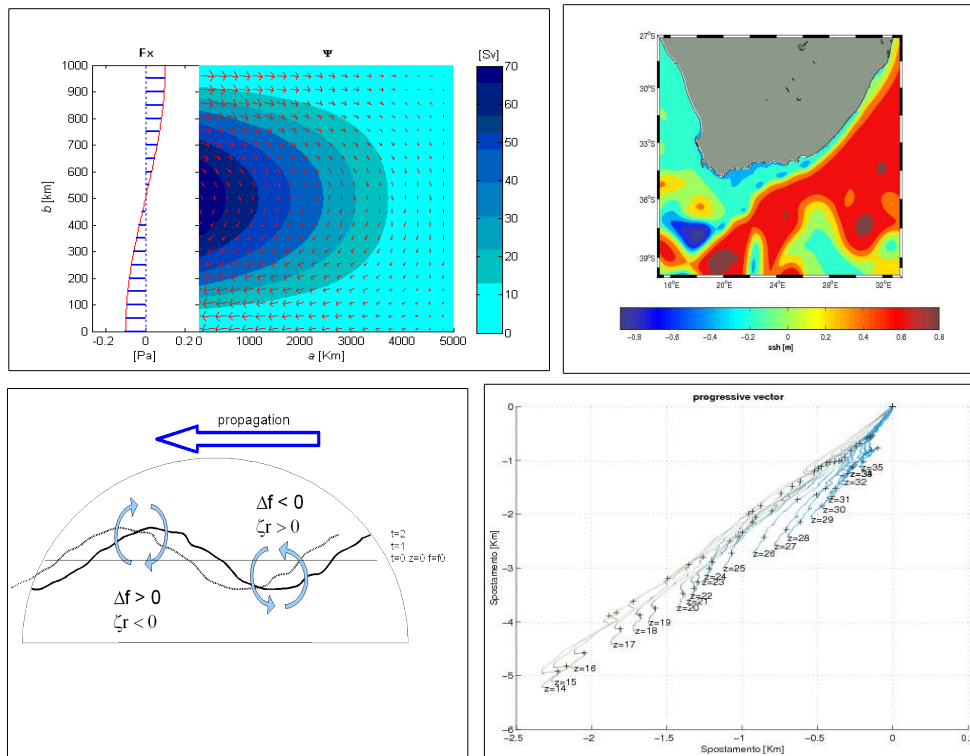


Andrea M. Doglioli Anne A. Petrenko

Notes de Cours et Travaux Dirigés de

Dynamique des Océans



dernière révision 12 septembre 2017

Remerciements

Nous désirons remercier tous nos étudiants et nos collègues pour leur commentaires, questions, corrections et suggestions.

En particulier, ces polycopies ont bénéficié des contributions de Nicolas Barrier, Nathalie Daniault, Marion Fraysse, Nadia Pinardi et Gérard Copin-Montégut.

Doglioli, A. M., Petrenko, A. A. (2017), *Notes de Cours et Travaux Dirigés de Dynamique Océanique*, Université d'Aix-Marseille, Marseille, France.

www.mio.univ-amu.fr/~doglioli/DoglioliPetrenko_NotesCoursTD_DynamiqueOceanique.pdf

Ce matériel est distribué selon la licence Créative Commons [<http://creativecommons.org/>]



Vous êtes libres :

- * de reproduire, distribuer et communiquer cette création au public
- * de modifier cette création

Selon les conditions suivantes :

- * Paternité. Vous devez citer le nom de l'auteur original de la manière indiquée par l'auteur de l'oeuvre ou le titulaire des droits qui vous confère cette autorisation (mais pas d'une manière qui suggérerait qu'ils vous soutiennent ou approuvent votre utilisation de l'oeuvre).
- * Pas d'Utilisation Commerciale. Vous n'avez pas le droit d'utiliser cette création à des fins commerciales.
- * Partage des Conditions Initiales à l'Identique. Si vous modifiez, transformez ou adaptez cette création, vous n'avez le droit de distribuer la création qui en résulte que sous un contrat identique à celui-ci.

Cet ouvrage a été réalisé avec le logiciel libre OpenOffice www.openoffice.org

Table des matières

Notes de Cours

Rappels

- Lois de Newton
- Vitesse et accélération dans un repère non inertiel

1. Équations de l'hydrodynamique

- Équations d'Euler
- Forces agissant sur le milieu marin
- Forces internes (Pesanteur, Force de pression)
- Force externes (Force génératrice de la marée, Force d'entraînement du vent, Forces liées à la pente de la surface de la mer)
- Forces secondaires (Force de Coriolis, Force de frottement dues à la viscosité)
- Écoulement turbulent et équations de Reynolds
- Simplifications

2. Analyse des ordres de grandeur et nombres sans dimensions

- Le nombre de Reynolds
- Analyses des ordres de grandeur des termes des équations
- Nombres de Rossby et d'Ekman

3. Courants sans frottement

- Écoulement géostrophique
- Courant d'inertie

4. Courant avec frottement

- Spirale d'Ekman
- Upwelling* et *Downwelling*
- Circulation générale forcée par le vent
- La circulation de Sverdrup
- Intensification des courants de bord ouest

5. Les équations e.p.p. et la vorticité

- Les équations en eaux peu profondes
- La vorticité
- La conservation de la vorticité

6. Introduction aux modèles numériques océaniques

Travaux Dirigés

- SÉANCE 1 : Pesanteur
- SÉANCE 2 : Force de marée
- SÉANCE 3 : Équations d'Euler, de Navier-Stokes et de Reynolds et la théorie de Prandtl
- SÉANCE 4 : approximation de Boussinesq, force de Coriolis
- SÉANCE 5 : analyse des ordres de grandeur
- SÉANCE 6 : le courant géostrophique barotrope
- SÉANCE 7 : la méthode dynamique et les équations du vent thermique
- SÉANCE 8 : le courant d'inertie
- SÉANCE 9 : la spirale d'Ekman
- SÉANCE 10 : le pompage d'Ekman, les upwellings et la circulation forcée par le vent
- SÉANCE 11 : le pompage d'Ekman à l'équateur

Bibliographie

Anderson J.D. Jr (2005), *Ludwig Prandtl's Boundary Layer*, Physics Today.

<http://ccaunam.atmosfcu.unam.mx/jzavala/OceanoAtmosfera/Ludwing.pdf>

Coiffier J. (2000), *Un demi-siècle de prévision numérique du temps*. La Météorologie, 30, 11-31.

<http://hdl.handle.net/2042/36122>

Copin-Montégut G., Le Courant Géostrophique

<http://www.obs-vlfr.fr/Enseignement/enseignants/copin/Geostro.pdf>

Daniault N. (2005), *Océanographie Physique pour l'École Navale*. Cours en ligne, LPO - Université de Bretagne Occidentale, Brest.

http://stockage.univ-brest.fr/~daniault/oceano_physique.pdf

Lynch P. & De Moor G. (2008) *Les origines de la prévision numérique du temps et de la modélisation climatique*. La Météorologie, 63, 14-24.

<http://hdl.handle.net/2042/21887>

Mattioli F. (1995) *Principi Fisici di Oceanografia e Meteorologia* (en Italien)

Notes de Cours

Rappels

Les Lois de Newton

1^{ère} Loi de Newton ou Principe d'inertie

Dans un référentiel universel, dit référentiel galiléen, ou référentiel absolu, ou référentiel inertiel, toute particule isolée, i.e., éloignée de tout objet matériel, reste au repos si elle est initialement au repos, ou décrit un mouvement rectiligne uniforme si son accélération est nulle.

$$\vec{F} = m \vec{\gamma} = 0 \Rightarrow \vec{V} = Cte = \vec{V}_o \Rightarrow \vec{X} = \vec{V}_o \cdot t + \vec{X}_o$$

2^{ème} Loi de Newton ou Principe fondamental de la dynamique

Dans un référentiel galiléen, il existe une relation de proportionnalité entre l'accélération $\vec{\gamma}$ d'une particule et la force \vec{F} à laquelle elle est soumise :

$$\vec{F} = m \vec{\gamma}$$

m est un coefficient positif caractéristique de la particule, appelé masse du point matériel.

3^{ème} Loi de Newton ou Principe de l'action et de la réaction

Dans un référentiel galiléen, l'action mutuelle de deux particules P_1 et P_2 l'une sur l'autre se traduit par une force \vec{F}_1 appliquée à la première particule et une force \vec{F}_2 associée à la seconde.

Les deux forces sont :

- portées par la droite P1-P2, qui joint les deux particules
- égales en module mais de sens opposé :

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Application de la 2^{ème} loi de Newton

Dans un référentiel galiléen $R_F = (T, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$, en suivant une particule fluide de masse dm , on a :

$$\vec{F}_A = dm \vec{\gamma}_A$$

où $\vec{\gamma}_A$ est l'accélération absolue de la particule P

et \vec{F}_A est l'ensemble des forces qui agissent sur P ; soit **forces absolues**

Dans un référentiel non galiléen (non absolu) mobile $R' = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, la particule a une accélération relative $\vec{\gamma}_r$, qui est liée à l'accélération absolue par:

$$\vec{\gamma}_A = \vec{\gamma}_E + \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_C$$

ou $\vec{\gamma}_E$, est l'accélération d'entraînement et ou $\vec{\gamma}_C$, est l'accélération de Coriolis

Donc les forces absolues sont:

$$\vec{F}_A = dm(\vec{\gamma}_E + \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_C) = \vec{F}_r + dm(\vec{\gamma}_E + \vec{\gamma}_C)$$

Les forces relatives sont :

$$\vec{F}_r = \vec{F}_A + \vec{F}_C + \vec{F}_E = \vec{F}_A + \vec{F}_{pseudo}$$

Les forces de Coriolis et d'entraînement sont appelées des pseudo-forces, respectivement égales à

$$\vec{F}_C = -dm\vec{\gamma}_C \quad \text{et} \quad \vec{F}_E = -dm\vec{\gamma}_E \quad .$$

1. Équations de l'hydrodynamique

Dans un référentiel terrestre local, non galiléen, pour décrire le mouvement des océans, on dispose de 3 variables :

- la vitesse zonale, u (ouest – est, positive vers l'est),
- la vitesse méridienne v (sud-nord, positive vers le nord),
- la vitesse verticale w (positive vers le zénith).

Des lois régissent les mouvements de l'océan. Ce sont des lois de conservation :

- conservation de la masse : équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

- conservation de la quantité de mouvement : équations de Navier-Stokes (rappelée ultérieurement).

La quantité de mouvement par unité de volume correspond à $\rho \vec{v}$, avec ρ masse volumique (en kg/m^3) et $\vec{v} \equiv (u, v, w)$ vecteur vitesse.

On a aussi des lois permettant de déterminer l'évolution de la température et de la salinité des masses d'eau :

- conservation de la chaleur ou de la salinité : équations de transport de la température et de la salinité.

Les équations les plus importantes sont les **équations de Navier-Stokes**, qui sont des équations différentielles non-linéaires, décrivant le mouvement des fluides. Ces équations, lorsqu'elles ne sont pas simplifiées n'ont pas de solutions analytiques. Simplifiées, elles sont utiles pour des simulations numériques. Elles gouvernent par exemple les mouvements de l'air de l'atmosphère, les courants océaniques, l'écoulement de l'eau dans un tuyau, et de nombreux autres phénomènes d'écoulement de fluides. Elles sont nommées d'après deux physiciens du XIX^e siècle, Claude Navier et George Stokes.

Les **équations de Navier-Stokes** dérivent de la deuxième loi de Newton. En général, on effectue des simplifications de ces équations en considérant que le fluide est incompressible.

Rappel : la condition d'incompressibilité est la suivante:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\rho = 0$$

Si on fait aussi l'hypothèse que c'est un fluide parfait (viscosité nulle), on obtient les équations d'Euler.

1.1. Équations d'Euler

Elles traduisent, pour des **fluides parfaits**, la deuxième loi de Newton : masse*accélération=somme des forces, divisée par le volume. On obtient ainsi, dans un référentiel galiléen, des équations volumiques pour les quantités de mouvement.

$$\underbrace{\rho \frac{d\vec{V}}{dt}}_{\text{accélération totale}} = \underbrace{-\overrightarrow{\text{grad}} p}_{\text{force de pression}} + \underbrace{\rho \vec{f}}_{\text{force de volume}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{\text{accélération locale}} + \underbrace{(\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V}}_{\text{accélération convective}} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p + \vec{f}$$

équation par unité de volume

ou :

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = -\text{volume} \overrightarrow{\text{grad}} p + m \vec{f} \quad \text{par unité de masse}$$

Jusqu'à présent, des cas simples ont été traités où les forces se limitaient à la pression et à la gravité. En réalité, et surtout dans le repère terrestre local (non galiléen), de nombreuses autres forces sont en jeu. C'est l'objet de la section suivante.

1.2. Forces agissant sur le milieu marin

Différentes forces s'exercent :

les forces internes au fluide,

- la force de pression : elle est dirigée des hautes pressions vers les basses pressions
- la force de gravité : elle ne s'exerce que dans la direction verticale et ne peut pas accélérer les courants horizontalement. Elle ne joue un rôle important que pour les mouvements verticaux, par exemple lors des phénomènes de convection.

les forces externes,

- la force génératrice de la marée
- la force d'entraînement due au vent
- les forces liées à la pente de la surface libre.

les forces secondaires

- la force de Coriolis liée à la rotation de la Terre s'exerce perpendiculairement au mouvement et est dirigée sur la droite du mouvement dans l'hémisphère Nord
- les forces de frottement dues à la viscosité. La viscosité mesure la résistance d'un fluide à l'écoulement. Elle est due aux frottements entre les particules fluides en mouvement.

1.3 Forces internes

Champ de pesanteur (gravitation).

Toute particule de masse dm est soumise à une force de pesanteur : $d\vec{F} = dm \cdot \vec{g}$ résultante de :

- la force de gravitation $dm \vec{g}'$ due à l'attraction terrestre
- la force axifuge $dm \vec{g}''$ due à la rotation de la terre

Attraction terrestre :

\vec{g}' est dirigée du point d'observation vers le centre de la Terre et vaut :

$$g' = \frac{GM}{r^2}$$

où $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$ (ou $\text{m}^3\text{s}^{-2}\text{kg}^{-1}$) - Constante de Gravitation

$M = 5,973 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ - Masse de la Terre

r = distance au centre de la Terre (\approx rayon de la terre en océanographie)

Force axifuge :

$$\vec{g}'' = \vec{F}e = -\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{TM})$$

Si \vec{u} est le vecteur unitaire passant par le point d'observation, perpendiculaire à l'axe des pôles et dirigé vers l'extérieur de la Terre. Si ϕ est la latitude en ce point, cette force d'entraînement peut s'écrire :

$$\vec{g}'' = \Omega^2 r (\cos \phi)^2 \vec{u}$$

g'' est maximum à l'équateur où il vaut $0,034 \text{ ms}^{-2}$.

Remarques :

* la droite colinéaire avec \vec{g} définit la verticale du lieu ; c'est la direction du fil à plomb.

* lorsque l'on descend en dessous du niveau de la mer, la valeur de g augmente car g' augmente quand R diminue. Cependant, pour ce cours, en raison de la faible profondeur des océans relativement au rayon terrestre, on fera quand même l'hypothèse que g est une constante égale $\approx 9,81 \text{ ms}^{-2}$

Force de pression

Voir cours SM22 : La résultante des forces de pression (p) qui s'exerce sur une « particule élémentaire » de fluide de volume dv est :

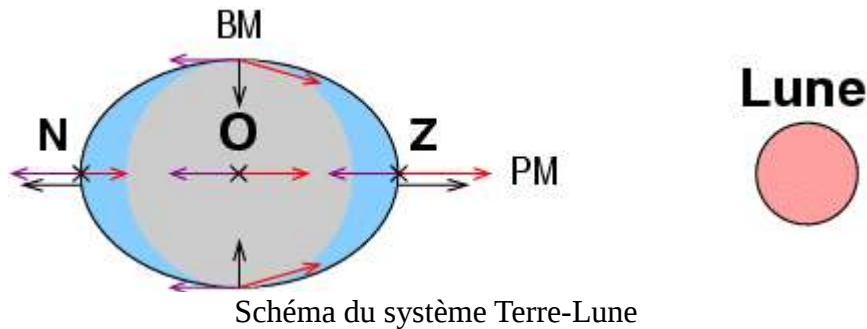
$$\vec{F} = -\vec{grad} p \cdot dv$$

1.4 Force externes**Force génératrice de la marée**

On considère que seuls la Lune et le Soleil ont une influence sur la Terre (le Soleil a une très grande masse et la Lune est proche de la Terre). Les autres planètes ou étoiles qui entourent la Terre sont trop éloignées ou de masses trop faibles pour être prises en considération. Les océans sont soumis à deux forces opposées :

- attraction gravitationnelle, dont l'intensité dépend de la distance à l'astre (Lune ou Soleil) : plus un point est proche de l'astre, plus l'attraction est forte.
- force axifuge qui s'oppose à l'attraction gravitationnelle et maintient chaque planète en équilibre sur son orbite. Cette force est constante en tous points du globe et dirigée dans le sens opposé à l'astre attracteur.

Ces deux forces se compensent exactement au centre de la Terre de sorte que la Terre et la Lune restent sur leur orbites.



La résultante des deux forces (en noir) dépend donc de sa position sur la Terre, elle est :

- nulle au centre de la Terre (point O)
- dirigée vers la Lune au zénith (point Z)
- dirigée à l'opposée de la Lune au nadir (point N)
- dirigée plus ou moins vers le centre de la Terre pour les points situés perpendiculairement à l'axe ZN.

Lorsque la force résultante est dirigée vers le centre de la Terre, la surface des océans a tendance à baisser créant une basse-mer (BM) et à l'inverse lorsque la force est dirigée vers le ciel (au zénith et au nadir) la surface des océans a tendance à monter créant une pleine-mer (PM).

Les forces en jeu sont extrêmement faibles et induisent des variations de niveau généralement inférieures au mètre dès que l'on s'éloigne des continents. A l'approche des côtes, l'onde de marée peut être considérablement amplifiée par la faible profondeur des eaux et le marnage peut parfois dépasser 10 mètres (17 m en baie de Fundy au Canada et 14.50 m à Granville en Normandie).

Si l'océan était en équilibre avec la force génératrice de la marée, sa surface prendrait la forme d'une ellipse de révolution dont le grand axe serait dirigé vers l'astre. Ce phénomène a reçu le nom de marée statique.

Dans la réalité, la marée est bien plus compliquée, mais elle est très bien modélisée en prenant en compte non seulement la lune mais le soleil et les autres astres.

Force d'entraînement du vent

Le vent soufflant à la surface de l'eau exerce sur la pellicule d'eau superficielle une force de frottement qui dépend de la densité de l'air, la vitesse du vent, de la « rugosité » de la surface de la mer (plus ou moins lisse), de la stratification thermique au voisinage de l'interface (stabilité ou instabilité des masses d'air entraînant une turbulence accrue) et autres causes encore.

Dès 1905, Ekman avait établi qu'une formule, fondée sur des conditions de « dimensions » (voir chapitre suivant), convenait pour une gamme étendue de vitesses :

$$F = k \rho_{air} |\vec{w}|^2$$

avec w vitesse du vent

Le coefficient k dépend de V qui varie avec l'altitude, hauteur au dessus de l'eau. Généralement, par convention, on se réfère à la vitesse du vent à 10m au-dessus du niveau de l'eau.

L'essentiel de la circulation superficielle est due au vent ; on conçoit l'intérêt d'une étroite collaboration entre météorologistes et océanographes.

Le mouvement provoqué par le vent initialement cantonné à la couche superficielle, se propage vers le bas par viscosité et turbulence et engendre des courants appelés « courants de dérive ». (Voir Partie Dynamique côtière).

Forces liées à la pente de la surface de la mer

À proximité des côtes, des élévations ou des abaissements du niveau marin se rencontrent suite à l'action d'entraînement dû au vent. On peut également rencontrer ce genre de situation ailleurs à cause des effets de pression atmosphérique exercée par l'atmosphère.

Il apparaît donc une pente de surface qui provoque des courants appelés « courants de pente ».

1.5 Forces secondaires

1.5.1 Force de Coriolis

Voir rappels du début de cours.

La force de Coriolis est liée à la rotation de la Terre ; elle s'exerce perpendiculairement au mouvement et est dirigée sur la droite du mouvement dans l'hémisphère Nord.

L'expression des composantes de la force de Coriolis par unité de masse dans un repère terrestre local (axes liés à la Terre):

$$\begin{aligned} \text{sur } \mathbf{Ox} \text{ (vers l'Est)} & \quad + 2 \omega v \sin \phi - 2 \omega w \cos \phi \\ \text{sur } \mathbf{Oy} \text{ (vers le Nord)} & \quad - 2 \omega u \sin \phi \\ \text{sur } \mathbf{Oz} \text{ (vers le zénith)} & \quad + 2 \omega u \cos \phi \end{aligned}$$

avec ω vecteur rotation instantanée du référentiel terrestre (i.e. rotation de la terre), ϕ latitude au point d'observation/étude, et u , v et w composantes du vecteur vitesse.

Rappel : La terre effectue un tour complet (2π radians) vers l'est, en un jour sidéral, soit 86164 secondes (et non $24 \times 3600s = 86\,400s$). On a donc : $\omega = 0,729 \times 10^{-4} \text{ rad/s}$.

Les valeurs numériques montrent que la composante verticale (selon \mathbf{Oz}) de la force de Coriolis est négligeable devant la pesanteur. On peut en outre négliger généralement les vitesses verticales (w) devant les vitesses horizontales (u et v) de telle sorte que les composantes de la force de Coriolis par unité de masse s'écrivent simplement :

$$\begin{aligned} \text{sur } \mathbf{O'x'} \text{ (vers l'Est)} : & \quad + 2 \omega v \sin \phi = fv \\ \text{sur } \mathbf{O'y'} \text{ (vers le Nord)} : & \quad - 2 \omega u \sin \phi = -fu \\ \text{sur } \mathbf{O'z'} \text{ (vers le zénith)} : & \quad 0 \end{aligned}$$

On pose $f = 2\omega \sin \phi$; f est appelé facteur de Coriolis.

1.5.2 Forces de frottement dues à la viscosité et équations de Navier-Stokes

La viscosité (ou frottement interne) est une propriété commune à tous les fluides réels (c'est à dire « non parfaits »), qui tend à s'opposer aux irrégularités de vitesse dans une masse de fluide en mouvement.

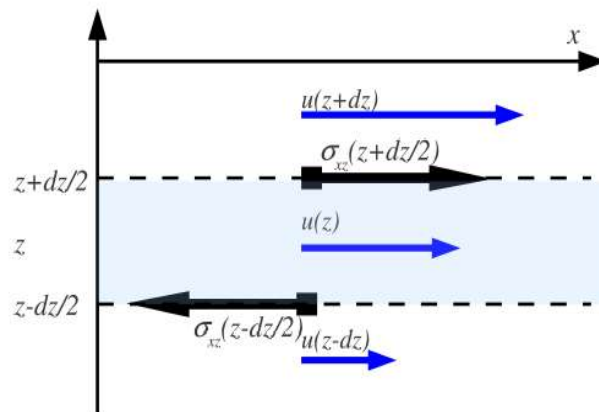
La viscosité mesure la résistance d'un fluide à l'écoulement. Elle est due aux frottements entre les particules fluides en mouvement. Les forces de frottement par unité de surface sont appelées tensions de frottement, ou de cisaillement. Ces forces sont tangentielles, par opposition aux forces de pression qui sont normales aux surfaces considérées.

Parmi les forces extérieures, on a signalé l'action du vent sur la couche superficielle. Ce mouvement va, par viscosité, se transmettre aux couches sous-jacentes de l'eau.

Supposons que le mouvement se fasse rigoureusement par tranches planes, par exemple, horizontales, séparées d'une distance infinitésimale dz et animées de vitesses dans la même direction mais inégales en grandeur et ne dépendant que de z . On écrit

$$\sigma_{xz} = \sigma_{xz}(z)$$

la contrainte tangentielle dans la direction x (indiquée par le premier indice) générée par la viscosité entre les couches superposées sur la verticale (deuxième indice).



Par le principe d'action et réaction, la force qui s'exerce sur la couche inférieure est égale en intensité et opposée en direction par rapport à la force qui s'exerce sur la couche supérieure. En considérant la couche centrée à la profondeur z , la contrainte visqueuse exercée par la couche supérieure sera $\sigma_{xz} = \sigma_{xz}(z+dz/2)\vec{i}$ avec \vec{i} vecteur unitaire en direction x , tandis que celle exercée par la couche inférieure sera $-\sigma_{xz}(z-dz/2)\vec{i}$. Le signe positif indique que la couche supérieure tend à entraîner la couche de référence vers les x positifs et celle inférieure tend à la freiner. Il faut noter aussi que, bien que la couche de référence soit sujette à un couple de forces, elle ne tourne pas car elle est bloquée dans sa position par les autres couches qui l'entourent. La force visqueuse par unité de volume qui agit sur la couche dans la direction \vec{i} s'écrit :

$$\rho \vec{F}_{v_r} = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \vec{i}.$$

De quoi dépend la contrainte visqueuse σ_{xz} ? L'hypothèse simple, formulée par Newton, est qu'elle est proportionnelle au cisaillement de la vitesse (en anglais *shear*) :

$$\sigma_{xz} = \mu \frac{\partial u}{\partial z}.$$

avec une constante de proportionnalité μ appelée viscosité moléculaire dynamique (unité $\text{kg}/\text{m}/\text{s}$), à estimer empiriquement.

La suite est donc valable pour les **fluides dits newtoniens**.

Finalement, si on remplace σ_{xz} dans la première équation, la force visqueuse par unité de volume qui agit sur la couche suivant \vec{i} s'écrit, dans la direction \vec{i} :

$$\vec{F}_{v_r} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \vec{i} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \vec{i}$$

avec ν appelée viscosité moléculaire cinématique (unité m^2/s).

Pour préciser les forces de frottement dans le cas d'un écoulement tridimensionnel il faut prendre en compte les trois composantes de la force de frottement et, du fait qu'elles agissent sur les trois directions x , y et z , cela conduit à introduire le tenseur des contraintes

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} .$$

Si de nouveau on utilise l'hypothèse de Newton on peut calculer les éléments du tenseur de la façon suivante:

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \mu \frac{\partial u}{\partial x} & \mu \frac{\partial u}{\partial y} & \mu \frac{\partial u}{\partial z} \\ \mu \frac{\partial v}{\partial x} & \mu \frac{\partial v}{\partial y} & \mu \frac{\partial v}{\partial z} \\ \mu \frac{\partial w}{\partial x} & \mu \frac{\partial w}{\partial y} & \mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} ,$$

Comme dans chaque direction, il y a trois termes, la notation vectorielle pour la force visqueuse devient :

$$\vec{F}_v = \nu \vec{\nabla}^2 \vec{v} = \nu \Delta^2 \vec{v}$$

Il est très important de se rappeler que cette notation est valable **exclusivement** pour un fluide newtonien, i.e. avec viscosité linéaire proportionnelle au cisaillement de la vitesse, et incompressible (NB: pour le détail des calculs pour le cas général, voir l'encadré ci-dessous).

Dans le cas de ces approximations, les équations dites de Navier-Stokes s'écrivent sous forme vectorielle

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g} - 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{v}$$

Toujours dans le repère terrestre local (non galiléen) utilisé jusqu'à présent, cette équation peut s'écrire sous forme développée :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_v + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f_u + \nu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

Par convention, on définit comme « équations de l'hydrodynamique » le système composé des trois équations précédentes (équations de Navier-Stokes) et de l'équation de continuité ci-dessous :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

Si on ajoute la condition d'incompressibilité :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \rho = 0$$

l'équation de la continuité se simplifie et devient :

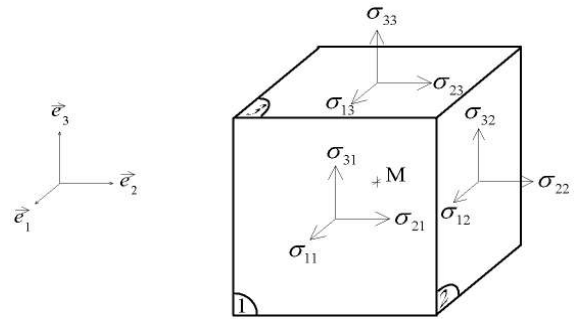
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \text{ i.e. } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Il y a donc 5 inconnues : les trois composantes de la vitesse u , v , et w , la pression p et la masse volumique ρ et il y a 5 équations à résoudre : le système est donc fermé.

Dans la pratique de la modélisation de la circulation océanique, en plus de ces variables, il est possible de déterminer la température et la salinité au sein du fluide avec des équations de transport. Les forces extérieures n'interviennent pas directement dans les équations. La force due à la pente de surface libre intervient au niveau du gradient de pression. La force génératrice de la marée est rarement introduite dans les modèles. On utilise plutôt l'impact que la marée a sur l'élévation de surface libre, i.e. une variation temporelle, somme de plusieurs ondes sinusoïdales. Quant aux forces de frottements dues au vent, elles sont prises en compte dans le terme de frottement, au niveau de la surface libre.

CONTRAINTES VISQUEUSES POUR UN FLUIDE NON-NEWTONIEN ET COMPRESSIBLE

On note ce **tenseur des contraintes** σ . Les coefficients sur la diagonale σ_{ii} correspondent aux contraintes normales à la surface dS , donc à la force de pression. Les coefficients hors de la diagonale σ_{ij} correspondent aux contraintes tangentielles, de frottement ou de cisaillement.



On peut extraire du tenseur des contraintes σ la partie diagonale, correspondant à la pression :

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - p \delta_{ij}$$

où δ_{ij} représente le tenseur de Kronecker (=1 si $i=j$, et =0 si $i \neq j$). Le signe – qui apparaît devant la pression indique que le fluide au repos est généralement en compression.

σ' est lié à la déformation des éléments de fluide. On peut démontrer que le tenseur σ' est symétrique.

On peut obtenir l'équation d'Euler (ou de Navier-Stokes) à partir de la 2^{ème} loi de Newton de la façon suivante, en partant de la dérivée lagrangienne.

