Master de Sciences de la Mer - 1ère année
Unité d'Enseignement OBEM 209 "MODélisation Avancée en Ecologie Marine"

TD 4 : Structuration d'une population et modélisation

Exercice 1: On considère une population structurée en 3 classes d'âge. On suppose que les taux de vieillissement, de mortalité et de fécondité pour chaque classe sont des constantes dépendant de la classe considérée. Proposer un modèle à temps continu caractérisant la dynamique de cette population. Le mettre sous forme matricielle (matrice de Leslie).

On suppose maintenant que la population est structurée en n classes d'âge. Adapter le modèle précédent. Modifier le modèle obtenu pour intégrer l'hypothèse suivante : à partir du stade 6, les individus consomment des individus de la classe 1 (cannibalisme).

Exercice 2: On considère un système prédateur - proie dans lequel la proie peut être parasitée et transmet le parasite à son prédateur (parasite hétéroxène). On notera $N_S(t)$ et $N_I(t)$ les densités de population de proie saine et infectée respectivement à l'instant t. On notera $P_S(t)$ et $P_I(t)$ les densités de population de prédateur saine et infectée respectivement, à l'instant t. On se propose ici de construire un modèle en temps continu pour étudier la dynamique de ce système dit "Trophically Transmitted Parasite". On suppose que la proie, en l'absence de prédateur, suit une croissance logistique et que tous les nouveaux individus sont sains (pas de transmission verticale du parasite). Les infections se font proportionnellement au nombre de rencontres. La prédation est représentée au moyen d'une réponse fonctionnelle de type I (linéaire). La croissance du prédateur est supposée proportionnelle à la consommation de proies. Ecrire un modèle qui reprend ces hypothèses. Comment intégrer dans le modèle l'idée que la prédation est plus efficace sur les proies parasitées? Comment représenter la virulence léthale du parasite sur les proies et sur les prédateurs?

Exercice 3: On considère un organisme dont le poids en carbone à l'instant t est noté $W(t)$. On cherche à déterminer la dynamique de cette grandeur. Les facteurs ayant une influence sur cette grandeur sont:

- la quantité de ressources disponibles dans le milieu $R(t)$;
- la maintenance à l'instant t: $m(t)$;

On fait les hypothèses suivantes:

(H1) la vitesse d'absorption suit la loi de Michaëlis - Menten;

(H2) il existe une relation d'allométrie de la forme : $S(t) = \alpha W(t)^{2/3}$;

(H3) la vitesse maximale d'absorption est proportionnelle à la surface de l'organisme;

(H4) la maintenance est proportionnelle au poids de l'organisme;

(H5) la quantité de ressources est supposée indépendante du temps.

1) Quelle hypothèse peut-on faire sur les unités de W et R pour simplifier la description de notre système?

2) Ecrire une équation reliant la variation du poids de l'organisme au cours du temps à cette même grandeur.

3) On note $L(t)$ la longueur de l'organisme à l'instant t. On suppose la relation allométrique suivante: $W(t) = \beta L(t)^3$. Ecrire l'équation précédente en utilisant la longueur à la place du poids.

4) Déterminer les équilibres de ce modèle et leur stabilité.

5) Résoudre l'équation obtenue en 3).

6) Représenter graphiquement la longueur maximale atteinte par un individu en fonction de la richesse nutritive du milieu. Interpréter ce graphique.

7) On suppose que le milieu de cet organisme est contaminé. Proposer une représentation de l'effet de ce contaminant sur la croissance de l'organisme en précisant les hypothèses. Comment peut - on tester ces hypothèses en pratique?

Exercice 4: On considère une population structurée en deux stades, les juvéniles et les adultes, de biomasses respectives x_J et x_A. On suppose que ces biomasses sont régies par le modèle suivant :

$$\begin{aligned}
\frac{dx_J}{dt} &= bx_A\Big(1 - \frac{x_A}{K}\Big) - mx_J - \gamma x_J \\
\frac{dx_A}{dt} &= \gamma x_J - mx_A
\end{aligned}$$

1) Interpréter ce modèle.

2) Déterminer les équilibres de ce modèle.

3) Notons $(\bar{x}_J, \bar{x}_A)$ les valeurs des biomasses de juvéniles et d'adultes à l'équilibre. On suppose que m est faible et on s'intéresse à l'effet d'une augmentation de m sur la quantité $\bar{x}_J + \bar{x}_A$. Faites l'analyse et interpréter le résultat.

Exercice 5: On considère une population structurée en poids. On note $n(t, w)$ la densité de population des individus de poids w à l'instant t.

1) Quel est le nombre d'individus de poids w dans une population donnée à instant t?

On regroupe les individus par classe de poids de largeur Δw. Le poids des individus est compris entre $w_{\min}$ et $w_{\max}$. On note $\gamma(w_i)$ le taux de croissance pondérale pour la classe de poids numéro i. On suppose que seules la naissance et la mortalité affectent le nombre d'individus et que les taux de natalité et de mortalité dépendent du poids. On note $N_i(t)$ le nombre d'individus dans la classe i à l'instant t.

2) Ecrire un modèle permettant de décrire la dynamique de $N_i(t)$.

3) Ecrire la relation entre $N_i(t)$ et $n(t, w)$.