

Sujet d'examen - Novembre 2014

Durée : 2h00

Questions de cours :

- 1) Donner une méthode qui permet de supprimer du sur-échantillonnage dans une série temporelle et expliquer la brièvement.
- 2) Expliquer comment déterminer la dimension de corrélation d'un attracteur dans un espace de phases de dimension p à partir d'une série temporelle $\{x_t\}_{t \in \{1 \dots N\}}$.
- 3) Donner une expression permettant de calculer la sensibilité aux conditions initiales dans un système de la forme $x_{t+1} = f(x_t)$ où $x_0 \in \mathbb{R}$ et f est une fonction dérivable.

Exercice 1 : On considère le système défini par :

$$x_{t+1} = f(x_t) \tag{1}$$

où $f(x) = \frac{ax}{b^4 + x^4}$, a et b sont deux réels positifs et $x_0 \in \mathbb{R}^+$.

- 1) Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$. Quelle est la position du maximum de f ? Quelle est sa valeur maximale?
- 2) Déterminer les équilibres du modèle (1) et leur(s) condition(s) d'existence.
- 3) Etudier la stabilité des équilibres déterminés dans la question précédente.
- 4) Quel type de bifurcation a-t-on lorsque $a = 2b^4$?
- 5) La figure (1) montre le diagramme de bifurcation de ce système en fonction du paramètre a pour b fixé. Interpréter ce diagramme.

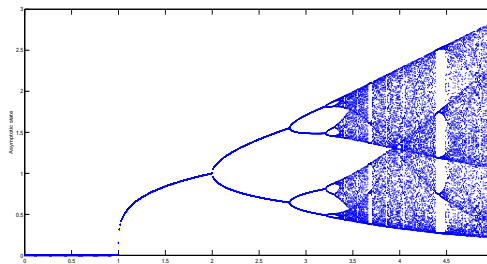


FIGURE 1 – Diagramme de bifurcation en fonction du paramètre a pour $b = 1$.

- 6) La figure (2) représente le graphe de la fonction $f \circ f$, pour $a = 6$ et $b = 1$, avec les graphes des droites $y = x$ et $y = 4 - x$. Que peut-on apprendre sur la dynamique du modèle sur cette figure?

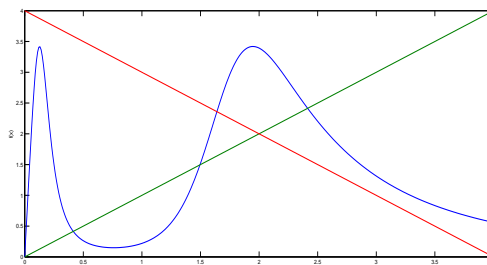


FIGURE 2 – Graphe de $f \circ f$.