Master d'Océanographie - Biologie et Ecologie Marines
UE BEM354 - Systèmes dynamiques pour les Sc. de l'Environnement
Année 2011 - 2012

Sujet d'examen - Janvier 2012
Durée : 3h00

Exercice 1 : On considère le modèle logistique à temps discret :

$$x_{t+1} = f(x_t) = rx_t(1 - x_t)$$

et on simule deux solutions $x_{1,t}$ et $x_{2,t}$ de ce modèle à partir de deux conditions initiales $x_{1,0}$ et $x_{2,0}$ très proches. On représente sur un graphique le logarithme de la valeur absolue de la distance entre ces deux trajectoires en fonction du temps (voir Figure 1). On représente également (en pointillé sur le même graphique) une régression linéaire par morceaux, en deux phases, la première avec une pente positive, la seconde avec une pente nulle.

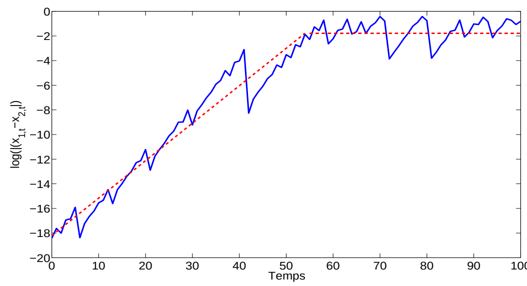

FIGURE 1 – Dynamique de la distance (en échelle logarithmique) entre deux trajectoires issues de conditions initiales proches.

1) Interpréter ce résultat, en détaillant en quelques lignes (l'interprétation devra être précise et concise).
2) Proposer un outil de mesure de cette sensibilité à la condition initiale.

Exercice 2 : Pour chacun des deux diagrammes de récurrence donnés sur la Figure 2, tracer qualitativement une série chronologique qui pourrait lui être associée, en justifiant votre choix en deux lignes à chaque fois.

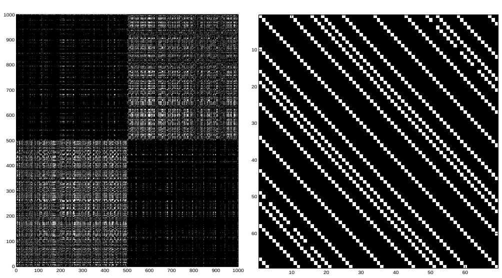

FIGURE 2 – Diagrammes de récurrence.

Exercice 3 : On considère un système admettant une trajectoire périodique Γ_0. On définit une section Σ transverse à Γ_0 et on définit sur Σ l'application retour de Poincaré P. On suppose que P est définie par :

$$P(u) = \mu + u + u^2 \tag{1}$$

où μ est un paramètre réel.

1) Tracer, sur 3 graphiques différents, $P(u)$ en fonction de u pour u proche de 0 lorsque $\mu = 0$, puis lorsque μ est proche de 0 et négatif, puis lorsque μ est proche de 0, mais positif.

2) Sur les graphiques de la question précédente, tracer la bissectrice principale. Que nous apprend-elle ? Pouvez-vous indiquer ce qui caractérise l'orbite périodique Γ_0 sur l'un de ces graphiques ?

3) Que peut-on dire de la dynamique de ce système lorsque μ franchit la valeur 0 ? La réponse pourra être illustrée par le tracé de la dynamique de u_t sur les graphiques. Comment s'appelle le phénomène observé lorque μ devient positif ?

4) Comment cela se traduit-il sur la dynamique du système dont le modèle (1) est l'application retour de Poincaré ? L'expression de P fournie par le système (1) est un modèle particulier, a-t-il une valeur générale ?

Exercice 4 : On considère l'application :

$$f(x) = \frac{ax}{1 + bx\exp(x)} \tag{2}$$

pour $x \geq 0$ et avec $a > 0$ et $b > 0$.

1) Calculer la dérivée f' de f et montrer que cette dérivée s'annule si et seulement si $bx^2\exp(x) = 1$.

2) Considérons la fonction g définie pour $x \geq 0$ par $g(x) = bx^2\exp(x)$. Montrer que c'est une fonction strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

3) En calculant $g(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, et en utilisant la question précédente, déduire qu'il existe un unique maximum pour la fonction f.

4) En vous fondant sur la Figure (3), qui représente le graphe de f avec la droite $y = x$ et une droite de pente -1 pour une valeur de a et b fixée, que pouvez vous dire de la stabilité des deux équilibres (justifier la réponse) ?

5) On s'intéresse au système dynamique défini par $x_{t+1} = f(x_t)$. La Figure (4) représente le diagramme de bifurcation de ce système pour a compris entre 0 et 10 et $b = 0.1$. Interprétez ce diagramme.

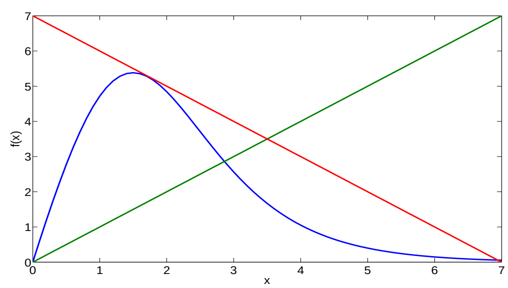

FIGURE 3 – Graphe de f.

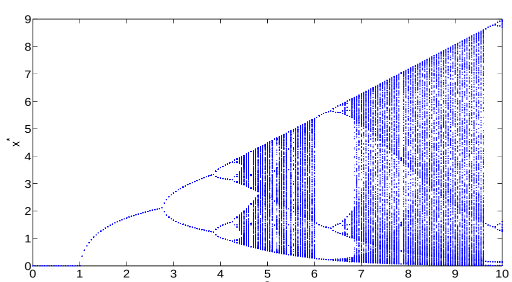

FIGURE 4 – Diagramme de bifurcation.