MASTER D'OCEANOGRAPHIE
ANNEE UNIVERSITAIRE 2015 - 2016
UE BEM 307 - Systèmes dynamiques en écologie marine

SUJET D'EXAMEN - 3h00 - Décembre 2015

Documents et calculatrices interdits. Le soin, la clarté et la rédaction seront pris en compte dans la notation.

QUESTION DE COURS : Le système différentiel $\dfrac{dX}{dt} = F(X)$ avec $X \in \mathbb{R}^2$, où F est une application de classe $\mathcal{C}^1$, peut-il exhiber une dynamique chaotique ? Pourquoi ?

EXERCICE 1 : On considère le modèle de dynamique de population suivant :

$$N_{t+1} = \alpha N_t^2 \exp(-\beta N_t) \tag{1}$$

où α et β désignent deux nombres réels strictement positifs. On pose $f(x) = \alpha x^2 \exp(-\beta x)$ et $g(x) = \alpha x \exp(-\beta x)$ où $x \geq 0$.

1) Montrer que les équilibres positifs du modèle (1) sont les solutions de $g(x) = 1$.

2) Dans cette question, on analysera la fonction g pour étudier les solutions de $g(x) = 1$. Calculer la dérivée g' de la fonction g et montrer qu'elle admet une unique racine $x = \dfrac{1}{\beta}$. Tracer le graphe de la fonction g pour un couple de valeurs arbitraires des paramètres. Quelle est la valeur maximale de cette fonction ? Donner une condition sur les paramètres α et β pour que ce maximum soit supérieur à 1.

2) En déduire que si $\alpha > e\beta$ (où $e = \exp(1)$), alors le modèle (1) admet 3 équilibres (indication : on pourra s'aider du graphique de g). Montrer que l'équilibre $x_1 = 0$ est toujours stable.

3) On note x_2 et x_3 les deux autres équilibres (avec $x_2 < x_3$) lorsqu'ils existent. Montrer que $f'(x_i) = 2 - \beta x_i$ pour $i = 2$ et $i = 3$. Que peut-on dire de x_2 par rapport à $\dfrac{1}{\beta}$. En déduire que x_2 est toujours instable quand il existe.

4) De même, vérifier que x_3 est stable si et seulement si :

$$1 < \beta x_3 < 3 \tag{2}$$

5) A partir du graphe de g, que peut-on dire de l'effet d'une augmentation de α sur x_3 (Indication : on pourra remarquer que $g(x) = 1$ est équivalent à $x \exp(-\beta x) = \dfrac{1}{\alpha}$) ? Que fait x_3 lorsque α tend vers l'infini ? Que peut on dire de la condition de stabilité (2) lorsque α devient grand ?

6) Interpréter la Figure (1).

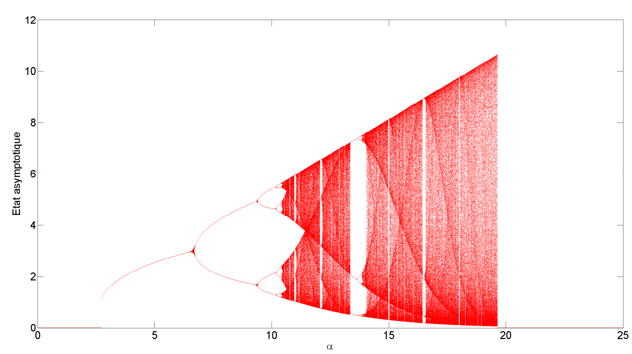

FIGURE 1 – Diagramme de bifurcation du modèle (1) lorsque le paramètre α varie de 0 à 25 avec $\beta = 1$.

6) Sur la figure (2), la fonction $fofofof$ est représentée avec la droite d'équation $y = x$. Que peut-on en conclure ?

