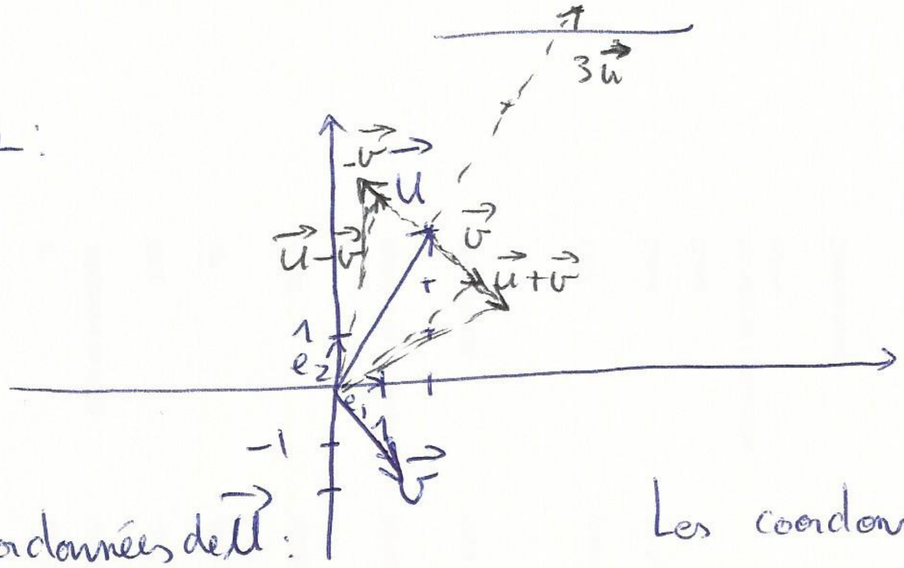
Licence SV2 - 2ème année - Outils mathématiques

TD 2 - Introduction à l'algèbre linéaire

Exercice 1 :



b) Les coordonnées de $\vec{u}$:

$$U = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de $\vec{v}$

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$:

$$U+V = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Coordonnées de $\vec{u}-\vec{v}$

$$U-V = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Coordonnées de $3\vec{u}$:

$$3U = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

a) $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Si $\alpha_1 \vec{e_1} + \alpha_2 \vec{e_2} + \alpha_3 \vec{e_3} = \vec{0}$ alors :

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 2\alpha_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha_3 \\ 0 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_2 - 2\alpha_3 \\ -2\alpha_2 - 4\alpha_3 + \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_2 - 2\alpha_3 \\ -\alpha_2 - 4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (\vec{e_1} ; \vec{e_2} ; \vec{e_3})$ est un système libre.

Un système libre de 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Si $\alpha_1 \vec{e_1} + \alpha_2 \vec{e_2} + \alpha_3 \vec{e_3} = \vec{0}$ alors :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_2 - \alpha_3 \\ -2\alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_2 - \alpha_3 \\ -\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 = -3\alpha_3 \\ \alpha_2 = 2\alpha_3 \end{cases}$$

En posant $\alpha_3 = 1$, on a d'après le dernier système $\alpha_1 = -3$ et $\alpha_2 = 2$. Donc le système ~~n'~~ n'est pas libre. Ce n'est pas une base.

<u>Rq</u>: on a montré que : $-3\vec{e_1} + 2\vec{e_2} + e_3 = \vec{0}$

Ce qui équivaut à $\vec{e_3} = 3\vec{e_1} - 2\vec{e_2}$ (le vérifier sur les vecteurs de l'énoncé).

Donc $\vec{e_3}$ est <u>lié</u> à $(\vec{e_1}; \vec{e_2})$ par cette relation.

$\vec{e_3}$ est dans le plan $(\vec{e_1}; \vec{e_2})$, les 3 vecteurs sont <u>coplanaires</u>.

Exercice 3 : Rappel : une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est linéaire si elle vérifie les 2 propriétés suivantes.

a) $\forall u \in \mathbb{R}^n$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $f(u+v) = f(u) + f(v)$

b) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall u \in \mathbb{R}^n$, $f(\alpha u) = \alpha f(u)$

On doit donc vérifier si chaque fonction de l'exercice vérifie ces 2 propriétés ou non.

a) $$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x - y \\ x \\ x + 5y \end{pmatrix}$$

Soient u, v 2 vecteurs quelconques de $\mathbb{R}^2$.

