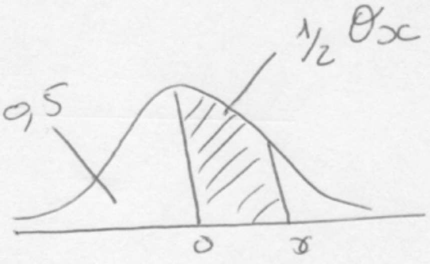
$f(c)$ maximum pour $c = \mu$.

μ = mode (deplacement latéral)

σ = aplatissement de la courbe



b) Il faut utiliser la table et passer nos valeurs en $\mathcal{N}(0,1)$



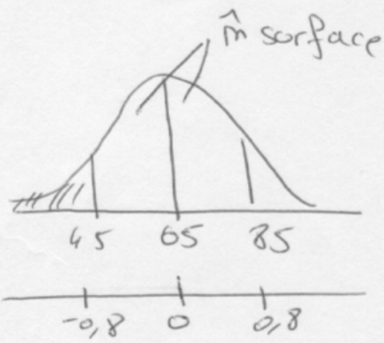
$$85\,(\mathcal{N}(65,25)) \xrightarrow{CR} \frac{85-65}{25} = 0{,}8 \;\mathcal{N}(0,1)$$

$$P(\leqslant 85) = \underbrace{0{,}5}_{\int_{-\infty}^{0} \mathcal{N}(0,1)} + \int_0^{0{,}8} f(x) = 0{,}5 + \underbrace{\tfrac{1}{2}\theta(0{,}8)}_{\text{lu ds la table}}$$

$$P(\leqslant 85) = 0{,}5 + 0{,}2881 = 0{,}7881$$

$$P(\geqslant 85) = 1 - P(\leqslant 85) = 0{,}2119$$

c) $P(\leqslant 45)$

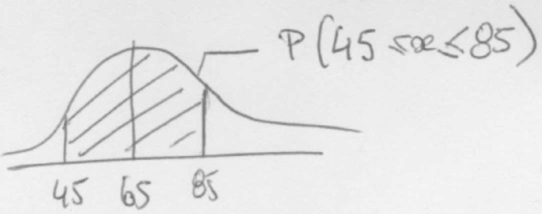


$$45\,(\mathcal{N}(65,25)) \xrightarrow{CR} \frac{45-65}{25} = -0{,}8\,(\mathcal{N}(0,1))$$

$$P(\leqslant 45) = 0{,}5 - \tfrac{1}{2}\theta(0{,}8) = 0{,}5 - 0{,}281$$

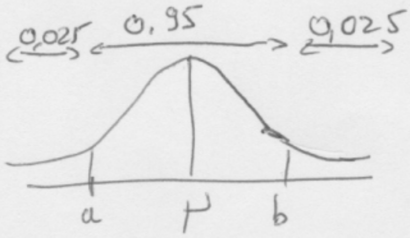
$$\underbrace{P(\leqslant 45) = P(\geqslant 85)}_{\text{fonction symétrique}} = 0{,}2119$$

d)



$$P(45 \leq x \leq 85) = 1 - \left(p(x \geq 85) + p(x \leq 45)\right)$$
$$= 1 - (0{,}2119 + 0{,}2119)$$
$$= 0{,}5762$$

e)
$$p\left(x \leq 85 / x \geq 45\right) = \frac{p\left((x \leq 85) \cap (x \geq 45)\right)}{p(x \geq 45)}$$
$$= \frac{p(45 \leq x \leq 85)}{1 - p(x \leq 45)}$$
$$= \frac{0{,}5762}{0{,}7881}$$
$$= 0{,}731$$



f)
$$P(a \leq x \leq b) = 0{,}95$$

On applique la méthode inverse : à partir de la probabilité, on va cherché a et b.

$$P(x \geq b) = 0{,}025 \quad \text{et} \quad p(x \leq a) = 0{,}025$$
$$p(\mu \leq x \leq b) = 0{,}5 - 0{,}025 = 0{,}475 \quad \text{et} \quad p(a \leq x \leq \mu) = 0{,}475$$

sur $\mathcal{N}(0,1)$ $\xrightarrow{\text{Méthode inverse :}}$ $b_{CR} = 1{,}95$, d'où $a_{CR} = -1{,}95$

