Licence SVT - 2ème année - Outils mathématiques

TD 1 - Révisions de techniques de calcul.

Exercice 1: Parmi les nombres réels, il y a : les nombres entiers naturels (comme 0, 1, 2, ...) qui constituent l'ensemble noté $\mathbb{N}$; les nombres entiers relatifs (comme 0, 1, -1, 2; -2; ...) qui constituent l'ensemble noté $\mathbb{Z}$; les nombres rationnels (qui constituent l'ensemble noté $\mathbb{Q}$) et les nombres irrationnels.

Un nombre rationnel est un rapport $\frac{n}{p}$ où n et p sont des entiers ($p \neq 0$).

Il existe des nombres irrationnels (non rationnels) comme par exemple $\sqrt{2}$, π ou e.

Exercice 2: $a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$ si $n \in \mathbb{N}^*$; $a^0 = 1$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}} \quad \text{si } n \in \mathbb{N}.$$

$a^{1/p}$ est le nombre défini par : $(a^{1/p})^p = 1$, on le note également $\sqrt[p]{a}$, si $p \in \mathbb{N}$.

Par exemple, si $p = 2$: $a^{1/2} = \sqrt{a}$. Ce n'est pas défini pour $a \neq 0$. On peut le définir pour $a < 0$ si p est impair.

Si r est rationnel : $r = \frac{n}{p}$ donc $a^r = a^{\frac{n}{p}} = (a^{1/p})^n$.

Si r est irrationnel, il existe une famille de nombres rationnels $\{q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ telle que : $q_i \xrightarrow[i \to +\infty]{} r$

On définit alors a^r par : $a^r = \lim\limits_{i \to +\infty} a^{q_i}$

Si $r < 0$: $a^r = \dfrac{1}{a^{-r}}$.

Exercice 3 :

3.1. $\dfrac{ax}{b+x} = c \quad (E) \quad (x \neq -b)$

$$(E) \iff ax = c(b+x)$$
$$\iff ax = bc + cx$$
$$\iff (a-c)x = bc$$

Si $a = c$ et $bc = 0$ alors ~~[illegible]~~ tout $x \in \mathbb{R}$ est solution. Si $a = c$ et $bc \neq 0$, il n'y a pas de solution. Si $a \neq c$ alors $x = \dfrac{bc}{a-c}$ est l'unique solution.

3.2) $\dfrac{15x^3 - 2x^4}{x^2} = x^3$ (E) $x \neq 0$.

(E) $\Leftrightarrow 15x - 2x^2 = x^3$

$\Leftrightarrow x(x^2 + 2x - 15) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2 + 2x - 15 = 0$ (mais $x \neq 0$ donc la 1ère solut° est à proscrire)

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 = 0$

$\Delta = 4 + 60 = 64 = 8^2$

$x = \dfrac{-2 \pm 8}{2}$ Les solutions sont : $x_1 = -5$ et $x_2 = 3$.

3.3) $x^4 + x^2 - 12 = 0$ (E).

C'est une équation bicarrée. On pose $X = x^2$.

(E) $\Leftrightarrow X^2 + X - 12 = 0$

$\Delta = 1 + 48 = 49 = 7^2$

$\Rightarrow X = \dfrac{-1 \pm 7}{2}$ donc $X = -4$ ou $X = 3$

Or $X = x^2$ donc $X \neq -4$ (X doit être positif).

Par conséquent $X = 3$ et $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$ sont les solutions.

Exercice 4 :

4.1) $\frac{2x}{1+x} < 3$. (I)

- Si $x < -1$: $1+x<0$ $\quad$ (I) $\Leftrightarrow 2x > 3(1+x)$

$\Leftrightarrow (2-3)x > 3$

$\Leftrightarrow -x > 3$

$\Leftrightarrow x < 3$

Comme $x<-1$ et $x<3$, les solutions sont les éléments de $]-\infty ; -1[$.

- Si $x > -1$: $1+x > 0$ $\quad$ (I) $\Leftrightarrow 2x < 3(1+x)$

$\Leftrightarrow (2-3)x < 3$

$\Leftrightarrow -x < 3$

$\Leftrightarrow x > -3$

Comme $x > -1$ et $x > -3$, les solutions sont les éléments de $]-1 ; +\infty[$.

Donc les solutions de (I) sont les éléments de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

4.2) $\dfrac{15x^3 - 2x^4}{x^2} \geq x^3$ (I) $x \neq 0$

(I) $\Leftrightarrow 15x - 2x^2 \geq x^3$

$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 15x \leq 0$

$\Leftrightarrow x(x^2 + 2x - 15) \leq 0$

On étudie le signe de $x^2 + 2x - 15$ dont les racines sont $x_1 = -5$ et $x_2 = 3$.

x		-5		0		3	
x	$-$	|	$-$	||	$+$	|	$+$
$x^2+2x-15$	$+$	|	$-$	||	$-$	|	$+$
$x(x^2+2x-15)$	$-$	|	$+$	||	$-$	|	$+$

Donc I est équivalent à $x \in]-\infty ; 5] \cup]0 ; 3]$.

4.3) $x^2 + x - 12 < 0$

Les racines de l'expression de gautche sont -4 et 3.
L'expression est négative entre les racines. Les solutions sont donc : $x \in]-4 ; 3[$.

4.4) $x^r > 2 \iff x > 2^{1/r}$ ~~si x>0~~.

