

Sujet d'examen - Première Session
Durée : 2h00

Les calculatrices et les documents sont interdits.

Les deux parties sont à rédiger sur des copies séparées. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.

Partie II (M. POGGIALE), sur 20 points

Exercice 1

Soit A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 20 & -36 \\ 12 & -22 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A .
2. Déterminer les vecteurs propres associés.
3. Résoudre le système différentiel :

$$\frac{dX}{dt} = AX$$

Exercice 2

On considère un système prédateur - proie et on note $x(t)$ la densité des proies, $y(t)$ la densité des prédateurs. On suppose que ces densités sont régies par le modèle suivant :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx - axy \\ \frac{dy}{dt} &= \rho y \left(1 - \frac{y}{K(x)} \right) \end{aligned}$$

où K est une fonction croissante de la densité des proies.

On suppose dans la suite que $K(x) = \alpha + \beta x$. α peut-être interprété comme une abondance de proie alternative du prédateur.

1. Interpréter le modèle.
2. Déterminer les équilibres et leur condition d'existence.
3. Déterminer la stabilité des équilibres.
4. Tracer le(s) portrait(s) de phase de ce modèle.
5. Supposons qu'on parte d'une situation dans laquelle $\alpha < \frac{r}{a}$. Quel est alors le devenir des deux populations de proie et de prédateur considérées dans cet exercice ? On décide alors d'introduire des proies alternatives (augmentation du paramètre α), de telle sorte que $\alpha > \frac{r}{a}$. Que devient alors le nombre de proies $x(t)$? Expliquez le mécanisme ?