

T. D. n° IV . Construction de variables aléatoires.

Exercice n° 1.

Paul est dans la forêt, il a froid et a dans sa poche 2 boîtes d'allumettes indiscernables. L'une contient 5 allumettes, l'autre 2. Il choisit au hasard l'une des deux boîtes, allume un feu avec une seule allumette, puis remet la boîte dans sa poche si elle n'est pas vide, ou la jette lorsqu'elle est vide. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de feux allumés avant de jeter une des deux boîtes.

- 1) La v. a. X est elle discrète ou continue?
- 2) Donner la fonction de répartition de X et sa densité de probabilité. Calculer le centre de gravité de la distribution.
- 3) On suppose maintenant qu'il choisit préférentiellement la boîte B5 contenant au départ 5 allumettes. On estime $p(B5) = 2/3$ et $P(B2) = 1/3$. Calculer la loi de X dans ce cas et donner également son espérance.

Exercice n° 2.

Tracer la fonction de répartition d'une variable aléatoire X telle que :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1 \\ a, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 4/5, & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

- a) Déterminer et tracer $f(x)$, la loi de probabilité de X . Quelle est la condition sur a pour que $f(x)$ définisse effectivement une densité de probabilité? On posera ensuite $a = 1/5$.
- b) Donner le mode, l'espérance et l'écart type de X . Que peut-on en déduire?

Exercice n° 3.

Chez une espèce végétale, la longueur des entre-noeuds séparant 2 feuilles successives ayant terminées leur croissance est gouvernée par un couple d'allèles Aa . Les longueurs des entre-noeuds des génotypes AA , Aa et aa sont respectivement égales à 3 cm, 5 cm et 2 cm. On suppose que tous les individus de la population ont la même probabilité d'être tirés. On rappelle les lois suivantes :

Individus	aa	aA	AA
gamètes			
a	1	1/2	0
A	0	1/2	1

On considère une population composée des 3 types d'individus AA , Aa et aa avec les fréquences $(1 - q)^2$ pour le génotype AA , $2q(1 - q)$ pour le génotype Aa et q^2 pour le génotype aa . où $q \in R$

- 1) Un individu est tiré au hasard dans la population. Quelles sont les probabilités de tirer un individu de génotype AA ? Aa ? aa ? Quelle valeur peut prendre q ?
- 2) Soit X , la variable aléatoire (ici discrète) "longueur des entre-noeuds de l'individu tiré au hasard". Donner la loi de X . Calculer $\mu_X = E(X)$ en fonction de q . Etudier les variations de μ_X lorsque q varie sur son domaine de variation.
- 3) Pour quelle valeur de q , $E(X)$ est maximale? Déterminer alors les probabilités de tirer un individu de génotype AA ? Aa ? aa ?
- 4) Quelle est en fonction de q la probabilité pour qu'un gamète issu d'un individu tiré au hasard de la population porte l'allèle A ? l'allèle a ?
- 5) Un sélectionneur élimine de la reproduction tous les individus dont la longueur des entre-noeuds est égale à 2 cm. Calculer, en fonction de q , la probabilité de tirer un individu de génotype AA ? aa ? Aa ?
- 6) Soit la v. a. discrète Y "longueur des entre-noeuds des individus tirés dans la population sans les aa ". Calculer l'espérance mathématique de Y . Etudier les variations de μ_Y pour q variant dans $[0, 1]$.

7) Quelle est, en fonction de q , la probabilité pour qu'un gamète issu de la population sélectionnée porte l'allèle A ? l'allèle a ? Comparer avec l'ancienne population.

Exercice n° 4.

Un sac contient trois tickets numérotés 1, 2 et 3.

a) Soit X , v. a. discrète, le numéro associé à un tirage. Déterminer sa loi de probabilité. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

b) Soit M_2 , v. a. discrète, la moyenne arithmétique des deux numéros que l'on peut tirer en tirant deux tickets. Déterminer sa loi de probabilité, et déterminer $E(X)$ et $V(X)$ selon tirage avec remise ou pas.

c) Même question pour M_3 , moyenne arithmétique des 3 numéros que l'on peut obtenir en tirant 3 tickets.

Exercice n° 5.

Un jeu consiste à choisir une urne parmi 3 (I, II, III) étant donné un résultat obtenu aux dés. Si le dé jeté montre la face 1, 2 ou 3, alors I est choisie. Si c'est 4 ou 5, alors II est choisie. Dans tout autre cas, c'est III qui est choisie. L'urne I contient 3 boules blanches et 2 boules noires. L'urne II contient 2 boules blanches et 1 boule noire. L'urne III contient 1 boule blanche et 1 boule noire. On effectue 1 jet de dés et on tire 2 boules au hasard avec remise. On s'intéresse à la variable aléatoire X qui associe le nombre de boules blanches obtenues à la fin des deux tirages.

a) Construire la distribution de probabilités de X . En déduire $E(X)$ et $V(X)$.