T. D. n° 5. Variables aléatoires.

Exercice n° 1.

Soit X une variable aléatoire continue, dont la densité de probabilité est définie par :

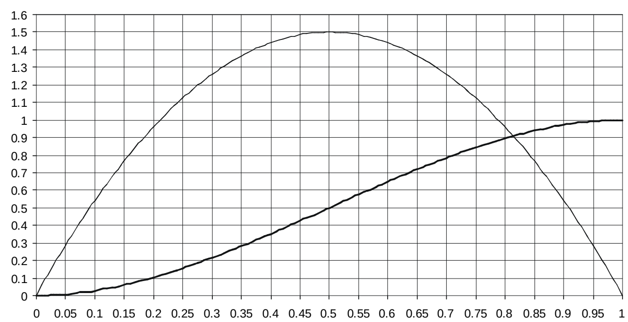
$$f(x) : \begin{cases} x \mapsto 0 \quad \text{si } x < 0 \text{ ou si } x > 1 \\ x \mapsto ax(1-x) \quad \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{avec } a > 0$$

a) Calculer la valeur de a.

b) Déterminer l'expression de $F(x)$, fonction de répartition de X.

c) Calculer le mode et la médiane de la densité de probabilité de X. Que peut-on en déduire?

d) Que représentent les courbes de la figure ci-dessous? Quelle est la proportion d'observations ≥ 0.8? < 0.2? Comprises entre 0.2 et 0.8?



Exercice n° 2.

On suppose que la concentration en saccharose dans un organisme suit une loi Normale de paramètre $\mu = 65\, mg/cl$ et $\sigma = 25\, mg/cl$. La densité est donnée par :

$$C \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma) \text{ alors } f(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right)^2\right), \; c \in \mathbb{R}$$

a) Expliciter le rôle de μ et σ sur la forme de la densité. Tracer la densité et en donner ses principales caractéristiques.

Calculer les probabilités pour que :

b) Un organisme choisi au hasard ait une concentration en saccharose supérieure à $85\, mg/cl$.

c) Un organisme choisi au hasard ait une concentration inférieure à $45\, mg/cl$.

d) Un organisme choisi au hasard est une concentration comprise entre $45\, mg/cl$ et $85\, mg/cl$.

e) Un organisme ait une concentration inférieure à $85\, mg/cl$ sachant qu'elle est supérieure à $45\, mg/cl$.

f) Déterminer un intervalle $[a, b]$ centré sur la moyenne tel que la probabilité pour qu'un individu choisi au hasard ait 95 % de chance d'avoir une concentration comprise entre a et b.

Exercice n° 3.

On suppose que L, la longueur d'un os donné (mm) chez un adulte est une variable aléatoire telle que $L \rightsquigarrow \mathcal{N}(60, 10)$.

a) Quelle est la proportion de la population pour laquelle la longueur est supérieure à 65 mm?

b) S'il y a 2000 os, combien sont de longueur supérieure à $65\, mm$?

c) Quelle est la proportion d'individus dont la longueur de l'os est comprise entre $55\, mm$ et $65\, mm$?

d) Quelle est la probabilité pour qu'un individu sélectionné au hasard ait un os de longueur comprise entre $65\,mm$ et $75,5\,mm$?

e) $10\,\%$ des os trop petits ont une malformation. En dessous de quelle longueur ont-ils cette malformation?

Exercice n° 4.

Supposons que l'on vous donne $P(X \geq x)$ où X est une variable aléatoire. Comment trouver la densité de X? En particulier, trouver la densité de probabilité dans les cas suivants:

a) $P(X \geq x) = 1$ si $x < 0$ et $P(X \geq x) = \exp(-\lambda x)$ si $x \geq 0$ avec $\lambda > 0$.

b) $P(X \geq x) = 1$ si $x \leq 0$ et $P(X \geq x) = 3/(1+x)^2 - 2/(1+x)^3$ si $x > 0$

c) $P(X \geq x) = 1$ si $x \leq x_0$ et $P(X \geq x) = (x_0/x)^\alpha$ si $x > x_0$, avec $x_0 > 0$ et $\alpha > 0$ des constantes.

Exercice n° 5.

Soit une suite de poids $\{p_k\}$ telle que pour $k = 0, 1, 2, \ldots$ alors $p_k = p(1-p)^k$ avec $0 < p < 1$.

a) Déterminer les conditions pour que cette suite forme une densité de probabilité pour une variable discrète X.

b) Calculer la fonction de répartition de X.

c) Déterminer $P(n \leq X \leq N)$ où n et N sont des entiers positifs, $N \geq n$.