Licence des Sciences de la Vie et de la Terre
Parcours MER
Unité d'Enseignement "Outils Mathématiques pour les Sciences de la mer"

TD 5 – Fonctions à plusieurs variables

Exercice 1 : Pour chacune des fonctions suivantes, donner les extrêma et déterminer leur nature.
1) $f(x,y) = 2x^2 + 4xy + 2y^2$
2) $f(x,y) = \exp((x-1)^2)\exp((y-2)^2)$
3) $f(x,y) = (x^4 - 5x^2 + 4)y$
4) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$
5) $f(x,y) = x^3 + y^3 - axy$

Exercice 2 : Une usine fabrique des boites parallélépipédiques sans couvercle de longueur x, de largeur y et de hauteur z. Le volume doit être fixé à V_0 mais dans un souci d'économie de matière première, la société veut fabriquer des boites de surface minimale. Déterminer les dimensions de la boîte permettant d'avoir un volume V_0 pour une surface minimale ?

Exercice 3 : On considère deux séries de mesures $(x_1, \cdots, x_n)$ et $(y_1, \cdots, y_n)$ représentant deux grandeurs. On suppose que le nuage de points (x_i, y_i), avec $i = 1, \cdots, n$ montre que les points sont presque alignés. On veut alors déterminer la droite qui passe au plus près de l'ensemble de ces points. Une telle droite est définie par deux paramètres a et b et l'équation $y = ax + b$. Le problème revient donc à déterminer les valeurs de a et de b telles que la distance entre la droite et les points soit minimale.

1) Interpréter le sens de la fonction $f(a,b) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2$.
2) Déterminer les extrêma de f
3) Déterminer le minimum de f.

Exercice 4 : On considère l'application suivante :

$$H(x,y) = ax - b\log(x) + cy - d\log(y) + C$$

1) Donner le domaine de définition D_H de H.
2) Pour $y = C^{te}$, étudier H.
3) Même question pour $x = C^{te}$.
4) En déduire le graphe de H.
5) Déterminer par le calcul les extrêma de H et donner leur nature.

Exercice 5 : On considère la fonction :

$$F(x,y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$$

1) Calculer la différentielle de F en (x,y). Déterminer les extrêma de F.
2) Préciser la nature des extrêma de F.
3) Ecrire la fonction F en utilisant les coordonnées polaires.
4) Construire la courbe $F(x,y) = 0$.