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \qquad u+v = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}$$

$$f(u) = \begin{pmatrix} 2u_1 - u_2 \\ u_1 \\ u_1 + 5u_2 \end{pmatrix} \qquad f(v) = \begin{pmatrix} 2v_1 - v_2 \\ v_1 \\ v_1 + 5v_2 \end{pmatrix}$$

$$f(u+v) = \begin{pmatrix} 2(u_1+v_1) - (u_2+v_2) \\ u_1 + v_1 \\ u_1 + v_1 + 5(u_2+v_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_1 + 2v_1 - u_2 - v_2 \\ u_1 + v_1 \\ u_1 + v_1 + 5u_2 + 5v_2 \end{pmatrix}$$

$$f(u) + f(v) = \begin{pmatrix} 2u_1 - u_2 + 2v_1 - v_2 \\ u_1 + v_1 \\ u_1 + 5u_2 + v_1 + 5v_2 \end{pmatrix}$$

Donc $f(u+v) = f(u) + f(v)$. La propriété a) est vérifiée.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^2$ $\quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

$$\alpha u = \begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \end{pmatrix} \qquad f(\alpha u) = \begin{pmatrix} 2\alpha u_1 - \alpha u_2 \\ \alpha u_1 \\ \alpha u_1 + 5\alpha u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(2u_1 - u_2) \\ \alpha u_1 \\ \alpha(u_1 + 5u_2) \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} 2u_1 - u_2 \\ u_1 \\ \alpha_1 + 5u_2 \end{pmatrix} = \alpha f(u)$$

Donc la propriété b) est également vérifiée.
Par conséquent f est linéaire.

b) f est non linéaire

c) f est linéaire

d) f est non linéaire.

Exercice 4:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & -3 \\ 9 & 13 & -13 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -7 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Noter que $AB \neq BA$!

Exercice 5: Soit X un vecteur supposé inconnu $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Soit B ________ connu $B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

et supposons que $PX = B$.

Si P est inversible alors $X = P^{-1}B$.

$$PX = B \iff \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -x + 2y = a \\ -x + y = b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -a + 2y \\ y = b - a + 2y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -a + 2y \\ y = a - b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = a - 2b \\ y = a - b \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

[<u>Noter que</u> $PP^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on peut donc vérifier notre résultat.

2) La base canonique est : $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

L'application f est définie par :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ x - 2y \\ x + 2y - 3z \end{pmatrix}$$

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad f(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Donc la matrice de f est : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

3° $u = 3e_1 + 2e_2$ $\quad U = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Les coordonnées de ε_1 sont $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et de ε_2 sont $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Supposons que $\alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 = 0$ donc $\begin{cases} -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ $\quad \Rightarrow \alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = 0$

$\Rightarrow (\varepsilon_1 ; \varepsilon_2)$ est un système libre de $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ c'est une base.

8

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = -e_1 - e_2 \\ \varepsilon_2 = 2e_1 + e_2 \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 = -\varepsilon_1 - e_2 \\ \varepsilon_2 = -2\varepsilon_1 - 2e_2 + e_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} e_1 = -\varepsilon_1 + 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ e_2 = -2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \end{cases}$$

$$\iff \boxed{\begin{cases} e_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ e_2 = -2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \end{cases}}$$

$$u = 3e_1 + 2e_2 = 3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + 2(-2\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

$$= 3\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 - 4\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2$$

$$= -\varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

Donc $U' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

La matrice de passage de $(e_1; e_2)$ vers $(\varepsilon_1; \varepsilon_2)$ est

$P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$P^{-1}U = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\boxed{U' = P^{-1}U}$.

Exercice 6 :

1° Supposons que $\alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \alpha_3 \varepsilon_3 = 0$

donc $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_2 - \alpha_3 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$

Donc $(\varepsilon_1 ; \varepsilon_2 ; \varepsilon_3)$ est un système libre de $\mathbb{R}^3$, il forme une base de $\mathbb{R}^3$.

2° $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3° Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur supposé inconnu et soit $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur supposé connu tels que :

$PX = B$. P est inversible (matrice de passage) et $P^{-1}B = X$.

$$PX = B \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ x + y = b \\ -x - z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a - y - z \\ a - \cancel{x}y - z + y = b \\ -a + y + z - z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a - y - z \\ z = a - b \\ y = a + c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a - a - c - a + b \\ y = a + c \\ z = a - b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -a + b - c \\ y = a + c \\ z = a - b \end{cases}$$

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

4°- f est linéaire et sa matrice dans la base canonique est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

5° Dans la nouvelle base, A devient :

$$A' = P^{-1} A P$$

$$= \begin{pmatrix} -8 & -6 & -5 \\ 7 & 5 & 6 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

6° $U' = P^{-1} U$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x' = -x + y - z \\ y' = x + z \\ z' = x - y \end{cases}}$$