Correction TD n° 8 -

Cette correction fait office de fiche de révision.

<u>Ex I</u> : ① $f_X(x) = \frac{dF}{dx}(x) = \frac{1}{4} x \exp(-\frac{x}{2})$, $x \geqslant 0$

On dit que X suit une loi Gamma(γ) de paramètre $\alpha = 2$ et $\beta = 2$ avec $\Gamma(2) = 1$.

② $x_{MOD} \,/\, \left[\frac{df_X}{dx} = 0 \right]_{x = x_{MOD}} \Rightarrow x_{MOD} = 2$ avec

$$\frac{df_X}{dx}(x) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2}x\right) \exp\left(-\frac{x}{2}\right)$$

③ $E(X) = 4$ se calcule par intégration par partie

Comme $X \sim \gamma(\alpha = 2, \beta = 2)$ on sait également que

$E(X) = \alpha\beta$.

$Var(X) = 8 = \alpha\beta^2$

④ $P(1 \leqslant X \leqslant 2) = F_X(2) - F_X(1) = \frac{3}{2} \exp(-\frac{1}{2})$

⑤ $P(1 \leqslant X \leqslant 2 / P(X \geqslant 1)) = \frac{p(1 \leqslant X \leqslant 2 \cap X \geqslant 1)}{p(X \geqslant 1)}$

$$= \frac{p(1 \leqslant X \leqslant 2)}{1 - p(X \leqslant 1)} = \frac{F_X(2) - F_X(1)}{1 - F_X(1)} = 1 \text{ (évidemment...)}$$

<u>Ex II</u> : ① $\lambda \,/\, f_X(x) \geqslant 0, \forall x$ et $\int_{-1}^{1} \lambda(1 - x^2)\, dx = 1$

$\lambda = 3/4$

② $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 3/4\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}\right) & \text{si } -1 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

③ $P(|X| \geqslant 0.5) = P(X \leqslant 0.5 \cap X \geqslant 0.5)$

$= P(X \leqslant -0.5) + P(X \geqslant 0.5) = F_X(-0.5) + 1 - F_X(0.5)$

Débrouillez-vous pour les graphes.

④ $E(X)=0$ par symétrie. et $E(X) = x_{1/2} = 0$
$V(X) = 1/4$ médiane

Ex (III)

① a / $f_X(x) \geq 0, \forall x$ et $\int_0^1 a x^{n-1} dx = 1$

$a = n$, $n > 0$.

② $E(X) = \dfrac{n}{n+1}$, $V(X) = \dfrac{n}{n+2} - \dfrac{n^2}{(n+1)^2}$

③ $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^n & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Exo (IV)

① $f_X(x)$ est telle que $X \rightsquigarrow \gamma(\alpha = 2, \beta = \frac{1}{2})$

$k = \dfrac{1}{\Gamma(2)\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4.$

② cf exo I avec $\beta = \frac{1}{2}$

③ faire comme exo II. Pour la médiane, calculer $\left[F_X(x) = 0.5\right]_{x = x_{1/2}}$. Ds ce cas, la dist. est disymétrique ($E(X) \neq x_{1/2}$)

④ Il s'agit de la densité et de la F.R. de X.

⑤ $P(X \leq 2) = F_X(2)$

$P(X=3) = 0 \rightarrow$ dist. continue $\Leftrightarrow$ les probas sont définies sur des intervalles.

$P(1 < X \leq 2) = F_X(2) - F_X(1)$

$P(X \geq 1) = P(X > 1) = 1 - F_X(1)$

⑥ $P(X \leq x_1) = 0.6 \Rightarrow F_X(x_1) = 0.6 \rightarrow$ voir graphiquement $x_1 \sim 1$.

$p(0.5 \leqslant X \leqslant X_2) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \quad F_X(X_2) - F_X(0.5) = \frac{1}{2}$

$F_X(X_2) = \frac{1}{2} + F_X(0.5)$, graphiquement $F_X(0.5) \simeq 0.3$

$\Rightarrow F_X(X_2) \simeq 0.5 + 0.3 \simeq 0.8 \quad \Rightarrow \quad X_2 \simeq 1.5$.

Exo V : (1) $u = \frac{dy}{dx} \Rightarrow$ (II) devient

$$\frac{du}{dx} + 2u = 0, \quad u(0) = u_0$$

il s'agit d'une éq. diff. ordinaire linéaire, la solution est donnée par: $\frac{du}{u} = -2dx$

$\Leftrightarrow \quad \int_0^x \frac{du}{u} = -\int_0^x 2\,dx$

$\Leftrightarrow \quad \ln(u) - \ln(u_0) = -2x$

$\Leftrightarrow \quad u(x) = u_0 \exp(-2x)$

or $u = \frac{dy}{dx} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = u_0 \exp(-2x)$

(2)

$\Rightarrow \quad y = -\frac{u_0}{2}\exp(-2x) + \text{cste} \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{u_0}{2}, \; a = -2,$ B qcq.

(3) On sait que $F_X(x) = -\frac{u_0}{2}\exp(-2x) + B$

$F_X(x) = 0, \forall x \leqslant 0 \Rightarrow F_X(0) = 0 \Leftrightarrow -\frac{u_0}{2} + B = 0 \Rightarrow B = \frac{u_0}{2}$

la continuité de F_X en $x = 0 \Rightarrow F_X(0) = 0$ et $F_X(x) = 0 \; \forall x < 0$.

On a également $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \left[- \frac{u_0}{2} \exp(-2x) + \frac{u_0}{2} \right] = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_0}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{u_0 = 2 \;,\; A = -1 \;,\; B = 1}$$

d'où
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \exp(-2x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

. la médiane est donnée par :

$$F(x_{1/2}) = 0.5$$

$$\Leftrightarrow 1 - \exp(-2 x_{1/2}) = 0.5$$

$$\Leftrightarrow x_{1/2} = -\ln(1/2) / 2$$

(3)
$$f_X(x) = \frac{dF_X}{dx}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\exp(-2x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

à tracer (loi exponentielle).

$x_{mod} / \left[\frac{df_X}{dx} = 0 \right]_{x = x_{mod}}$ or $\frac{df_X}{dx} < 0 \quad \forall x$

$\Rightarrow$ il n'y a pas de mode.

(4) $E(X) = \frac{1}{2}$ ($E(X) = \alpha\beta$ avec $\beta = \frac{1}{2}$ et $\alpha = 1$
$\Rightarrow$ une loi exponentielle est une loi γ de paramètre $\alpha = 1$!!)