La variation temporelle de la quantité de mouvement est égal à l'ensemble des forces de volume et de surface.

$$\frac{d(\iiint \rho \vec{V} dv)}{dt} = \iiint \rho \vec{f} dv + \iint \vec{\sigma} \cdot \vec{n} dS$$

C'est une dérivée lagrangienne, dans laquelle ρdv est constant le long de la trajectoire, du coup, on peut écrire le terme de gauche sous la forme :

$$\frac{d(\iiint \rho \vec{V} dv)}{dt} = \iiint \rho \frac{d\vec{V}}{dt} dv$$

Donc l'équation dérivée de la deuxième loi de Newton devient, en appliquant la loi d'Ostrogradsky (Gauss) :

$$\iiint \rho \frac{d\vec{V}}{dt} dv = \iiint \rho \vec{f} dv + \iiint \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dv$$

soit :

$$\iiint \rho \frac{d\vec{V}}{dt} dv = \iiint \rho \vec{f} dv + \iiint \text{div} \vec{\sigma} dv$$

L'égalité est vraie sans l'intégration sur le volume :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{f} + \text{div} \vec{\sigma}$$

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{f} + \text{div}(\vec{\sigma}' - p \delta_{ij})$$

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{f} + \overrightarrow{\text{div}} \overline{\overline{\sigma'}} - \overrightarrow{\text{grad}} p$$

qui est l'équation de Navier-Stokes.

Pour un fluide newtonien (définition: les composantes de σ' varient linéairement avec les valeurs instantanées des déformations de l'écoulement) **et incompressible**, la loi de conservation $\text{div} \vec{V} = 0$ simplifie l'écriture du tenseur σ' :

$$\text{div} \sigma' = \mu \nabla^2 \vec{v}$$

Le terme μ est la viscosité moléculaire dynamique

Dans l'équation de Navier-Stokes, la force de viscosité, indiquée par $\text{div} \sigma'$ ou $1/\rho \text{div} \sigma'$ correspond donc à $\mu \nabla^2 \vec{v}$ ou $\nu \nabla^2 \vec{v}$ ($\nu = \mu/\rho$ correspond à la viscosité cinématique moléculaire), que l'équation soit divisée ou non par ρ :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}} p + \rho \vec{g} - 2\rho \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r + \overrightarrow{\text{div}} \overline{\overline{\sigma'}}$$

donne:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}} p + \rho \vec{g} - 2\rho \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r + \mu \nabla^2 \vec{v}$$

Remarque

Une autre classification des forces peut exister, en correspondance avec ce qui a été fait dans la section de rappels. Les forces relatives dans un repère local non galiléen sont composées: des forces absolues (du repère galiléen; i.e. frottement, pression et gravitation), de la force d'entraînement centrifuge et de la force de Coriolis.

Forces relatives =	Forces absolues +			Pseudo-forces	
	Forces absolues +			Force d'entraînement axifuge	+ Force de Coriolis
	frottement	pression	gravitation		
			pesanteur		
	secondaire	interne	interne	interne	secondaire

En effet, quand on parle de pesanteur, on inclut la gravité, correspondant à une composante des forces absolues, et la force d'entraînement. Quant à la force de Coriolis, elle est désignée comme une force secondaire dans la classification de la présente section.

A ces forces doivent être ajoutées les forces externes.

1.6 Écoulement turbulent et équations de Reynolds

La turbulence désigne l'état de l'écoulement d'un fluide, dans lequel la vitesse présente en tout point un caractère tourbillonnaire : tourbillons dont la taille, la localisation et l'orientation varient constamment. Les écoulements turbulents se caractérisent donc par une apparence très désordonnée, un comportement difficilement prévisible et la coexistence de nombreuses échelles spatiales et temporelles. De tels écoulements apparaissent lorsque la source d'énergie cinétique qui met le fluide en mouvement est relativement intense devant les forces de viscosité que le fluide oppose pour se déplacer. À l'inverse, on appelle laminaire le caractère d'un écoulement régulier.

Si on fait plusieurs fois une même expérience pour mesurer la vitesse, on n'obtiendra pas les mêmes valeurs. Alors, plutôt que de rechercher la vitesse instantanée, obtenue avec les équations de Naviers-Stokes vues précédemment, on cherche une vitesse lissée dans le temps, c'est à dire moyennée sur une période de temps dépendant du phénomène étudié et on décompose la vitesse en une partie moyenne et un écart à la moyenne.

$$u = \bar{u} + u' \quad \text{avec} \quad \bar{u}' = 0$$

Cette décomposition s'appelle la **décomposition de Reynolds**.

En introduisant cette décomposition dans les équations de Navier-Stokes, et en en prenant la moyenne (au sens moyenne d'ensemble), on obtient les équations moyennées. Des nouveaux termes apparaissent : ils correspondent aux pertes d'énergie liées à la turbulence.

Pour l'équation de continuité dans le cadre de l'hypothèse d'incompressibilité, on a :

$$\frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v} + v')}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{w} + w')}{\partial z} = 0$$

On obtient pour les valeurs moyennes et pour les écarts :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= 0 \quad (\text{par différence } u - \bar{u}) \end{aligned}$$

En effectuant aussi la décomposition de la pression en une valeur moyenne et un écart à la moyenne, on obtient pour l'équation de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial x} + (\bar{v} + v') \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial y} + (\bar{w} + w') \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f(\bar{v} + v') + \nu \left[\frac{\partial^2(\bar{u} + u')}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bar{u} + u')}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\bar{u} + u')}{\partial z^2} \right] \\ \frac{\partial(\bar{v} + v')}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial(\bar{v} + v')}{\partial x} + (\bar{v} + v') \frac{\partial(\bar{v} + v')}{\partial y} + (\bar{w} + w') \frac{\partial(\bar{v} + v')}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f(\bar{u} + u') + \nu \left[\frac{\partial^2(\bar{v} + v')}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bar{v} + v')}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\bar{v} + v')}{\partial z^2} \right] \\ \frac{\partial(\bar{w} + w')}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial(\bar{w} + w')}{\partial x} + (\bar{v} + v') \frac{\partial(\bar{w} + w')}{\partial y} + (\bar{w} + w') \frac{\partial(\bar{w} + w')}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g + \nu \left[\frac{\partial^2(\bar{w} + w')}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bar{w} + w')}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\bar{w} + w')}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

En TD, il sera démontré que $\overline{u \frac{\partial u}{\partial x}} = \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}}$, du coup NS devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y}} + \overline{w' \frac{\partial u'}{\partial z}} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f \bar{v} + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right] \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \overline{u' \frac{\partial v'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial v'}{\partial y}} + \overline{w' \frac{\partial v'}{\partial z}} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - f \bar{u} + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \right] \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \overline{u' \frac{\partial w'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial w'}{\partial y}} + \overline{w' \frac{\partial w'}{\partial z}} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - g + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

Or, ajoutant à chaque équation la divergence des écarts, qui est nulle, multipliée par l'écart de la composante, les termes tels que $u' \frac{\partial u'}{\partial x}$ peuvent s'écrire : $\frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x}$ (voir TD pour le développement mathématique).

Les termes $\overline{u'u'}$, $\overline{u'v'}$ etc.. ne sont pas nuls et sont appelés **tensions de Reynolds**.

J.V. Boussinesq (1842 – 1929) en s'inspirant de ce que Newton proposa pour la viscosité moléculaire, introduisit le concept de viscosité turbulente et proposa de relier ces tensions de Reynolds aux composantes du gradient des vitesses moyennes de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \overline{u'u'} &= -A_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} ; & \overline{u'v'} &= -A_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} ; & \overline{u'w'} &= -A_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \\ \overline{v'u'} &= -A_x \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} ; & \overline{v'v'} &= -A_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} ; & \overline{v'w'} &= -A_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \\ \overline{w'u'} &= -A_x \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} ; & \overline{w'v'} &= -A_y \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} ; & \overline{w'w'} &= -A_z \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \end{aligned}$$

Contrairement à la viscosité cinématique moléculaire ν , la viscosité turbulente n'est pas une propriété du fluide, mais de l'écoulement. Ainsi les coefficients A peuvent varier d'un endroit à l'autre de l'écoulement ; en fait, ils dépendent de l'échelle sur laquelle la « moyenne » a été effectuée.

Les équations de Navier-Stokes deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f\bar{v} + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right] + A_x \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + A_y \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + A_z \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \\ \frac{d\bar{v}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f\bar{u} + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \right] + A_x \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + A_y \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + A_z \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \\ \frac{d\bar{w}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right] + A_x \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + A_y \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + A_z \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \end{aligned}$$

qui sont connues aussi comme *RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) equations*.

1.7 Simplifications

Ces équations peuvent être simplifiées de diverses manières ce qui rend les équations plus faciles à résoudre. Certaines simplifications permettent de trouver des solutions analytiques à des problèmes de dynamique des fluides.

Écoulement stationnaire

Une autre simplification des équations de la dynamique des fluides est de considérer toutes les propriétés du fluide comme étant constantes dans le temps. Ceci est applicable à de nombreux problèmes divers, tels que la poussée ou la traînée d'une aile ou un flux traversant un tuyau. Les

équations de Navier-Stokes et celles d'Euler deviennent alors plus simples.

Approximation hydrostatique

L'océan est une couche d'eau « peu profonde » par rapport à son étendue horizontale. Du coup, les échelles verticales sont généralement très inférieures aux échelles horizontales. Cela signifie que dans l'équation de Navier-Stokes concernant la composante verticale, on ne conserve que les termes de l'équilibre hydrostatique. Cette équation devient alors :

$$0 = -\frac{\partial \rho}{\partial z} - \rho g$$

et la vitesse verticale est déduite de l'équation de continuité. C'est comme si la pression variait peu que le fluide soit en mouvement ou au repos.

Approximation de Boussinesq

La masse volumique de l'eau de mer varie peu dans l'espace et dans le temps autour d'une valeur moyenne : $\rho = \rho_0 + \rho'(x, y, z, t)$. La masse volumique est considérée comme constante lorsqu'elle intervient avec les quantités de mouvement, mais sa variation est prise totalement en compte quand elle intervient dans le terme de flottabilité.

Hypothèse d'incompressibilité

La masse volumique du fluide peut varier de particule à particule, donc le fluide n'est pas forcément homogène, mais

chaque particule conserve sa propre masse volumique pendant le mouvement, i.e. sa dérivée lagrangienne est nulle $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho = 0$

Avec cette hypothèse l'équation de continuité se simplifie dans la forme : $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ mais avec une hypothèse moins contraignante que considérer le fluide comme homogène et stationnaire (i.e. $\rho(x, y, z, t) = \text{const}$).

2. Analyse des ordres de grandeur et nombres sans dimensions

2.1. Le nombre de Reynolds

Les termes d'advection sont non-linéaires parce qu'ils représentent des dérivées de carrés de vitesse

$$\left(\text{e.g. } u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} \right), \text{ ou le produit de différentes composantes de la vitesse et de leurs dérivées}$$

$$\left(\text{e.g. } v \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Cette équation est instantanée et donc u , v et w présentent des variations (ou perturbations) au cours du temps. A cause de ces termes non-linéaires, une faible perturbation peut induire une grande fluctuation.

Ces termes peuvent engendrer une instabilité quand ils sont « suffisamment grands » comparés aux termes visqueux qui eux ont tendance à homogénéiser ou gommer les différences de vitesse.

Pour estimer ce que signifie « suffisamment grands », considérons le rapport d'un terme non-linéaire à un terme de tension visqueuse:

$$\frac{u \frac{\partial u}{\partial x}}{v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

Si l'on analyse les dimensions, on voit qu'il s'agit d'un nombre sans dimension.

Si l'on considère u et ∂u comme étant de l'ordre de U (échelle de vitesse typique) et ∂x de l'ordre de L (échelle de longueur typique sur laquelle la vitesse U varie) le rapport précédent devient:

$$\frac{\frac{U^2}{L}}{v \frac{U}{L^2}} = \frac{UL}{v} = Re$$

et est appelé nombre de Reynolds pour un écoulement fluide.

Re détermine le caractère laminaire ou turbulent de l'écoulement. Si $Re \geq 10^5$ l'écoulement est

turbulent. Pratiquement tous les mouvements océaniques sont des écoulements turbulents. Par exemple, pour le Gulf Stream on a $U = 1 \text{ m/s}$, $L = 100 \text{ km} = 10^5 \text{ m}$, $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ donc, $Re = 10^{11}$. Les effets non linéaires sont très grands par rapport aux termes moléculaires (visqueux). En fait, en mer ouverte, on peut toujours négliger les effets moléculaires visqueux. Ils deviennent importants au voisinage immédiat de parois solides et, ôtant de l'énergie à l'écoulement turbulent aux petites échelles, l'empêchent de s'amplifier sans limitation. Les effets moléculaires visqueux sont importants pour les faibles valeurs de Re , ie pour les faibles valeurs de u et/ou L .

2.2. Analyses des ordres de grandeur des termes des équations

"Scaling" est un terme anglais dont la traduction peut être adimensionalisation. Pour l'application océanographique, on regarde l'ordre de grandeur des différents termes des équations du mouvement, pour effectuer des simplifications. On considère les deux cas de la circulation générale et de la circulation de moyenne échelle.

Circulation générale

Pour la circulation générale de grande échelle à l'intérieur des océans, loin des couches limites latérales, de surface et de fond, on a les ordres de grandeur suivants:

$$L = 1000 \text{ km} = 10^6 \text{ m}, H = 1000 \text{ m} = 10^3 \text{ m}, U = 10^{-2} \text{ ms}^{-1}.$$

La vitesse verticale est estimée à partir de l'équation de continuité:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{W}{H} \simeq \frac{U}{L} \quad \text{donc} \quad W = \frac{UH}{L} = 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$$

Pour obtenir les ordres de grandeur des coefficients de viscosité turbulente, on impose aux termes de frottement d'être du même ordre de grandeur que les termes non linéaires:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \simeq A_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \frac{U^2}{L} = A_x \frac{U}{L^2}, \quad A_x = UL = 10^{-2} 10^6 = 10^4 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad \text{et}$$

$$w \frac{\partial u}{\partial z} \simeq A_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \frac{WU}{H} = A_z \frac{U}{H^2}, \quad A_z = WH = 10^{-5} 10^3 = 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

En supposant le mouvement comme stationnaire, les équations de la quantité de mouvement deviennent alors :

- pour l'horizontale

$$+u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv + A_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$+u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu + A_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_y \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + A_z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

avec ordres de grandeurs

$$\frac{U^2}{L} \quad \frac{U^2}{L} \quad \frac{WU}{H} = ? \quad f_o U \quad A_x \frac{U}{L^2} \quad A_y \frac{U}{L^2} \quad A_z \frac{U}{H^2}$$

en remplaçant

$$10^{-10} \quad 10^{-10} \quad 10^{-10} = ? \quad 10^{-6} \quad 10^{-10} \quad 10^{-10} \quad 10^{-10}$$

- pour la verticale

$$+u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + A_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + A_z \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

avec ordres de grandeurs

$$\frac{UW}{L} \quad \frac{UW}{L} \quad \frac{W^2}{H} = ? \quad g \quad A_x \frac{W}{L^2} \quad A_y \frac{W}{L^2} \quad A_z \frac{W}{H^2}$$

en remplaçant

$$10^{-13} \quad 10^{-13} \quad 10^{-13} = ? \quad 10 \quad 10^{-13} \quad 10^{-13} \quad 10^{-13}$$

En conclusion, le terme de pression, qu'on ne sait pas estimer, doit être du même ordre de grandeur que le terme de Coriolis: c'est l'équilibre géostrophique sur l'horizontale et l'équilibre hydrostatique sur la verticale.

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$$

Circulation « moyenne échelle »

Pour la circulation « moyenne échelle » les ordres de grandeur sont les suivants :

$$L = 100 \text{ km} = 10^5 \text{ m}, \quad H = 1000 \text{ m} = 10^3 \text{ m}, \quad U = 10^{-1} \text{ ms}^{-1}, \quad T \approx 10 \text{ jours} \approx 10^6 \text{ s}$$

La vitesse verticale est estimée à partir de l'équation de continuité:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{W}{H} \approx \frac{U}{L} \quad \text{donc} \quad W = \frac{UH}{L} = 10^{-3} \text{ m s}^{-1}$$

Pour obtenir les ordres de grandeur des coefficients de viscosité turbulente, on impose aux termes de frottement d'être du même ordre de grandeur que les termes non linéaires:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \approx A_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \frac{U^2}{L} = A_x \frac{U}{L^2}, \quad A_x = UL = 10^{-1} 10^5 = 10^4 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad \text{et}$$

$$w \frac{\partial u}{\partial z} \approx A_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \frac{WU}{H} = A_z \frac{U}{H^2}, \quad A_z = WH = 10^{-3} 10^3 = 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

- pour la verticale

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + A_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + A_z \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

avec ordres de grandeurs

$$\frac{W}{T} \quad \frac{UW}{L} \quad \frac{UW}{L} \quad \frac{W^2}{H} = ? \quad g \quad A_x \frac{W}{L^2} \quad A_x \frac{W}{L^2} \quad A_z \frac{W}{H^2}$$

en remplaçant

$$10^{-9} \quad 10^{-9} \quad 10^{-9} \quad 10^{-9} = ? \quad 10 \quad 10^{-9} \quad 10^{-9} \quad 10^{-9}$$

L'équilibre est encore hydrostatique puisque le terme de pression doit équilibrer g .

- pour l'horizontale

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f v + A_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

avec ordres de grandeurs

$$\frac{U}{T} \quad \frac{U^2}{L} \quad \frac{U^2}{L} \quad \frac{WU}{H} = ? \quad fU \quad A_x \frac{U}{L^2} \quad A_y \frac{U}{L^2} \quad A_z \frac{U}{H^2}$$

en remplaçant

$$10^{-7} \quad 10^{-7} \quad 10^{-7} \quad 10^{-7} = ? \quad 10^{-5} \quad 10^{-7} \quad 10^{-7} \quad 10^{-7}$$

La géostrophie n'est satisfaite qu'à quelques pour-cents près: c'est un équilibre quasi-géostrophique.

2.3. Nombre de Rossby et nombre d'Ekman

L'importance relative des termes non linéaires par rapport au terme de Coriolis est appelé nombre de Rossby:

$$R_o = \frac{U^2/L}{fU} = \frac{U}{fL}$$

où U , L et f sont les ordres de grandeurs respectifs pour la vitesse horizontale, l'échelle spatiale horizontale et le facteur de Coriolis.

Si $R_o \ll 1$ les termes non linéaires sont négligeables par rapport au terme de Coriolis (géostrophie ou quasi-géostrophie).

Si $R_o \gg 1$ le terme de Coriolis est négligeable par rapport aux termes non linéaires. C'est le cas des mouvements à petites périodes (hautes fréquences) tels que les vagues et la houle.

Si $R_o \approx 1$ on ne peut rien négliger. C'est le cas des mouvements à période proche de la période d'inertie, tels que le courant d'inertie, la marée, les ondes internes de grand longueur d'onde.

Le nombre d'Ekman vertical compare le terme de frottement vertical au terme de Coriolis:

$$Ek = \frac{\nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}{f \nu} = \frac{\nu \frac{U}{H^2}}{f U} = \frac{\nu}{f H^2}$$

Ce nombre est souvent faible, mais l'importance du frottement est essentielle dans les couches limites.

Il est très important de noter que en océanographie, étant donné que tous les écoulements sont turbulents, dans la définition du nombre de Reynolds et du nombre d'Ekman on remplace la viscosité moléculaire par la viscosité turbulente:

$$Re_h^{turb} = \frac{UL}{A_h} \quad Re_z^{turb} = \frac{UL}{A_z} \quad \text{et} \quad Ek_z^{turb} = \frac{A_z}{fH^2} .$$

Dans ces derniers cas il serait plus correct de parler du nombre de Reynolds turbulent et du nombre d'Ekman turbulent .

3. Courants sans frottement

3.1 L'écoulement géostrophique

La géostrophie traduit l'équilibre entre la force de pression horizontale et la force de Coriolis. On considère donc ici que les courants sont permanents et que la tension du vent et autres termes de frottement peuvent être négligés. C'est la circulation générale. L'écoulement géostrophique est donc défini par ce système d'équations :

$$\begin{aligned}fv &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\fu &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho g\end{aligned}$$

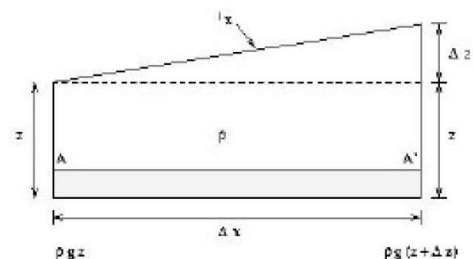
Les deux premières équations traduisent l'équilibre géostrophique, la troisième est l'équation de l'hydrostatique. Ces équations sont obtenues à partir des équations de Navier-Stokes, dans l'approximation de Boussinesq, en supprimant l'accélération et les termes de frottement. Les courants qui satisfont à ce système sont appelés courants géostrophiques.

Tous les grands courants océaniques permanents, tels que le Gulf Stream, le courant Antarctique Circumpolaire, les Grands Courants Equatoriaux sont, en première approximation en équilibre géostrophique. Et le Courant Nord au large de Marseille, est-il en équilibre géostrophique ? Voir le projet de modélisation de P.Recoules ([PDF du rapport](#) et [PDF de la présentation](#))

Imaginons une situation simpliste: de l'eau de mer de masse volumique constante ρ_o occupant un bassin océanique et une pente à la surface de l'eau.

Selon la loi de l'hydrostatique la pression en un point du fluide est simplement la pression due au poids de la colonne d'eau située au dessus de ce point, agissant par unité de surface :

$$P_1 = \rho_o g z \quad ; \quad P_2 = \rho_o g (z + \Delta z)$$



Le terme de gradient de pression suivant x s'écrit :

$$\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p}{\partial x} \simeq \frac{1}{\rho_o} \frac{P_2 - P_1}{\Delta x} = \frac{1}{\rho_o} \frac{\rho_o g (z + \Delta z) - \rho_o g z}{\Delta x} = g \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

En approximation hydrostatique et pour un fluide homogène le gradient de pression est créé par une différence de niveau de hauteur de la colonne d'eau. On peut ainsi calculer l'intensité du courant en approximation géostrophique

$$v \approx + \frac{g}{f} \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

$$u \approx - \frac{g}{f} \frac{\Delta z}{\Delta y}$$

En général, intégrant l'équation de l'équilibre hydrostatique entre un niveau de référence $-z_o$ et la surface de la mer η on obtient l'expression suivante pour la pression

$$\int_{-z_o}^{\eta} dp = -\rho_o g \int_{-z_o}^{\eta} dz$$

$$[p]_{-z_o}^{\eta} = -\rho_o g [z]_{-z_o}^{\eta}$$

$$p_{\eta} - p_{-z_o} = -\rho_o g [\eta + z_o]$$

$$p_{-z_o} = p_{\eta} + \rho_o g [\eta + z_o]$$

et, si on remplace dans les termes de gradient horizontal de pression, étant la pression atmosphérique p_{η} et le niveau de référence $-z_o$ des constantes, on obtient

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = g \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

avec η la hauteur de la surface de la mer (dans le jargon océanographique: surélévation ou *ssh* - *sea surface height*), calculée par rapport au niveau moyen de la mer (ou au géoïde).

Le gradient de pression est le même partout à l'intérieur du fluide. Donc si aucune autre force n'agit, le fluide entier doit être accéléré des hautes vers les basses pressions.

En incluant ces formules dans le système d'équations ci-dessus, on obtient un nouveau système de deux équations

$$fv = g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$fu = -g \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

D'autre part en multipliant la première équation par u et la seconde par v et en les retranchant, il vient :

$$u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \quad \text{i.e.} \quad \vec{v} \cdot \nabla \eta = 0$$

Il résulte de ceci, d'une part que le fluide ne dévale pas la pente des hautes vers les basses pressions, mais tourne autour du dôme de pression. L'écoulement est parallèle aux isobares (perpendiculaire au gradient de

pression), et d'autre part la vitesse du courant est proportionnelle à la pente des isobares .

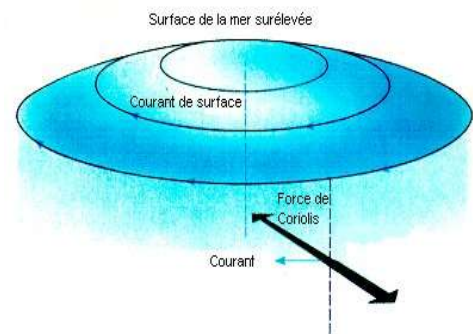
Dans l'hémisphère Nord une pente de la surface de l'eau orientée de l'Est vers l'Ouest crée une force de gradient de pression dirigée vers l'Ouest .

Cette pente crée à l'origine un mouvement des particules d'eau vers l'Ouest, mais dès que la particule entre en mouvement la force de Coriolis vient agir à droite (dans l'Hémisphère Nord) du mouvement.

L'équilibre est atteint lorsque l'écoulement devient perpendiculaire au gradient de pression, et donc parallèle aux isobares .

Dans l'hémisphère nord l'écoulement se fait dans le sens des aiguilles d'une montre autour des hautes pressions, dans le sens inverse autour des basses pressions . Quand on regarde dans la direction de l'écoulement, les hautes pressions sont à droite dans l'hémisphère Nord, à gauche dans l'Hémisphère Sud .

Ce mouvement peut durer indéfiniment (étant donné qu'on néglige les frottements) contrairement à ce qui se passerait en milieu non tournant où les hautes pressions auraient tendance à combler les basses pressions.



Un schéma très simplifié de la circulation de surface dans l'océan global est celui qui consiste à imaginer dans chaque bassin limité par des continents qu'il y a deux grandes recirculations ou gyres, un subtropical anticyclonique et un subpolaire cyclonique. Ce schéma fonctionne bien pour l'Atlantique Nord et le Pacifique Nord qui sont délimités par des côtes, mais pas au Sud où aucune côte n'arrête les courants qui sont circumpolaire. C'est-à-dire que l'on peut naviguer sans interruption et à la même latitude au sud des Océans Atlantique, Pacifique et Indien, autour du continent Antarctique.

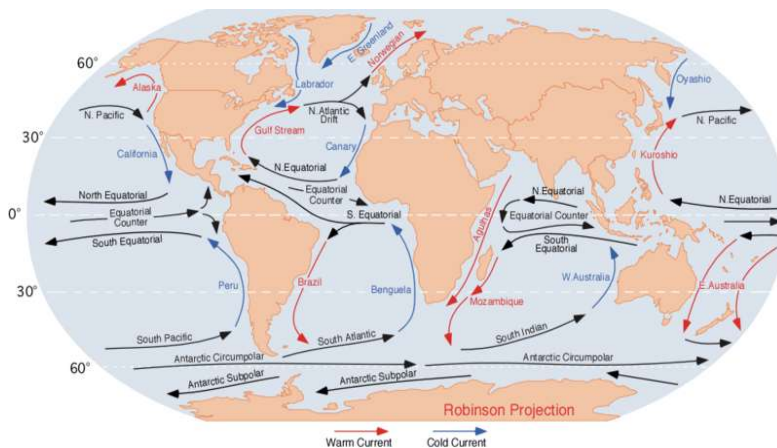


figure tirée de http://en.wikipedia.org/wiki/Ocean_current

figure tirée de <http://en.wikipedia.org/wiki/Gyre> et modifiée.

3.2 Le courant d'inertie

Si une particule n'est soumise à aucune force extérieure, son accélération dans un repère d'inertie obéit à la II^{ème} loi de Newton . Les équations du mouvement se simplifient de la façon suivante :

$$\frac{du}{dt} = fv$$
$$\frac{dv}{dt} = -fu$$

en résolvant pour u et en remplaçant dans la deuxième équation avec f constant,

$$v = \frac{1}{f} \frac{du}{dt}$$
$$\frac{1}{f} \frac{d^2u}{dt^2} = -fu \quad \text{i.e.} \quad \frac{d^2u}{dt^2} + f^2u = 0$$

La solution générale de cette dernière équation différentielle du deuxième degré est notamment :

$$u = +V_o \cos(ft + \psi) \quad \text{et si on remplace dans l'équation pour } v$$
$$v = -V_o \sin(ft + \psi)$$

où la vitesse V_o et le déphasage ψ dépendent des conditions initiales .

Ces équations représentent un courant dont la direction tourne en sens des aiguille d'une montre en faisant un tour complet dans une période dite période inertielle $T = \frac{1}{f}$.

4. Courants avec frottement

Introduction

Jusqu'à présent, les termes de friction entre les couches de fluides ou entre le fluide et le milieu extérieur au système considéré ont été négligés. Cette hypothèse de travail conduit à découpler le milieu marin du milieu extérieur: action directe du vent à l'interface air-mer, rôle du fond et des côtes sur l'écoulement fluide.

À l'échelle des courants océaniques, c'est-à-dire aux grandes échelles spatiales horizontales, les effets côtiers (latéraux) ne sont délibérément pas pris en compte.

L'action du vent à l'interface air-mer est responsable de nombreux phénomènes marins (mélange des couches superficielles, entraînement des masses d'eau, phénomènes d'upwelling et downwelling). Les interactions entre l'écoulement fluide et le fond jouent un rôle non moins important dans la dynamique des courants et le transport des sédiments.

On a vu que les termes de frottement étaient négligeables à l'intérieur de l'océan. Mais si on veut que l'océan « sente » l'effet de la tension du vent, il doit exister une couche de surface dans laquelle les termes de frottements doivent être pris en compte. Pour en estimer l'épaisseur, on écrit que dans la couche d'Ekman, la friction équilibre la force de Coriolis:

$$fU \simeq A_z \frac{U}{H_E^2}$$

avec $A_z \simeq 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $f \simeq 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, on a $H_E \simeq 10 \text{ m}$.

En effet, les couches d'Ekman de surface et de fond ont une épaisseur typique de quelque dizaines de mètres.

NB : Cette approche qui consiste dans la division de l'océan en différentes couches sur la base de la dynamique de chacune d'entre elles, est une extension aux écoulements géophysiques de la théorie de la couche limite de Prandtl (voir Anderson, 2005) .

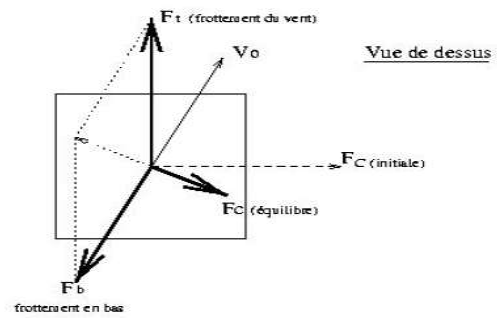
4.1 La spirale d'Ekman

En 1898 le biologiste Nansen observait que les icebergs dans l'océan Arctique dérivait dans une direction à droite de celle du vent.

