**Master de Sciences de la Mer - 1ère année**
**Unité d'Enseignement OBEM 209 "MODélisation Avancée en Ecologie Marine"**

## TD 5 : Populations structurées

**Exercice 1:** On considère une population de proies (Sprat en Mer Baltique) et une population de prédateurs (Morue en Mer Baltique). L'interaction entre les deux populations fait intervenir la structure en stade de la population de consommateur : les juvéniles sont en compétition avec la population ressource alors que les adultes consomment la population ressource. On fait la liste d'hypothèses suivantes :

- (H1) en l'absence de consommateurs, la ressource admet une croissance logistique
- (H2) en présence de consommateurs juvéniles, la ressource et la classe juvénile des consommateurs sont en compétition pour leurs propres ressources
- (H3) l'intensité de la compétition est proportionnelle aux nombres de rencontres
- (H4) la classe adulte des consommateurs exerce une prédation sur la ressource avec une réponse fonctionnelle de Holling type II
- (H5) le taux de reproduction des consommateurs adultes est égal à un taux maximal que multiplie un facteur propotionnel à la quantité de ressources ingérées
- (H6) le taux de vieillissement est constant
- (H7) le taux de mortalité des consommateurs adultes est constant

1) Construire un modèle sur la base des hypothèse précédentes.
2) Déterminer les équilibres du modèle et leur stabilité.
3) Quel est l'impact de l'augmentation de la pêche sur les consommateurs adultes?
4) Si on réduit la pêche sur les consommateurs adultes, la population de consommateur peut elle toujours retrouver son état initial (résilience de la population de consommateurs)?

**Exercice 2:** On suppose qu'une population structurée en âge vérifie le système d'équations suivant:

$$\begin{aligned}\frac{\partial n}{\partial t} &= -\frac{\partial n}{\partial a} - \mu(a)\, n \\ n(t,0) &= \int_0^{+\infty} b(a)\, n(t,a)\, da\end{aligned}$$

1) Interprétez le modèle précédent.

2) On suppose que $n(t,a) = \exp(rt) B(a)$. Quelle équation différentielle vérifie $B(a)$?

3) Résoudre cette équation pour exprimer $B(a)$ en fonction de $B(0)$, $r$, $\mu$ et $a$.

4) En utilisant la seconde équation du modèle ci-dessus, montrer que:

$$\int_0^{a_{\max}} \left( b(a) \exp(-ra) \exp\left( - \int_0^a \mu(s)\, ds \right) \right) da = 1$$

En supposant connue $b$ et $\mu$, comment peut-on utiliser cette équation? Interpréter le résultat.

**Exercice 3:** On considère une population cellulaire structurée selon une grandeur qui caractérise la position des cellules dans leur cycle. On note $p$ cette variable structurante. Elle varie entre 0 et 1, 0 correspond au moment où la cellule vient de se diviser et 1 correspond au moment où la cellule va se diviser. Pour chaque cellule, cette grandeur augmente de façon constante sauf pendant une phase $p \in [p_0; p_c]$. Lors de la phase $p \in [p_0; p_c]$, la grandeur $p$ augmente en fonction de ce que la cellule absorbe, selon une cinétique michaëlienne. On suppose que cette population est placée dans un chemostat dont les caractéristiques sont le taux de dilution $D$ et la concentration en nutriment dans le réservoir $S_{in}$. Les cellules absorbent le nutriment selon une cinétique michaëlienne.

1) Exprimer le nombre total $N(t)$ de cellules à l'instant $t$ en fonction de la densité de cellules en position $p$ du cycle à l'instant $t$, notée $n(t,p)$.

2) Exprimer la dynamique du nutriment.

3) Exprimer la dynamique de la population.

4) Comment traduire la division cellulaire?

**Exercice 4:** On considère un composé organique dans la colonne sédimentaire. On note $C(z,t)$ la concentration à la profondeur $z$ à l'instant $t$. On suppose que ce composé subit une dégradation oxique lorsque de l'oxygène est disponible (près de la surface sédimentaire) et une dégradation anoxique lorsque l'oxygène est insuffisant (si du nitrate est disponible, il devient alors l'accepteur d'électrons de l'oxydation du composé). La présence d'oxygène inhibe la dégradation anoxique. On suppose également que le composé sédimente à une vitesse constante notée $v$. Proposer un modèle pour représenter la dynamique de ce composé dans la colonne sédimentaire. Proposer des conditions aux bords en expliquant le choix.