MASTER D'OCEANOGRAPHIE
ANNEE UNIVERSITAIRE 2016 - 2017
UE BEM 307 - Systèmes dynamiques en écologie marine

SUJET D'EXAMEN - 3h00 - Décembre 2016

Documents et calculatrices interdits. Le soin, la clarté et la rédaction seront pris en compte dans la notation.

QUESTION DE COURS :

On considère un modèle de la forme :

$$x_{t+1} = f(x_t)$$

où f est une fonction bornée de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. Donner l'expression de l'exposant de Lyapounov associé à ce modèle. Que représente-t-il ? On suppose que ce nombre est strictement positif. Que peut-on en conclure ?

EXERCICE 1 :

On dispose d'une série temporelle $\{x_t\}_{t\in\{1,\cdots,N\}}$.

1 - Quel outil permet de supprimer un éventuel sur-échantillonnage ? Expliquer son mode de fonctionnement.

2 - On suppose qu'il n'y a pas de sur-échantillonnage dans la série temporelle. On suppose que la dimension de plongement est fixée égale à p. Expliquer précisément comment déterminer la dimension de corrélation.

3 - Comment procéder pour déterminer la dimension de plongement p lorsqu'elle n'est pas connue ? Que nous apprend-elle ?

EXERCICE 2 :

Un modèle de dynamique de n populations de la forme :

$$\frac{dX}{dt} = F_\mu(X)$$

où $X \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état dépend d'un paramètre (μ) représentant une pression environnementale. On suppose que pour une valeur de μ donnée, le système admet un cycle limite noté Γ_μ.

1 - Quelle propriété vérifient les séries temporelles $X(t)$?

2 - On note P_μ l'application retour de Poincaré sur une section Σ transverse à Γ_μ et on nomme x_0 le point d'intersection de Σ avec Γ_μ. Que peut-on dire de $P_\mu(x_0)$? Comment peut-on traduire le fait que la trajectoire Γ_μ est stable ?

3 - On suppose maintenant qu'il existe une valeur μ_0 du paramètre μ pour laquelle une valeur propre λ de la matrice $DP_{\mu_0}(x_0)$ est égale à 1, que cette valeur est inférieure à 1 lorsque $\mu < \mu_0$ et qu'elle est supérieure à 1 lorsque $\mu > \mu_0$. Décrire le changement de comportement des séries temporelles lorsque μ franchit la valeur de μ_0.

4 - On suppose que $n = 2$, Σ est un segment et $\lambda = P'_\mu(x_0)$. Le développement limité de P_μ à l'ordre 2 en x_0 est :

$$P_\mu(x) = P_\mu(x_0) + P'_\mu(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}P''_\mu(x_0)(x - x_0)^2 + Reste$$

Que vaut $P'_{\mu_0}(x_0)$? Comment appelle-t-on la condition $P''_{\mu_0}(x_0) \neq 0$? Comment appelle-t-on la condition $\dfrac{\partial}{\partial\mu}P'_{\mu_0}(x_0) \neq 0$? Que signifie-t-elle ?

EXERCICE 3 :

On considère le modèle de dynamique de population suivant :

$$N_{t+1} = F(N_t) \tag{1}$$

où la fonction F est définie par $F(N) = \dfrac{aN^2}{1 + b^4N^4}$, où a et b sont des réels positifs et N_t est la densité de la population à l'instant t.

1 - On pose $x_t = bN_t$. Exprimer N_t en fonction de x_t, $F(N_t)$ en fonction de x_t, puis x_{t+1} en fonction de N_{t+1}. En déduire que :

$$x_{t+1} = g(x_t) \tag{2}$$

où $g(x) = \dfrac{\alpha x^2}{1+x^4}$ avec $\alpha = \frac{a}{b}$.

On va alors étudier le modèle (2). On pose $g_1(x) = \alpha x - 1$ et $g_2(x) = x^4$.

2 - Sur un même graphique, tracer les graphes des fonctions g_1 et g_2, en illustrant le fait que pour différentes valeurs du paramètre α, ces courbes peuvent avoir 0, 1 ou 2 intersections (0 si α est faible, 2 si α est grand).

3 - Que peut-on dire des deux graphes lorsque le nombre d'intersections est égal à 1 ? Notons x_1 la valeur de x correspondant à ce point d'intersection entre les graphes. Que peut-on dire de $g_1'(x_1)$ et $g_2'(x_1)$?

4 - Montrer que $g_1'(x) = g_2'(x)$ est équivalent à $x = \left(\dfrac{\alpha}{4}\right)^{1/3}$.