Pour obtenir une explication qualitative du phénomène, il dessina le diagramme ci-dessous du bilan des forces agissant sur un iceberg en mouvement, traîné par le vent.

Le vent, quand commence à souffler, exerce sur le haut de cet élément une force de frottement F_t et initie un déplacement dans cette direction, qui initie à son tour une force de Coriolis F_{ci} qui va dévier le mouvement vers la droite. Une force de frottement à la base de l'élément fluide F_b s'oppose au déplacement.

Le vent étant supposé constant, un équilibre va être atteint (vitesse V_o) entre les forces F_b , F_c et F_b .



tirée de Danialt (2005), Oceanographie Physique

En 1902, Ekman formula la solution analytique du problème. Il écrivit les équations des composantes horizontale du mouvement linéarisées, en état stationnaire et avec frottement .

$$\begin{aligned} -fv &= -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\ +fu &= -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \end{aligned}$$

Solution intégrée

On considère la solution du problème comme la somme de deux solutions de deux problèmes séparés.

On prend $\vec{v} = \vec{v}_G + \vec{v}_E$, avec \vec{v}_G vitesse géostrophique et \vec{v}_E vitesse due au forçage du vent, respectivement solutions des deux systèmes suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Équations géostrophiques} \quad -fv_G &= -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p}{\partial x} & \text{Équations d'Ekman} \quad -fv_E &= -\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\ +fu_G &= -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p}{\partial y} & +fu_E &= -\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \end{aligned}$$

En intégrant les équations d'Ekman d'une profondeur $-z_E$ où l'effet du vent est négligeable, jusqu'à la surface on obtient

$$\begin{aligned} -f \int_{-z_E}^0 v_E dz &= - \int_{-z_E}^0 \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz = [-\tau_{xz}]_{-z_E}^0 = [-\tau_{x0} + \tau_{x-z_E}] = -\tau_{x0} \\ +f \int_{-z_E}^0 u_E dz &= - \int_{-z_E}^0 \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} dz = [-\tau_{yz}]_{-z_E}^0 = [-\tau_{y0} + \tau_{y-z_E}] = -\tau_{y0} \end{aligned}$$

avec (τ_{x0}, τ_{y0}) frottement du vent à la surface .

En multipliant par ρ_o on écrit le résultat sous la forme :

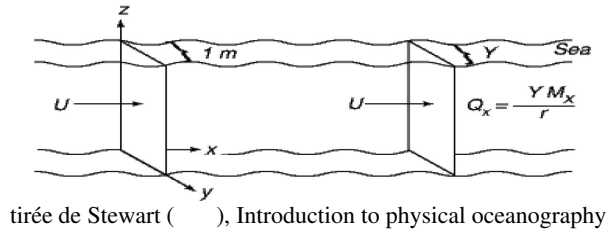
$$\begin{aligned} F_y &= +f M_x \quad \text{avec} \quad F_y = -\rho_o \tau_{y0} \quad \text{et} \quad M_x = \rho_o \int_{z_E}^0 u_E dz \\ F_x &= -f M_y \quad \text{avec} \quad F_x = -\rho_o \tau_{x0} \quad \text{et} \quad M_y = \rho_o \int_{z_E}^0 v_E dz \end{aligned}$$

$\vec{M} \equiv (M_x, M_y)$ s'appelle transport d'Ekman. L'équation aux dimensions de M_x et M_y donne $[ML^{-1}T^{-1}]$.

Il s'agit d'un transport de masse, soit la masse d'eau passant à travers un plan vertical large de 1 m et de hauteur z , par unité de temps.

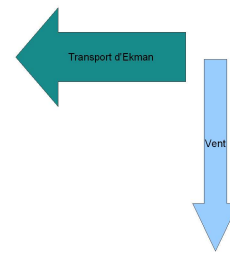
On obtient le transport de volume (débit) en divisant ces quantités par la densité et en multipliant par la largeur de la section choisie:

$$Q_x = \frac{\Delta Y M_x}{\rho_o} \quad Q_y = \frac{\Delta X M_y}{\rho_o}$$



Notons qu'un vent soufflant du Nord ($F_x=0, F_y < 0$), génère un transport de masse vers l'Ouest (dans l'hémisphère Nord où $f < 0$).

C'est toujours l'effet de la force de Coriolis: pour un observateur regardant dans le sens du vent, l'eau va être poussée vers la droite dans l'hémisphère Nord et vers la gauche dans l'hémisphère Sud.



Solution complète (voir détail dans TD8)

Afin d'obtenir les profils verticaux de u_E et v_E dans la couche d'Ekman., il faut utiliser la fermeture newtonienne de la turbulence pour remplacer le terme de tension du vent par le terme de viscosité turbulente :

$$\begin{aligned} -fv_E &= A_z \frac{\partial^2 u_E}{\partial z^2} \\ +fu_E &= A_z \frac{\partial^2 v_E}{\partial z^2} \end{aligned}$$

Ensuite, il est avantageux de passer en forme complexe :

$$if(u_E + iv_E) = A_z \frac{\partial^2}{\partial z^2} (u_E + iv_E)$$

ainsi on se retrouve avec une seule variable et une seule équation.

Les conditions aux limites, i.e. à la surface ($z=0$) et au fond ($z \rightarrow -\infty$), dans le cas d'un vent qui souffle parallèlement à y ($\tau_{x0}=0$), sont :

$$\begin{aligned} z = 0 & \quad \rho A_z \frac{\partial}{\partial z} (u_E + iv_E) = iF_y \\ z \rightarrow -\infty & \quad (u_E + iv_E) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

La solution d'Ekman, peut s'écrire sous forme complexe :

$$u_E + iv_E = U_o e^{\frac{\pi}{D_E} z} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{D_E} z\right)}$$

ce qui équivaut à l'écriture par composantes

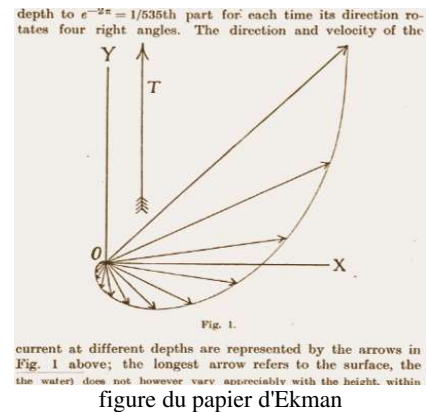
$$u = U_o e^{\frac{\pi}{D_E} z} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{D_E} z\right)$$

$$v = U_o e^{\frac{\pi}{D_E} z} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{D_E} z\right)$$

avec $D_E = \pi \sqrt{\frac{2 A_z}{f}}$ la « profondeur d'Ekman » .

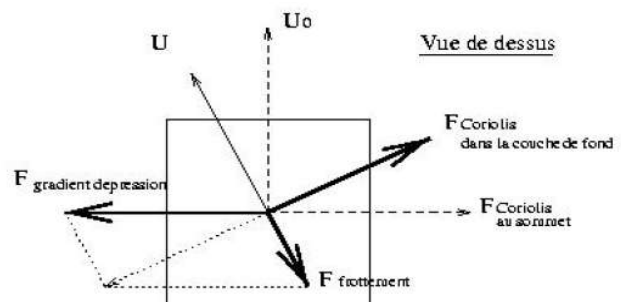
Ces équations indiquent que l'intensité du courant horizontal est maximale à la surface et vaut U_o , et diminue exponentiellement avec la profondeur . La direction du courant à la surface est à 45° de la direction du vent et, avec la profondeur, tourne sur la droite (dans l'hémisphère Nord) jusqu'à se retrouver opposée au courant de surface à la profondeur d'Ekman .

Cette solution a été représentée graphiquement par Ekman sur la figure ci-contre .



Spirale d'Ekman de fond

S'il existe un courant à l'intérieur de l'océan, il doit de même exister une "couche de frottement" permettant de ramener la vitesse à zéro au contact du fond. Un argument qualitatif identique à celui de Nansen permet de prédire que le courant est dévié vers la gauche dans la couche d'Ekman de fond . Tout d'abord, Au dessus de la couche d'Ekman de fond, le courant U_o est en équilibre géostrophique, avec la force de Coriolis agissant à droite (hémisphère nord) et la force du gradient de pression à gauche.



tirée de Daniault (2005), Oceanographie Physique

On suppose que l'écoulement est barotrope, donc le gradient de pression ne dépend pas de la profondeur. En s'approchant du fond, le frottement ralentit l'écoulement; la force de Coriolis, proportionnelle à la vitesse, diminue; la force du gradient de pression, agissant vers la gauche, n'est donc plus totalement équilibrée. L'écoulement est dévié vers la gauche, jusqu'à ce que les forces de Coriolis et de frottement puissent de nouveau équilibrer la force du gradient de pression. Contrairement à l'équilibre géostrophique, la vitesse a une composante dirigée vers les basses pressions. Cet écoulement à travers les isobares implique que les forces de pression produisent un travail qui compense la dissipation visqueuse et permet de maintenir l'écoulement.

Pour obtenir la solution complète représentée ci-contre, il suffit de poser correctement des nouvelles conditions aux limites : au fond la vitesse doit être nulle et à une certaine distance du fond, correspondante à l'épaisseur de la couche limite de fond, la vitesse doit être égale au courant de l'intérieur de l'océan, qui en première approximation peut être considéré géostrophique .

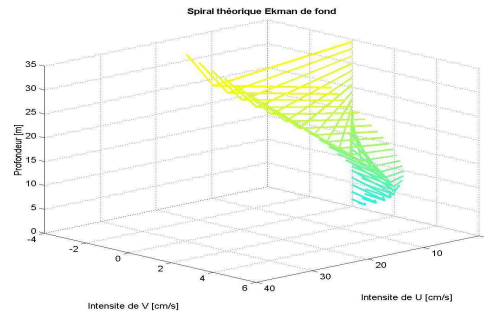
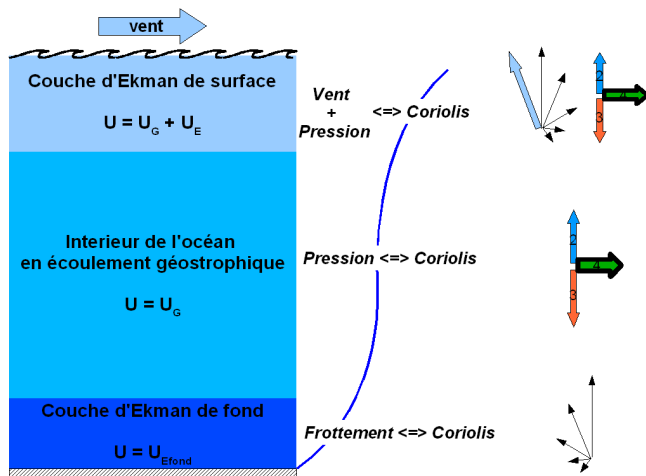


Figure tirée Bricout (2010), rapport de « Projet de Modélisation »

http://www.com.univ-mrs.fr/~doglioli/Rapport_projet_modelisation_RBricout.pdf

Résumé : le système général de courant



Ce système est la combinaison :

- d'une couche d'Ekman de surface
- d'une couche purement géostrophique
- d'une couche d'Ekman de fond

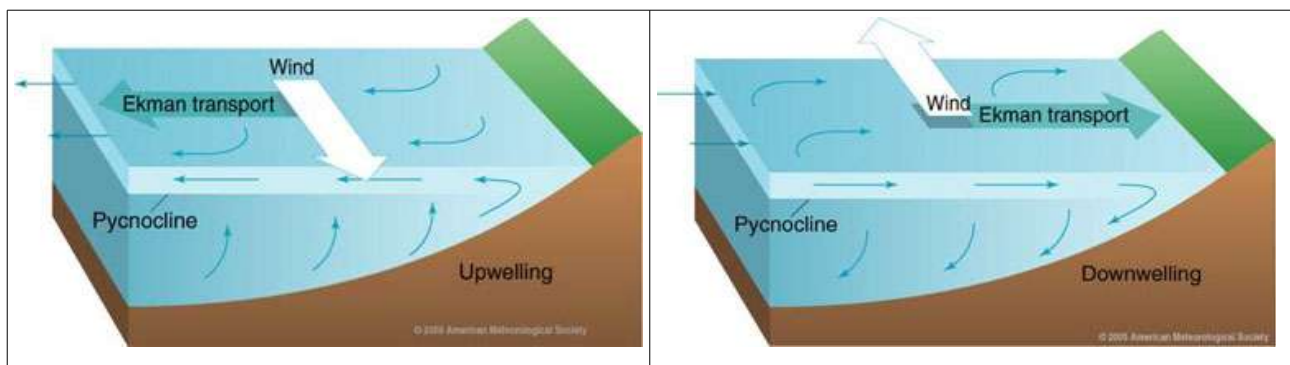
Ce système peut être représenté comme à gauche si la profondeur est largement supérieure à la somme des profondeurs d'influence d'Ekman.

4.2 Upwelling et downwelling

Upwelling est le terme utilisé en océanographie pour décrire le processus par lequel de l'eau de fond est ramenée en surface à cause du vent. Ce phénomène est important d'un point de vue biologique parce que les eaux de fond sont riches en matières nutritives, et deviennent donc très poissonneuses quand elles sont ramenées en surface.

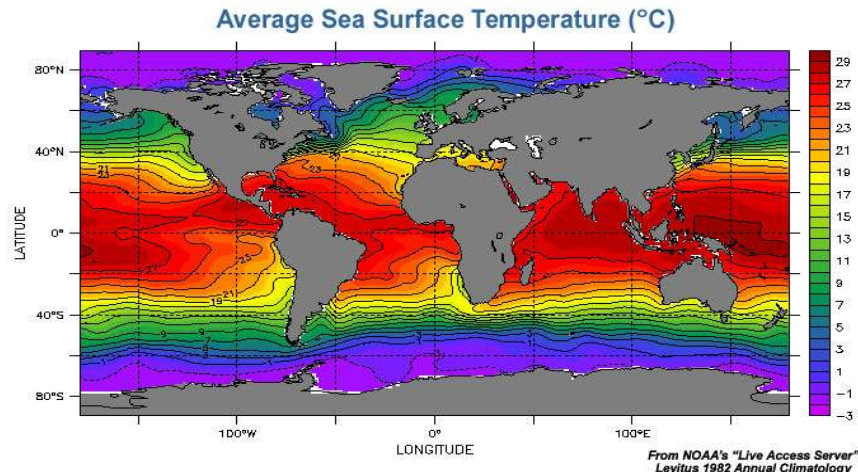
Les zones les plus connues d'upwelling, sont des zones côtières où le vent dominant souffle parallèlement à une côte qui se trouve sur sa gauche : Californie, Pérou, Benguela, Portugal, Maroc, Mauritanie et Sénégal. En effet, selon la théorie d'Ekman le vent a pour effet de pousser les eaux sur sa droite (hémisphère Nord). S'il y a présence de la côte à gauche du vent, elle empêche un transport latéral, une divergence se crée et l'eau de fond est "pompée" pour combler le déficit d'eau en surface.

Le phénomène opposé, le *downwelling*, se passe quand le vent souffle parallèlement à une côte qui se trouve sur sa droite. Alors le transport d'Ekman accumule l'eau à la côte et crée une descente d'eau vers le fond.



Figures tirée de <http://oceanmotion.org/html/background/upwelling-and-downwelling.htm>

Les zones d'upwelling peuvent être identifiées sur une carte de la température de surface (SST, *Sea Surface Temperature*), parce que caractérisées par des températures plus faibles que les eaux ambiantes.

Figure tirée de <http://oceanmotion.org>

On peut également observer des upwellings (appelées aussi "pompage d'Ekman") en plein milieu de l'océan . La tension du vent à la surface de l'océan peut être à l'origine d'une divergence et donc d'un upwelling, par variation du vent en force et direction.

Les vents cycloniques d'un ouragan par exemple vont être à l'origine d'un upwelling. La présence d'eaux de surface plus froides après le passage d'un tel phénomène peut être due au mélange important, mais la divergence induite par le transport d'Ekman entre pour une bonne part dans ce refroidissement .

On peut observer un autre type d'upwelling le long de l'équateur où les alizés de Nord-Est sont à l'origine d'une dérive d'Ekman vers le Nord dans l'hémisphère Nord, alors que les Alizés du Sud-Est poussent les eaux vers le Sud dans l'hémisphère Sud . Lorsque la composante d'Est des Alizés est bien établie, la température de surface le long de l'Equateur est souvent inférieure de 2°C par rapport aux eaux de surfaces à quelques dizaines de milles de l'équateur.

4.3 La circulation générale forcée par le vent

Essayons de voir plus dans le détail comment se répercute l'influence du vent à l'intérieur de l'océan.

Les effets du frottement au fond seront négligés et on distingue toujours vitesse d'Ekman et vitesse géostrophique.

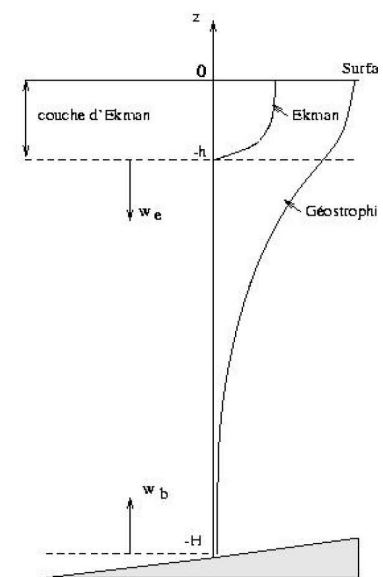
La vitesse verticale à la base de la couche d'Ekman w_E est proportionnelle à la divergence du transport total dans cette couche:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{-h}^0 \rho_o u dz \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_{-h}^0 \rho_o v dz \right] = \\ &= \rho_o \int_{-h}^0 \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] dz = \rho_o \int_{-h}^0 \left[-\frac{\partial w}{\partial z} \right] dz = \\ &= -\rho_o \int_{w_E}^0 dw = \rho_o w_E \end{aligned}$$

Sous une forme plus synthétique

$$\nabla_H \cdot [\vec{M}]_{-h}^0 = \rho_o w_E$$

avec $u = u_G + u_E$ et $v = v_G + v_E$



tirée de Daniault (2005), Océanographie Physique

A. Regardons maintenant les différentes composantes dans la couche de surface.

A.1. Composante géostrophique

Si l'on prend les équations de la géostrophie sous la forme:

$$\begin{aligned} -f \rho_o v_G &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\ +f \rho_o u_G &= -\frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned}$$

et que l'on dérive la première par rapport à y et la seconde par rapport à x , et qu'ensuite l'on soustrait la première de la seconde (i.e. $\partial_x(2) - \partial_y(1)$)

$$\begin{aligned} -\beta \rho_o v_G - f \rho_o \frac{\partial v_G}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} \\ +f \rho_o \frac{\partial u_G}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} \end{aligned} \Rightarrow \beta \rho_o v_G + f \rho_o \nabla_H \cdot \vec{u}_G = 0 \Rightarrow$$

$$\beta \int_{-h}^0 \rho_o v_G dz + f \nabla_H \cdot \int_{-h}^0 \rho_o \vec{u}_G dz = 0$$

on obtient

$$\beta [M_{yG}]_{-h}^0 + f \nabla_H \cdot [\vec{M}_G]_{-h}^0 = 0$$

A.2. Composante d'Ekman

$$\begin{aligned} -f v_E &= A_z \frac{\partial^2 u_E}{\partial z^2} \\ +f u_E &= A_z \frac{\partial^2 v_E}{\partial z^2} \end{aligned}$$

Prenons les équations d'Ekman

que l'on intègre entre $-h$ et 0 et que l'on multiplie par ρ_o . On obtient

$$\begin{aligned} -f M_{yE} &= F_x \\ +f M_{xE} &= F_y \end{aligned}$$

et l'on dérive la première par rapport à y et la deuxième par rapport à x , et qu'ensuite l'on soustrait la première de la deuxième (i.e. $\partial_x(2) - \partial_y(1)$)

$$\begin{aligned} -\beta M_{yE} - f \frac{\partial M_{yE}}{\partial y} &= \frac{\partial F_x}{\partial y} \\ +f \frac{\partial M_{xE}}{\partial x} &= \frac{\partial F_y}{\partial x} \end{aligned}$$

on obtient

$$\beta [M_{yE}]_{-h}^0 + f \nabla_H \cdot [\vec{M}_E]_{-h}^0 = \vec{k} \cdot (\nabla \times \vec{F})$$

A.3. totale

La somme des deux donne

$$\beta [M_y]_{-h}^0 + f \nabla_H \cdot [\vec{M}]_{-h}^0 = \vec{k} \cdot (\nabla \times \vec{F})$$

En utilisant la formule pour w_E

$$\beta [M_y]_{-h}^0 + f \rho_o w_E = \vec{k} \cdot (\nabla \times \vec{F})$$

on obtient

$$w_E = \frac{\vec{k} \cdot (\nabla \times \vec{F}) - \beta [M_y]_{-h}^0}{\rho_o f}$$

On obtient ainsi le « **pompage d'Ekman** », vitesse verticale à la base de la couche d'Ekman, qui est le paramètre par lequel le forçage par le vent se répercute à l'intérieur de l'océan .

Cette équation est un cas plus général de la formule utilisée dans le TD9. Cette fois-ci on tient compte de la variation du paramètre de Coriolis avec la latitude.

B. Sous la couche d'Ekman

On a seulement la géostrophie

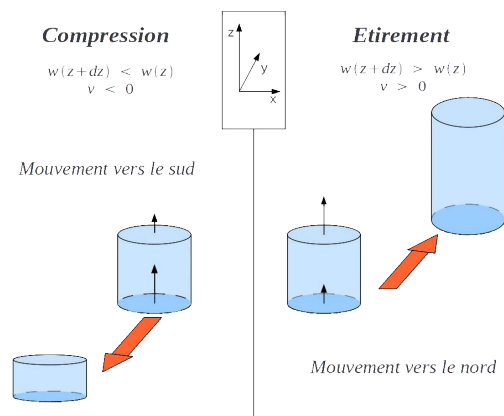
$$\begin{aligned} -f \rho_o v &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\ +f \rho_o u &= -\frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned}$$

comme auparavant on dérive la première par rapport à y , et la deuxième par rapport à x , et après on soustrait la première de la deuxième (i.e. $\partial_x(2) - \partial_y(1)$)

$$\begin{aligned} -\beta \rho_o v - f \rho_o \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} \\ +f \rho_o \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} \end{aligned} \Rightarrow \beta v + f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

$$\beta v = f \frac{\partial w}{\partial z}$$

Cette équation indique que l'étirement ou la compression des colonnes d'eau doit être compensé par des vitesses méridiennes. Un étirement provoque une migration de la colonne d'eau vers le nord, à l'inverse une compression provoque une migration vers le sud.



C. Sur toute la profondeur

Multiplions par ρ_o et intégrons de $-h$ à $-H$ la dernière équation.

$$\begin{aligned} \beta \int_{-H}^{-h} \rho_o v dz &= \rho_o f w_E - \rho_o f w_b = \beta [M_y]_{-H}^{-h} \\ [M_y]_{-H}^{-h} &= \frac{\rho_o f}{\beta} (w_E - w_b) = \frac{\rho_o f}{\beta} \left(\frac{\vec{k}(\nabla \times \vec{F})}{\rho_o f} - \beta [M_y]_{-H}^0 - w_b \right) = \frac{\vec{k}(\nabla \times \vec{F})}{\beta} - [M_y]_{-H}^0 - \frac{\rho_o f}{\beta} w_b \end{aligned}$$

en regroupant les transports

$$[M_y]_{-H}^0 = \frac{\vec{k}(\nabla \times \vec{F})}{\beta} - \frac{\rho_o f}{\beta} w_b$$

Cette équation est connue comme « relation de Stommel » et relie le transport méridien sur toute la colonne d'eau au rotationnel du vent en surface et au frottement au fond.

4.4 La circulation de Sverdrup

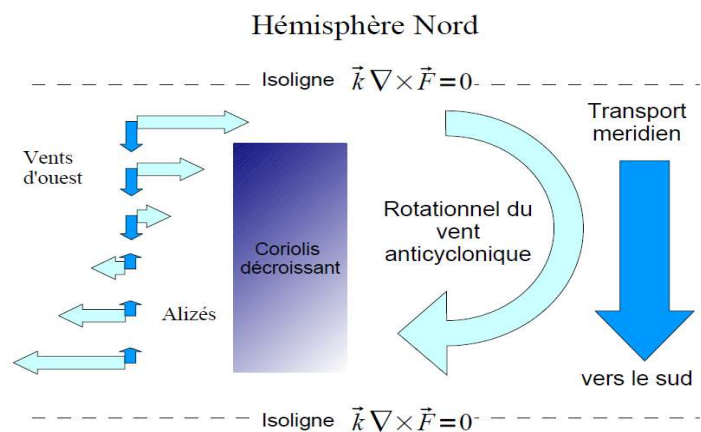
Dans la relation initialement démontrée par Sverdrup, le terme de fond n'existait pas. Le transport méridien total, intégré sur la couche d'eau de la surface jusqu'au fond, dû au forçage du vent s'écrivait

$$[M_y]_{-H}^0 = \frac{\vec{k}(\nabla \times \vec{F})}{\beta}$$

La relation de Sverdrup indique donc que le transport méridien, intégré sur toute la colonne d'eau, dépend du rotationnel de la tension du vent en surface.

Ci contre, une représentation schématique de l'Atlantique Nord, dans laquelle les frontières Est et Ouest sont méridiennes, le fond est plat, et la distribution du vent parfaitement zonale (i.e. de x) .

La région limitée au nord et au sud par les isolignes $\vec{k} \nabla \times \vec{F} = 0$, schématise la région subtropicale .



RAPPEL : La fonction de courant

Si le champ de vitesse est irrotationnel et incompressible, il satisfait les relations

$$\nabla \times \vec{v} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Si le champs de vitesse est **irrotationnel** (ou **conservatif**), étant donné que $\nabla \times (\nabla \Phi) = 0$, il doit exister un champ scalaire

Φ dit potentiel des vitesses tel que

$$\vec{v} = \nabla \Phi \quad (5.1)$$

Si le champs de vitesse est **solénoïdale** (ou **incompressible**), étant donné que $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{\Psi}) = 0$, il doit exister un champ

vectorel $\vec{\Psi}$ dit potentiel vecteur des vitesses tel que

$$\vec{v} = \nabla \times \vec{\Psi} \quad (5.2)$$

Si l'écoulement est plan (bidimensionnel horizontal), $\vec{\Psi} \equiv (0, 0, \psi)$ et le champ scalaire $\psi \equiv \psi(x, y)$ est dit **fonction de courant**.

Dans notre cas, le transport de Sverdrup \mathbf{M} est bidimensionnel non divergent, donc on peut écrire

$$M \equiv \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & 0 & \psi \end{vmatrix} = \vec{i} \partial_y \psi - \vec{j} \partial_x \psi + \vec{k} 0 \quad \text{et} \quad M_x = +\partial_y \psi \quad , \quad M_y = -\partial_x \psi$$

Sverdrup a trouvé une solution analytique pour la fonction de courant dans le cas d'un bassin rectangulaire de largeur a et hauteur b et un vent zonal, dont la tension est schématisée avec la formule sinusoïdale

$$F_x = -F_o \cos(\pi y/b), \quad F_y = 0$$

$$\begin{aligned} \beta M_y &= \vec{k} \nabla \times \vec{F} = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = -F_o \frac{\pi}{b} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \\ M_y &= -\frac{F_o \pi}{\beta b} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \psi(x, y) &= \int \left[\frac{F_o \pi}{\beta b} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \right] dx = \frac{F_o \pi}{\beta b} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) x + K(y) \end{aligned}$$

On veut que ψ s'annule sur les frontières. Il est impossible de satisfaire les conditions à la fois pour $x = 0$ et $x = a$, puisque cette équation nécessite d'une seule condition aux limites. Sverdrup choisit de satisfaire la condition $M_y = 0$ sur le bord Est sur la base du raisonnement suivant:

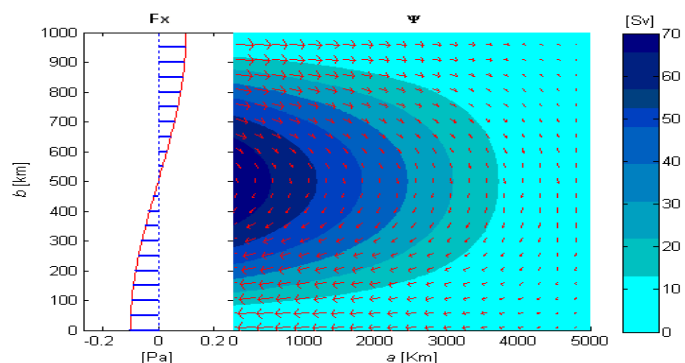
- à partir des mesures, on sait que les vents ont une circulation anticyclonique ;
- ce type de circulation des vents ne peut que générer une circulation du courant du même signe ;
- la relation de Sverdrup dit qu'une vorticité négative du vent correspond à un transport méridien négatif, donc vers le Sud ;
- une circulation du courant anticyclonique donne un transport méridien vers le sud seulement sur la partie orientale du bassin ;
- donc l'équation de Sverdrup est valable seulement sur la partie orientale du bassin et sa solution est obtenue en mettant la condition sur le bord oriental.

Si $\psi(x=a, y)=0$ alors

$$K_{x=a} = -\frac{F_o \pi}{\beta b} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) a$$

et finalement

$$\psi(x, y) = \frac{F_o \pi}{\beta b} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) (x-a)$$



Les dimensions de ψ sont $[M T^{-1}]$, elle est donc mesurée en $kg s^{-1}$.

Frottement du vent (à gauche) et fonction de courant (à droite en couleur) avec superposition des vecteurs de la vitesse du courant (en rouge).

Figure obtenue avec le script en annexe

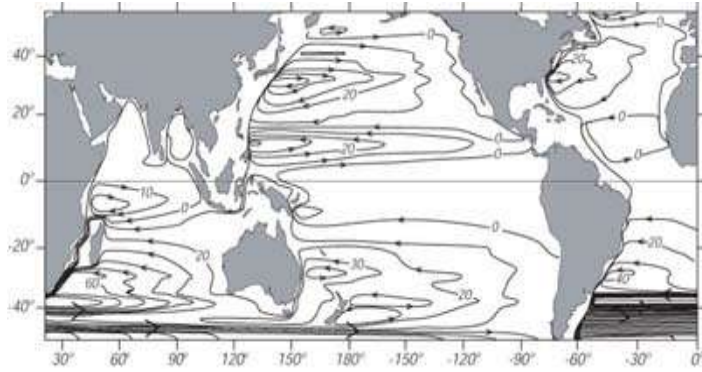
La solution de Sverdrup ne peut pas être appliquée à tout le bassin parce que la conservation de la masse ne serait plus satisfaite: si la relation s'appliquait de l'ouest à l'est de l'atlantique nord, cet océan se viderait au fil du temps! Pour compléter la solution, on est amené à admettre qu'il existe une région de l'océan dans laquelle l'équilibre dynamique n'est pas rempli par la relation de Sverdrup. Cette dynamique différente ne peut exister que dans une couche limite de bord Ouest, ce qui justifie à posteriori le fait d'avoir satisfait la condition de bord Est.

