Licence des Sciences de la Vie et de la Terre
Parcours MER
Unité d'Enseignement "Outils Mathématiques pour les Sciences de la mer"

TD 4 – Fonctions réelles

Exercice 1 : Calculer la limite quand x tend vers x_0 de l'expression :

$$\frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0}$$

Qu'en déduire ?

Exercice 2 : Donner l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions suivantes :
1) $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 1$
2) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5}{x^2 + 3x - 4}$
3) $f(x) = (4x^2 - 3x + 1)^3$
4) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 5x + 7}$
5) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}}$
6) $f(x) = \exp((x-1)^2)$
7) $f(x) = \log(\dfrac{2x+3}{x-1})$

Exercice 3 : Etudier les deux fonctions suivantes (ensemble de définition, extrêma, tableau de variation, graphe) :
1) $f(x) = 2x^3 - 6x + 2$
2) $f(x) = \dfrac{x+1}{5x^2 + 4x - 1}$

Exercice 4 : Donner le développement limité à l'ordre n en x_0 des fonctions suivantes :
1) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ avec $x_0 = 0$ et $n = 3$
2) $f(x) = \log(1+x)$ avec $x_0 = 0$ et $n = 3$
3) $f(x) = \exp(x)$ avec $x_0 = 0$ et $n = 4$

Exercice 5 : On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x\log(x)}{x-1}$$

où $x \in]1; +\infty[$. L'objectif de cet exercice est de démontrer que pour tout $x > 1$, $f(x) > 1$.

1) soit g la fonction définie par $g(x) = x - 1 - \log(x)$. Montrer que la fonction g est strictement croissante. Quelle est sa limite lorsque x tend vers 1 ? Quelle relation peut-on alors écrire entre $g(x)$ et 0 pour $x > 1$?

2) Montrer que la dérivée de f est du même signe que g et en déduire le sens de variation de f pour $x > 1$.

3) En posant $x = 1 + u$, écrire un développement limité de f au voisinage de $x = 1$ (donc de $u = 1$). En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1.

4) Conclure.

Exercice 6 : Donner une primitive pour chacune des fonctions suivantes :
1) $f(x) = \log(x)$
2) $f(x) = \log(1+x)$
3) $f(x) = \frac{1}{1+x}$
4) $f(x) = \frac{x}{1+x}$
5) $f(x) = \beta x \exp(-\alpha x)$
6) $f(x) = x\cos(x)$