**Master de Sciences de la Mer - 1ère année**
**Unité d'Enseignement OBEM 209 "MODélisation Avancée en Ecologie Marine"**

**TD 6 : Révisions**

**Exercice 1 :** On considère le système d'équations :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x\big((AX)_1 - X \cdot AX\big) \\ \frac{dy}{dt} &= y\big((AX)_2 - X \cdot AX\big) \\ \frac{dz}{dt} &= z\big((AX)_3 - X \cdot AX\big) \end{aligned}$$

où $X = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$, $A$ est une matrice de taille $3 \times 3$, $(AX)_i$ représente la $i$-ème coordonnée du vecteur $AX$ et $\cdot$ représente le produit scalaire. On note $a_{ij}$ l'élément de $A$ de la ligne numéro $i$ et de la colonne numéro $j$.

1) Exprimer $(AX)_i$ et $X \cdot AX$.

2) Montrer que l'ensemble :

$$\Sigma_3 = \{X = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 1; x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

est invariant au cours du temps. Tracer cet ensemble dans l'espace des phases, comment interpréter ce résultat ?

3) On suppose qu'il existe un équilibre $\bar{X}$ dans $\Sigma_3$, dont les coordonnées sont strictement positives. Quel système d'équations vérifient les coordonnées de $\bar{X}$ ?

4) On suppose que $\bar{X} \cdot AX > X \cdot AX$ pour tout $X \in \Sigma_3$ avec $X \neq \bar{X}$. On pose :

$$H(X) = x^{\bar{x}} y^{\bar{y}} z^{\bar{z}}$$

On veut montrer que $\bar{X}$ est un maximum de $H$. Pour cela, on va montrer que c'est un maximum de la fonction : $F : X \mapsto \ln(H(X))$. En vous appuyant sur la question 2), exprimer $dF(X)$ et en déduire que $dF(\bar{X}) = 0$. Montrer que les valeurs propres de $d^2F(\bar{X})$ sont négatives et conclure.

5) En posant $V(t) = \ln(H(X(t))$, calculer $\dfrac{dV}{dt}$. Que peut-on en conclure ?

**Exercice 2 :** On considère le système d'équations :

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i\big((Ax)_i - x \cdot Ax\big)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $A$ est une matrice de taille $n \times n$, $(Ax)_i$ représente la $i$-ème coordonnée du vecteur $Ax$ et $\cdot$ représente le produit scalaire.

Reprendre l'exercice précédent.

**Exercice 3 :** On considère une population structurée en poids, on note $N(w, t)$ la densité des individus de poids $w$ à l'instant $t$. On suppose que le poids d'un individu augmente en fonction des ressources qu'il assimile. Le taux d'assimilation est une fonction hyperbolique de la ressource, notée $R$. Le taux maximal d'assimilation est supposé proportionnel à la surface des organismes, notée $s$. On suppose qu'il y a une relation allométrique de la forme $s = aw^{2/3}$. Chaque organisme doit utiliser de l'énergie pour se maintenir en vie (maintien des concentrations intracellulaires, des membranes cellulaires, de la synthèse des protéines, etc.) et le taux de maintenance est proportionnel au poids de l'organisme. On suppose ensuite que l'espérance de vie des individus de poids $w$ est $T_L(w)$ et que le taux de fécondité des individus de poids $w$ est $f(w)$.

1) Ecrire un modèle qui reprend l'ensemble des hypothèses précédentes.

2) On suppose que les organismes sont dans un milieu contaminé et que la concentration du contaminant est notée $C$. On admet également que le contaminant agit à deux niveaux : sur l'assimilation en détériorant le tube digestif des individus, et sur le taux de maintenance en activant des défenses immunitaires. On suppose alors que le taux maximal d'assimilation est une fonction décroissante de $C$ et que le taux de maintenance est une fonction croissante de $C$. Proposer un modèle pour décrire l'effet du contaminant sur la croissance des individus.

3) Que pensez-vous de l'hypothèse qui lie le taux de maintenance à la concentration $C$ ? Que pourrait-on proposer à la place ?