Plus généralement, si l'on multiplie par ρ_o l'équation de continuité et que l'on intègre de la surface au fond (en se rappelant que Sverdrup y néglige le frottement, i.e. $w_o = w_{-H} = 0$) on obtient

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} = -\frac{\partial M_y}{\partial y} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial (\vec{k} \nabla \times \vec{F})}{\partial y}$$

À partir de ces équations, de la définition de fonction de courant et des données de vent, on peut obtenir une figure comme celle ci-contre.

La fonction de courant du transport de Sverdrup (ψ telle que $M_x = \partial_y \psi, M_y = -\partial_x \psi$) calculée pour l'océan global avec des vent réels (moyennes annuelles). Cette figure met en évidence l'existence de cellules de circulation de grande échelle, les gyres subtropicaux, dans les divers océans, séparés par les lignes $\vec{k} \nabla \times \vec{F} = 0$



Depth-integrated Sverdrup transport applied globally using the wind stress from Hellerman and Rosenstein (1983). Contour interval is 10 [Sv]. From Tomczak and Godfrey (1994).

http://oceanworld.tamu.edu/resources/ocng_textbook/chapter11/chapter11_01.htm

4.4 La circulation de Stommel et l'intensification des courants de bord Ouest

Sverdrup dans son modèle avait négligé le frottement sur le fond. Cette hypothèse est acceptable si les courants sont peu importants à l'intérieur de l'océan. Par contre, si la circulation s'intensifie, comme on peut imaginer dans les régions de bord ouest de l'océan, l'hypothèse n'est plus valable. C'est Stommel qui, en tenant compte du forçage au fond, a présenté un nouveau modèle plus détaillé.

En reprenant l'expression du transport méridien complète

$$[M_y]_{-H}^0 = \frac{\vec{k}(\nabla \times \vec{F})}{\beta} - \frac{\rho_o f}{\beta} w_b$$

on peut exprimer la vitesse verticale au fond en terme de rotationnel de la vitesse géostrophique et aussi la fonction de courant

$$w_b = \frac{d}{2} \vec{k} \nabla_H \times \vec{v}_G = -\frac{d}{2\rho_o H} \nabla^2 \psi$$

où $d = \sqrt{\frac{2A_z}{f}}$ est l'épaisseur de la couche d'Ekman de fond, au facteur π près, et H la profondeur de l'océan (pour une démonstration détaillée voir Danialt, 2005, sections 6.5 et 7.7).

Ainsi on obtient une équation de la fonction de courant

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{f d}{2\beta H} \nabla^2 \psi = -\frac{\vec{k}(\nabla \times \vec{F})}{\beta}$$

On peut voir que le fait d'ajouter du frottement au fond, permet de fermer les contours sur le bord Ouest, où apparaît une couche limite très étroite. L'intégration en x nécessite ici deux conditions aux limites, qui permettent d'annuler le transport zonal à la fois à l'est et à l'ouest du bassin.

Si on prend la même tension du vent choisie par Sverdrup, $F_x = -F_o \cos(\pi y/b)$, $F_y = 0$, on obtient

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{f d}{2\beta H} \nabla^2 \psi = -\frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) = \frac{F_o \pi}{\beta b} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

Une solution de cette équation peut être construite en faisant la somme d'une solution sur le bord est ψ_E et une solution dans la couche limite près du bord ouest ψ_W .

Pour la première on prend la solution de Sverdrup

$$\psi_E = \phi(x-a) \quad \text{avec} \quad \phi = \frac{F_o \pi}{\beta b} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

Dans la couche limite, le frottement du vent est négligeable, seule le frottement au fond est important. On cherche donc pour la deuxième une solution de l'équation différentielle

$$\mu \nabla^2 \psi_W + \frac{\partial \psi_W}{\partial x} = 0 \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{f d}{2\beta H}$$

Les solutions générales pour ψ_W s'écrivent $\psi_W = A + B e^{-\frac{x}{\mu}}$.

On peut maintenant écrire les solutions générales pour la fonction de courant

$$\psi = \psi_E + \psi_W = \phi(x-a) + A + B e^{-\frac{x}{\mu}}$$

On a donc deux paramètres à fixer et pour cela on peut poser deux conditions aux frontières, le transport doit être nul sur les bords ouest ($x=0$) et est ($x=a$) du bassin:

$$\psi(x=0) = 0, \quad \text{soit} \quad -\phi a + A + B = 0, \quad \text{i.e.} \quad A = \phi a - B$$

$$\psi(x=a) = 0, \quad \text{soit} \quad 0 + A + B e^{-\frac{a}{\mu}} = 0, \quad \text{i.e.} \quad \phi a - B + B e^{-\frac{a}{\mu}} = 0, \quad B = -\frac{\phi a}{e^{-\frac{a}{\mu}} - 1}$$

En remplaçant dans l'équation générale

$$\begin{aligned} \psi &= \phi(x-a) + \phi a + \frac{\phi a}{e^{-\frac{a}{\mu}} - 1} - \frac{\phi a}{e^{-\frac{a}{\mu}} - 1} e^{-\frac{x}{\mu}} \\ \psi &= \phi a \left[\frac{a}{x} - \frac{1}{e^{-\frac{a}{\mu}} - 1} \left(e^{-\frac{x}{\mu}} - 1 \right) \right] \end{aligned}$$

En fin en remplaçant pour ϕ on obtient la solution de Stommel pour un bassin de dimension a et b :

$$\psi = \phi = \frac{F_o \pi}{\beta b} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) a \left[\frac{a}{x} - \frac{1}{e^{-\frac{a}{\mu}} - 1} \left(e^{-\frac{x}{\mu}} - 1 \right) \right]$$

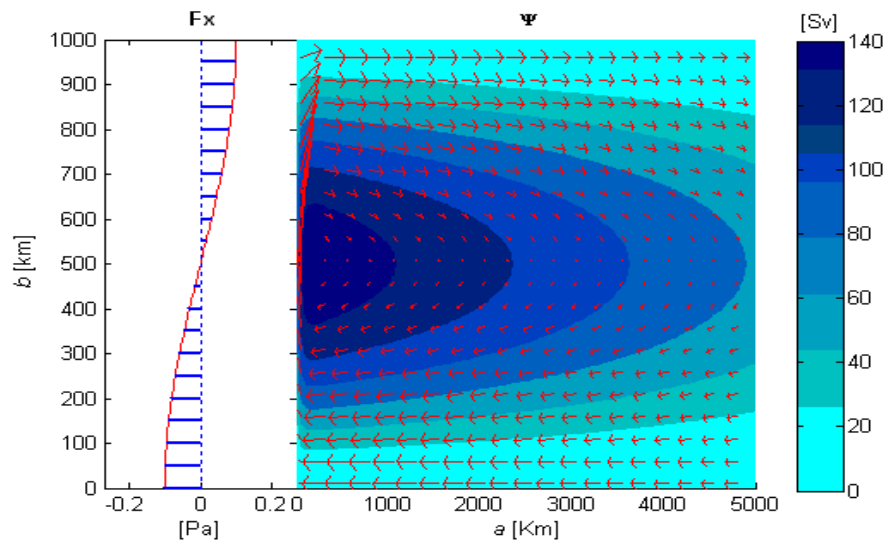


figure Matlab obtenue avec le script en annexe

%Script Matlab pour dessiner les solutions de Sverdup et de Stommel

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear;close all;

%type='Sverdrup'
type='Stommel'

beta=2*10^-11 %coeff beta [m^-1 s^-1]
a=5*10^6 %extention zonale de l'ocian [m]
b=1*10^6 %extention meridionale de l'ocian [m]
F0=0.1 %frottement du vent [Pa]
rho0=1000 %densite [kg m^-3]
H=1000 %profondeur[m]
f=10^-4 %parametre Coriolis [s^-1]
beta=2*10^-11 %m^-1 s^-1
Az=10^-2 %viscoite turbulente verticale [m^2s^-1]

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

[x,y]=meshgrid(0:a/100:a,0:b/100:b);

%Frottement du vent
Fx=-F0*cos(pi*y/b);

%Calcul de psi
if type=='Sverdrup'
    psi=(F0*pi/beta/b)*sin(pi*y/b).*(x-a);
    psi=psi/rho0/10^6; %transport [Sv]
elseif type=='Stommel'
    d=sqrt(2*Az/f);
    mu=f*d/2/beta/H;
    psi=(F0*pi/beta/b).*sin(pi*y/b).*a.*(x/a - (1/(exp(-a/mu)-1))*(exp(-x/mu)-1));
    psi=psi/rho0/10^6; %transport [Sv]
else
    dispo('Error')
end

%Calcul du transport barotrope
u=zeros(101);
v=zeros(101);
for i=1:100
    for j=1:100
        u(i,j)=+(psi(i,j)-psi(i+1,j))/(y(i,j)-y(i+1,j));%[m^2s^-1]
        v(i,j)=-(psi(i,j)-psi(i,j+1))/(x(i,j)-x(i,j+1));
    end
end

%Dessin
figure(1);hold on
%
subplot('Position',[0.15 0.1 0.2 0.75]);hold on;
plot(Fx,y/1000)
line(Fx*0,y/1000,'color','b','linestyle',':')
for j=1:5:100
    quiver(0,y(j)/1000,Fx(j),0,1,'color','b','MaxHeadSize',0.1,'linewidth',2)
end
axis([-0.27 0.27 0 1000])
title('\bf Fx')
xlabel('[Pa]')
ylabel('{\it b} [km]')
box on
%
subplot('Position',[0.35 0.1 0.6 0.75]);hold on
contourf(x/1000,y/1000,psi);shading flat
mymap=colormap(winter);mymap(:,2)=1-mymap(:,2);colormap(mymap)
skip=5;
axis([0 5000 0 1000])
title('\bf \Psi')
xlabel('{\it a} [Km]')
set(gca,'yTickLabel','')
colorbar
quiver(x(2:skip:end,2:skip:end)/1000,y(2:skip:end,2:skip:end)/1000,u(2:skip:end,2:skip:end),v(2:skip:end,2:skip:end),1,'r')
text(5500,1040,['Sv'])
box off
%
saveas(1,['psi',type,'.bmp'])
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

5. Les équations e.p.p. et la vorticité

5.1 Équations en eaux peu profondes

Auparavant on a vu que l'évolution de la vitesse horizontale moyenne (au sens de la turbulence) des particules du fluide géophysique est décrite par les équations de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P}{\partial x} + f v - \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P}{\partial y} - f u - \frac{\partial \overline{v'u'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \end{aligned}$$

u , v et w sont les composantes horizontales et verticale non turbulentes ou « moyennes » de la vitesse du mouvement ;

u' , v' et w' sont les composantes turbulentes de la vitesse du mouvement ;

f est le paramètre de Coriolis ;

P est la pression ;

ρ_o est la densité de référence de l'eau de mer au sens de l'hypothèse de Boussinesq .

Le premier terme correspond à la variation locale de la vitesse en fonction du temps . Dans le deuxième, troisième et quatrième terme sont représentées les advections horizontales . Le cinquième terme est le gradient de pression.

Le sixième terme est le terme de Coriolis, qui rend compte de l'influence de la rotation de la Terre ; si les écoulements sont à une échelle suffisamment réduite, on peut approcher la surface terrestre par son plan tangent et considérer la force de Coriolis i) constante : approximation de plan- f , $f = f_o$, dynamique côtière ; ii) variable linéairement avec la coordonnée méridienne : approximation de plan- β , $f = f_o + \beta y$, dynamique régionale, mais aussi grande échelle .

Les trois derniers termes sont les termes turbulentes . La théorie dite de la « fermeture Newtonienne » dit que comme pour la viscosité moléculaire, on peut introduire des coefficients de viscosité turbulente et re-écrire les moyennes des produits des composantes turbulentes de la vitesse en terme de vitesse moyennes :

$$\begin{aligned} \overline{u'u'} &= -A_x \frac{\partial u}{\partial x} ; & \overline{u'v'} &= -A_y \frac{\partial u}{\partial y} ; & \overline{u'w'} &= -A_z \frac{\partial u}{\partial z} ; \\ \overline{v'u'} &= -A_x \frac{\partial v}{\partial x} ; & \overline{v'v'} &= -A_y \frac{\partial v}{\partial y} ; & \overline{v'w'} &= -A_z \frac{\partial v}{\partial z} . \end{aligned}$$

Pour les échelles typiques de la plus part des mouvements océaniques, l'équation pour la composante

verticale de la vitesse est réduite à l'équation de l'hydrostatique, qui traduit l'équilibre entre la force de pression et la force de pesanteur. Elle fournit la pression:

$$P(z) = P_a + g \int_z^\eta \rho \cdot dz$$

où P_a est la pression atmosphérique, g est l'accélération de la gravité et η l'élévation de la surface par rapport au zéro de l'axe Oz. $z = \eta(x, y, t)$ constitue ainsi la surface libre de l'océan tandis que $z = -h(x, y)$ repère le fond. ρ est la masse volumique. En utilisant l'approximation de Boussinesq $\rho \equiv \rho_0 + \rho'(x, y, z, t)$ avec $\rho' \ll \rho_0$, les dérivées horizontales deviennent

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_a}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{g}{\rho_0} \int_z^\eta \frac{\partial \rho'}{\partial x} dz$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_a}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{g}{\rho_0} \int_z^\eta \frac{\partial \rho'}{\partial y} dz$$

Le deuxième et le troisième terme de droite des équations ci-dessus sont respectivement les contributions barotrope et barocline au gradient de pression.

Si on néglige la contribution barocline et celle de la pression atmosphérique, le gradient horizontal de pression pourra alors s'exprimer :

$$\nabla_H P = \rho_0 g \nabla_H \eta$$

Cette équation dit que les forces qui agissent dans le fluide sont purement horizontales, donc on peut supposer que les composantes horizontales de la vitesse seront indépendantes de z. Ainsi les quatrièmes termes dans les équations de Navier-Stokes sont nuls et le terme de viscosité turbulente verticale est remplacé par les conditions aux bords qui représentent les forçage du vent $\vec{F} \equiv (F_x, F_y)$ et au fond $\vec{B} \equiv (B_x, B_y)$.

Les équations du mouvement deviennent

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + f v + A_h \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + F_x + B_x \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - f u + A_h \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + F_y + B_y \quad (2)$$

Il y a donc deux équations pour trois inconnues (les deux composantes de la vitesse et la surélévation). Pour fermer le système, il faut ajouter l'équation de continuité écrite en fonction de ces trois variables.

On prend alors l'équation de continuité pour un fluide incompressible :

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial w}{\partial z} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

en intégrant du fond à la surface libre, vu que les vitesses et leurs dérivées sont indépendantes de z on obtient:

$$w_{z=\eta} - w_{z=-h} + (h+\eta) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 .$$

À la surface

$$w_{z=\eta} = \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + u \frac{\partial\eta}{\partial x} + v \frac{\partial\eta}{\partial y} .$$

Au fond, en considérant que la bathymétrie ne varie pas dans le temps

$$w_{z=-h} = -\frac{dh}{dt} = -u \frac{\partial h}{\partial x} - v \frac{\partial h}{\partial y} .$$

En substituant, on obtient :

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial(Hu)}{\partial x} + \frac{\partial(Hv)}{\partial y} = 0 \quad \text{avec } H=h+\eta \quad (3)$$

L'ensemble des trois équations (1-3) constitue les équations en eaux peu profondes (e. p. p. ou *shallow water equations*). Elles sont valables, comme pour l'approximation hydrostatique, quand l'eau est très basse par rapport aux échelles horizontales que l'on veut étudier.

Les équations e. p. p. sont utilisées pour étudier, entre autre, les ondes longues de gravité ou gyroscopiques. Pour cela il faut considérer les équation linéarisées, sans viscosité turbulente et faire l'hypothèse $\eta \ll h$. Par ailleurs, si $h = const, f = 0$ et le mouvement ne dépend que de x (1D) , les équations deviennent:

$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}$	si on dérive par	$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$	On obtient $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gh \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0$
$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial}{\partial t}$	$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + h \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} = 0$	

Cette dernière est un équation d'onde qui a pour solution $\eta = F(x - ct)$ avec $c = \sqrt{gh}$.
 (Voir Cours « Ondes dans l'océan » en L3 ou « Circulation et dispersion en Eaux Côtières » en M2)

5.2 La vorticité

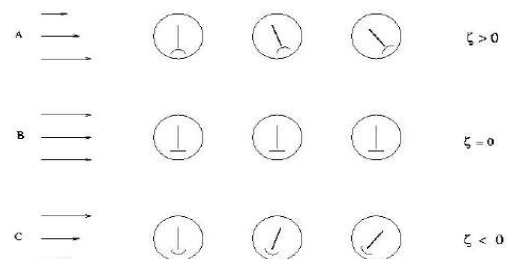
Il existe différents types de vorticité : relative, planétaire, absolue et potentielle .

La vorticité relative

Elle est définie comme la composante verticale du rotationnel de la vitesse

$$\zeta = \vec{k}(\nabla \times \vec{V}) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

La vorticité relative exprime la tendance d'un fluide à tourner. Le signe de ζ peut être illustré avec le schéma ci-contre .



Elle est appelée vorticité relative, car elle est mesurée par rapport à la terre.

La vorticité planétaire

Pour un solide en rotation la vorticité est égale à deux fois sa vitesse angulaire. A la latitude Φ la vitesse angulaire par rapport à l'axe verticale en ce point est $\Omega \sin \Phi$, la vorticité est donc

$$2 \Omega \sin \Phi = f$$

Une colonne d'eau au repos sur la terre en rotation possédera donc une vorticité dite « planétaire » f . La vorticité planétaire correspond au paramètre de Coriolis en approximation dite de « mouvements quasi-horizontaux » (voir TD4).

La vorticité absolue

On prend les équations de la quantité de mouvement pour les composantes horizontales, en considérant qu'elles ne varient pas sur la verticale. On néglige aussi la viscosité et le frottement (on se positionne donc hors des couches d'Ekman et des couches limites de bords Ouest) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv &= -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu &= -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned}$$

Différence croisée et soustraction $\partial_x(2) - \partial_y(1)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial f}{\partial y} v - f \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} u + f \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

conduisent à une seule équation (en se rappelant que $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y}$)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{df}{dt} + f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

qui peut être re-écrite

$$\frac{\partial}{\partial t} \zeta + \frac{\partial u}{\partial x} \zeta + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \zeta + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{df}{dt} + f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

en regroupant les termes 1, 3 et 5, qui représentent la dérivée totale de la vorticité relative et aussi les termes 2 et 4

$$\frac{d\zeta}{dt} + \zeta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{df}{dt} + f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

et finalement

$$\frac{d(\zeta + f)}{dt} + (\zeta + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

Cette équation exprime le principe de la conservation de la vorticité absolue $\zeta_{abs} = (\zeta + f)$ pour les écoulements sur terre lorsque le frottement est négligé : le module de la vorticité absolue s'accroît dans un écoulement convergent ($\nabla_H \vec{u} < 0$) et décroît dans un écoulement divergent ($\nabla_H \vec{u} > 0$) .

La vorticité potentielle

Soit une couche d'épaisseur D dans laquelle la densité est supposée homogène.

L'équation de continuité s'écrit :

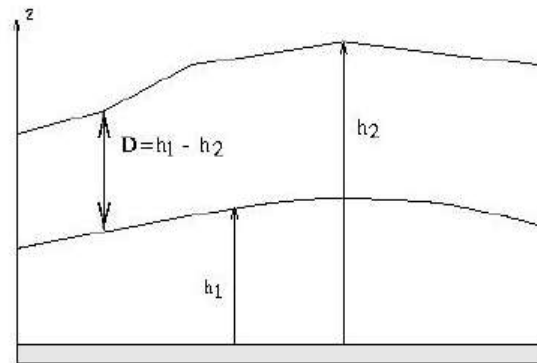
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

on peut écrire que :

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\left(\frac{dh_1}{dt} - \frac{dh_2}{dt} \right)}{(h_1 - h_2)} = \frac{1}{D} \frac{dD}{dt}$$

en remplaçant dans l'équation de continuité

$$\frac{1}{D} \frac{dD}{dt} = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$



tirée de Danialt (2005), Océanographie Physique

On peut alors remplacer la divergence horizontale dans l'équation de conservation de la vorticité absolue et obtenir

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\zeta + f}{D} \right) = 0$$

NB : On a utilisé la règle de la dérivé de la division:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\zeta_a}{D} \right) = 0 \rightarrow \left(\frac{d\zeta_a}{dt} D - \zeta_a \frac{dD}{dt} \right) \frac{1}{D^2} = 0 \rightarrow \frac{d\zeta_a}{dt} \frac{1}{D} - \zeta_a \frac{dD}{dt} \frac{1}{D^2} = 0 \rightarrow \frac{d\zeta_a}{dt} - \zeta_a \frac{dD}{dt} \frac{1}{D} = 0$$

Si on compare les dimensions de quatre vorticité: relative, planétaire, absolue et potentielle

$$\zeta_{rel} : \left[\frac{LT^{-1}}{L} \right] = [T^{-1}] \quad \zeta_{pla} : [T^{-1}] \quad \zeta_{abs} : [T^{-1}] \quad \zeta_{pot} : \left[\frac{T^{-1}}{L} \right] = [T^{-1}L^{-1}]$$

on voit que la vorticité potentielle n'a pas les mêmes dimensions que les autres!

NB: Une formulation plus générale de la vorticité potentielle tient compte aussi des effets de la densité, de la température, de la salinité ou autre, et les dimensions dépendent de la grandeur prise en considération

$$\frac{d}{dt} \left(\zeta_{abs} \cdot \frac{\nabla \lambda}{\rho} \right) = 0$$

5.3 La conservation de la vorticité

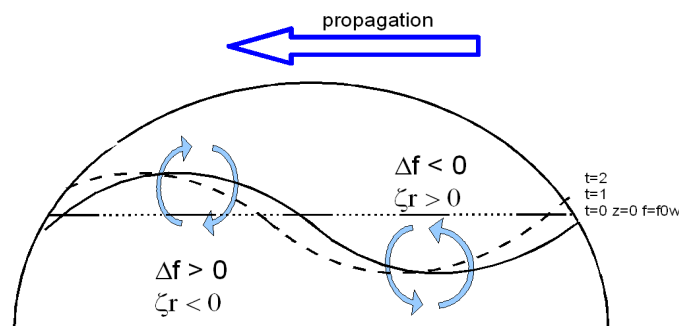
Ci-dessous on explique en terme de conservation de la vorticité absolue et potentielle des phénomènes importants de la circulation océanique et atmosphérique.

Vorticité absolue et Ondes de Rossby

Une série de particules est disposée sur un parallèle (ligne pointillée et continue), et est ensuite déformée par une sinusoïde (ligne continue).

Les particules qui se retrouvent plus au Nord augmentent leur vorticité planétaire et, par conservation de la vorticité absolue, auront une vorticité relative négative (anticyclonique, en sens horaire), qui fera déplacer les maxima de la sinusoïde vers l'Ouest.

D'une façon similaire les minima bougent aussi vers l'ouest (vorticité relative positive, cyclonique, en sens anti-horaire). Toute l'onde sinusoïdale tends alors à bouger vers l'Ouest: ces types d'ondes sont connue comme Ondes de Rossby, qui les a découvertes en cherchant des solutions analytiques ondulatoires des équations de Navier-Stokes.



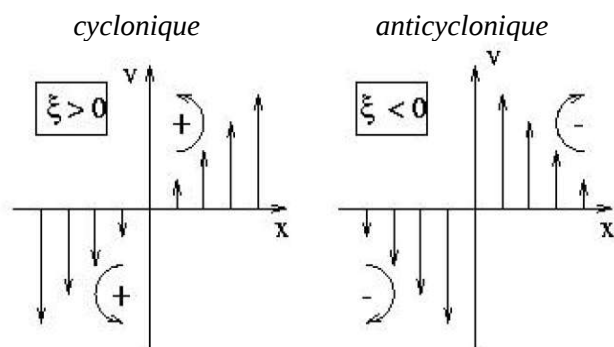
Conservation de la vorticité potentielle

Intensification des courants de bord ouest

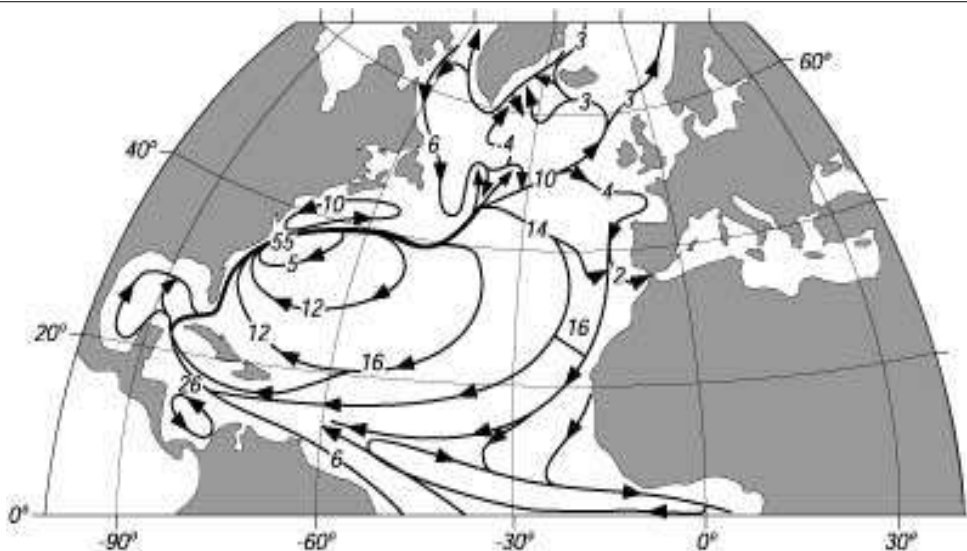
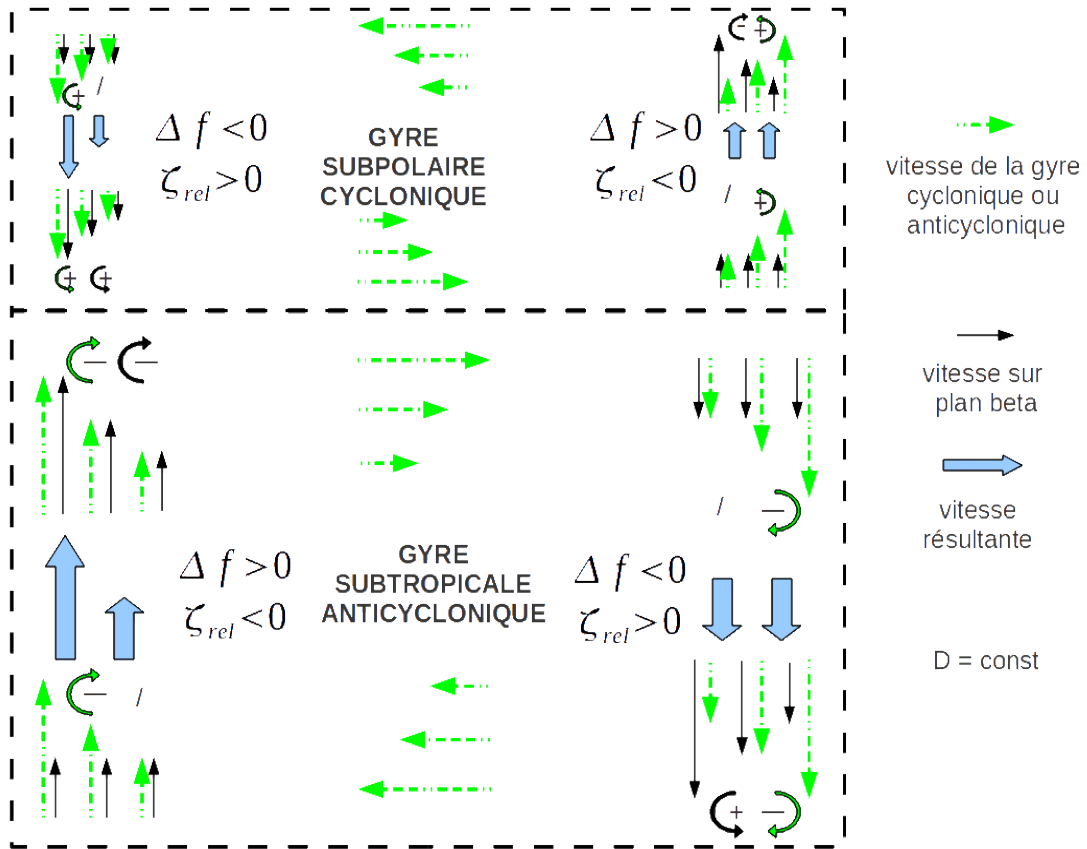
Prenons l'exemple de l'Atlantique Nord. Schématisons la circulation le long des bords par des vitesses uniquement méridiennes, illustrant le gyre subpolaire au nord et subtropicale au sud.

La vorticité relative s'écrit alors :

$$\zeta = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial v}{\partial x}$$



On peut expliquer l'intensification des courants de bord Ouest par la conservation de la vorticité potentielle : si D reste constante le long des frontières océaniques (cette condition n'est pas indispensable, ni forcément vraie mais elle permet une explication plus simpliste), la seule façon de conserver la vorticité potentielle est de diminuer ζ quand l'écoulement est dirigé vers les pôles, et d'augmenter ζ quand l'écoulement est dirigé vers l'équateur. Il en résulte un écoulement plus intense concentré le long des frontières Ouest de l'océan, alors que l'effet inverse s'observe le long des côtes Est.



Sketch of the major surface currents in the North Atlantic. Values are transport in units of $10^6 \text{m}^3/\text{s}$. From Sverdrup, Johnson, and Fleming (1942: fig. 187).

The figure shows a broad, basin-wide, mid latitude gyre as we expect from Sverdrup's theory. In the west, a western boundary current, the Gulf Stream, completes the gyre. In the north a subpolar gyre includes the Labrador current. An equatorial current system and countercurrent are found at low latitudes with flow similar to that in the Pacific.

