Master d'Océanographie - 1ère année
Unité d'Enseignement "Modélisation en Ecologie"

TD 6 : Spatialisation

Exercice 1 : On considère un système prédateur - proie spatialisé. L'espace est représenté par un axe (Ox). On fait les hypothèses suivantes :

(H1) En l'absence de prédateur, la proie a une croissance logistique;
(H2) La réponse fonctionnelle est linéaire;
(H3) La croissance du prédateur est proportionnelle à la consommation des proies;
(H4) En l'absence des proies, la population des prédateurs est soumise à une mortalité naturelle linéaire;
(H5) Les prédateurs peuvent se déplacer aléatoirement, avec un coefficient de diffusion D.

1) Constuire un modèle répondant à ces hypothèses.
2) Rechercher les solutions stationnaires homogènes de ce système.
3) On cherche s'il existe des solutions d'onde. On pose alors $U(z) = N(x,t)$ et $V(z) = P(x,t)$ où $z = x - ct$ et c est la vitesse de propagation de l'onde. On cherche des solutions qui vérifient, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$N(x,t) \to 0 \text{ quand } t \to -\infty$$

$$N(x,t) \to \frac{\mu}{ea} \text{ quand } t \to +\infty$$

$$P(x,t) \to 0 \text{ quand } t \to -\infty$$

$$P(x,t) \to \frac{r}{a}(1 - \frac{\mu}{eaK}) \text{ quand } t \to +\infty$$

Interpréter les solutions cherchées.

4) A quelles équations différentielles obéissent les fonctions U et V?
5) Mettre ces deux équations différentielles sous la forme d'un système de trois équations différentielles ordinaires d'ordre 1.
6) Déterminer les équilibres de ce système. A quelles conditions sur ces équilibres les solutions d'onde recherchées existent-elles?
7) Y a-t'il une célérité minimale pour l'existence d'une solution d'onde observable?

Exercice 2 : On considère une population dont l'habitat est constitué de deux sites adjacents. On suppose que sur chacun des sites, la croissance est de type logistique et que les déplacements entre les deux sites sont aléatoires. Ecrire un modèle décrivant le système et vérifiant les hypothèses.

Exercice 3 : Le modèle suivant décrit la dégradation d'un composé organique dans un sédiment. Interprétez les termes et les paramètres de l'équation du modèle suivante:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - v\frac{\partial C}{\partial z} - R_1 \frac{O}{K_1 + O} C - R_2 \frac{N}{K_2 + N} \left(1 - \frac{O}{K_3 + O}\right) C$$

où z désigne la profondeur, orientée positivement vers le bas, $C(t,z)$ désigne la concentration du composé organique à l'instant t à la profondeur z, $O(t,z)$ est la concentration en oxygène à l'instant t en z et $N(t,z)$ désigne la concentration en nitrate à l'instant t à la profondeur z. On suppose qu'à l'interface eau-sédiment, la concentration de composé vérifie:

$$\frac{\partial C}{\partial z}(t,0) = \alpha C(t,0)$$

Interpréter cette égalité.