

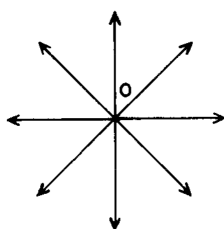
Les calculatrices et les documents sont interdits.

Les deux parties sont à rédiger sur des copies séparées. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.

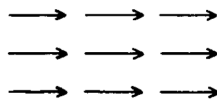
Partie I (Mme BAKLOUTI), sur 4 points

Exercice 1 (4 points) : Noter que les questions sont indépendantes

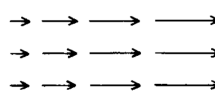
- Donner la définition mathématique et dire ce que représente concrètement le gradient d'un champ scalaire U .
- Pour chacun des champs vectoriels ci-dessous, indiquer si sa divergence est nulle ou non, et donner son signe si elle n'est pas nulle. Faire de même avec le rotationnel de chacun de ces champs. Justifier succinctement vos réponses.



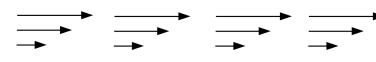
(a)



(b)



(c)



(d)

- Soit le champ vectoriel \vec{E} défini par :

$$\vec{E} = (2x + y + z) \vec{e}_x + (x + 2y + z) \vec{e}_y + (x + y + 2z) \vec{e}_z$$

Quelle condition suffisante doit vérifier \vec{E} pour pouvoir affirmer que \vec{E} dérive d'un potentiel scalaire ?

- Déterminer le potentiel scalaire dont dérive le champ vectoriel \vec{E} dont l'expression est donnée à la question précédente.

Partie II (M. POGGIALE), sur 16 points

Question de cours :

Donner le développement limité de la fonction f définie par $f(x) = 1 + x - \log(1 + x)$ en 0 à l'ordre 2.

Exercice 2

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 20 \\ -10 & 17 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres de A .
2. Calculer les vecteurs propres associés.
3. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -11x + 20y \\ \frac{dy}{dt} = -10x + 17y \end{cases}$$

Exercice 3

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{da}{du} - ma + 3 = 0$$

Exercice 4

On considère la fonction :

$$f(x, y) = \frac{x}{a} - \log(x) + \frac{y}{2} - \log(y + 1)$$

où a est un réel strictement positif.

1. Quel est l'ensemble de définition de f .
2. Déterminer l'extremum de f et donner sa nature.