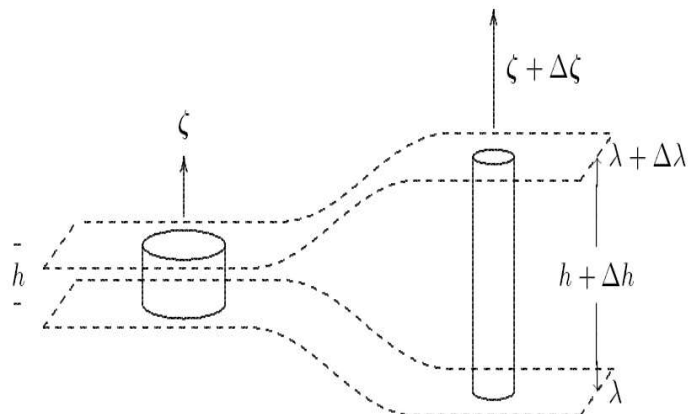
Tirée de http://oceanworld.tamu.edu/resources/ocng_textbook/chapter11/chapter11_01.htm

Intensification des tourbillons étirés

Si on se met sur un plan- f

$$\left(\frac{\zeta}{D}\right) = const$$

alors une colonne d'eau qui bouge entre deux surfaces sur lesquelles λ doit être conservée, doit se modifier pour satisfaire les lois de conservation de la masse et du moment angulaire. Plus grande sera la hauteur de la colonne, plus grande devra être la vitesse de rotation de la colonne de fluide.



$$\Delta D > 0 \rightarrow \Delta \zeta > 0$$

$$\Delta D < 0 \rightarrow \Delta \zeta < 0$$

Tirée de Mattioli (1995) Principi Fisici di Oceanografia e Meteorologia, Fig.48.1

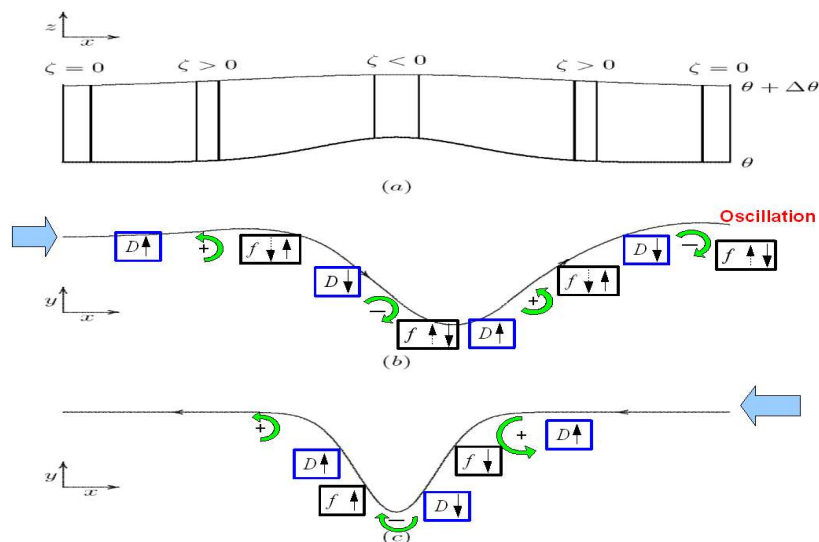
Vent dépassant une chaîne montagneuse

Les isosurfaces de température potentielle tendent à suivre la forme d'un obstacle mais avec des rayons de courbure grandissant avec la hauteur. Il y a une espèce de lissage des obstacles.

Dans un écoulement qui passe au dessus d'une montagne, la colonne d'air comprise entre deux valeurs de température potentielle d'abord s'étire, et ensuite se comprime (partie a de la figure ci-dessous).

Pour un écoulement qui vient de l'Ouest (partie b), ce fait comporte un mouvement d'abord cyclonique et en suite fortement anticyclonique, qui déclenche des oscillations en aval.

Pour un écoulement qui vient de l'Est (partie c), par contre, il y a une déviation symétrique vers le Sud.



Adaptée depuis Fig. 48.2 de Mattioli (1995) Principi Fisici di Oceanografia e Meteorologia

6. Introduction aux modèles océaniques numériques

La modélisation numérique de la circulation océanique est une discipline très jeune puisqu'elle s'est essentiellement développée au cours de la seconde moitié du XX^e siècle, bénéficiant de façon continue des progrès en matière d'outils de calcul automatique et s'appuyant, surtout au début, sur les développements de la prévision numérique du temps en météorologie. En effet les équations qui décrivent le comportement de l'océan et de l'atmosphère sont très similaires.

Avant 1900, météorologie et océanographie essentiellement descriptives.

Exemple:

Carte du Gulf Stream de Franklin-Folger, imprimée en 1769-1770.

Cette première carte du Gulf Stream, re-découverte par P. Richardson (1980) est remarquablement précise, a été dessinée par B. Franklin pour la poste anglaise sur la base des informations fournies par le capitaine de baleinières Timoty Folger.

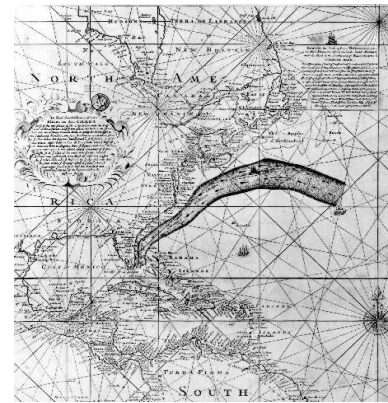


Image tirée du papier de R. Peterson et al. (1996) dans *Progress in Oceanography*. http://sam.ucsd.edu/sio210/gifimages/Franklin_folger.gif

Coiffier (2000) présente un aperçu historique très intéressant des techniques qui ont servi à la construction des modèles de prévision numérique du temps basé sur la résolution numérique des ces équations, c'est-à-dire à déterminer les valeurs futures de ses grandeurs caractéristiques en partant de valeurs initiales connues grâce aux observations. Les modèles numériques d'atmosphère construits sur ce principe sont ainsi devenus des outils indispensables de la prévision du temps, supplantant progressivement les méthodes fondées sur l'application de règles de déplacement et d'évolution de structures atmosphériques identifiables (les centres d'action et les fronts).

« Les équations utilisées sont les équations générales de la mécanique des fluides, bien établies déjà au début du XX^e siècle, auxquelles on applique un certain nombre de simplifications qui se justifient par l'analyse des ordres de grandeur des divers termes dans le cas particulier de l'atmosphère terrestre et selon les échelles à décrire. Le recours au calcul numérique est indispensable pour résoudre ces systèmes d'**équations non linéaires** dont les solutions ne peuvent pas être déterminées analytiquement dans le cas général.

La construction d'un modèle numérique d'atmosphère et d'océan comprend deux étapes distinctes : la première consiste à établir un système d'équations, alors que la seconde, dite « numérisation », consiste à remplacer les équations portant sur des variables continues par des équations portant sur des variables

discrètes et dont les solutions sont obtenues au moyen d'un algorithme approprié. Les résultats d'une prévision numérique dépendent donc des propriétés générales des solutions des équations, qui relèvent de la météorologie dynamique, ainsi que des effets de la numérisation adoptée, qui doivent être examinés de façon détaillée.

La mise en oeuvre de l'algorithme implique de disposer d'un outil de calcul qui soit suffisamment puissant, tout en restant simple d'utilisation. C'est la raison pour laquelle les progrès de la prévision numérique du temps ont été étroitement liés au fantastique développement des ordinateurs, depuis leur naissance à la fin de la deuxième guerre mondiale. » (Coiffer, 2000):

Au XX siècle: modélisation devient une branche de la physique mathématique

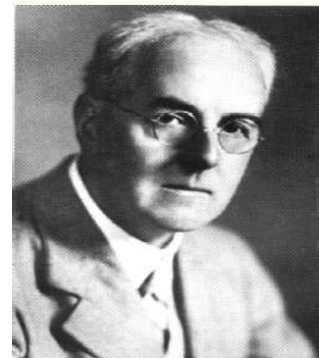
Dès 1904, le Norvégien Vilhelm Bjerknes reconnaît que la prévision du temps est fondamentalement un problème déterministe à valeurs initiales au sens mathématique du terme (Bjerknes, 1904) : « *Si, comme le pense chaque homme raisonnant scientifiquement, les phénomènes atmosphériques se développent à partir de ceux qui les précèdent suivant des lois précises, on peut en déduire que les conditions nécessaires et suffisantes pour une solution rationnelle de la prévision en météorologie sont les suivantes :*

- on doit connaître avec une précision suffisante l'état de l'atmosphère à un instant donné ;
- on doit connaître avec une précision suffisante les lois selon lesquelles un état de l'atmosphère se développe à partir de l'état précédent. »

Cependant, Bjerknes réalise que la difficulté du problème vient de la nécessité de résoudre un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires pour lesquelles on ne dispose pas, dans le cas général, de solutions analytiques.

Richardson essayait donc de montrer que le calcul permettait effectivement d'effectuer des prévisions météorologiques à une époque où les calculateurs électroniques n'existaient pas encore. Il publia sa méthode en 1922 dans un livre intitulé *Weather Prediction by Numerical Process*.

Richardson préconisait des techniques de calcul permettant de simplifier les équations et indiquait qu'il était nécessaire de partir d'une situation météorologique avec un nombre important de données terrestres et d'altitude sur l'ensemble du globe.



À l'aide de formulaires standardisés, pour accélérer le calcul en divisant le travail, il avait estimé que 64000 personnes étaient nécessaires pour que la prévision soit émise en avance sur les événements.

http://fr.wikipedia.org/wiki/Lewis_Fry_Richardson

Richardson découpait le globe en une grille rectangulaire de 230 km (en latitude) sur 200 km (en longitude), ce qui donnait 3200 colonnes verticales autour de la Terre. De plus, il divisait l'atmosphère en tranche à 4, 7 et 12 km d'altitude et il proposait des calculs par pas de temps de 3 heures.

Cet immense système a été baptisé "**l'usine à prévoir le temps**".

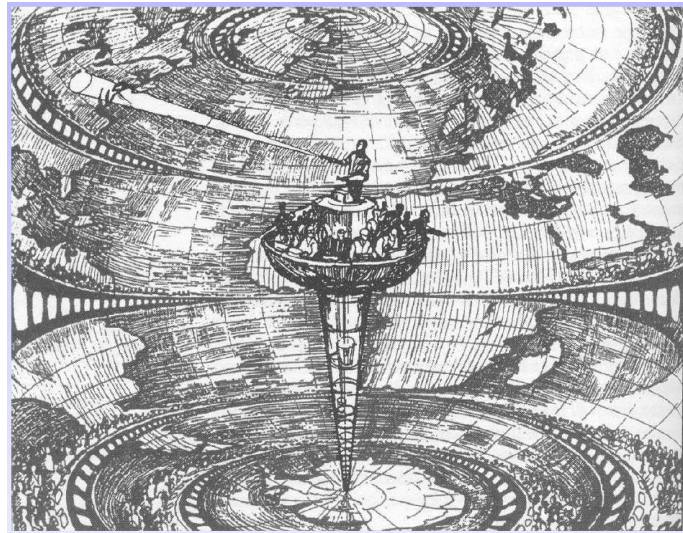
Citation, Richardson (1922)

Il m'a fallu une bonne partie de six semaines pour remplir les formulaires de calcul et établir la nouvelle distribution dans deux colonnes verticales, pour la première fois. Mon bureau était un tas de foin dans un froid cantonnement en retrait. Avec de l'entraînement, le travail d'un calculateur moyen pourrait aller sans doute dix fois plus vite. Avec un pas de temps de trois heures, alors trente-deux personnes pourraient calculer exactement deux points de façon à avancer à la même vitesse que le temps, sans tenir compte du très grand gain de vitesse que l'on constate invariablement quand une opération complexe est divisée en parties plus simples, sur lesquelles des individus se spécialisent. Si les dimensions des carreaux de l'échiquier sont de 200 kilomètres sur l'horizontale, il y aurait 3 200 colonnes sur la Terre entière. Comme

dans les régions tropicales le temps est souvent connu à l'avance, on peut considérer qu'il y a 2 000 colonnes actives. De cette façon, $32 \times 2\,000 = 64\,000$ calculateurs seraient nécessaires pour faire la course avec le temps sur la Terre entière. C'est un nombre plutôt considérable. Sans doute, dans quelques années, sera-t-il possible de simplifier le schéma de calcul. Mais, de toute façon, l'organisation qui est proposée est celle d'une fabrique de prévisions centralisée pour l'ensemble de la Terre, ou pour des parties limitées par des frontières où le temps est invariable, avec des calculateurs humains spécialisés sur des équations différentes. Espérons pour eux qu'ils seront régulièrement affectés à de nouvelles opérations.

Après un raisonnement aussi difficile, on peut sans doute avoir un peu de fantaisie.

Imaginons un immense hall en forme de théâtre, sauf que les galeries et balcons y feraient un tour complet, occupant ainsi la place dévolue à la scène. Les murs de cet espace seraient peints pour représenter une carte de la Terre. Le plafond représenterait les régions polaires septentrionales, l'Angleterre serait dans les balcons, les tropiques dans les baignoires du haut, l'Australie au niveau des corbeilles et l'Antarctique dans la fosse. Une myriade de calculateurs humains sont au travail sur le temps de la partie de la carte où ils siègent, mais chacun ne s'occupe que d'une équation ou d'une partie d'équation. Le travail de chaque région est coordonné par un employé de haut rang. De nombreux petits tableaux affichent les valeurs instantanées de façon à ce que les calculateurs voisins puissent les lire.



Le modèle de Richardson, 1922

Imagination d'un système de calcul humain (64000 personnes) automatisé et parallèle avec une puissance de calcul de 1 Flops (Floating point operations per second).

Dessin d'Alf Lannerbaeck, publié par le journal suédois *Dagens Nyheter* le 22 septembre 1984.

Chaque nombre est ainsi affiché dans trois niveaux adjacents, de façon à maintenir les communications avec le Nord et le Sud sur la carte. Du plancher de la fosse s'élève une haute tour qui atteint la moitié de la hauteur du théâtre. Elle porte une chaire sur son sommet: le responsable de l'ensemble y est assis, entouré de plusieurs assistants et messagers. Une de ses tâches consiste à maintenir une vitesse de progression constante dans toutes les parties du globe. De ce point de vue, il ressemble au chef d'un orchestre dont les instruments seraient des règles à calcul et des machines à calculer. Mais au lieu d'agiter une baguette, il pointe un rayon lumineux rose en direction des régions en avance sur les autres et un rayon bleu vers celles qui sont à la traîne. Quatre employés de haut niveau collectent le temps au fur et à mesure qu'il est calculé, et l'expédient à l'aide d'une messagerie pneumatique vers une salle calme. De là, il sera codé et téléphoné vers la station d'émission radio. Des messagers transportent les piles de formulaires de calcul usagés vers un local d'archivage au sous-sol.

Dans un bâtiment voisin, un service de recherche est installé qui invente des améliorations. Mais il est nécessaire de faire des essais à petite échelle avant de procéder à des changements dans les algorithmes utilisés dans le théâtre de calcul. Dans le sous-sol, un enthousiaste passe son temps à observer des tourbillons dans le liquide qui remplit un bassin en rotation, mais jusqu'à présent la méthode numérique donne de meilleurs résultats. Dans un autre bâtiment sont installés les services financiers, courrier et administratif habituels. À l'extérieur se trouvent des terrains de jeux, des habitations, des montagnes et des lacs, car on a pensé que ceux qui calculent le temps devraient pouvoir le respirer librement.

Cependant, un petit essai de prévision d'évolution de la pression atmosphérique selon cette méthode, mais sans tout le personnel, donna un résultat très décevant:

la variation calculée était de 145 hPa en 6 heures, une valeur tout à fait impossible quand on pense qu'une variation de 20 hPa est considérée comme une variation extrême pour ce même temps.

En fait, la variation réelle a été presque nulle.

L'erreur de Richardson a été de discrétiser les dérivées des équations primitives atmosphériques sans tenir compte de la variabilité expérimentale des données.

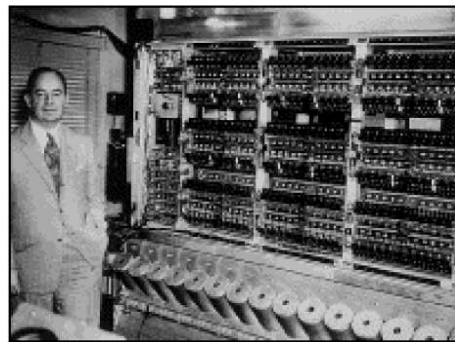
Ces dérivées impliquent des divisions de nombres qui sont très proches l'un de l'autre (ex. variation de la pression ou de la température avec le temps). Or la variation des variables météorologiques peut être de l'ordre de l'erreur de leur mesure et en plus, elle peut être instantanément grande sans pour autant durer. Il faut donc utiliser des valeurs lissées sur une certaine période pour obtenir des résultats réalistes. On sait maintenant que le pas de temps n'aurait pas dû excéder une demi-heure dans les calculs et que les données initiales, n'ayant pas subi de contrôle de qualité, introduisirent des instabilités de calcul. Richardson a cependant démontré l'idée que la prévision du temps par calcul était possible et les problèmes de logistique humaine et financière ont été résolus plus tard par l'avènement des ordinateurs.

En 1928, les mathématiciens allemands Courant, Friedrichs et Levy étudient de façon systématique la manière de résoudre les équations aux dérivées partielles à l'aide des « différences finies » et précisent les contraintes à respecter lors de la numérisation (Courant et al., 1928).

En 1939, le Suédois Carl-Gustav Rossby montre que l'équation de conservation du tourbillon absolu permet d'interpréter correctement le déplacement observé des centres d'action atmosphériques (Rossby et al., 1939).

Apparition de calculateurs électroniques

En 1946, le premier ordinateur électronique, l'Eniac (*Electronic Numerical Integrator Analyser and Computer*), voit le jour à l'université de Pennsylvanie située à Philadelphie (États-Unis), grâce à l'impulsion déterminante du mathématicien américain d'origine hongroise John von Neumann, qui propose de l'utiliser aussi pour la prévision météo.



En 1948, l'Américain Jule Charney propose une simplification du système général d'équations, connue sous le nom d'«approximation quasi géostrophique», et retrouve comme cas particulier l'équation étudiée par Rossby (Charney, 1948).

Enfin, en 1950, J. Charney, le Norvégien R. Fjørtoft et J. von Neumann réalisent la première prévision numérique du temps (Charney et al., 1950) : ils utilisent pour cette expérience l'équation de conservation du tourbillon absolu et effectuent les calculs numériques sur le ordinateur électronique Eniac, installé à Aberdeen (Maryland, États-Unis). Les résultats obtenus pour la prévision de l'altitude géopotentielle de la surface isobare 500 hPa, caractéristique de l'atmosphère moyenne, sont tout à fait encourageants et cette expérience historique marque ainsi le point de départ de la prévision numérique moderne (Platzmann, 1979). En réponse à Charney, qui lui avait fait parvenir l'article décrivant l'expérience, Richardson écrit en 1952 : «Permettez-moi de vous féliciter ainsi que vos collaborateurs pour le remarquable succès que vous avez obtenu à Princeton et pour les perspectives d'amélioration que vous indiquez» (Ashford, 1985).

Amélioration des performances

- 1955 modèle barocline de Charney sur IBM701 (10000 Flops)
- Mais jusqu'en 1962 c'est le modèle barotrope qui fait les prévisions sur 3 jours (32 x 23 points de calcul)

- Identification des problèmes d'instabilités numériques

Nouveaux concepts par les modèles

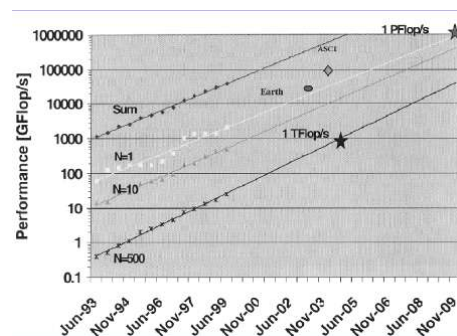
- 1956 Phillips: vérifications numériques de validité d'hypothèses physiques simplificatrices: Modèle quasi-géostrophique non-linéaire vérifiant qu'un modèle analytique linéaire est valable dans une plage de paramètres donnée
- Instabilités numériques linéaires et non-linéaires
- Débats sur les avantages des schémas robustes vs. schémas précis
- 1966 Arakawa: discrétisations conservant des propriétés non-linéaires

Ressources disponibles

- Augmentation des ressources informatiques surtout utilisées pour assurer des résolutions plus fines

Puissances de calcul

- Croissance exponentielle: Loi de Moore: doublement des capacités tous les 18 mois.
- Le PC banal de 2001 était le superordinateur coûtant 1MEuro en 1992.
- Limitations à prévoir?
 - 1GHertz limite distances à 30cm (vitesse de la lumière)
 - Traçage des circuits par rayons lumineux limités par longueur d'onde du visible
 - Échauffements



Architectures nouvelles

- SISD single instruction, single data: processeur classique
- SIMD single instruction, multiple data: processeur vectoriel
- MIMD multiple instruction, multiple data: processeur parallèle
 - mémoire partagée: typiquement 16 processeurs exploités efficacement
 - mémoire distribuée: massivement parallèle mais recodage (1024 processeurs)

Programmation toujours en FORTRAN ...

Apparition de modèles océanographiques

- 1963 Bryan: modèle barotrope
- 1969 Bryan: modèle barocline incluant effets topographiques et fermeture turbulente
- En météorologie, les modèles aux équations primitives 3D existent depuis 1963 (Smagorinsky).

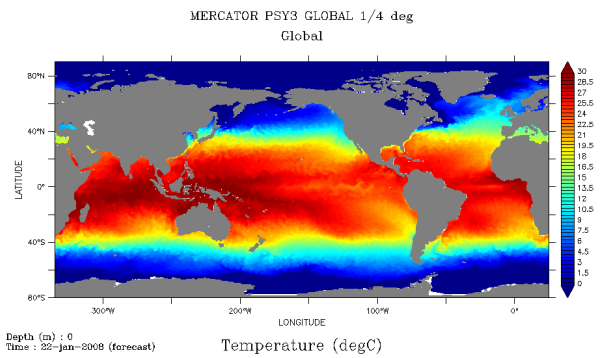
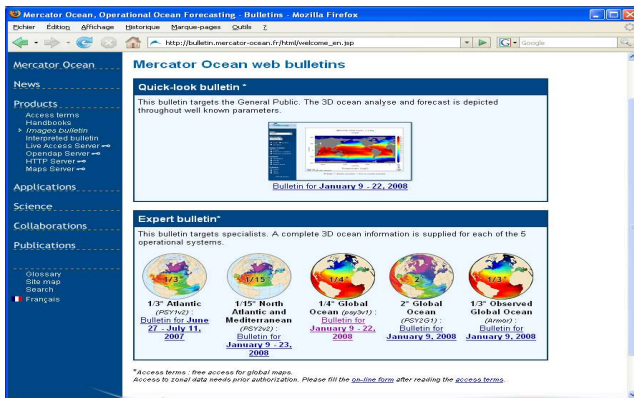
Et depuis?

- Le modèle de Bryan (GFDL, MOM) est presque inchangé et reste le plus utilisé
- Les nouveaux développements viennent généralement des modèles météorologiques (assimilation, fermetures, méthodes spectrales, semi-lagrangiennes)
- Refaire complètement un modèle est un investissement majeur
- Ajouts aux modèles: assimilation de données, meilleurs schémas numériques, fermetures plus complexes

Exemples de modèles océaniques opérationnels

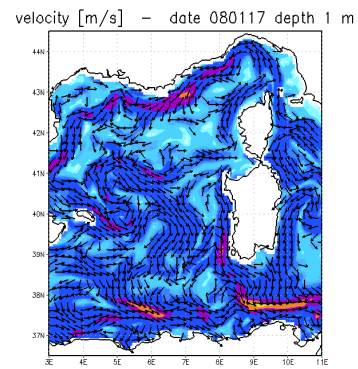
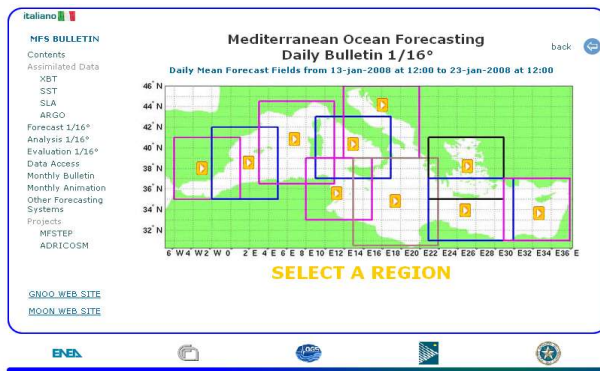
MERCATOR OCEAN

http://bulletin.mercator-ocean.fr/html/welcome_en.jsp



MFS

<http://www.bo.ingv.it/mfs/>



Introduction tirée du Cours
 OPB205 Projet de modélisation de la circulation océanique
http://www.com.univ-mrs.fr/~doglioli/teaching_OPB205.htm

Travaux Dirigés

TD 1 : Les lettres Grecques, le mouvement circulaire et la pesanteur**Lettres Grecques**

1	A α	Alpha	a
2	B β	Bêta	b
3	Γ γ	Gamma	g
4	Δ δ	Delta	d
5	E ε	Epsilon	e
6	Z ζ	Zêta	z
7	H η	Êta	h
8	Θ θ ϑ	Thêta	q
9	I ι	Iota	i
10	K κ	Kappa	k
11	Λ λ	Lambda	l
12	M μ	Mu	m
13	N ν	Nu	n
14	Ξ ξ	Xi	x
15	O ο	Omicron	o
16	Π π	Pi	p
17	P ρ	Rhô	r
18	Σ σ ς	Sigma	s
19	T τ	Tau	t
20	Υ υ Ύ	Upsilon	u
21	Φ φ	Phi	j
22	X χ	Khi	c
23	Ψ ψ	Psi	y
24	Ω ω	Oméga	w

1) Lire les mots suivantes

Ὠκεανός = *Okeanos*, le grand fleuve ou de la mer entourant le disque de la Terre (par opposition à la Méditerranée), d'origine inconnue. Personnifiée comme Oceanus, fils d'Ouranos et de Gaia et époux de Téthys. Dans les temps anciens, lorsque les masses terrestres connues seulement étaient l'Eurasie et l'Afrique, l'océan était une rivière qui coulait sans fin autour d'eux. Jusqu'à c.1650, communément mer océan, traduction L. *jument oceanum*. Application aux masses d'eau a commencé vers le 14^{ème} siècle.

Τηθύς = *Téthys* à ne pas confondre avec
Θέτις = *Thétis*, nymphe marine, mère d'Achille.

Γαία = *Gaïa*, la Terre

Ουρανός = *Ouranos*, le Ciel

κόσμος = *kósmos*, le monde ordonné

Le mouvement circulaire

Coordonnées Cartésiennes

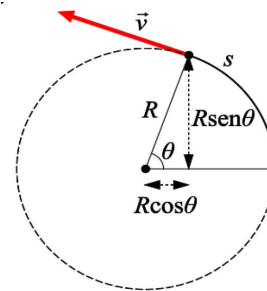
$$x(t) = R \cos \theta(t)$$

$$y(t) = R \sin \theta(t)$$

avec $x^2 + y^2 = R^2$

Coordonnées Polaires

$$(\vec{R}, \theta)$$



http://it.wikipedia.org/wiki/Moto_circolare

Vitesse

La vitesse angulaire est l'angle couvert par l'unité de temps.

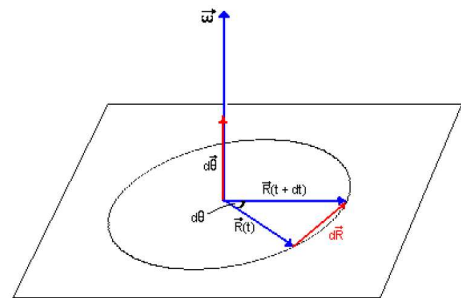
Il faut définir les vecteurs:

$\vec{R}(t)$ position du point P

$d\vec{\theta} = \vec{k} d\theta$ variation angulaire infinitésimale

$d\vec{R} = d\vec{\theta} \times \vec{R}$ déplacement linéaire infinitésimale

la vitesse angulaire est définie $\vec{\omega}(t) = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$, mesurée en [rad/s], elle est dans la même direction que \vec{k}



http://it.wikipedia.org/wiki/Moto_circolare

La vitesse tangentielle est le parcours s dans l'unité de temps. Si s est petit, l'arc peut être approximé avec

$$d\vec{R} \text{ alors } \vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d\vec{\theta} \times \vec{R}}{dt} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} \times \vec{R} = \vec{\omega} \times \vec{R}, \quad \vec{v} \perp \vec{R} \text{ et } \vec{\theta}, \quad |\vec{v}| = \omega R \sin(90^\circ) = \omega R \text{ en [ms}^{-1}\text{]}$$

Accélération

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\theta}}{dt^2} \text{ accélération angulaire mesurée en [rad s}^{-2}\text{]}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{\omega} \times \vec{R}] = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \text{ avec}$$

$$\vec{a}_t = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{R} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \times \vec{R} \text{ accélération tangentielle mesurée en [m s}^{-2}\text{]}$$

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\theta} \times \vec{R}}{dt} = \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{\theta}}{dt} \times \vec{R} \right) = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) \text{ accélération centripète (ou axipète) en [m s}^{-2}\text{]}$$

$$\vec{a}_n = (\vec{\omega} \cdot \vec{R}) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) \vec{R} = (\omega R \cos 90^\circ) \vec{\omega} - (\omega \omega \cos 0^\circ) \vec{R} = -\omega^2 \vec{R}$$

$$|\vec{a}_n| = \omega^2 R \text{ en [m s}^{-2}\text{]}$$

NB: règles de multiplication des vecteur

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \vec{b} \cos \theta$	$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$
$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{n} \cdot \vec{a} \vec{b} \sin \theta$	$ \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \vec{b} \sin \theta$

La pesanteur

1) Quelles sont les forces qui donnent lieu au champ de pesanteur? Écrire les formules.

La force de gravitation $d\vec{F}' = dm \cdot \vec{g}'$ due à l'attraction gravitationnelle de la Terre.

La force axifuge $d\vec{F}'' = dm \cdot \vec{g}''$ due à la rotation de la Terre sur elle-même.

