Master d'Océanographie

Exercices de révisions de calcul et manipulations algébriques

Exercice 1 : Montrer que :
1) $(a+2b)^2 - 4ab \geq 0$
2) $(2x+3y)^2 - 12xy \geq 0$
3) $(a+2b-c)^2 - 4ab \geq 0$
4) $x^2 - 6x + 8 \geq -1$

Exercice 2 : A quelle(s) condition(s) l'expression suivante est-elle toujours positive ?

$$ax^2 + bx + c$$

Exercice 3 : Donner le domaine de définition et calculer la dérivée f' des fonctions f suivantes :

3.1) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 3$; $f(x) = 4x^5 - 2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + x - 1$; $f(x) = x^{-2}$
3.2) $f(x) = x^{-\frac{3}{2}}$ $f(x) = \sqrt{x}$ $f(x) = (3+x^2)^3$ $f(x) = (\sqrt{x} + 2x)^4$
3.3) $f(x) = (x^2+3)^{-\frac{3}{4}}$; $f(x) = \sqrt{x^4 - 6x^2 + 8}$; $f(x) = \sqrt[5]{3x+1}$
3.4) $f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2}{1+2x}$; $f(x) = \dfrac{2e^x + x^3}{x^2 - 1}$
3.5) $f(x) = \exp(u(x))$ où u est une fonction dérivable (on exprimera la dérivée de f en fonction de u et u').
3.6) $f(x) = \exp(2x)$; $f(x) = \exp(3x^2)$; $f(x) = \exp(\dfrac{x^3 - 2}{1+2x^2})$
3.7) $f(x) = 2^x$; $f(x) = a^x$;
3.8) $f(x) = \ln(u(x))$ où u est une fonction dérivable (on exprimera la dérivée de f en fonction de u et u').
3.9) $f(x) = \ln(4x)$; $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x^2-1)}$; $f(x) = \ln(5x^2 - 1)$
3.10) $f(x) = x\ln(x) + x$ $f(x) = \ln(2\ln(x))$ $f(x) = \exp(2\ln(x))$
3.11) $f(x) = (x^2+1)^{2x}$;
3.12) $f(x) = \cos(2x)$; $f(x) = \sin(\sqrt{2x+1})$; $f(x) = \exp\left(2x\sin(\frac{1}{x})\right)$
3.13) $f(a) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2$ $f(b) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2$

Exercice 4 : Montrer que :

4.1) $\frac{x^3-y^3}{x-y} = x^2 + xy + y^2$
4.2) $\frac{x^4-y^4}{x-y} = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$
4.3) $\frac{x^n-y^n}{x-y} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} x^i y^{n-i-1}$
4.5) Démontrer que la dérivée de la fonction f définie par :

$$f(x) = x^n$$

est la fonction f' définie par :

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

.

4.6) Montrer par récurrence que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Exercice 5 : Calculer les primitives suivantes :

5.1) $\int x^3 dx\,;$ $\quad \int \alpha x^{-5} dx$ $\quad \int \dfrac{\beta}{x} dx$

5.2) $\int \exp(2x) dx\,;$ $\quad \int \exp(3x-1) dx\,;$ $\quad \int \dfrac{1}{2x+1} dx$

5.3) $\int x^2 \exp(-x) dx\,;$ $\quad \int \sin(2x) dx$

5.4) $\int \sin(x)\cos(x) dx\,;$ $\quad \int \cos(x)^2 dx$

5.5) $\int \cos(mx) dx\,;$ $\quad \int \cos(mx+1) dx$

5.6) $\int x\exp(-2x) dx\,;$ $\quad \int \exp(-3x)\sin(2x) dx$

Exercice 6 : Nombres complexes

Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de $Z = \frac{x+iy}{2x-iy}$

On pose

$$\exp(i\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

.

En écrivant $\exp(-i\theta)$, déduire les formules d'Euler :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

En déduire les intégrales suivantes :

$I = \int e^t \cos(t) dt\,;$ $\quad I = \int \cos^2(t) dt$

Exercice 7 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

7.1) $\dfrac{df}{dx} + \sin(x) f = 0$

7.2) $\dfrac{du}{dv} - 2v^2 u = 0$

7.3) $\dfrac{ds}{dz} + \alpha z^2 + 3s = 0$

Exercice 8 : Résoudre les systèmes différentiels suivants (valeurs propres réelles) :

8.1)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 4x - 2y \\ \frac{dy}{dt} &= x + y \end{aligned}$$

8.2)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 9x - 10y \\ \frac{dy}{dt} &= 5x - 6y \end{aligned}$$

8.3)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 14x - 30y \\ \frac{dy}{dt} &= 5x - 11y\end{aligned}$$

8.4)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 5x - 6y \\ \frac{dy}{dt} &= x\end{aligned}$$

Exercice 9 : Résoudre les systèmes différentiels suivants (valeurs propres complexes) :

9.1)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 11x - 26y \\ \frac{dy}{dt} &= 4x - 9y\end{aligned}$$

9.2)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 4x - 5y \\ \frac{dy}{dt} &= 2x - 2y\end{aligned}$$

9.3)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 6x - 13y \\ \frac{dy}{dt} &= 2x - 4y\end{aligned}$$

9.4)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 7x - 10y \\ \frac{dy}{dt} &= 4x - 5y\end{aligned}$$

Exercice 10 : Résoudre les systèmes différentiels suivants (valeurs propres réelles) :

10.1)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -y + 3z \\ \frac{dy}{dt} &= -x + 3z \\ \frac{dz}{dt} &= -x + y + 2z\end{aligned}$$

10.2)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -7x + 5y + 5z \\ \frac{dy}{dt} &= -5x + 3y + 5z \\ \frac{dz}{dt} &= -5x + 5y + 3z\end{aligned}$$