Licence des Sciences de la Vie et de la Terre
Parcours MER
Unité d'Enseignement "Outils Mathématiques pour les Sciences de la mer"

TD 2 – Introduction d'Algèbre Linéaire

Exercice 1 : On considère deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^2$ dont la décomposition dans la bases (e_1, e_2) est :

$$\begin{aligned} u &= 2e_1 + 3e_2 \\ v &= e_1 - 2e_2 \end{aligned}$$

a) Représenter graphiquement les vecteurs u et v puis le vecteur $u + v$, le vecteur $u - v$ et le vecteur $2v$.
b) Quelles sont les coordonnées de u et de v ? Quelles sont les coordonnées de $u + v$? de $u - v$? de $3u$?

Exercice 2 : Les systèmes suivants sont-ils libres dans $\mathbb{R}^3$? Forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

a)

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 : Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?

$$a)\ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad (x, y) \mapsto (2x - y, x, x + 5y)$$

$$b)\ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad (x, y) \mapsto (-y, x^2 + y^2, -x + 2y)$$

$$c)\ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad (x, y, z) \mapsto (2x - y + z, x - 2y, x + 2y - 3z)$$

$$d)\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \mapsto (y + x^2, 2y)$$

Exercice 4 : On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer AB et BA.

Exercice 5 :

1) On définit la matrice P suivante :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est-elle inversible, et si c'est le cas, quelle est sa matrice inverse ?

2) Donner la matrice de l'application linéaire définie au c) de l'exercice 2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3) On pose $u = 3e_1 + 2e_2$ où (e_1, e_2) est la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Ecrire la matrice U de u. On définit les vecteurs :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = -e_1 - e_2 \\ \varepsilon_2 = 2e_1 + e_2 \end{cases}$$

Quelles sont les coordonnées des vecteurs ε_1 et ε_2 ? Forment-ils une base ? Exprimer e_1 et e_2 en fonction de ε_1 et ε_2. De même, exprimer u en fonction de ε_1 et ε_2. En déduire la matrice U' de u dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Quelle est la matrice de passage P définie par le changement de base. Calculer $P^{-1}U$. Qu'en conclure ?

Exercice 6 : On considère le système de vecteurs $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ définis par :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \varepsilon_1 & = & e_1 & + & e_2 & - & e_3 \\ \varepsilon_2 & = & e_1 & + & e_2 & & \\ \varepsilon_3 & = & e_1 & & & - & e_3 \end{array}\right.$$

où (e_1, e_2, e_3) désigne la base canonique.

1) Montrer que le système $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Donner la matrice de passage P associée.

3) Calculer P^{-1}.

4) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $(x, y, z) \mapsto (x + 2y - 3z, x - 2y, 3x - y + z)$. Vérifier que f est linéaire et donner sa matrice dans la base canonique.

5) Donner la matrice de f dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

6) On note (x', y', z') les coordonnées des vecteurs dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, exprimer (x', y', z') en fonction de (x, y, z).