MASTER DE SCIENCES DE LA MER
UE OCE104 : Outils et méthodes en modélisation.
Année 2018 - 2019

CORRECTION - Sujet d'examen - Première Session
Durée : 2h00

Exercice 1

1) Les valeurs propres de A sont les solutions de l'équation caractéristique :

$$det(A - \lambda I) = 0$$

Calculons ce déterminant.

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 20-\lambda & -36 \\ 12 & -22-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 8$$

Les solutions de l'équation caractéristique sont donc :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -4 \\ \lambda_2 &= 2 \end{aligned}$$

2) On note U_1 un vecteur propre associé à λ_1 et on note (x, y) ses coordonnées. Par définition, on a $AU_1 = \lambda_1 U_1$ ce qui donne le système :

$$\begin{aligned} 20x - 36y &= -4x \\ 12x - 22y &= -4y \end{aligned}$$

Ce système est équivalent à $2x = 3y$, donc une solution est $U_1 =^t(3; 2)$.

De même, on note U_2 un vecteur propre associé à λ_2 et on note (x, y) ses coordonnées. Par définition, on a $AU_2 = \lambda_2 U_2$ ce qui donne le système :

$$\begin{aligned} 20x - 36y &= 2x \\ 12x - 22y &= 2y \end{aligned}$$

Ce système est équivalent à $x = 2y$, donc une solution est $U_2 =^t(2; 1)$.

La matrice A est diagonalisable, en passant dans la base (U_1, U_2) avec la matrice de passage P définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3) Dans la base (U_1, U_2), la matrice A devient $D = P^{-1}AP$ où

$$D = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

. Soit X un vecteur exprimé dans la base initiale, il devient X' dans la base (U_1, U_2) avec $X = PX'$, ce qui est équivalent à $X' = P^{-1}X$. On a donc :

$$\frac{dX'}{dt} = P^{-1}\frac{dX}{dt} = P^{-1}AX = P^{-1}APX' = DX'$$

Or l'expression $\dfrac{dX'}{dt} = DX'$ s'écrit également :

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= -4x' \\ \frac{dy'}{dt} &= 2y' \end{aligned}$$

Ce sont deux équations différentielles homogènes indépendantes, on les résoud séparément et on trouve :

$$\begin{array}{rcl} x'(t) & = & C_1 \exp(-4t) \\ y'(t) & = & C_2 \exp(2t) \end{array}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.

Comme $X = PX'$, il en découle :

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & 2C_1 \exp(-4t) + 3C_2 \exp(2t) \\ y(t) & = & C_1 \exp(-4t) + 2C_2 \exp(2t) \end{array}$$

Exercice 2

1) Dans la première équation, le terme source rx représente la croissance de la proie en l'absence de prédateur, r est le taux de croissance intrinsèque de la population de proies. Le terme puits axy représente la mortalité des proies par prédation. a est le taux d'attaque.

La seconde équation est une équation logistique où ρ est le taux de croissance intrinsèque du prédateur et $K(x)$ est la capacité limite du milieu, qui est bien une fonction croissante de la ressource du prédateur.

2) Pour déterminer les équilibres, on annule les équations du modèle. Dans la première équation, comme x peut être mis en facteur, on trouve soit $x = 0$, soit $y = \frac{r}{a}$. Dans la seconde équation, comme y est en facteur, on trouve soit $y = 0$, soit $y = K(x) = \alpha + \beta x$.

Par conséquent, il y a trois équilibres :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

,

$$E_2 = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$

où $\bar{x} = \frac{1}{\beta}(\frac{r}{a} - \alpha)$ et $\bar{y} = \frac{r}{a}$, et

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

Notons que l'équilibre E_2 n'a de sens que si $r > a\alpha$.

3) Pour étudier la stabilité des équilibres, on détermine la matrice jacobienne associée au modèle :

$$J = \begin{pmatrix} r - ay & -ax \\ \frac{\rho\beta y^2}{(\alpha+\beta x)^2} & \rho(1 - \frac{2y}{\alpha+\beta x}) \end{pmatrix}$$

A l'équilibre E_1, cette matrice devient :

$$J_1 = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$$

qui est diagonale, donc ses valeurs propres sont r et ρ, qui sont toutes les deux strictement positive. L'équilibre E_1 est instable.

A l'équilibre E_2, la matrice jacobienne devient :

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -a\bar{x} \\ \frac{\rho\beta\bar{y}^2}{(\alpha+\beta\bar{x})^2} & -\rho \end{pmatrix}$$

Pour étudier le signe des valeurs propres de J_2, on calcule d'abord sont déterminant :

$$det(J_2) = \frac{\rho\beta a\bar{x}\bar{y}^2}{(\alpha+\beta\bar{x})^2}$$

Ce déterminant est évidemment strictement positif. Calculons alors la trace de J_2.

$$Tr(J_2) = -\rho$$

Cette trace est évidemment strictement négative. On peut donc conclure que lorsque E_2 existe, il est stable.

A l'équilibre E_3, la matrice jacobienne devient :

$$J_3 = \begin{pmatrix} r - a\alpha & 0 \\ \rho\beta & -\rho \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'une matrice triangulaire. Donc ses valeurs propres sont $r - a\alpha$ et $-\rho$. La seconde est toujours strictement négative. L'équilibre E_3 est stable si $r < a\alpha$ et instable si $r > a\alpha$.

4) Le portrait de phase est présenté sur la figure (1).

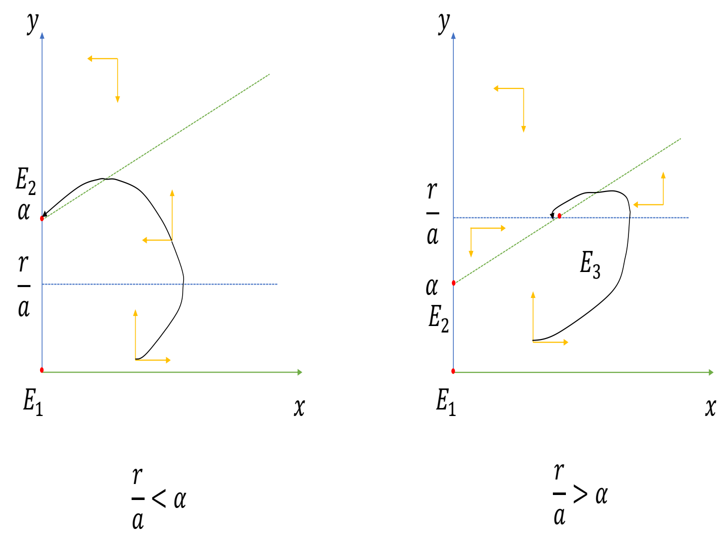

FIGURE 1 – Portrait de phase du modèle prédateur proie. A gauche, le cas où $\frac{r}{a} < \alpha$, à droite le cas où $\frac{r}{a} > \alpha$.

5) Si initialement $\alpha < \frac{r}{a}$, alors l'équilibre E_2 existe et il est stable. Les populations de proies et de prédateurs vont tendre vers les valeurs à l'équilibre $\bar{x}$ et $\bar{y}$ respectivement. En introduisant des proies alternatives en quantité suffisante, on augmente la valeur de α. Si $\alpha > \frac{r}{a}$, alors l'équilibre E_2 n'existe plus. C'est l'équilibre E_3 qui devient stable et la population de proie tend vers 0. Le mécanisme est fondé sur le fait qu'avec la proie alternative en quantité suffisante, on augmente le nombre de prédateurs qui contrôle la quantité des proies et les conduit vers l'extinction.