NB: La force axifuge (plus souvent appelée centrifuge en 2D sur un plan horizontal) est une force fictive qui apparaît dans les systèmes non inertiels (comme un système solide à un point sur la surface de la Terre qui est en rotation) due au fait que quand une masse dans son mouvement ne suit pas une trajectoire rectiligne, il faut une force fictive pour en expliquer la trajectoire, tout en respectant le I principe de Newton (ou principe d'inertie).

NB: D'autres phénomènes seraient à prendre en compte : les écarts de densité du sous-sol, l'aplatissement de la Terre, la marée (donc le moment de la journée) et l'altitude; toutefois ils sont moins importants. Une analyse détaillée se trouve sur <http://fr.wikipedia.org/wiki/Pesanteur>

2) Calculer l'accélération de la pesanteur à la surface de la mer à 45 degrés, aux pôles et à l'équateur.

Accélération de la pesanteur $g = g' + g''$

composante due à l'attraction : $g' = G \frac{M}{r^2}$ avec

- G constante de la gravitation universelle = $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$

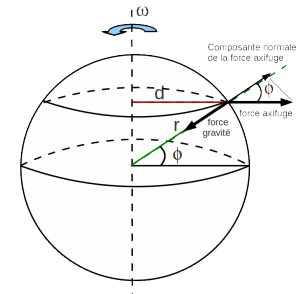
- M masse de la Terre = $5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

- r rayon de la Terre, $r_m = 6371 \text{ km}$, $r_{\text{pôles}} = 6357 \text{ km}$ et $r_{\text{équateur}} = 6378 \text{ km}$

composante due à la force axifuge : $g'' = -\omega^2 r (\cos \phi)$ avec

- ω = vitesse de rotation

- ϕ = latitude



NB : aux moyennes latitudes il faut calculer la composante de la force axifuge qui s'oppose à la gravité

$$g_{\text{pôles}} = G \frac{M}{r_{\text{pôles}}^2} - \omega^2 r_{\text{pôles}} \cos(\pi/2) = 6,67 \cdot 10^{-11} \times 5,98 \cdot 10^{24} / 6357000^2 = 9,87 \text{ m s}^{-2}$$

$$g_{\text{équateur}} = G \frac{M}{r_{\text{équateur}}^2} - \omega^2 r_{\text{équateur}} \cos(0) = 6,67 \cdot 10^{-11} \times 5,98 \cdot 10^{24} / 6378000^2 - (2\pi/86400)^2 \times 6378000 = 9,78 \text{ ms}^{-2}$$

$$g_{45} = G \frac{M}{r_m^2} - \omega^2 r_m \cos(\pi/4) = 6,67 \cdot 10^{-11} \times 5,98 \cdot 10^{24} / 6371000^2 - (2\pi/86400)^2 \times 6371000 \times (\cos(\pi/4))^2 = 9,80 \text{ ms}^{-2}$$

3) Calculer le pourcentage de l'accélération axifuge par rapport à la pesanteur à 45° degrés de latitude.

$$\frac{g''}{g_{45}} = \frac{0.02}{9.80} \times 100 = 0.2 \%$$

4) Calculer la vitesse d'un point de la surface de la terre à 45 degrés de latitude dans le référentiel géocentrique dont l'origine est confondue avec le centre du globe terrestre et dont les axes pointent en direction des étoiles fixes.

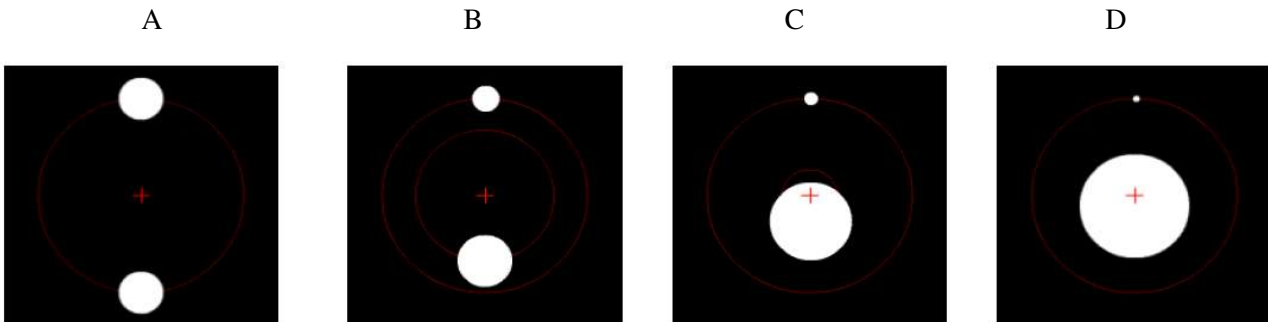
La vitesse tangentielle d'un point en rotation uniforme situé à une distance D de l'axe de rotation s'écrit:

$\vec{v} = D \omega \vec{t}$ avec \vec{t} vecteur unitaire tangentiel au parallèle locale direct dans le sens de rotation

$$|\vec{v}| = r \cos \phi \omega = r \cos(\pi/4) \frac{2\pi}{86400} = 328 \text{ m s}^{-1} = 1180,8 \text{ km h}^{-1}$$

TD 2: Force de marée

1) Calculer le rapport entre le rayon terrestre R et la distance R_{TB} (distance entre le centre de la Terre et le centre de gravité du système Terre-Lune), sachant que la distance R_{TL} entre la terre et la Lune est de 384000 km, la masse de la Terre m_T est de $5,98 \cdot 10^{24}$ kg et celle de la Lune m_L est de $7,35 \cdot 10^{22}$ kg, Sur la base du résultat, choisir la figure correspondant à la réalité entre les 4 suivantes (tirée de http://en.wikipedia.org/wiki/Center_of_mass):



$$R_{TB} = R_{TL} \frac{m_L}{m_T + m_L} = \frac{R_{TL}}{1 + m_T/m_L} = \frac{384 \cdot 10^3}{1 + 5,98 \cdot 10^{24} / 7,35 \cdot 10^{22}} = 4662 \text{ km}$$

$$\frac{R}{R_{TB}} = \frac{6371}{4662} \approx \frac{3}{2}$$

La figure correspondant au système Terre-Lune est la figure C, parce que le centre de gravité est à l'intérieur de la terre mais assez distant du centre de la Terre. Les 4 figures correspondent à : A) corps de masses égales, B) un corps un petit peu plus grand que l'autre (e.g. Pluton et sa lune Charon), D) un corps beaucoup plus grand que l'autre (e.g. Soleil et Terre).

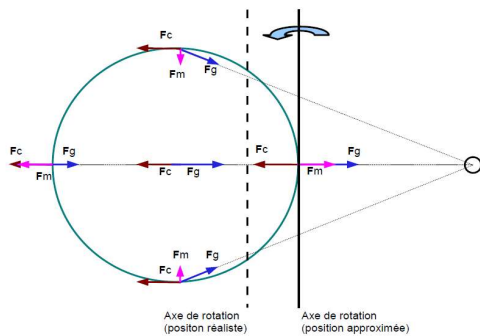
2) Calculer l'accélération axifuge sur la surface de la terre due à la rotation du système Terre-Lune autour de son barycentre en considérant par simplicité que le centre de gravité soit externe à la Terre.

NB: La force axifuge est une force fictive qui apparaît dans les systèmes non inertiels (ici on est en rotation) due au fait que quand une masse dans son mouvement ne suit pas une trajectoire rectiligne, il faut une force fictive pour en expliquer la trajectoire, tout en respectant le I principe de Newton (ou principe d'inertie). Pour la Terre en rotation autour du centre de gravité du système Terre-Lune, cette force sur la Terre aura la même intensité que la force d'attraction gravitationnelle de la Lune, qui fait que les deux corps en rotation ne s'éloignent pas, mais de direction opposée.

$$a_c = -G \frac{M_L}{R_{TL}^2} = -6,67 \cdot 10^{-11} \frac{7,35 \cdot 10^{22}}{(384 \cdot 10^6)^2} = -3,32 \cdot 10^{-5} \text{ m s}^{-2}$$

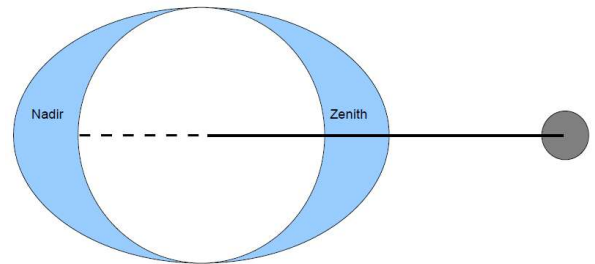
NB: dans le cadre des approximations faites, cette force est uniforme sur toute la surface de la Terre.

3) Dessiner les vecteurs de la force de marée, définie comme résultante des deux forces qui agissent sur le système Terre-Lune en rotation autour de son barycentre aux points suivants : centre de la Terre, nadir, zénith, pôles



Les forces de marée sont la résultante de la composition des forces axifuges, orientées à l'opposé de la Lune dans la direction parallèle à la ligne passant par les deux centres et d'égale intensité sur toute la Terre et des forces gravitationnelles orientées vers la Lune et de différentes intensités.

4) Calculer la résultante de la marée au nadir et au zénith et vérifier si les deux bourrelets de la marée généralement dessinés dans le schéma basique ci-contre sont vraiment égaux.



Au zénith:

$$\begin{aligned}
 a_Z &= a_{gZ} - a_c = G \frac{m_{lune}}{r_Z^2} - G \frac{m_{lune}}{r_{TL}^2} = G \frac{m_{lune}}{(r_{TL} - r)^2} - G \frac{m_{lune}}{r_{TL}^2} = \\
 &= 6,67 \cdot 10^{-11} \times 7,35 \cdot 10^{22} / (384 \cdot 10^6 - 6371 \cdot 10^3)^2 - 6,67 \cdot 10^{-11} \times 7,35 \cdot 10^{22} / (384 \cdot 10^6)^2 = \\
 &= 3,438 \cdot 10^{-5} - 3,325 \cdot 10^{-5} = 0,113 \cdot 10^{-5} \text{ m s}^{-2}
 \end{aligned}$$

Au nadir:

$$\begin{aligned}
 a_N &= a_{gN} - a_c = G \frac{m_{lune}}{r_N^2} - G \frac{m_{lune}}{r_{TL}^2} = G \frac{m_{lune}}{(r_{TL} + r)^2} - G \frac{m_{lune}}{r_{TL}^2} = \\
 &= 6,67 \cdot 10^{-11} \times 7,35 \cdot 10^{22} / (384 \cdot 10^6 + 6371 \cdot 10^3)^2 - 6,67 \cdot 10^{-11} \times 7,35 \cdot 10^{22} / (384 \cdot 10^6)^2 = \\
 &= 3,217 \cdot 10^{-5} - 3,325 \cdot 10^{-5} = -0,108 \cdot 10^{-5} \text{ m s}^{-2}
 \end{aligned}$$

On peut donc dire que, en théorie, les deux bourrelets sont légèrement différents, mais il faut tenir en compte que la différence en distance entre les deux points est $2 R_T$, i.e. $\sim 10^5$ km, une valeur qui devient négligeable en comparaison à la distance Terre-Lune $R_{TL} = 10^7$ km : il y a 2 ordres de grandeur de différence!

NB: En tout cas, il faut bien retenir que ce type de schématisation est vraiment très très simplifiée!!!

TD 3 : Équations d'Euler, de Navier-Stokes, de Reynolds

1) Écrire les équations d'Euler d'abord sous forme vectorielle, ensuite pour chaque composante. Décrire la signification de chaque terme.

<p>Forme vectorielle</p> $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g}$	<p>Pour chaque composante</p> $\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \end{aligned} \quad (A)$
--	--

Le premier terme est l'accélération locale due au fait que dans un certain point de l'espace la particule accélère parce que dans ce point la vitesse des particules que y passent peut augmenter ou diminuer.

Le deuxième est le terme d'advection qui représente l'accélération due au fait que la particule dans son mouvement passe de une zone où le champ de vitesse est faible à une zone où il est intense, ou vice-versa.

Les deux termes peuvent être regroupés en un seul terme si utilise un repère Eulérien ou Lagrangien,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$$

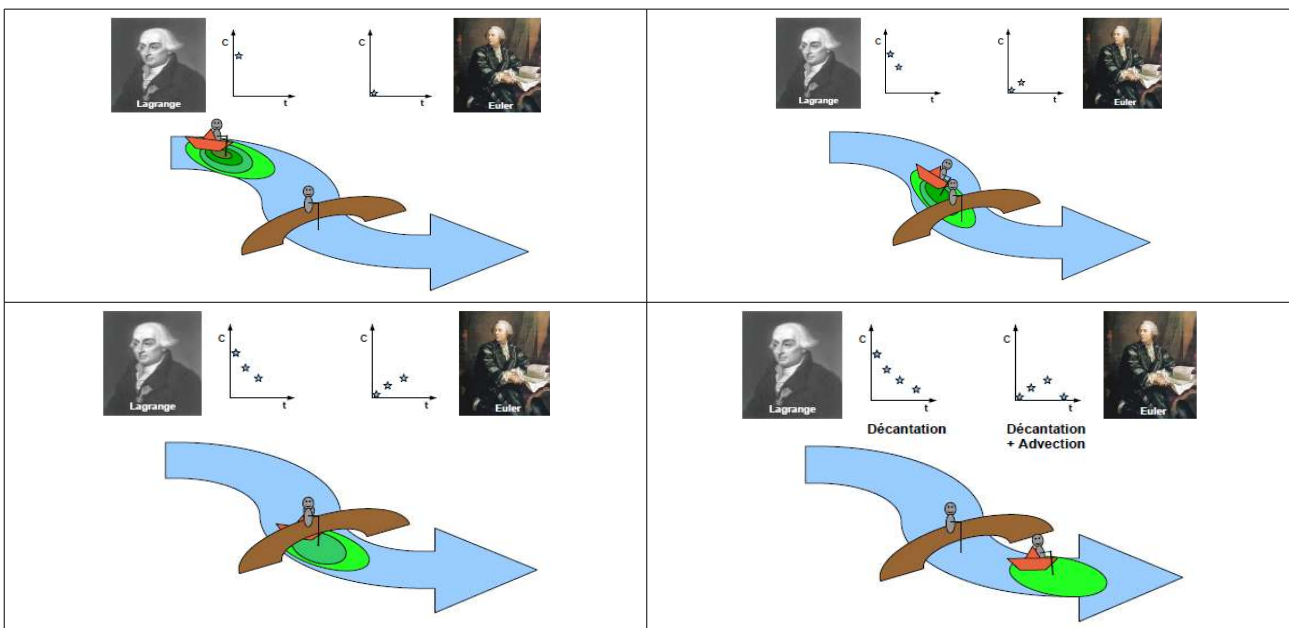
Le troisième terme est le gradient de pression: une variation spatiale du gradient de pression accélère une particule qui tend a bouger des hautes pressions vers les basses pressions.

Le quatrième terme est l'accélération de gravité.

2) Dérivée Eulérienne et Lagrangienne.

Imaginer la situation suivante: une tache de sédiments en suspension est présente à un certain instant t_0 dans une rivière qui s'écoule avec une vitesse v . La tache a une concentration qui diminue du centre vers l'extérieur de la tache. Euler effectue une mesure de la concentration depuis un pont (point fixe) qui se trouve en aval de la tache à t_0 . Par contre, Lagrange mesure depuis un bateau qui suit la tache (point mobile).

Dessiner un graphique de l'évolution de la concentration en fonction du temps pour chacune des deux méthodes de mesure. Y a-t-il une différence? Si oui, pourquoi?



3) Dans le but d'obtenir un système d'équations fermé, on peut ajouter aux trois équations d'Euler une quatrième équation: laquelle?

L'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{v} = \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Quelles sont les deux différentes hypothèses pour simplifier cette équation?

A) fluide uniforme et stationnaire

Chaque particule de fluide a la même masse volumique, indépendamment du temps et de la position :

$$\rho(x, y, z, t) = \text{const}.$$

Ainsi tous les termes contenant les dérivées de ρ sont nuls et l'équation de continuité devient

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

B) hypothèse d'incompressibilité

La masse volumique du fluide peut varier de particule à particule, donc le fluide n'est pas forcément homogène, mais

chaque particule conserve sa propre masse volumique pendant le mouvement, i.e. sa dérivée lagrangienne est nulle

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho = 0 \quad (\text{B})$$

Avec cette hypothèse l'équation de continuité se simplifie à nouveau dans la forme : $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ (C) mais avec une hypothèse moins contraignante.

NB: le système composé par les trois équations d'Euler -une pour chaque composante de la vitesse- (A), la condition d'incompressibilité (B) et l'équation de continuité pour un fluide incompressible (C) représente un système fermé de cinq équations pour les cinq inconnues u, v, w, p, ρ .

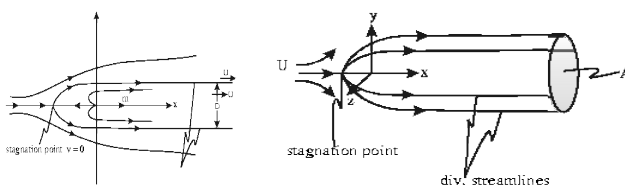
4) Si on admet que la variation de pression selon la verticale ne change pas entre fluide au repos et un fluide en mouvement, quelle hypothèse est-on entrain de faire? Quelle importante simplification peut-on alors apporter aux équations du mouvement?

L'hypothèse hydrostatique, qui permet de simplifier l'équation pour la composante verticale de la vitesse dans la forme ci-contre:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

5) Donner la définition de fluide Eulérien et citer un exemple d'écoulement Eulérien potentiel.

Un fluide Eulérien est un fluide incompressible et non visqueux. Le solide de Rankine, obtenu à partir de la superposition de l'écoulement radial dû à une source et de l'écoulement parallèle uniforme est un exemple de écoulement Eulérien potentiel.



http://web.mit.edu/fluids-modules/www/potential_flows/LecturesHTML/lec1011/



J. Macquorn Rankine (1820-1872)
Born in Edinburgh, 5 July 1820, Rankine pursued a career as a civil engineer.
<http://gdl.cdlr.strath.ac.uk/mlemen/mlemen078.htm>

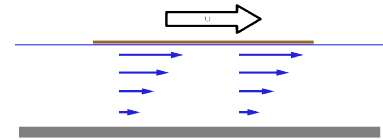
6) Dans le système composé par les équations d'Euler, une seule force tient compte des forces qui s'exercent entre deux particules, laquelle?

Imaginer l'expérience suivante: à la surface d'une couche fluide au repos d'épaisseur constante, on tire une plaque flottante à une vitesse U . À quoi peut-on s'attendre sur le fluide au-dessous? Peut-on expliquer le phénomène avec les équations d'Euler (ou faut-il évoquer une nouvelle force)?

La seule force présente est la pression hydrostatique. La couche de surface en contact avec la plaque bougera avec la même vitesse U , tandis que en profondeur le fluide sera en mouvement avec une vitesse décroissante avec la profondeur jusqu'à s'annuler au fond.

Non, dans l'équation d'Euler la seule pression ne permet pas de décrire le phénomène, parce que cette force agit seulement orthogonalement aux couches fluides.

Le phénomène est par contre dû à des forces tangentielles.



7) Quelles équations faut-il introduire pour décrire ce phénomène? Pourquoi? Comment sont appelés les fluides décrits par ces équations?

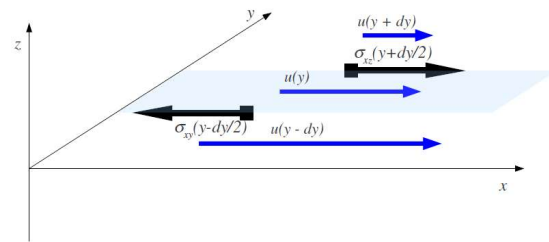
Il faut introduire les équations de Navier-Stokes dans lesquelles les forces de frottement interne sont prises en compte. Les fluides ainsi décrits sont appelés fluides visqueux ou réels, en comparaison aux fluides idéales décrits par les équations d'Euler.

8) Dans ce cas de fluide en mouvement le long de l'axe x , écrire la formule de la force visqueuse par unité de volume entre deux couches verticales.

$$\rho \vec{F}_v = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \vec{i}$$

$$\text{Hypothèse de Newton : } \sigma_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\vec{F}_v = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \vec{i} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \vec{i}$$



9) Décrire la signification et les dimensions de la viscosité moléculaire dynamique et cinématique

La viscosité moléculaire dynamique est le coefficient de proportionnalité introduit par Newton quand émet l'hypothèse que la contrainte visqueuse est proportionnel au gradient de la vitesse .

$$\sigma_{ij} = \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad \mu \text{ viscosité dynamique}$$

La viscosité moléculaire cinématique $\nu = \frac{\mu}{\rho}$. Elle est introduite quand on veut écrire la force visqueuse par unité de volume et représente le flux de quantité de mouvement entre les deux couches.

$$\text{Si } \vec{F}_v = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ alors } [LT^{-2}] = \nu \frac{[LT^{-1}]}{[L^2]} = \nu [T^{-1}L^{-1}]$$

donc ν a dimensions $\frac{[LT^{-2}]}{[T^{-1}L^{-1}]} = [L^2T^{-1}]$ et elle est mesuré en $[m^2 s^{-1}]$.

Alors $\mu = \nu \rho$ a dimensions $[L^2T^{-1}] \frac{[M]}{[L^3]} = [ML^{-1}T^{-1}]$ et elle est mesuré en $[kg m^{-1} s^{-1}]$.

tandis que σ $[ML^{-1}T^{-1}] \frac{[LT^{-1}]}{[L]} = [ML^{-1}T^{-2}]$

14) Traduire en français le texte suivant qui décrit l'expérience de Reynolds sur le phénomène de la turbulence.

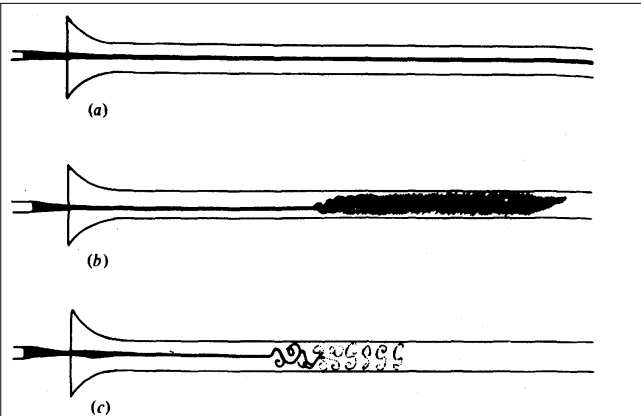
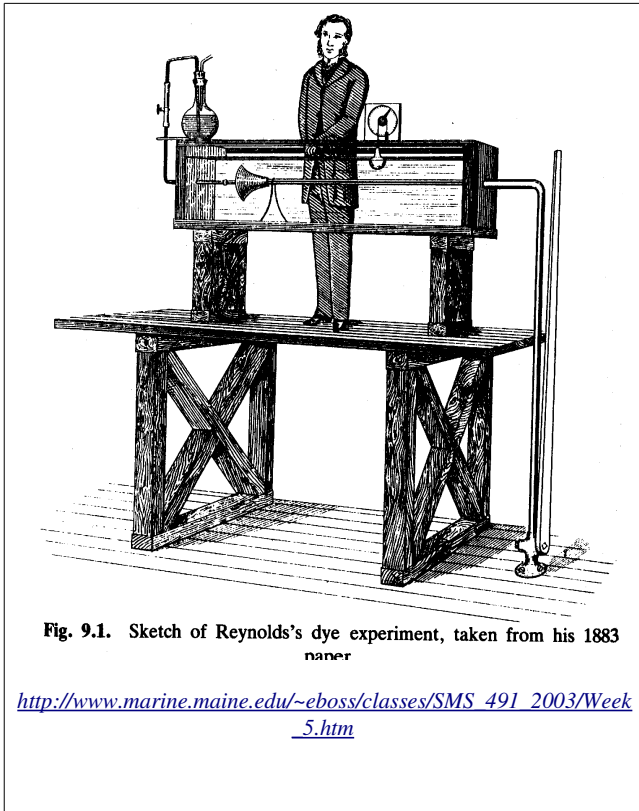


Fig. 9.2. Reynolds's drawings of the flow in his dye experiment.

Reynolds's results were as follows :

At low velocities the streak of dye extended in a straight line along the tube (figure a).

As the velocity increased, at some point in the tube, the color band would all at once mix up with the surrounding waters (figure b).

When viewing the tube with an electric spark, this mixed fluid actually looked like a bunch of coherent eddies (figure c).

SOLUTION

Les résultats de Reynolds ont été comme suit:

À faibles vitesses le filament de colorant s'étend en ligne droite le long du tube (figure a).

En augmentant la vitesse, à un certain moment dans le tube, le filament de colorant diffuse dans l'eau environnante (figure b).

Si on prend une photo avec un flash, cette zone de fluide mélangé avec le colorant ressemblait à un ensemble de tourbillons cohérents (figure c).

15) Décrire la technique de la décomposition des vitesses de Reynolds.

Pour chacune des variables des équation de Navier-Stokes (i.e. les trois composantes de la vitesse et la pression) Reynolds propose la décomposition suivante $u = \bar{u} + u'$, suivie du calcul de la moyenne temporelle de l'équation. \bar{u} est la moyenne temporelle sur une période T et u' les écarts par rapport à la moyenne, telle que $\overline{u'} = 0$:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u dt \quad \overline{u'} = \frac{1}{T} \int_0^T u' dt = 0$$

16) Appliquer la technique de Reynolds (décomposition et moyenne de l'équation) à l'équation de continuité pour un fluide incompressible afin d'obtenir l'équation pour les valeurs moyennes et celle pour les écarts.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial u}{\partial x} dt = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{T} \int_0^T u dt \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{T} \int_0^T (\bar{u} + u') dt \right] = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$$

et de même pour les autres deux termes, alors

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0$$

et enfin on en déduit par soustraction ($u' = u - \bar{u}$) que

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

17) Appliquer la technique de la décomposition sur le premier terme non linéaire de l'équation de la composante x de la quantité de mouvement.

$$\begin{aligned} \overline{u \frac{\partial u}{\partial x}} &= \frac{1}{T} \int_0^T u \frac{\partial u}{\partial x} dt = \frac{1}{T} \int_0^T (\bar{u} + u') \frac{\partial (\bar{u} + u')}{\partial x} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} \right) dt \\ &= \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \overline{\bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{u' \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}} + \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} = \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} \end{aligned}$$

18) Appliquer la technique de la décomposition sur le premier membre de l'équation de la composante x de la quantité de mouvement. Ensuite écrire les trois termes ainsi obtenus et y ajouter l'équation de continuité

pour les écarts (de toute façon, elle vaut zéro) multipliée par u' afin d'obtenir la formulation dans laquelle apparaissent ce qu'on appelle les « tensions de Reynolds ».

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \overline{w' \frac{\partial u'}{\partial z}} = \\ &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y}} + \overline{w' \frac{\partial u'}{\partial z}} + \overline{u' \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right)} = \\ &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \end{aligned}$$

19) De la même façon, écrire les trois composantes et ensuite le tenseur de Reynolds. Utiliser ensuite la fermeture newtonienne proposée par Boussinesq pour remplacer les termes de viscosité turbulente et écrire les équations de Reynolds (ou équations de Navier-Stokes pour un écoulement turbulent).

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{dt} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \\ \frac{d\bar{v}}{dt} &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{v'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \\ \frac{d\bar{w}}{dt} &= \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{w'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{w'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'w'}}{\partial z} \end{aligned}$$

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} \overline{u'u'} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'v'} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'w'} \end{bmatrix}$$

Les termes $\overline{u'u'}$, $\overline{u'v'}$ etc.. ne sont pas nuls et sont appelés **tensions de Reynolds**.

J.V. Boussinesq (1842 – 1929) proposa de relier ces tensions de Reynolds aux composantes du gradient des vitesses moyennes de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \overline{u'u'} &= -A_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} ; & \overline{u'v'} &= -A_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} ; & \overline{u'w'} &= -A_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \\ \overline{v'u'} &= -A_x \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} ; & \overline{v'v'} &= -A_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} ; & \overline{v'w'} &= -A_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \\ \overline{w'u'} &= -A_x \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} ; & \overline{w'v'} &= -A_y \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} ; & \overline{w'w'} &= -A_z \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \end{aligned}$$

où les coefficients A sont appelés coefficients d'échange turbulent (*Austauch* = échange en allemand) ou *eddy viscosity* en anglais.

Contrairement à la viscosité cinématique moléculaire ν , les A ne représentent pas une propriété du fluide, mais de l'écoulement. Ils peuvent varier d'un endroit de l'écoulement à un autre ; en fait, ils dépendent de l'échelle sur laquelle la moyenne a été effectuée .

En passant à droite les termes de viscosité turbulente, les équations de Navier-Stokes pour un écoulement turbulent (ou *RANS equations, Reynolds-averaged Navier-Stokes equations*) deviennent :

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{u}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f\bar{v} + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right] + A_x \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + A_y \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + A_z \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \\ \frac{d\bar{v}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f\bar{u} + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \right] + A_x \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + A_y \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + A_z \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \\ \frac{d\bar{w}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right] + A_x \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + A_y \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + A_z \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2}\end{aligned}$$

Étant donné que $\nu \ll A$ de plusieurs ordres de grandeur elles peuvent être ultérieurement simplifiées et devenir

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{u}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f\bar{v} + A_x \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + A_y \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + A_z \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \\ \frac{d\bar{v}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f\bar{u} + A_x \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + A_y \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + A_z \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \\ \frac{d\bar{w}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + A_x \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + A_y \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + A_z \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2}\end{aligned}$$

TD4 : approximation de Boussinesq, force de Coriolis.

1) En sachant que dans l'océan la masse volumique ρ s'éloigne peu d'une valeur de référence ρ_0 , écrire l'approximation de Boussinesq et l'utiliser pour simplifier l'équation de continuité.

L'eau de mer est un milieu peu compressible. Il paraît donc logique de considérer que dans la plupart des cas la masse volumique ρ s'éloigne peu d'une valeur de référence ρ_0 et peut s'écrire

$$\rho = \rho_0 + \rho'(x, y, z, t),$$

où $\rho' \ll \rho_0$ est la variation due à une certaine stratification.