Dans la table on cherche dans $\frac{1}{2}\Theta(x)$ la valeur 0,475

Or $x_{CR} = \dfrac{x - \mu}{\sigma} \Longrightarrow x = \sigma x_{CR} + \mu$

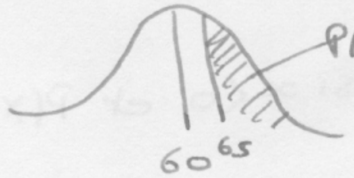
d'où $b_{CR} = \dfrac{b - \mu}{\sigma} = 1{,}95$ et $a_{CR} = \dfrac{b - \mu}{\sigma} = -1{,}95$

avec $\mu = 65$ et $\sigma = 25$, on en déduit $b = 113{,}75$ et $a = 16{,}25$

Donc $P(16{,}25 \leq c \leq 113{,}75) = 0{,}95$

Exercice 3

$\mu = 60\ mm$
$\sigma = 10\ mm$ $\Big\}$ $L \rightsquigarrow \mathcal{N}(60, 10)$



a) $P(L \geq 65) = \int_{65}^{+\infty} L(x)\,dx = 1 - P(L < 65)$

$65 \to$ centrée réduit $\mathcal{N}(0,1)$ $= \frac{65-60}{10} = \frac{1}{2} = 0,5$

$P(L < 65) = 0,5 + 0,1915 = 0,6915$

$$\boxed{P(L \geq 65) = 0,3085}$$

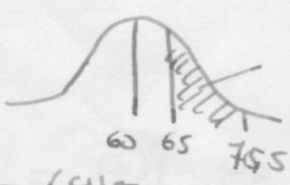
b) $n = 2000$. $0,3085 \times 2000 = 617$ os de longeurs supérieure à 65 mm.

c) $P(55 \leq L \leq 65) = \int_{55}^{65} L(x)\,dx = P(L \leq 65) - P(L \leq 55)$

55 centrée réduit $\mathcal{N}(0,1)$ $= \frac{55-60}{10} = -0,5$

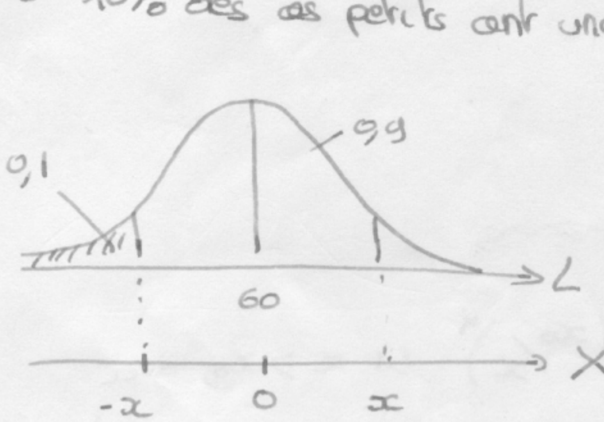
$= 0,6915 - \underbrace{0,3085}_{0,5-0,1915} = 0,383$

d) $P(65 \leq L \leq 75,5) = P(L \leq 75,5) - P(L \leq 65) =$



$75,5 \xrightarrow[\mathcal{N}(0,1)]{CR} \frac{75,5-65}{10} = 1,05 \Leftrightarrow \underbrace{(0,5 + 0,3531)}_{0,83531} - 0,6915 = 0,1616$

e) 10% des os petits ont une malformation. en dessous de quelle longeur



Pour $x_{cr} = 1,3$ $P(\leq x) = 0,9\ (0,5 + 0,403)$

$\Rightarrow x_{cr} = 1,3$ et $L = \sigma x_{cr} + \mu$

$L = 10 \times (-1,3) + 65$

$L = 52\ mm$

Les os de tailles $< 52\ mm$ ont une malformation (10%)

Exercice 4

a) $P(X \geqslant x) = 1$ si $x < 0$ et $P(X \geqslant x) = \exp(-\lambda x)$ si $x \geqslant 0$ avec $\lambda > 0$

