Master d'Océanographie
Unité d'Enseignement "Modélisation avancée en Ecologie Marine"

Sujet d'examen - Session 1 (mai 2018) - Durée : 3h00

ATTENTION : les deux parties sont à rédiger sur des copies séparées. La présentation et la clarté de la rédaction seront prises en compte dans la notation.
Documents et calculatrices interdits.

PARTIE I - M. Poggiale

Exercice : On s'intéresse au modèle suivant :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial \gamma(l)n}{\partial l} - \mu(l)n \tag{1}$$

où $n(t,l)$ désigne la densité d'une population cellulaire de taille l à l'instant t. On suppose que $n(0,l) = f(l)$ où f est une fonction donnée.

1) Interpréter les différents éléments de ce modèle.

2) Que manque-t-il à l'équation (1) pour que le modèle puisse avoir une solution ?

3) Que représente la quantité suivante ?

$$N(t) = \int_0^{l_{\max}} n(t,l)dl$$

où $l_{\max}$ est la taille maximale des cellules.

4) Supposons que les cellules qui arrivent à la taille $l_{\max}$ se divisent. Donner une équation permettant de représenter la division cellulaire.

PROBLEME : On s'intéresse ici aux interactions phytoplancton-zooplancton dans un milieu où le phytoplancton est également contrôlé par une ressource limitante. Dans une première étape, on ne considère pas le zooplancton et on propose le modèle suivant :

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= I - kR - aRP \\ \frac{dP}{dt} &= eaRP - mC\end{aligned}$$

où $R(t)$ et $P(t)$ désignent respectivement la quantité de ressource limitante et de phytoplancton, à l'instant t.

1) Interpréter les paramètres et les termes de ce modèle.

2) Déterminer les équilibres et leur condition d'existence. Que doit vérifier I pour que le consommateur puisse subsister ? Que doit vérifier I pour que le prédateur puisse subsister ? Interpréter les réponses.

3) Etudier la stabilité des équilibres précédents.

4) En utilisant la fonction de Dulac $h(R,P) = \frac{1}{RP}$, montrer qu'il n'y a pas de cycle limite dans le cadran positif. Que peut-on en déduire sur la stabilité de l'équilibre positif ?

5) Tracer le(s) portrait(s) de phase.

6) A partir de l'étude précédente, que peut-on dire de l'effet d'une eutrophisation (augmentation de I) sur les niveaux de resource et de phytoplancton dans le système ?

On introduit maintenant le zooplancton et on complète le modèle précédent de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= I - kR - aRP \\ \frac{dP}{dt} &= eaRP - mP - \alpha PZ \\ \frac{dZ}{dt} &= \varepsilon\alpha PZ - \mu Z\end{aligned}$$

où $R(t)$, $P(t)$ et $Z(t)$ désignent respectivement la quantité de ressource, de phytoplancton et de zooplancton, à l'instant t.

7) Déterminer l'équilibre de coexistence, $\bar{E} = (\bar{R}, \bar{P}, \bar{Z})$ et donner les conditions d'existence.

8) Déterminer la matrice jacobienne du modèle à l'équilibre de coexistence, $\bar{E}$.

9) Montrer que les valeurs propres λ de cette matrice sont solutions de l'équation :

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

où $a_1 = k + a\bar{P}$, $a_2 = (\varepsilon\alpha^2\bar{Z} + ea^2\bar{R})\bar{P}$ and $a_3 = (k + a\bar{P})(\varepsilon\alpha^2\bar{Z}\bar{P})$.

10) Les critères de Routh-Hurwitz permettent de conclure que l'équilibre est stable si et seulement si $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ et $a_1a_2 > a_3$. Que peut-on dire de la stabilité de l'équilibre du modèle ?

11) Quels sont les effets d'une eutrophisation sur les valeurs à l'équilibre des 3 maillons trophiques ? Quels sont les effets d'une augmentation de μ sur les valeurs à l'équilibre des 3 maillons trophiques ? Interpréter les réponses.

Partie II - M. Gauduchon

Exercice 3 : On considère un jeu en forme normale basé sur la matrice des gains :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer les éventuels équilibres de Nash stricts de ce jeu

2) Déterminer les équilibres de Nash de ce jeu

3) Soit $\overrightarrow{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ une stratégie mixte de support $\{1, 2\}$. Montrer que $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot U\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p} \cdot U\overrightarrow{p}$ peut se mettre sous la forme :

$$3(p_1 - A)^2$$

où l'on déterminera la valeur de A. En déduire le bilan des ESS de ce jeu.