L'équation de continuité $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0$ devient alors

$$\left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + u \frac{\partial \rho'}{\partial x} + v \frac{\partial \rho'}{\partial y} + w \frac{\partial \rho'}{\partial z} \right) + \rho' \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

L'étude des écoulements géophysiques montre que les variations de densité dans le temps et dans l'espace sont plus faibles ou éventuellement du même ordre de grandeur que les variations du champ de vitesse. Ainsi, le premier groupe de termes est au pire du même ordre de grandeur que le deuxième groupe, qui lui est bien inférieur au troisième puisque $\rho' \ll \rho_0$. Dans l'approximation de Boussinesq seul le premier groupe de termes est conservé et l'équation de continuité se réduit à

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Dans cette approximation, l'équation de conservation de la masse se réduit à la conservation du volume. Ce qui revient à considérer le fluide incompressible.

2) D'une manière analogue, décomposer la pression p en une partie qui ne dépend que de z et où intervient ρ_0 , et une partie fluctuante. En utilisant cette décomposition, réécrire le terme de gradient de pression pour la composante verticale de l'équation de la quantité de mouvement.

$$p = p_0(z) + p'(x, y, z, t) \quad \text{avec} \quad p_0(z) = P_0 - \rho_0 g z$$

En sachant que $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0 + \rho'} = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{1}{1 + \frac{\rho'}{\rho_0}} \right) \approx \frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0} \right)$, ayant utilisé pour la dernière approximation

une propriété de la série géométrique qui dit que: si $|\xi| < 1$ alors $\sum_{k=0}^{\infty} \xi^k = \frac{1}{1-\xi}$, donc

$$\xi^0 + \xi^1 \approx \frac{1}{1-\xi} \quad \text{avec} \quad \xi = -\frac{\rho'}{\rho_0},$$

on obtient:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_o} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_o}\right) \left(\frac{\partial p_o}{\partial z} + \frac{\partial p'}{\partial z}\right) = \\
&= -\frac{1}{\rho_o} \left(\frac{\partial p_o}{\partial z} + \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\rho'}{\rho_o} \frac{\partial p_o}{\partial z} - \frac{\rho'}{\rho_o} \frac{\partial p'}{\partial z}\right) = \\
&= -\frac{1}{\rho_o} \left(-\rho_o g + \frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{\rho'}{\rho_o} \rho_o g - \frac{\rho'}{\rho_o} \frac{\partial p'}{\partial z}\right) = \\
&= g - \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\rho'}{\rho_o} g + \frac{\rho'}{\rho_o^2} \frac{\partial p'}{\partial z} \simeq g - \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\rho'}{\rho_o} g
\end{aligned}$$

3) Écrire les équations du mouvement dans l'approximation de Boussinesq et expliquer le rôle du terme p' .

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p'}{\partial x} + F_x \\
\frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p'}{\partial y} + F_y \quad \text{avec } F_x, F_y, F_z \text{ représentant les termes turbulents} \\
\frac{dw}{dt} &= \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\rho'}{\rho_o} g + F_z
\end{aligned}$$

En résumé, l'approximation de Boussinesq permet de remplacer la masse volumique exacte par sa valeur de référence ρ_o partout sauf dans le terme de l'accélération de la pesanteur. Dans les termes de pression ne restent plus également que la part p' , due à ρ' puisque $p_o(z)$ ne dépend que de z . Cette part p' est appelée pression dynamique, car c'est le principale moteur de l'écoulement.

4) Écrire le principe fondamental de la dynamique (ou 2^{ème} loi de la dynamique) pour une particule fluide de masse dm dans le référentiel absolu des étoiles fixes et dans le référentiel non absolu de la Terre en rotation.

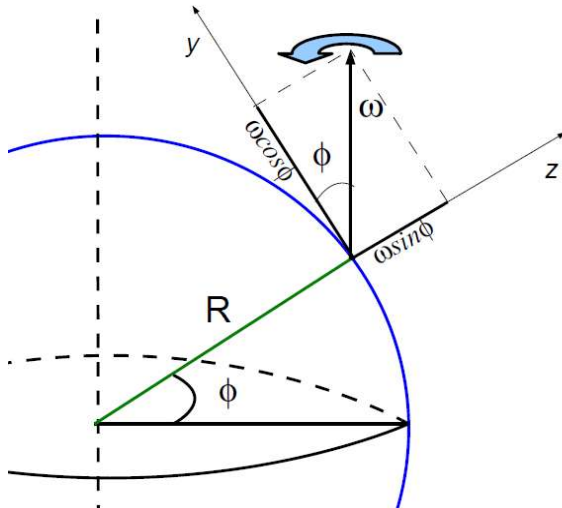
NB: En [physique](#), un **référentiel galiléen** est un [référentiel](#) dans lequel un objet isolé (sur lequel ne s'exerce aucune [force](#) ou sur lequel la résultante des forces est nulle) est soit immobile, soit en mouvement de [translation](#) rectiligne uniforme par rapport à ce référentiel. Cela signifie que le principe d'inertie, qui est énoncé dans la première [loi de Newton](#) s'applique.

Si un référentiel est animé d'un [mouvement accéléré](#) par rapport à un référentiel galiléen, il faut alors faire intervenir les [forces d'inertie](#). Les référentiels galiléens, aussi parfois appelés **référentiels inertiels**, sont nommés ainsi en hommage à [Galilée](#) et plus particulièrement à la [relativité galiléenne](#) [source: <http://fr.wikipedia.org/>]

Dans le référentiel absolu $R_F = (T, \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$, l'ensemble des forces absolues agissant sur la particule est proportionnel à l'accélération absolue: $\vec{F}_A = dm \vec{\gamma}_A$.

Dans le référentiel non absolu $R' = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, la particule a une accélération relative $\vec{\gamma}_r$ qui est liée à l'accélération absolue par la lois de composition des accélérations $\vec{\gamma}_A = \vec{\gamma}_E + \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_C$.

5) Dessiner la décomposition de la vitesse angulaire sur un point de la surface de la Terre aux moyennes latitudes selon ses composantes zonale, méridionale et verticale. Ensuite, écrire explicitement les trois composantes du terme de Coriolis.



$$-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -2 \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \Omega \cos \phi & \Omega \sin \phi \\ u & v & w \end{vmatrix} =$$

$$= (2\Omega v \sin \phi - 2\Omega w \cos \phi) \mathbf{i} - 2\Omega u \sin \phi \mathbf{j} + 2\Omega u \cos \phi \mathbf{k}$$

6) Approximation des « mouvements quasi-horizontaux »

Apporter les simplifications liées à la dominance des mouvements horizontaux et de la force de gravité et écrire les équations du mouvement dans le repère terrestre en rotation en forme vectorielle et par composantes.

$$w \ll u, v$$

$$2\Omega \cos \phi u \ll g$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + f\vec{k} \times \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g} + \vec{F}$$

avec

$$f = 2\Omega \sin \phi$$

et \vec{F} qui représente les termes turbulents

$$\frac{du}{dt} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + F_x$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + F_y$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z$$

7) Approximation « plan-f »

Approximer la formule du paramètre de Coriolis pour une étude à petite échelle ($\sim 100\text{km}$) et calculer sa valeur aux pôles, aux moyennes latitudes et à l'équateur.

On se met sur le plan tangent à la sphère et on considère que f soit constant sur ce plan:

$$f = f_o = 2\Omega \sin \phi_o$$

aux pôles

$$f_o = 2\Omega = 4\pi/86400 = 1.45 \cdot 10^{-4} \text{ rad s}^{-1}$$

aux moyennes latitudes

$$f_o = 2\Omega \sin(\pi/4) = 4\pi/86400 = 1.0310^{-4} \text{ rad s}^{-1}$$

à l'équateur

$$f_o = 0$$

8) Approximation « plan- β »

Pour des échelles plus grandes, admettre une variation linéaire de f et calculer sa valeur dans un point à 1000 km sur un plan centré aux moyennes latitudes (plan).

On se met toujours sur un plan tangent à la sphère, mais maintenant on admet une variation linéaire de f :

$$f = f_o + \beta y$$

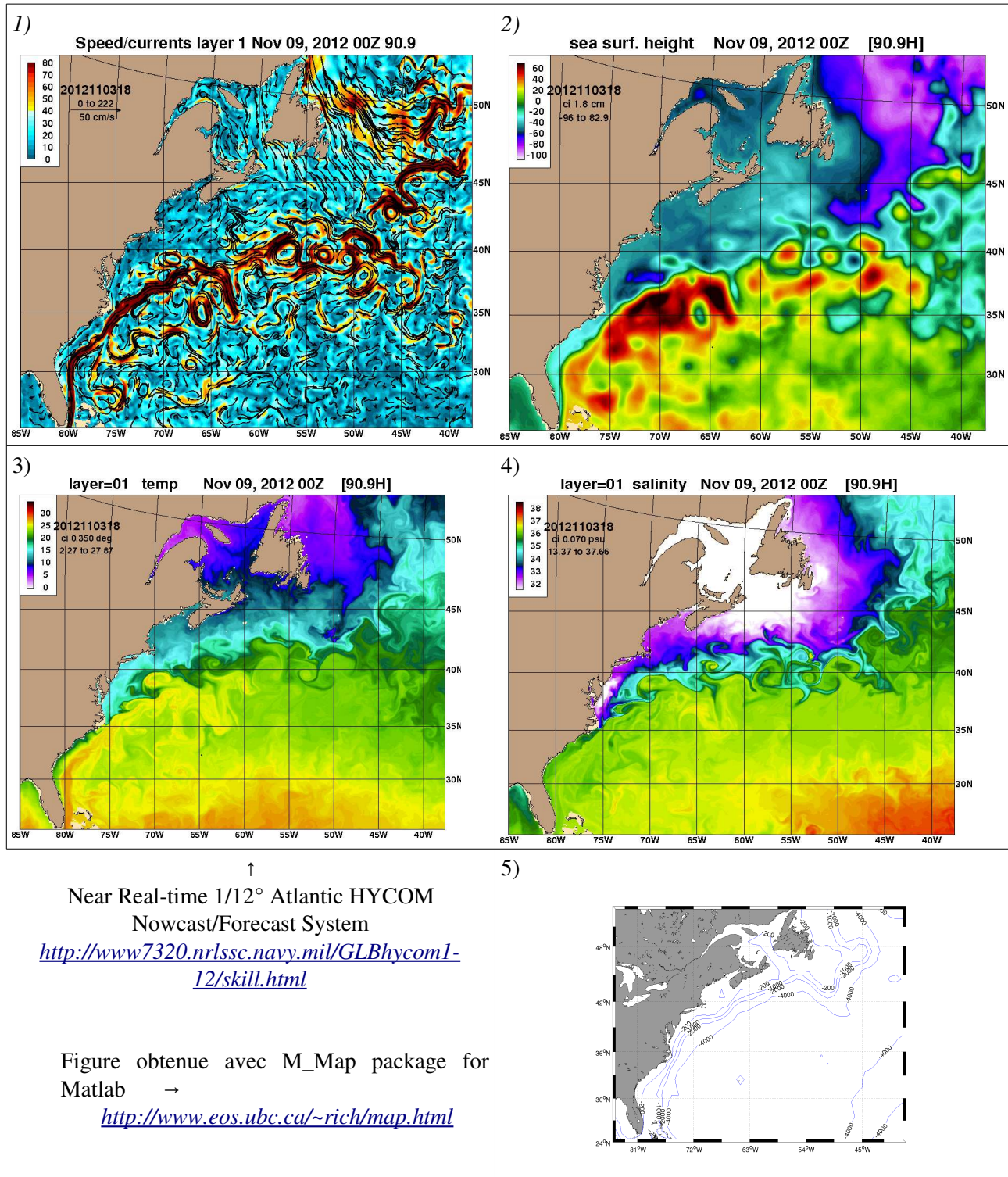
$$\text{où } \beta = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial(2\Omega \sin \phi)}{\partial \phi} \frac{1}{R} = \frac{2\Omega \cos \phi}{R}$$

$$\text{avec } \partial y = R \partial \phi$$

$$\text{aux moyennes latitudes } \beta_{45} = 1,63 \cdot 10^{-11} \quad f = 1,03 \cdot 10^{-4} + 1,63 \cdot 10^{-11} \cdot 10^6 = 1,19 \cdot 10^{-4} \text{ rad s}^{-1}$$

TD 5 : analyse des ordres de grandeur

A l'aide des cartes suivantes, tirées des pages web du site du modèle HYCOM, calculer les ordres de grandeur des différents termes des équations du mouvement et les nombres de Reynolds et de Rossby pour le cas du Gulf Stream.



SOLUTION

En supposant le mouvement comme stationnaire, les équations de la quantité de mouvement deviennent pour l'horizontale

$$+u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv + A_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$+u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu + A_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_y \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + A_z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

avec ordres de grandeurs

$$\frac{U^2}{L} \quad \frac{U^2}{L} \quad \frac{WU}{H} = ? \quad f_o U \quad A_x \frac{U}{L^2} \quad A_y \frac{U}{L^2} \quad A_z \frac{U}{H^2}$$

pour la verticale

$$+u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + A_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + A_z \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

avec ordres de grandeurs

$$\frac{UW}{L} \quad \frac{UW}{L} \quad \frac{W^2}{H} = ? \quad g \quad A_x \frac{W}{L^2} \quad A_y \frac{W}{L^2} \quad A_z \frac{W}{H^2}$$

Dans la figure 1,2,3,4 on voit que le courant avant le détachement dans la zone de Cape Hatteras est long environ 1000 km .

Donc, $L = 1000 \text{ km} = 10^6 \text{ m}$.

NB :	$360^\circ = 2\pi R_T = 2 \times 3.14 \times 6371 \text{ km}$
1° (dégrée)	$\approx 100 \text{ km} \quad \approx 60 \text{ nautical miles}$
1' (minute)	$\approx 2 \text{ km} \quad \approx 1 \text{ nautical mile}$
1" (second)	$\approx 30 \text{ m}$

Dans la figure 5 on voit que $H = 10^3 \text{ m}$ et dans la figure 1 que $U = 10^{-1} \text{ ms}^{-1}$.

La vitesse verticale est estimée à partir de l'équation de continuité:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{W}{H} \approx \frac{U}{L}, \quad W = \frac{UH}{L} = 10^{-4} \text{ ms}^{-1}$$

Pour obtenir les ordres de grandeur des coefficients de viscosité turbulente, on impose aux termes de frottement d'être du même ordre de grandeur que les termes non linéaires:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \approx A_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \frac{U^2}{L} = A_x \frac{U}{L^2}, \quad A_x = UL = 10^{-1} 10^6 = 10^5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad \text{et}$$

$$w \frac{\partial u}{\partial z} \approx A_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \frac{WU}{H} = A_z \frac{U}{H^2}, \quad A_z = WH = 10^{-4} 10^3 = 10^{-1} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

Alors

$$\frac{U^2}{L} \frac{U^2}{L} \frac{WU}{H} = ? \quad f_o U \quad A_x \frac{U}{L^2} \quad A_y \frac{U}{L^2} \quad A_z \frac{U}{H^2} \quad \text{devient}$$

$$10^{-8} \quad 10^{-8} \quad 10^{-8} = ? \quad 10^{-5} \quad 10^{-8} \quad 10^{-8} \quad 10^{-8}$$

$$\frac{UW}{L} \frac{UW}{L} \frac{W^2}{H} = ? \quad g \quad A_x \frac{W}{L^2} \quad A_y \frac{W}{L^2} \quad A_z \frac{W}{H^2} \quad \text{devient}$$

$$10^{-11} \quad 10^{-11} \quad 10^{-11} = ? \quad 10 \quad 10^{-11} \quad 10^{-11} \quad 10^{-11}$$

Le terme de pression, qu'on sait pas estimer, doit être du même ordre de grandeur que le terme de Coriolis: c'est l'équilibre géostrophique sur l'horizontal et l'équilibre hydrostatique sur la verticale!

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - g$$

Nombre de Reynolds

$$Re = \frac{UL}{\nu} = \frac{10^{-1} 10^6}{10^{-6}} = 10^{11} \gg 10^5$$

donc le régime est turbulent.

Nombre de Rossby

$$Ro = \frac{U}{fL} = \frac{10^{-1}}{10^{-4} 10^6} = 10^{-3} < 1$$

donc grande échelle et terme de Coriolis important.

En effet l'approximation géostrophique est valable.

Tabella 43.1 *Scale sinottiche in atmosfera e oceano*

Grandezza	Simbolo	Atmosfera	Oceano	Unità
Scala spaziale orizzontale	L	10^6	10^6	m
Scala temporale	T	10^5	10^6	s
Scala spaziale verticale	H	10^4	10^3	m
Velocità orizzontale	U	10	10^{-1}	m s ⁻¹
Velocità verticale	W	10^{-2}	10^{-4}	m s ⁻¹
Pressione atmosferica al livello del mare	P		10^5	Pa
Fluttuazioni di pressione	ΔP	10^3	?	Pa
Densità del fluido	ρ	1	10^3	kg m ⁻³
Fluttuazioni di densità	$\Delta \rho / \rho$	10^{-2}	10^{-3}	
Fluttuazioni di temperatura potenziale	Θ	4	-	°C
Parametro di Coriolis	f		10^{-4}	s ⁻¹

Tabella 43.2 *Analisi di scala della componente verticale delle equazioni del momento*

Componenti delle equazione	$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} - 2\Omega u \cos \phi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$					
Scale dei vari termini	$\frac{W}{T}$	$\frac{UW}{L}$	$\frac{W^2}{H}$	fU	$\frac{P}{\rho H}$	g
Atmosfera	10^{-7}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-3}	10	10
Oceano	10^{-10}	10^{-11}	10^{-11}	10^{-5}	?	10

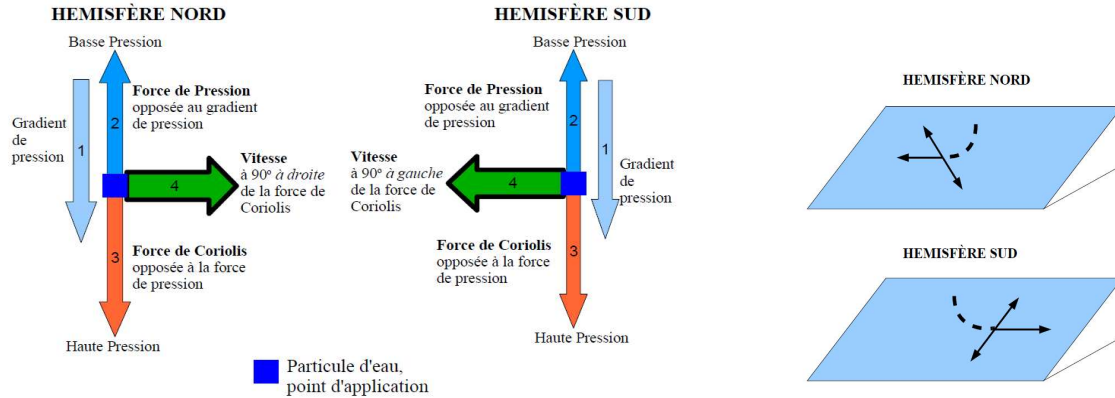
Tabella 43.3 *Analisi di scala delle componenti orizzontali delle equazioni del momento*

Componente in direzione x	$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - 2\Omega v \sin \phi + 2\Omega w \cos \phi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$					
Componente in direzione y	$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + 2\Omega u \sin \phi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$					
Scale dei vari termini	$\frac{U}{T}$	$\frac{U^2}{L}$	$\frac{UW}{H}$	fU	fW	$\frac{\Delta P}{\rho L}$
Atmosfera	10^{-4}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-3}
Oceano	10^{-7}	10^{-8}	10^{-11}	10^{-5}	10^{-8}	?

Tableaux tirés de *Mattioli (1995) Principi Fisici di Oceanografia e Meteorologia*

TD 6 : le courant géostrophique

1) Dessiner le diagramme des forces agissant sur une particule d'eau du Gulf Stream (hémisphère nord) et du Courant des Aiguilles (hémisphère sud), si on considère ces courants en équilibre géostrophique.



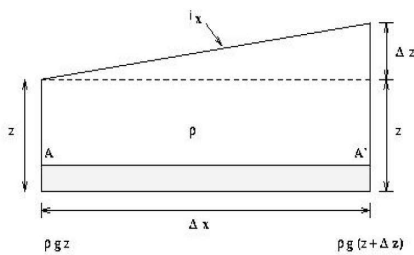
2) À partir de la figure 2 (figure de ssh) du précédent TD, calculer l'intensité approximative du Gulf Stream, en le considérant comme un courant géostrophique barotrope.

Il faut prendre les équations de la géostrophie et remplacer le terme de pression avec celui de la surélévation en utilisant l'approximation hydrostatique.

On prenant l'axe x en direction perpendiculaire à la côte et l'axes y en direction de l'écoulement la deuxième équation est nulle.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= f v \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= -f u \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= -g \end{aligned}$$

Pour calculer la pression dans un point P_1 à la côte et un point P_2 au large on utilise la troisième équation (approximation hydrostatique).



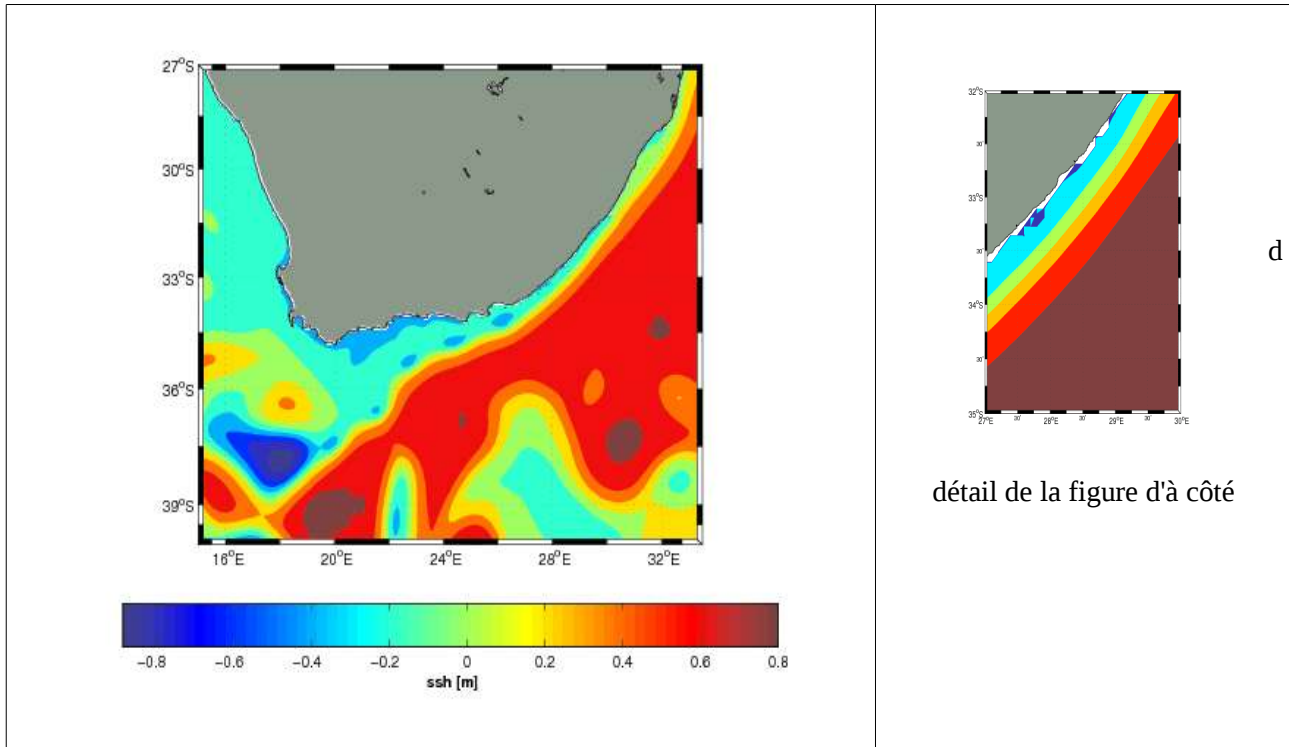
$$\begin{aligned} P_1 &= \rho g z \quad ; \quad P_2 = \rho g (z + \Delta z) \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &\simeq \frac{1}{\rho} \frac{P_2 - P_1}{\Delta x} = \frac{1}{\rho} \frac{\rho g (z + \Delta z) - \rho g z}{\Delta x} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= g \frac{\Delta z}{\Delta x} \end{aligned}$$

NB : la hauteur de la surface de la mer (surélévation) est calculée par rapport au niveau moyen de la mer et est généralement indiquée avec les lettres grecques η ou ζ ou avec ssh (sea surface height).

En remplaçant dans la première équation

$$g \frac{\Delta z}{\Delta x} = f v \quad v \simeq \frac{g}{f} \frac{Z_2 - Z_1}{\Delta x} = \frac{10}{10^{-4}} \frac{0.40 - (-0.2)}{1.5^{\circ}} = \frac{10}{10^{-4}} \frac{6 \times 10^{-1}}{1.5 \times 10^5} = 0.4 [ms^{-1}]$$

3) Le courant des Aiguilles a une intensité d'environ 1 m/s; en supposant que son écoulement soit approximativement géostrophique, calculer la pente de la surface libre associée. Vérifier le résultat sur le champ de surélévation obtenu avec le modèle ROMS (figure ci-dessous). Dessiner les vecteurs de vitesse superposés au champ de surélévation.



SOLUTION

1) Le courant des Aiguilles a une intensité d'environ 1 m/s; en supposant que son écoulement soit approximativement géostrophique, calculer la pente de la surface libre associée.

Vérifier le résultat du modèle ROMS montré sur la figure et dessiner les vecteurs de vitesse barotrope superposés au champ de surélévation.

$$g \frac{\Delta z}{\Delta x} = f v \quad \frac{Z_2 - Z_1}{\Delta x} \approx v \frac{f}{g} = 1 \frac{10^{-4}}{10} = 10^{-5} = \frac{1 \text{ cm}}{1 \text{ km}} = \frac{1 \text{ m}}{100 \text{ km}}$$

À la côte on a -30 cm, au large +70 cm sur un triangle 1°x1° (à 33°S et 28°E) i.e. $\sqrt{2 \times 2 \times 10^{10}} \sim 140 \text{ km}$

Vu qu'on est dans l'hémisphère Sud, les max de pression sont sur la gauche, donc le courant descend la côte africaine de NE vers SO.

On peut observer aussi la Retroflexion des Aiguilles avec le courant de retour qui s'écoule dans l'océan Indien et quelques tourbillons anticycloniques qui se détachent à la hauteur du cape de Bonne Espérance.

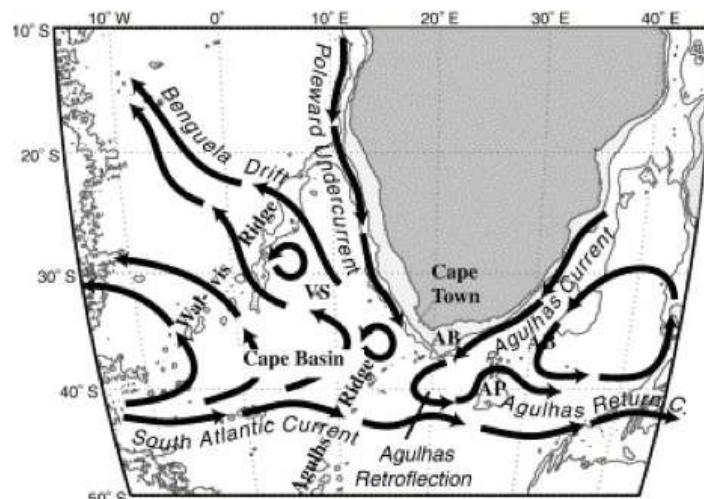


Figure tirée de <http://www.rsmas.miami.edu/personal/lbeal/MPO%20503/Lecture%2016.html>

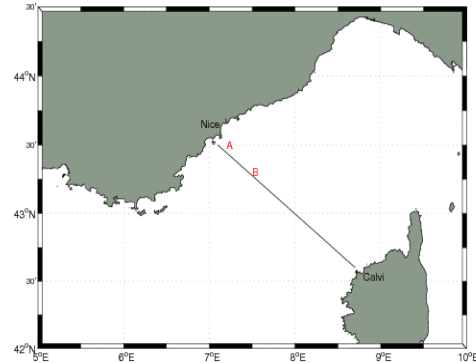
TD 7 : la méthode dynamique

(modifié à partir de Copin-Montégut G., Le Courant Géostrophique, <http://www.obs-vlfr.fr/Enseignement/enseignants/copin/Geostro.pdf>)

1) Une campagne hydrologique a été effectuée sur la radiale Nice-Calvi.

Dans le tableau ci-dessous sont reportées les données relatives à la station A et à la station B, respectivement à 5 milles et à 15 milles au large du Cap Ferrat .

Calculer les anomalies géopotielles D pour la station A à partir des données d'anomalies de volume massique.



Ensuite, en sachant qu'à la latitude 43°N $f = 0.9910^{-4}$ et que 1 mille nautique = 1852 m, calculer la valeur du courant au niveau des différentes isobares par rapport à la surface.

Rapporter les vitesses à l'isobare 300 et dessiner le profil vertical des isobares et des vitesses entre les deux stations et la direction du courant de surface sur la carte.

Station A					Station B	courant	
p [dbar]	T [°C]	S [psu]	δ [$10^{-8} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}$]	D_A [m^2s^{-2}]	D_B [m^2s^{-2}]	V_p [m s^{-1}]	$V_p^{\text{ref}300}$ [m s^{-1}]
0	20.44	37.85	121.963		0		
10	20.42	37.85	121.832		0.116		
20	20.31	37.84	120.110		0.225		
30	20.26	37.86	117.762		0.283		
50	15.86	37.77	19.971		0.264		
75	14.34	37.88	-19.827		0.146		
100	13.66	37.94	-37.396		-0.024		
150	13.16	38.19	-64.196		-0.404		
200	13.30	38.35	-71.563		-0.800		
300	13.59	38.51	-74.256		-1.576		

SOLUTION

Jusqu'à maintenant nous avons utilisé les équations de l'équilibre géostrophique en approximation 2D (barotrope), mais les mêmes équations peuvent aussi nous être utiles pour le calcul d'un champ de courant 3D.

La méthode dynamique nous permet de calculer un profil de vitesse du courant à partir des profils verticaux de température et salinité à deux stations.

D'abord, on prend l'axe x en direction parallèle à la radiale et l'axe y en direction perpendiculaire. On répète le même raisonnement que dans le précédent TD, mais en se place non pas à la surface mais à cette fois à l'intérieur du fluide, on a :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho g z)}{\partial x} \simeq -g \frac{Z_p^A - Z_p^B}{\Delta x}$$

en remplaçant dans l'équation horizontale de la composant y on trouve que la vitesse est fournie par

$$v_p \simeq -\frac{g}{f} \frac{Z_p^A - Z_p^B}{\Delta x}$$

où Z^A et Z^B représentent les profondeurs auxquelles se situe une même isobare p à deux station A et B , éloignées l'une de l'autre d'une distance Δx .