5 - En remplaçant x_1 par $\left(\dfrac{\alpha}{4}\right)^{1/3}$ dans l'équation $g_1(x_1) = g_2(x_1)$, en déduire la valeur du paramètre α lorsqu'il n'y a qu'une seule intersection entre le graphe de g_1 et celui de g_2 et qu'alors on $x_1 = \dfrac{1}{3^{1/4}}$. Pour quelles valeurs de α le modèle n'admet-il qu'un seul point d'équilibre (qu'on précisera) ? Pour quelles valeurs de α le modèle admet-il 3 points d'équilibre ?

6 - Que peut-on dire de la stabilité de l'équilibre 0 ?

7 - La figure (1) représente le graphe de la fonction g pour une certaine valeur du paramètre α. Combien d'équilibre(s) a le modèle pour cette valeur d'α ? Que peut-on dire de la stabilité de l'équilibre à haute densité ?

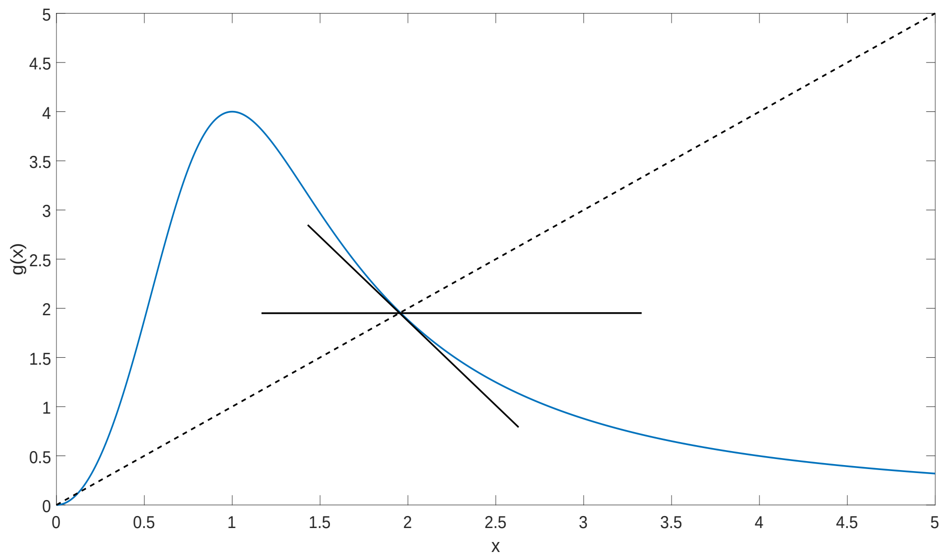

FIGURE 1 – Graphe de la fonction g (en bleu) avec la bissectrice principale (en pointillés noirs).

8 - Interpréter la figure (2).

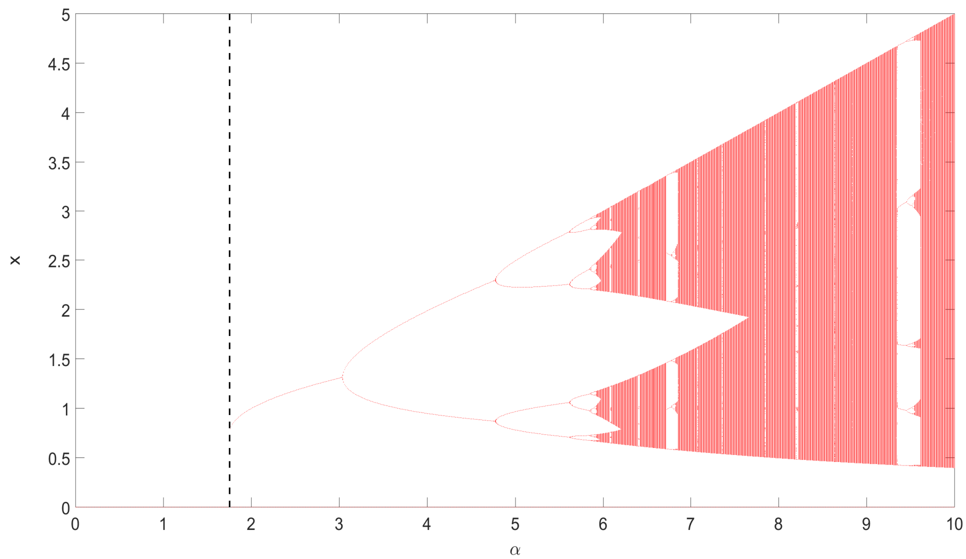

FIGURE 2 – Diagramme de bifurcation du modèle (2). Le trait pointillé noir vertical est en $x = 3^{-1/4}$.