Master de Sciences de la Mer - 1ère année
Unité d'Enseignement OBEM 208 "Complexité et fonctionnement des écosystèmes"

TD 1

Exercice 1 : On considère la croissance d'une population dans un milieu hétérogène symbolisé par deux patchs. Le modèle est :

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{d\tau} &= m_2N_2 - m_1N_1 + \varepsilon r_1 N_1\left(1-\frac{N_1}{k}\right)\\ \frac{dN_2}{d\tau} &= m_1N_1 - m_2N_2 + \varepsilon r_2 N_2\left(1-\frac{N_2}{k}\right)\end{aligned}$$

où N_i désigne le nombre d'individus sur le site i, m_1 (resp. m_2) est le taux de passage du patch 1 vers le patch 2 (resp. du patch 2 vers le patch 1), r_i est le taux de croissance de la population sur le site i, k est la capacité limite. ε est un paramètre sans dimension de valeur proche de 0, qui caractérise le fait que la croissance de la population est plus lente que les déplacements des individus.

1) En annulant la partie lente, décrire la dynamique de déplacement. Quelles sont alors les proportions u_i de la population sur chacun des sites lorsque le temps augmente ?

2) Ecrire le modèle pour la population totale $N = N_1 + N_2$.

3) En considérant que la dynamique de N est plus lente que celles des N_i, remplacer les variables N_i par leur valeur d'équilibre dans l'équation de la population totale.

4) Mettre l'équation de la population totale sous la forme :

$$\frac{dN}{d\tau} = \varepsilon r N\left(1-\frac{N}{K}\right)$$

Exprimer r et K en fonction de r_i, k et de u_1.

5) A quelle condition sur u_1 obtient-on l'inégalité : $K > 2k$? Interpréter cette dernière inégalité.

6) On suppose que $r_1 > r_2$. Montrer qu'il existe un intervalle I dans $[0;1]$ tel que si u_1 est dans cet intervalle, alors la $K > 2k$.

7) Interpréter le résultat. Comment dépend-il de l'hétérogénéité ?

Exercice 2 : On considère le modèle de compétition suivant :

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= D\left(S_0 - S\right) - V_{m,1}\frac{S}{K_{S,1}+S}N_1 - V_{m,2}\frac{S}{K_{S,2}+S}N_2\\ \frac{dN_1}{dt} &= e_1V_{m,1}\frac{S}{K_{S,1}+S}N_1 - m_1N_1\\ \frac{dN_2}{dt} &= e_2V_{m,2}\frac{S}{K_{S,2}+S}N_2 - m_2N_2\end{aligned}$$

1) Interpréter ce modèle. Tracer les courbes d'absorption de substrat pour chaque espèce sur le même graphique.

2) Quelle est la quantité minimale de substrat S nécessaire à la croissance de la population 1 ? Comment déterminer graphiquement l'espèce la plus compétitive ?

3) Les deux espèces peuvent-elles coexister ?

4) Peut-on imaginer un mécanisme pouvant permettre à deux espèces de coexister en faisant varier les apports de substrat ?