$P(X < x) = 1 - \exp(-\lambda x)$ si $x \geqslant 0$

$f(x) = F'(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$

donc $\boxed{f(x) \begin{cases} x \to 0 & \text{si } x < 0 \\ x \to \lambda \exp(-\lambda x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$

b) $P(X \geqslant x) = 1$ si $x \leqslant 0$ et $P(X \geqslant x) = \dfrac{3}{(1+x)^2} - \dfrac{2}{(1+x)^3}$ si $x > 0$

$P(X < x) = 1 - \dfrac{3}{(1+x)^2} + \dfrac{2}{(1+x)^3}$

$f(x) = F'(x) = \dfrac{6}{(1+x)^3} - \dfrac{6}{(1+x)^4}$

$\Leftrightarrow f(x) = \dfrac{6(1+x) - 6}{(1+x)^4} = \dfrac{6(1+x-1)}{(1+x)^4}$

$f(x) = \dfrac{6x}{(1+x)^4}$ si $x > 0$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$

$(u^n)' = nu'u^{n-1}$

$\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = \dfrac{-nu'u^{n-1}}{u^{2n}}$

$\boxed{f(x) \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{6x}{(1+x)^4} & \text{si } x > 0 \end{cases}}$

c) $P(X \geqslant x) = 1$ si $x \leqslant 0$ et $P(X \geqslant x) = (x_0/x)^\alpha$ si $x > x_0$, avec $x_0 > 0$ et $\alpha > 0$ des cstes

$P(X < x) = 1 - \left(\dfrac{x_0}{x}\right)^\alpha$ si $x > x_0$

$\left(\dfrac{1}{x}\right)' =$

$(u^n)' = nu'u^{n-1}$

$f(x) = F'(x) = \dfrac{\alpha x_0}{x^2}\left(\dfrac{x_0}{x}\right)^{\alpha-1} = \dfrac{\alpha x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}}$

Exercice 5

$p_k = p(1-p)^k$ avec $0 < p < 1$ $k = 0, 1, 2 \ldots$

a) $\sum_{k=0}^{n} p_k = 1$ et $p_k \geqslant 0 \ \forall k$

• $S_n = p_0 + p_1 + p_2 + \ldots \ p_n$

$S_n = p + p(1-p) + p(1-p)^2 + \ldots + p(1-p)^n$

$S_n = p \sum_{k=0}^{n} (1-p)^k$

$q = 1-p < 1$

$S_n = p \sum_{k=0}^{n} q^k$

$q S_n = p \sum_{k=0}^{n} q^{k+1}$ $\Big\}$ On soustrait $S_n - qS_n = p\left(\sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1}\right)$

$= p\left(\sum_{k=0}^{n} \left(q^k - q^{k+1}\right)\right)$ on q^0 et q^{n+1}

$= p\left(1 - q^{n+1} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n-1} q^{k+1}}_{=0}\right)$

$S_n(1-q) = p(1-q^{n+1})$

d'où $S_n = p \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1-q^{n+1}$ $\lim\limits_{n \to +\infty} q^{n+1} \to 0$ car $q < 1$

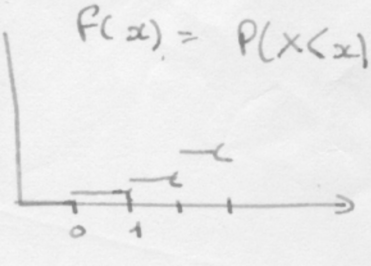
$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{p}{1-q}$ $\lim 1-q^{n+1} \to 1$ qd $n \to +\infty$

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{p}{1-1+p} = 1$

b) $F(x) = P(X \leqslant x) = \sum_{k=0}^{x \leqslant k} = p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_k$ $x \leqslant k$ entier

$F(x) = P(X < x)$

$= 1 - q^{k+1}$



4) $P(n \leq X \leq N)$ où $n \in \mathbb{N}^+$ $N \in \mathbb{N}^+$ et $N \geq n$

$$P(n \leq X \leq N) = P(X \leq N) - P(X \leq n) = F(N) - F(n)$$

$$P(n \leq X \leq N) = 1 - q^{N+1} - 1 + q^{n+1}$$

$$P(n \leq X \leq N = q^{n+1} - q^{N+1}$$

$$P(n \leq X \leq N) = q^{n+1}\left(1 - q^{N-n}\right)$$