Exercice 5: Si $a \neq 0$, ax^2+bx+c ~~admet~~ est une expression de degré 2. Son discriminant est :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Si $\Delta > 0$, l'expression admet 2 racines, et change de signe lorsque x traverse les racines.

Si $\Delta = 0$, il n'y a qu'une racine et l'expression est de signe constant, celui de a.

Si $\Delta < 0$, l'expression est de signe constant, celui de a.

Les conditions sont donc :

$$\begin{cases} b^2 - 4ac \leq 0 \\ a > 0. \end{cases}$$

Exercice 6: $(x^2+xy+y^2)(x-y) = x^3 + x^2y + xy^2 - x^2y - xy^2 - y^3$
$= x^3 - y^3$

$$(x-y)\sum_{i=0}^{n-1} x^i y^{n-i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} x^{i+1} y^{n-i-1} - \sum_{i=0}^{n-1} x^i y^{n-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2} x^{i+1} y^{n-i-1} - \sum_{i=1}^{n-1} x^i y^{n-i} + x^n - y^n$$

En posant $j = i-1$ $\quad \sum_{i=1}^{n-1} x^i y^{n-i} = \sum_{j=0}^{n-2} x^{j+1} y^{n-j-1}$

$$\Rightarrow (x-y)\sum_{i=0}^{n-1} x^i y^{n-i-1} = x^n - y^n$$

Exercice 7 : a) $z = 2-15 + i(3+10) = -13+13i$

b) $z = 3+4+i(2-6) = 7-i4$

c) $z = \frac{(1+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{1-2+i(1+2)}{1+4} = -\frac{1}{5} + i\frac{3}{5}$

d) $z = \frac{(1-i)^2(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{(1-2i-1)(3-i)}{9+1} = \frac{2}{10} - i\frac{6}{10}$

$$= \frac{1}{5} - i\frac{3}{5}$$

Exercice 8 : a) $z = 1+3i \qquad |z| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

$z = \sqrt{10}\left(\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{3}{\sqrt{10}}i\right) \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ et $\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$

$\arg(z) = \mathrm{Atan}(3)$

b) $z = 2 - 5i \qquad |z| = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$

c) $z = \dfrac{2+2i}{1-i} = \dfrac{(2+2i)(1+i)}{1+1} = (1+i)^2 = 1+2i-1 = 2i$

$\Rightarrow |z| = 2.$

Exercice 9 : a) $z = 5 - i \qquad \rho = |z| = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$

$z = \sqrt{26}\left(\dfrac{5}{\sqrt{26}} - i\dfrac{1}{\sqrt{26}}\right) \qquad \cos\theta = \dfrac{5}{\sqrt{26}}$

$\sin\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{26}}$

$\theta = \arg(z) = \mathrm{Atan}\left(-\frac{1}{5}\right) = -\mathrm{Atan}\left(\frac{1}{5}\right)$

$z = \sqrt{26}\, e^{i\theta}$

b) $z = \dfrac{(1-i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \dfrac{(2-3)+i(-2-3)}{4+9}$

$= \dfrac{-1}{13} - i\,\dfrac{5}{13}$

$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{13}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1+25}{13^2}} = \dfrac{\sqrt{26}}{13} = \sqrt{\dfrac{2}{13}}$

$z = \sqrt{\frac{2}{13}}\, e^{i\theta}$ où $\theta = \mathrm{Atan}(5)$

Exercice 10 : $z = e^{z} = e^{2+4i} = e^{2}e^{4i}$

$|z| = e^2 \quad \text{Arg}(z) = 4$

$$\begin{cases} x = e^2 \cos 4 \\ y = e^2 \sin 4 \end{cases}$$

$z = z_1 z_2 = z_1 e^{i\theta_1} z_2 e^{i\theta_2} = z_1 z_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

$|z| = z_1 z_2 \quad \text{Arg}(z) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2)$

$$z = \underbrace{z_1 z_2 \cos(\theta_1+\theta_2)}_{x} + i \underbrace{z_1 z_2 \sin(\theta_1+\theta_2)}_{y}$$

Exercice 11 : a) $x^2 - 4x + 5 = 0$

$\Delta = 16 - 20 = -4 = (2i)^2$

$x = \frac{4 \pm 2i}{2} \Rightarrow x = 2+i$ ou $x = 2-i$.

b) $2x^2 - 4x + 10 = 0$

$\Delta = 16 - 80 = -64 = (8i)^2$

$x = \frac{4 \pm 8i}{4} \Rightarrow x = 1+2i$ ou $x = 1-2i$

Exercice 12 : Rappel : $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Si n=1, l'expression à démontrer :

$a+b = C_1^0 a^0 b^1 + C_1^1 a^1 b^0 = a+b$.

L'égalité est vraie.

Supposons que $(a+b)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^k b^{n-1-k}$

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)^{n-1}$$

$$= (a+b) \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^k b^{n-1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^{k+1} b^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^k b^{n-k}$$

$$\cancel{= C_{n-1}^0 a b^{n-1} +}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-1}^k a^{k+1} b^{n-1-k} + C_{n-1}^{n-1} a^n$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^k a^k b^{n-k} + C_{n-1}^0 b^n$$

En posant $j = k+1$ $\sum_{k=0}^{n-2} C_{n-1}^k a^{k+1} b^{n-1-k} = \sum_{j=1}^{n-1} C_{n-1}^{j-1} a^j b^{n-j}$

Donc :

$$(a+b)^n = a^n + \sum_{k=1}^{n-1} \left(C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}\right) a^k b^{n-k} + b^n$$