

TD 2 : Modèles à plusieurs variables d'état à temps discret

Exercice 1 : Résoudre les systèmes suivants :

a)

$$\begin{aligned}ax - bxy &= 0 \\ cxy - dy &= 0\end{aligned}$$

où a, b, c et d sont des réels positifs.

b)

$$\begin{aligned}ax - bx^2 - cxy &= 0 \\ dxy - my &= 0\end{aligned}$$

où a, b, c, d et m sont des réels positifs.

c)

$$\begin{aligned}a_1x - b_1x^2 - c_1xy &= 0 \\ a_2y - b_2y^2 - c_2xy &= 0\end{aligned}$$

où a_i, b_i et c_i ($i = 1, 2$) sont des réels positifs.

Exercice 2 : On considère le modèle hôtes - parasitoïdes suivant (Modèle de Nicholson-Bailey) :

$$\begin{aligned}H_{t+1} &= rH_t \exp(-aP_t) \\ P_{t+1} &= crH_t(1 - \exp(-aP_t))\end{aligned}$$

où H_t et P_t désignent les densités d'hôtes et de parasitoïdes à l'instant t respectivement et r, a, c sont des réels positifs.

- 1) Interpréter le modèle et les paramètres. Que représente $\exp(-aP_t)$?
- 2) Déterminer les équilibres de ce modèle.
- 3) Soit une matrice 2×2 notée J représentant la matrice jacobienne d'un modèle à temps discret en un équilibre donné. A quelles conditions sur J l'équilibre est-il stable ? Que peut-on conclure si $\det(J) > 1$?
- 4) Etudier la stabilité de l'équilibre $(0, 0)$.
- 5) Déterminer la matrice jacobienne du modèle à l'équilibre positif. Préciser pour quelles valeurs de r cet équilibre a du sens. Calculer le déterminant de la matrice jacobienne obtenue.
- 6) On considère la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x \log(x)}{x-1}$. Calculer sa dérivée.
- 7) On considère la fonction g définie sur $]1; +\infty[$ par $g(x) = 1 - x - \log(x)$. Calculer sa dérivée. Que peut-on conclure sur le sens de variation de g ? Quelle est la limite de g quand x tend vers 1 ? Que peut-on en conclure sur la position de $g(x)$ par rapport à 0 quand $x > 1$?
- 8) Que nous apprend le résultat de la question précédente sur le signe de f' ? Quelle est la limite de f quand x tend vers 1 ? Que peut-on conclure sur la position de $f(x)$ par rapport à 1 quand $x > 1$?
- 9) Que nous apprend le résultat de la question précédente sur le déterminant de la matrice jacobienne du modèle à l'équilibre positif ? Que peut-on conclure sur la stabilité de l'équilibre positif ?

Exercice 3 : On considère le modèle prédateurs - proies suivant :

$$\begin{aligned}N_{t+1} &= rN_t \exp\left(1 - \frac{N_t}{K} - aP_t\right) \\ P_{t+1} &= cP_t \exp(bN_t - m)\end{aligned}$$

où N_t et P_t désignent les densités de proies et de prédateurs à l'instant t respectivement et r, K, a, b et m sont des réels positifs.

- 1) Interpréter le modèle et les paramètres.
- 2) Déterminer les équilibres de ce modèle.
- 3) Etudier la stabilité des équilibres.
- 4) Interpréter la figure (1).

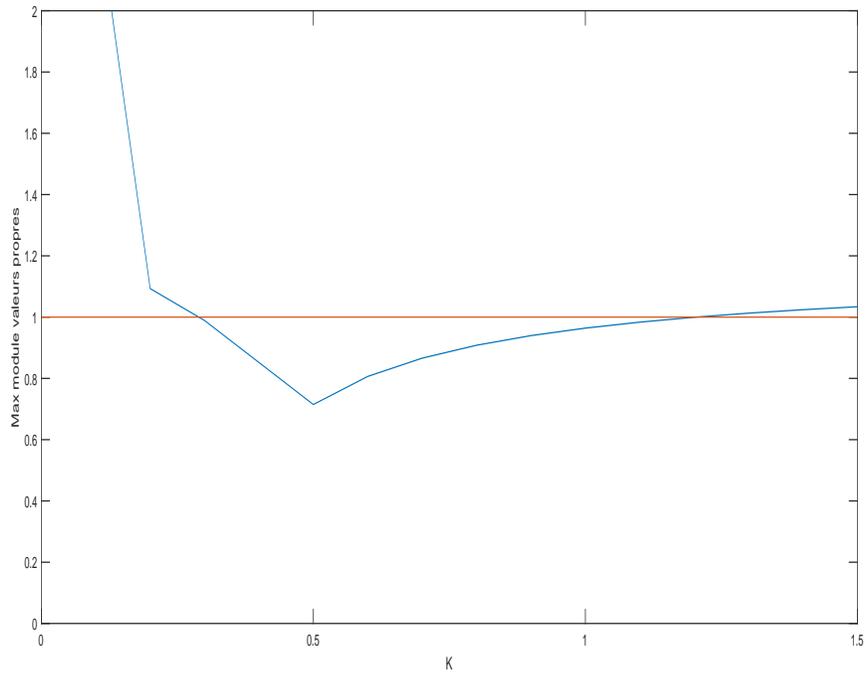


FIGURE 1 – To be completed