

Sujet d'examen - Première Session
Durée : 2h00

Les calculatrices et les documents sont interdits.

Les deux parties sont à rédiger sur des copies séparées. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.

Partie I (Mme BAKLOUTI), sur 4 points

Exercice 1 (1,5 points) : questions de cours

1. Soit un champ scalaire $U(x, y)$. Donner la définition d'une ligne de niveau de U , et citer les conventions associées à la représentation de ces lignes de niveau.
2. Définir le champ vectoriel représentant le gradient du champ U et donner son orientation par rapport aux lignes de niveau de U (justifier).
3. Donner la définition des lignes de champ du champ vectoriel $\vec{\nabla}U$

Exercice 2 (2,5 points)

Soit le champ vectoriel \vec{E} défini par :

$$\vec{E}(x, y) = x \vec{e}_y$$

1. Tracer qualitativement le champ vectoriel \vec{E} dans le plan horizontal (Oxy)
2. Sans aucun calcul, dire en observant le champ vectoriel \vec{E} , si sa divergence et/ou son rotationnel sont nuls (justifier). S'ils ne sont pas nul(s), donner leur signe.
3. Calculer la divergence et le rotationnel de \vec{E} . Dire ce que représentent chacune des composantes du rotationnel de \vec{E}

Partie II (M. POGGIALE), sur 16 points

Question de cours :

Donner le développement limité de la fonction f définie par $f(x) = \exp(2 - x) - 1 + x$ en 2 à l'ordre 2.

Exercice 2

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres de A .
2. Calculer les vecteurs propres associés.

3. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5x + 3y + 3z \\ \frac{dy}{dt} = -3x + y + 3z \\ \frac{dz}{dt} = -3x + 3y + z \end{cases}$$

Exercice 3

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{db}{dt} - 2kb + 1 = 0$$

où k est un paramètre réel non nul.

Exercice 4

On considère la fonction :

$$f(x, y) = \frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2}$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f .
2. Déterminer les extrema de f et donner leur nature.