4) Soit une population constituée de deux groupes de joueurs. Le premier groupe, en fréquence $x_1(t)$ au temps t adpote la stratégie $\overrightarrow{p}^1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et le deuxième, en fréquence $x_2(t)$ au temps t adpote la stratégie $\overrightarrow{p}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que l'équation des réplicateurs pour $x_1(t)$ peut se mettre sous la forme :

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1(t)(1 - x_1(t)) \left(\frac{8}{3} x_1(t) - \frac{4}{3} \right)$$

5) Déterminer les équilibres de l'équation des réplicateurs de $x_1(t)$ ainsi que leur stabilité. Établir un schéma indiquant sur le segment $[0\,;1]$ la position des équilibres et les directions d'évolution des trajectoires.

Exercice 4 : On cherche à analyser un modèle dans lequel la taille corporelle maximale des individus est variable au sein d'une population. On considère que pour un individu, cette taille maximale est déterminée de manière génétique et constitue une stratégie au sens de la théorie des jeux.

Lorsque deux individus se rencontrent et entrent en conflit pour l'accès à une ressource, celui de plus grand taille est avantagé : un individu de stratégie x confronté à un autre individu de stratégie y obtient un gain $a(x-y)$ où a est un paramètre réel positif.

Par contre, maintenir une plus grande taille corporelle est plus coûteux. Ainsi, le gain complet d'un individu de stratégie x qui rencontre un individu de stratégie y est

$$W(x, y) = a(x - y) - f(x)$$

où $f(x)$ est une fonction croissante de x traduisant le coût de maintien d'un individu, croissant avec sa taille maximale x.

Dans la suite, nous allons analyser ce jeu et en déterminer les éventuelles ESS.

1) On considère une population constituée de deux types d'individus : une fraction $(1-\varepsilon)$ jouant la stratégie x et une fraction ε jouant la stratégie y. On note $W(x, \text{“}(1-\varepsilon)x + \varepsilon y\text{”})$ l'espérance de gain des joueurs de stratégie x dans cette population et $W(y, \text{“}(1-\varepsilon)x + \varepsilon y\text{”})$ l'espérance de gain des joueurs de stratégie y.

Donner l'expression de ces deux espérances de gain. (*on admettra que la probabilité de rencontrer un joueur “x” est $(1-\varepsilon)$ et celle de rencontrer un joueur “y” est ε*)

On note $F(x, y, \varepsilon) = W(x, \text{“}(1-\varepsilon)x + \varepsilon y\text{”}) - W(y, \text{“}(1-\varepsilon)x + \varepsilon y\text{”})$. Donner l'expression de $F(x, y, \varepsilon)$ et vérifier que F ne dépend pas de ε (pour simplifier l'écriture, on notera par la suite $F(x, y)$).

2) On fait l'hypothèse que f croît de manière linéaire et on pose

$$f(x) = bx$$

où b est un paramètre réel positif. Donner l'expression de $F(x, y)$. Montrer que ce jeux ne peut admettre aucune ESS (*on pourra envisager deux cas : $a < b$ ou $a > b$*).

3) On considère maintenant (ainsi que pour la question 4)) que l'augmentation du coût de maintenance accélère avec l'augmentation de la taille corporelle, et on adopte une nouvelle formulation pour f :

$$f(x) = cx^2$$

où c est un paramètre réel positif.

Montrer que $F(x, y)$ peut se mettre sous la forme :

$$F(x, y) = c(y - x)\left(y + x - \frac{a}{c}\right)$$

4) Montrer, qu'il existe une unique stratégie x^* telle que

$$\forall y \in \mathbb{R}^+, y \neq x^*, F(x^*, y) > 0$$

On donnera l'expression de x^*.

Conclure.

5) (BONUS) Montrer que l'existence d'un unique x^* qui vérifie la propriété de la question 4) équivaut à l'existence d'un minimum pour une certaine fonction $g(x)$ que l'on déterminera. En déduire que le résultat de la question 4) se généralise pour toute une classe de fonctions f que l'on précisera (on ne demande pas de donner l'expression de x^* dans le cas général).