EXERCICE 2 : On considère le système différentiel suivant :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + x\left(\mu - x^2 - y^2\right) \\ \frac{dy}{dt} &= -x + y\left(\mu - x^2 - y^2\right) \end{aligned}$$

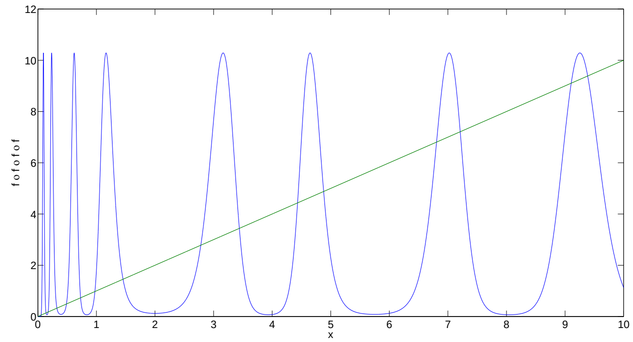

FIGURE 2 – Représentation de la fonction $fofofof$ pour $\alpha = 19$ et $\beta = 1$.

On définit les coordonnées polaires (ρ, θ) par :

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos(\theta) \\ y &= \rho \sin(\theta) \end{aligned}$$

1) Calculer $\dfrac{d\rho}{dt}$ et $\dfrac{d\theta}{dt}$.

2) Que se passe-t-il lorsque μ franchit la valeur 0 en augmentant ? Comment appelle-t-on ce phénomène ?

3) Le phénomène décrit dans la question précédente peut-il se produire dans des modèles de dynamique de populations (citer un exemple) ?

EXERCICE 3 : La figure (3) représente 4 séries temporelles (A à D) et 4 diagrammes de récurrences (1 à 4). Attribuer un diagramme de récurrence à chaque série temporelle en justifiant brièvement votre réponse.

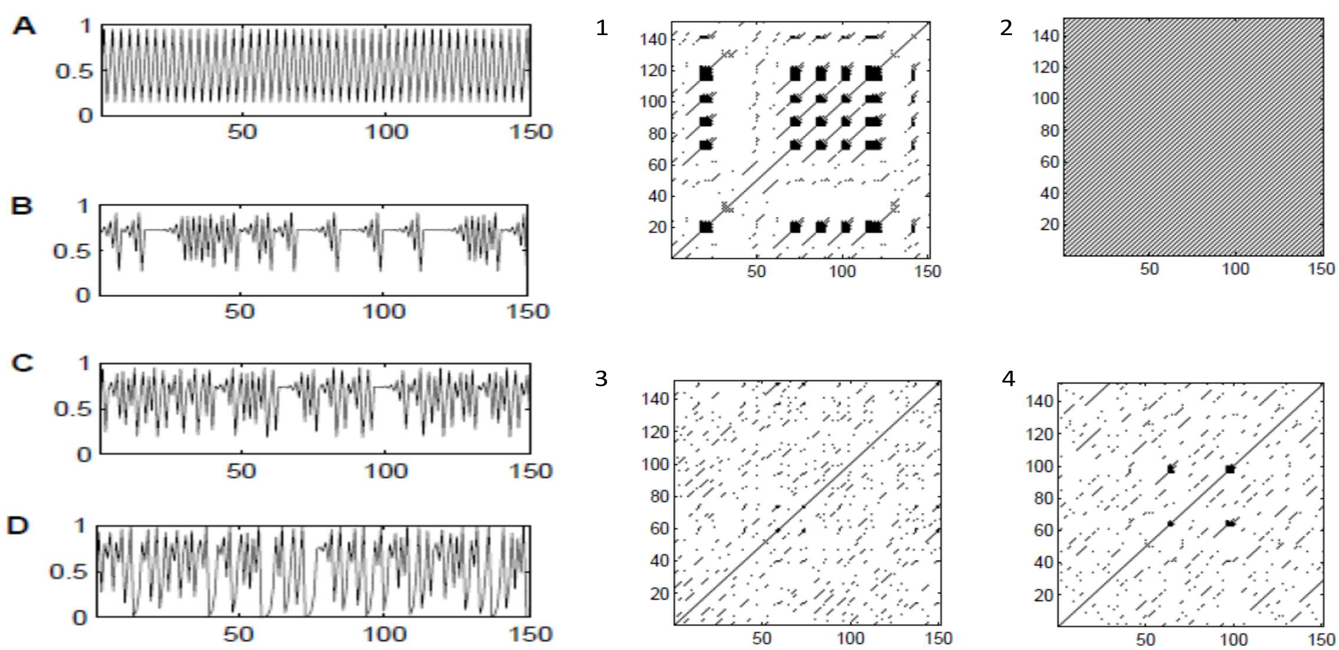

FIGURE 3 – Séries temporelles et diagrammes de récurrences.