T. D. n° 8. Lois continues.

Exercice n° 1.
Soit X, une v. a. réelle telle que sa fonction de répartition soit:

$$F : \begin{cases} x \mapsto 0, \text{ si } x < 0 \\ x \mapsto 1 - \left(1 + \dfrac{x}{2}\right) \exp\left(-x/2\right) \end{cases}$$

1) Déterminer la densité de probabilité de X.
2) Déterminer le mode de la densité.
3) Calculer l'espérance et la variance de X.
4) Calculer la probabilité $P\left(1 \leq X \leq 2\right)$
5) Calculer la probabilité $P\left(1 \leq X \leq 2\right)$ sachant que $P\left(X \geq 1\right)$.

Exercice n° 2.
Soit X, une v. a. réelle de densité de probabilité:

$$f : \begin{cases} x \mapsto 0, \text{ si } x \notin [-1, 1] \\ x \mapsto \lambda\left(1 - x^2\right) \end{cases}$$

1) Calculer λ. Construire le graphe de $f\left(x\right)$.
2) Déterminer la fonction de répartition de X et construire son graphe.
3) Calculer la probabilité de l'événement $|X| \geq 0.5$. Représenter cette probabilité sur les 2 graphes précédents.
4) Calculer espérance et variance de X. Donner la médiane.

Exercice n° 3.
Soit X, une v. a. réelle de densité de probabilité définie pour $n > 1$:

$$f : \begin{cases} x \mapsto ax^{n-1}, \text{ si } x \in [0, 1[\\ x \mapsto 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

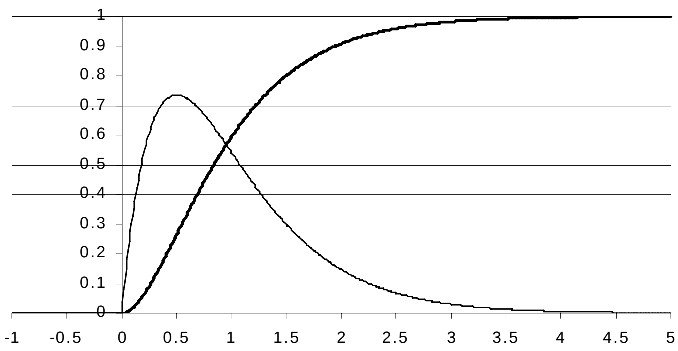
1) Déterminer a pour que $f\left(x\right)$ soit une densité de probabilité.
2) Calculer $E\left(X\right)$ et $V\left(X\right)$.
3) Déterminer la fonction de répartition de X.

Exercice n° 4.
Soit X, une variable aléatoire réelle, de densité associée $f\left(x\right)$ telle que :

$$f\left(x\right) = \begin{cases} 0 \text{ pour } x < 0 \\ kx \exp\left(-2x\right) \text{ pour } x \geq 0 \end{cases}$$

1) Déterminer le réel k pour que $f\left(x\right)$ soit une densité de probabilité.
2) Calculer $F\left(x\right)$, fonction de répartition de X.
3) Quel est le mode de $f\left(x\right)$? Quelle est la médiane de X? Que peut-on dire de la distribution de probabilité de X?
4) Que représentent les courbes de la figure ci-dessous (courbe (a) : trait gras, courbe (b) : trait fin)?
5) Donner les probabilités suivantes : $P\left(X \leq 2\right)$, $P\left(X = 3\right)$, $P\left(1 < X \leq 2\right)$, $P\left(X > 1\right)$
6) Donner les valeurs X_i, $i = 1, 2$ pour lesquelles $P\left(X \leq X_1\right) = 0.6$, $P\left(0.5 < X \leq X_2\right) = 0.5$

On rappelle que $\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$



Exercice n° 5.

Soit l'équation différentielle linéaire, du deuxième ordre, à coefficient constant :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 0 \tag{II}$$

1) En posant $u = \dfrac{dy}{dx}$, réécrire (II) assortie de la condition initiale $u\left(x=0\right) = u_0$.

2) Donner la solution y^* sous la forme $y^* = Ae^{ax} + B, \forall A, B \in \mathbb{R}$ où $a \in \mathbb{R}$. On donnera l'expression de A en fonction de u_0.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ dont la fonction de répartition F possède les propriétés suivantes :

F est continue en 0
$F\left(x\right) = 0, \, \forall x \leq 0$
F est solution de (II) pour $x > 0$

3) En s'aidant des propriétés précédentes et des propriétés générales d'une fonction de répartition, déterminer F ($i.e.$ déterminer A et B) et tracer son graphe. Quelle est la médiane de X?

3) Déterminer $f\left(x\right)$, densité de probabilité de X. Tracer son graphe. Quel est le mode de cette densité?

4) Calculer l'espérance de X.