On pourrait envisager de mesurer directement la pente des isobares, en immergeant un jauge de pression, et en mesurant avec précision les longueurs de câble déroulées pour atteindre la pression p aux points A et B . Toutefois on a déjà vu que un courant de 1 m/s, vitesse considérable pour un courant marin, correspond à une pente de 1 cm par km, donc il est totalement exclu d'utiliser une telle méthode qui ne donnerait pas, de loin, une précision suffisante ni sur la mesure de pression ni, encore plus, sur la longueur de câble filé à l'eau.

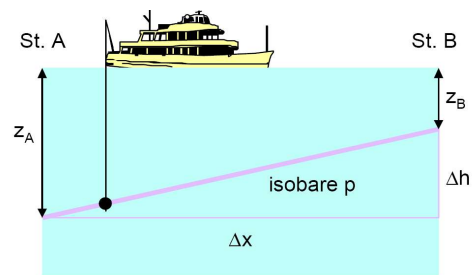


Fig. 14. — Mesure directe de la pente d'une isobare.

tiré de Copin-Montégut G.,
Le Courant Géostrophique
<http://www.obs-vlfr.fr/Enseignement/enseignants/copin/Geostro.pdf>

Calculer la profondeur à laquelle est située l'isobare p intégrant la relation de l'hydrostatique. Ensuite remplacer la densité avec le volume massique.

Étant p une fonction inversible et sans points d'inflexion on peut utiliser la technique de Leibniz et écrire

$$\frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{1}{\rho g}$$

Ensuite on intègre

$$\int_p^0 \frac{\partial z}{\partial p} dp = z_0 - z_p = -\frac{1}{g} \int_p^0 \frac{1}{\rho} dp$$

et on obtient

$$z_p = \frac{1}{g} \int_p^0 \frac{1}{\rho} dp = \frac{1}{g} \int_p^0 \alpha dp$$

Dans le cas de mesures à un nombre de niveaux donné, comme pendant une campagne à la mer, quelle approximation faut-il introduire ?

$$z_p \simeq \frac{1}{g} \sum_p^0 \bar{\alpha} \Delta p$$

$\bar{\alpha}$ représente le volume massique moyen dans chaque intervalle Δp . Il n'est pas nécessaire que les intervalles soient égaux. Ils peuvent s'élargir en profondeur, où les eaux sont de plus en plus homogènes, mais la relation entre z et p sera d'autant meilleure que le pas sera serré.

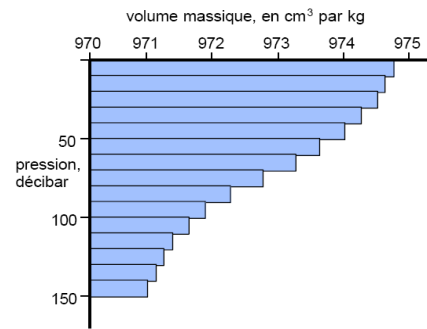


FIG. 15. — La distance géopotentielle de l'isobare 150 dbar correspond à la somme des surfaces des différents rectangles.

tirée de Copin-Montégut G., Le Courant Géostrophique
<http://www.obs-vlfr.fr/Enseignement/enseignants/copin/Geostro.pdf>

Si on définit le géopotentiel comme le produit entre l'accélération de la pesanteur et la profondeur, écrire la formule pour le calculer et indiquer ses unités de mesure.

$$\Phi_p \equiv g z_p = \int_p^0 \alpha dp \simeq \sum_p^0 \bar{\alpha} \Delta p$$

Il s'exprime en m^2s^{-2} (ou J kg^{-1}) dans le système international, mais quelque fois on trouve encore utilisé le mètre dynamiques ($10 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$) ou le mètre géopotentiel ($9.8 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$).

Réécrire la formule de la vitesse géostrophique à l'aide du géopotentiel

$$v_p \simeq -\frac{1}{f} \frac{\Phi_p^A - \Phi_p^B}{\Delta x}$$

Afin de pouvoir calculer le géopotentiel à partir des données hydrologiques, il faut introduire les anomalies de volume massique et de géopotentiel.

$\delta = \alpha_{(T,S,p)} - \alpha_{(0,35,p)}$ anomalie de volume massique

$$\Phi_p \simeq \sum_p^0 \bar{\alpha}_{(T,S,p)} \Delta p = \sum_p^0 \bar{\alpha}_{(0,35,p)} \Delta p + \sum_p^0 \delta \Delta p \quad \text{avec} \quad D_p = \sum_p^0 \delta \Delta p \quad \text{anomalie géopotentielle}$$

Maintenant on peut réécrire la formule pour la vitesse

$$v_p = -\frac{1}{f} \frac{D_p^A - D_p^B}{\Delta x}$$

LES 3 BONNES RAISONS POUR UTILISER LES ANOMALIES

- d'abord permettent de mettre en évidence les différences quand les valeurs absolues sont toutes petites, donc améliorent la précision des calculs numériques ;

- $\alpha = \alpha(T, S, p)$ tandis que $\delta \simeq \delta(T, S)$ en effet $\delta = \delta_{(T,S)} + \delta_{(T,p)} + \delta(S, p)$ où l'anomalie thermostérique $\delta_{(T,S)}$ est dominante et relevée dans des tables (tables de Matthews ou de Sverdrup) ;
- T et S sont mesurées avec plus de facilité .

Calculer les anomalies géopotentielles D pour la station A à partir des données d'anomalies de volume massique.

Avec les anomalies géopotentielles des deux stations A et B distantes 10 milles nautiques (1 mille = 1852 m) et à la latitude de 43°N ($f=0.99 \cdot 10^{-4}$), calculer la valeur du courant au niveau des différentes isobares.

Rapporter les vitesses à l'isobare 300 et dessiner le profil vertical des isobares et des vitesses entre les deux stations et la direction du courant de surface sur la carte.

$$D_{10} = \frac{121.963 + 121.832}{2} \times (10 - 0) \times 10^{-4} = 0.122 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \quad \text{NB: } 1 \text{ dbar} = 10^4 \text{ Pa}$$

$$D_{20} = D_{10} + \frac{121.832 + 120.110}{2} \times (20 - 10) \times 10^{-4} = 0.243 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$$

etc...

$$D_{300} = D_{200} + \frac{-74,256 - 71.563}{2} \times (300 - 200) \times 10^{-4} = -0.849 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$$

En suite

$$v_{10} = -\frac{1}{f} \frac{D_{10}^A - D_{10}^B}{\Delta x} = -\frac{1}{0.99 \cdot 10^{-4}} \frac{0.122 - 0.116}{18520} = -0.0033$$

$$v_{20} = -\frac{1}{f} \frac{D_{20}^A - D_{20}^B}{\Delta x} = -\frac{1}{0.99 \cdot 10^{-4}} \frac{0.243 - 0.225}{18520} = -0.0098$$

etc...

Dans les calculs de V_p , on a que les pentes des isobares successives, mesurées par rapport à la surface de la mer augmentent dans un premier temps, puis prennent ensuite une inclinaison à-peu-près constante . Le courant serait donc nul en surface tandis que augmente en profondeur, ce qui est contraire au bon sens et à l'expérience (voir Fig.17a de Copin-Montegut) .

On peut donc supposer que si les isobares profondes soient parallèles les unes aux autres, c'est qu'elles sont tout simplement horizontales et que la pente maximale se situe en surface . Pour réaliser un nivellement correct, il faut donc se baser sur une isobare profonde supposée horizontale (voir Fig.17b de Copin-Montegut) .

Il n'est pas nécessaire de refaire les calculs, mais calculer la vitesse par rapport à une isobare profonde choisie en prenant le complément au valeur de la vitesse à cette isobare.

$$V_p^{ref300} = V_{300} - V_p$$

Dans l'exemple traité, on choisit l'isobare 300, donc les vitesses sont le complément à $-0,372 \text{ m s}^{-1}$.

On obtient finalement le tableau complet suivant :

p [dbar]	T [°C]	S [psu]	δ [10^{-6} m ³ kg]	D_A [m ² s ⁻²]	D_B [m ² s ⁻²]	V_p [m s ⁻¹]	V_p^{ref300} [m s ⁻¹]
0	20,44	37,85	121,963	0,000	0,000	0,000	-0,372
10	20,42	37,85	121,832	0,122	0,116	-0,003	-0,369
20	20,31	37,84	120,110	0,243	0,225	-0,010	-0,362
30	20,26	37,86	117,762	0,362	0,283	-0,043	-0,329
50	15,86	37,77	19,971	0,500	0,264	-0,128	-0,244
75	14,34	37,88	-19,827	0,500	0,146	-0,193	-0,179
100	13,66	37,94	-37,396	0,428	-0,024	-0,247	-0,125
150	13,16	38,19	-64,196	0,174	-0,404	-0,315	-0,057
200	13,30	38,35	-71,563	-0,165	-0,800	-0,346	-0,026
300	13,59	38,51	-74,256	-0,894	-1,576	-0,372	0,000

Enfin, la direction du courant, vu que on utilise l'approximation géostrophique, sera celle qui tient les niveaux plus haut sur sa droite (si dans l'hémisphère nord).

Dans l'exemple traité, le courant écoule vers le Sud-Ouest. En effet, il s'agit du Courant Liguro-Provençal-Catalan ou Courant Nord.

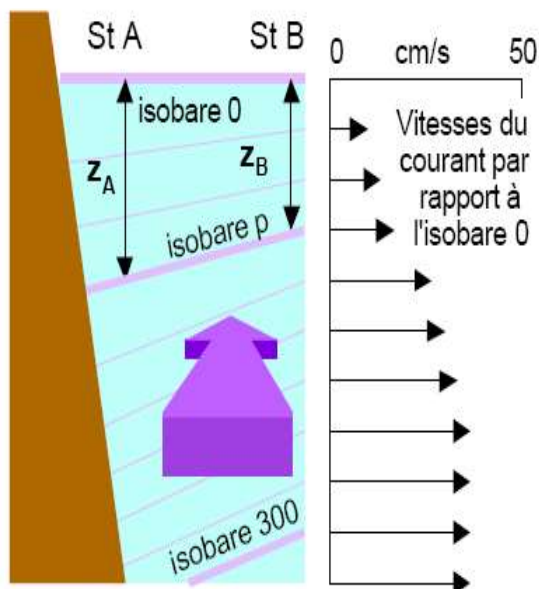


FIG. 17 a — Nivellement des isobares par rapport à la surface

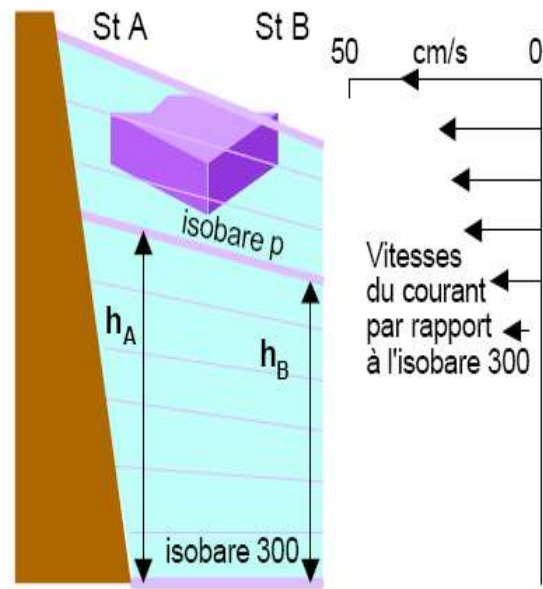


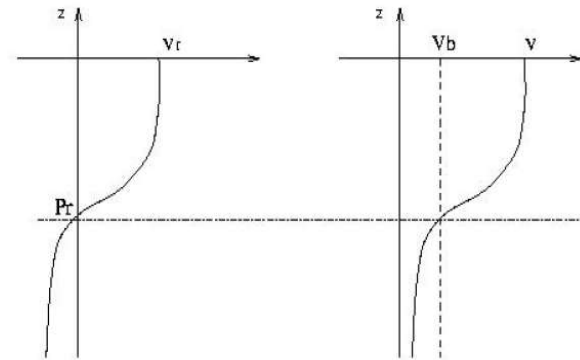
FIG. 17 b — Nivellement des isobares par rapport à une isobare profonde

tirées de Copin-Montégut G., Le Courant Géostrophique
<http://www.obs-vlfr.fr/Enseignement/enseignants/copin/Geostro.pdf>

NOTE

La méthode géostrophique donne le gradient vertical de vitesse. Le passage à la vitesse absolue est un des grands problèmes de l'océanographie physique. Pratiquement, on commence par calculer la vitesse relative par rapport au niveau de vitesse nulle Pr . La vitesse Vb à Pr doit être estimée, et la vitesse absolue est $V = Vb + Vr$. On appelle Vr la composante barocline, et Vb la composante barotrope.

Traditionnellement on supposait le fond des océans en état de quasi-repos, et on calculait les vitesses en supposant un niveau de "mouvement nul" à une profondeur intermédiaire (1000, 2000m, ...). Ceci n'est pas mauvais pour l'estimation des vitesses qui sont plus intenses au dessus de la pycnocline principale. Cependant, l'estimation des transports est très perturbée par des incertitudes, même faibles, dans les couches profondes. La possibilité de faire, depuis quelques années, des mesures directes des courants profonds, a révélé des vitesses parfois importantes au fond des océans.



Daniault (2005) Océanographie Physique

D'autres méthodes existent actuellement, en particulier certains placent beaucoup d'espoir sur la détermination de la pente de surface par altimétrie satellitaire. Actuellement les "méthodes inverses", dont le principe a été exposé par Wunsch (1978), permettent de résoudre un système d'équations de conservation dans un contexte géostrophique.

2) Obtenir les équations du vent thermique en dérivant par rapport à z les équations du mouvement géostrophique et en utilisant l'approximation hydrostatique.

Reprenons les équations géostrophiques sous la forme suivante:

$$\begin{cases} \rho_0 f \frac{\partial v}{\partial z} = -g \frac{\partial \rho}{\partial x} \\ \rho_0 f \frac{\partial u}{\partial z} = g \frac{\partial \rho}{\partial y} \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{g}{\rho_0 f} \frac{\partial \rho}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{g}{\rho_0 f} \frac{\partial \rho}{\partial y} \end{cases}$$

$$\rho_0 f v = \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\rho_0 f u = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

Dérivons les deux premières équations par rapport à z :

$$\frac{\partial(\rho_0 f v)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) = -g \frac{\partial \rho}{\partial x} \text{ te}$$

des équations géostrophiques permettant de relier le gradient vertical de vitesse (géostrophique) au gradient horizontal de densité.

TD 8 Les oscillations d'inertie

L'objectif est de calculer les oscillations d'inertie déclenchées par un coup de Mistral au large de Marseille. Positionner les axes comme dans la figure 1. Le mistral est considéré comme un vent de Nord. On se place à la latitude $\lambda = 43^\circ$, avec un vent de 80 km h^{-1} , la vitesse initiale du courant de surface (V_0) est estimée à environ 50 s^{-1} .

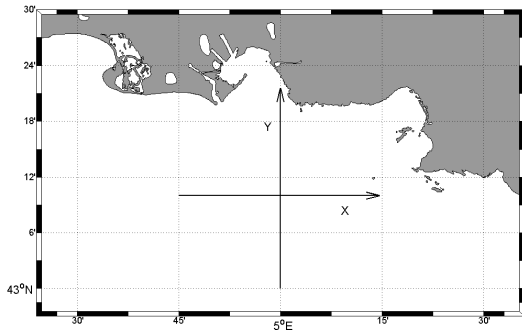


Figure 1 : Carte de la région marseillaise.

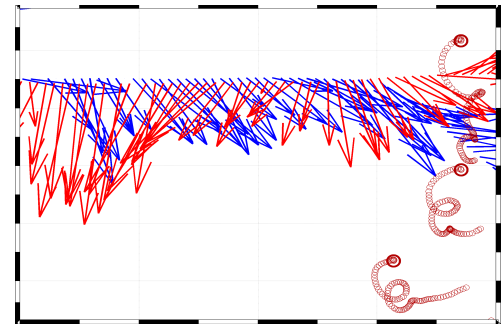


Figure 2 : Trajectoires de flotteurs lagrangiens lâchés pendant la campagne Latex2010 (cercles rouge). Les flèches représentent les vitesses mesurées par l'ADCP de coque du bateau pendant un aller/retour le long d'un même transect.

1) Chercher les équations de u et v , respectivement les composantes zonale et méridienne de la vitesse du courant d'inertie (\vec{v}).

On fixe les conditions initiales suivantes :

vitesse initiale du courant dans la direction du vent,
i.e. $u_{t=0} = 0$. Alors,

$$u_{t=0} = V_0 \cos(\psi) = 0 \quad \text{et} \quad \psi = \pi/2$$

En remplaçant dans l'équation pour v

$$v = -V_0 \sin(ft + \pi/2) \quad \text{et donc}$$

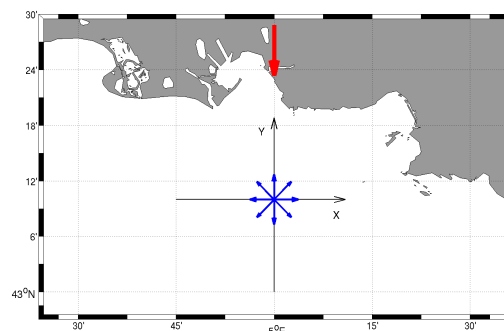
$$v_{t=0} = -V_0 \sin(\pi/2) = -V_0$$

L'intensité dépend du vent, par exemple, pour un vent de 80 km h^{-1} on peut estimer une vitesse du courant de surface $V_0 = 50 \text{ cm s}^{-1}$.

Voir par exemple:

<http://www.dot.state.fl.us/rddesign/dr/Research/CE/Wind-Generated-Currents.pdf>

En rouge vecteur du vent, en bleu vecteurs du courant d'inertie, variant de direction avec le temps.



2) Calculer la valeur de f , et en déduire la période (T) des oscillations d'inerties.

Comme $f = 2\Omega \sin \phi$ avec ϕ la latitude, pour Marseille qui se trouve à la latitude de 43°N , on a $f = 0.056 \text{ [h}^{-1}\text{]}$, donc la période sera $T \approx \frac{(2\pi)}{f} \approx 16 \text{ [h]}$ NB : Une valeur plus précise est $17\text{h}36'$.

3) Calculer \vec{v} (la vitesse du courant d'inertie) à $t=0\text{h}$, $t=4\text{h}$, $t=8\text{h}$ et $t=12\text{h}$. Tracer qualitativement les

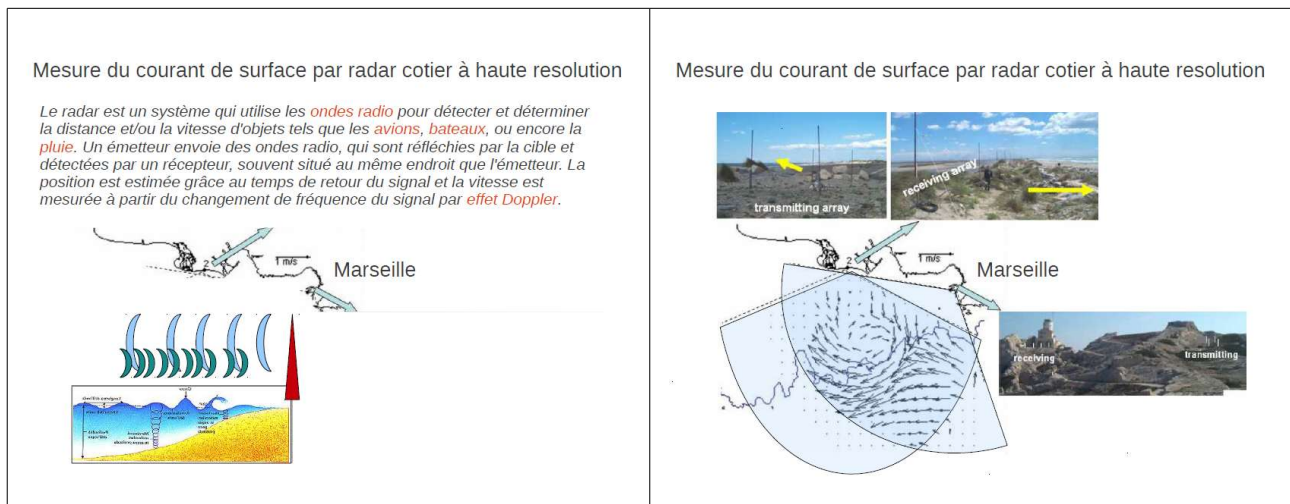
vecteurs obtenus sur la figure 1.

En remplaçant dans les équations pour u et v on obtient

$$\vec{v}_{t=0} \equiv (0, -0.5) \quad , \quad \vec{v}_{t=4h} \equiv (-0.5, 0) \quad , \quad \vec{v}_{t=8h} \equiv (0, +0.5) \quad \text{et} \quad \vec{v}_{t=12h} \equiv (+0.5, 0)$$

4) A l'aide de la figure 2 et de votre cours, discuter l'évolution de la position d'une particule fluide « piégée » dans une oscillation d'inertie.

Les mesures effectuées avec un radar côtier par les collègues de l'Université de Toulon corroborent ce modèle analytique.



De plus, en intégrant de nouveau, avec $u = \frac{dx}{dt}$ et $v = \frac{dy}{dt}$ on obtient la trajectoire :

$$x = x_o + \frac{V_o}{f} \sin(ft + \psi)$$

$$y = y_o - \frac{V_o}{f} \cos(ft + \psi)$$

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = \left(\frac{V_o}{f}\right)^2$$

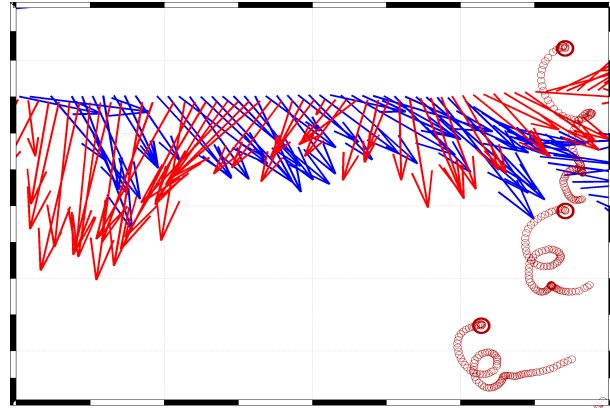
Cette dernière formule montre que la trajectoire parcourue par une particule fluide « piégée » dans une oscillation d'inertie, est un cercle de centre (x_o, y_o) et de rayon $|V_o|/f$.

La force de Coriolis agissant à droite du mouvement dans l'hémisphère nord, la particule parcourt le cercle d'inertie dans le sens indirect, soit dans le sens des aiguilles d'une montre. C'est l'inverse dans l'hémisphère sud.

Le cercle d'inertie est parcouru en un temps T indépendant de la vitesse de la particule.

Des cercles purs sont difficiles à observer dans la nature à cause du frottement toujours présent dans la réalité, mais ils sont très souvent observés avec des flotteurs lagrangiens en tant que trajectoires circulaires s'atténuant au cours du temps. Dans la figure ci-contre, sont dessinées les trajectoires de flotteurs lagrangiens lâchés pendant la campagne Latex2010.

Le flèches représentent les vitesses mesurées par l'ADCP de coque pendant un aller-retour le long d'un même transept.



```

Script Matlab pour les figures
clear; close all;

%- area limits -% (in degrees)
lon_min = 4.4;
lon_max = 5.6;
lat_min = 42.95;
lat_max = 43.5;
%
%- Geographip projection for m_map -%
projection = 'mercator';
%%% FIGURE
figure(1);hold on
m_proj(projection,'lon',[lon_min lon_max],'lat',[lat_min lat_max]);
m_grid('box','fancy','tickdir','in');

%m_gshhs('high','save','GoL.mat')
m_usercoast('./GoL.mat','patch',[0.6 0.6 0.6]);

%[elev,lon,lat]=m_elev([lon_min lon_max lat_min lat_max]);
%[C,h]=m_contour(lon,lat,elev,[-50 -100 -200 -500],'b');
%text_handle = clabel(C,h);
%set(text_handle,'BackgroundColor',[1 1 .6],'Edgecolor',[.7 .7 .7])

%m_quiver(4.75,43.48,0,-1,'r','LineWidth',4,'Maxhead',0.9);
m_quiver(5.00,43.48,0,-1,'r','LineWidth',4,'Maxhead',0.9);
m_quiver(5.25,43.48,0,-1,'r','LineWidth',4,'Maxhead',0.9);

m_quiver(5.00,43,0,3.5,'k','LineWidth',1,'Maxhead',0.2);
m_text(4.96,43.29,'Y')

m_quiver(4.75,43.1667,3.5,0,'k','LineWidth',1,'Maxhead',0.2);
m_text(5.15,43.14,'X')

V0=0.5 %[m/s]
f=2*2*pi/86400*sind(43) %[1/s]
phi=pi/2

t=[0:2*pi/f/8:2*pi/f]

u=V0*cos(f*t+phi);
v=-V0*sin(f*t+phi);

for i=1:max(size(u))

    %m_quiver(4.75,43.16667,u(i),v(i),'b','LineWidth',2,'Maxhead',0.8);
    m_quiver(5.00,43.16667,u(i),v(i),'b','LineWidth',2,'Maxhead',0.8);

    % m_quiver(4.75,43,u(i),v(i),'b','LineWidth',2,'Maxhead',0.8);
    %m_quiver(5.00,43,u(i),v(i),'b','LineWidth',2,'Maxhead',0.8);
    % m_quiver(5.25,43,u(i),v(i),'b','LineWidth',2,'Maxhead',0.8);

    pause(0.5)
end

%- Figure Printing -%
print(1,['./InertialOscillation.png'],'-dpng','-r200');

```

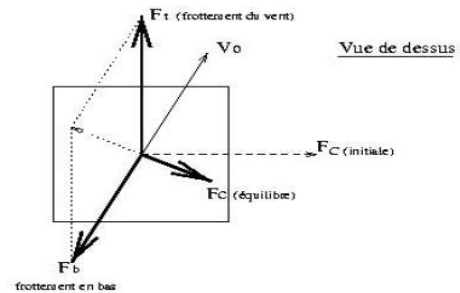
TD 8 : la spirale d'Ekman

1) Dessiner le diagramme du bilan des forces agissant sur un iceberg en mouvement traîné par le vent.

Soit un élément fluide à la surface de l'océan.

Le vent, qui commence à souffler, exerce sur le haut de cet élément une force de frottement F_t et initie un déplacement dans cette direction, qui initie à son tour une force de Coriolis F_{ci} qui va dévier le mouvement vers la droite. Une force de frottement à la base de l'élément fluide F_b s'oppose au déplacement.

Le vent étant supposé constant, un équilibre va être atteint (vitesse V_o) entre les forces F_t , F_c et F_b .



tirée de Daniault (2005), Oceanographie Physique

Écrire les équations du mouvement linéarisées, en état stationnaire et avec frottement.

$$\begin{aligned} -f v &= -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\ +f u &= -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \end{aligned}$$

Pour obtenir la solution d'Ekman, on peut considérer la solution du problème comme la somme de deux solutions de deux problèmes séparés, $v = v_G + v_E$, avec v_G vitesse géostrophique et v_E vitesse due au forçage du vent. Écrire les équations pour chacun des deux problèmes.

$$\begin{aligned} \text{Équations géostrophiques} \quad -f v_G &= -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p}{\partial x} & \text{Équations d'Ekman} \quad -f v_E &= -\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\ +f u_G &= -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p}{\partial y} & +f u_E &= -\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \end{aligned}$$

Écrire la solution analytique du transport d'Ekman, en intégrant les équations d'Ekman d'une profondeur $-z_E$ où l'effet du vent est négligeable, jusqu'à la surface

$$\begin{aligned} -f \int_{-z_E}^0 v_E dz &= -\int_{-z_E}^0 \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz = [-\tau_{xz}]_{-z_E}^0 = [-\tau_{x0} + \tau_{x-z_E}] = -\tau_{x0} \\ +f \int_{-z_E}^0 u_E dz &= -\int_{-z_E}^0 \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} dz = [-\tau_{yz}]_{-z_E}^0 = [-\tau_{y0} + \tau_{y-z_E}] = -\tau_{y0} \end{aligned}$$

avec (τ_{x0}, τ_{y0}) frottement du vent à la surface ; en multipliant par ρ_o on retrouve un formule classique :

$$\begin{aligned} F_y &= +f M_x \quad \text{avec} \quad F_y = -\rho_o \tau_{y0} \quad \text{et} \quad M_x = \rho_o \int_{z_E}^0 u_E dz \\ F_x &= -f M_y \quad \text{avec} \quad F_x = -\rho_o \tau_{x0} \quad \text{et} \quad M_y = \rho_o \int_{z_E}^0 v_E dz \end{aligned}$$

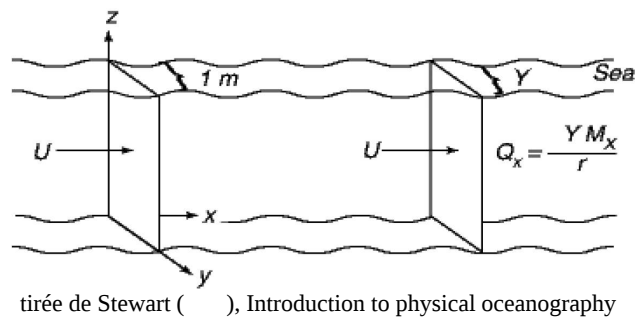
Trouver les dimensions de M_x et M_y et calculer le transport de volume associé.

L'équation aux dimensions de M_x et M_y donne $[ML^{-1}T^{-1}]$.

Il s'agit d'un transport de masse, soit la masse d'eau passant à travers un plan vertical large de 1m et de hauteur z , par unité de temps. Ces quantités M_x et M_y représentent le "transport d'Ekman".

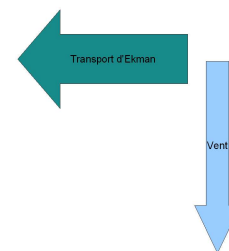
On obtient le transport de volume (débit) en divisant ces quantités par la densité et en multipliant par la largeur de la section choisie:

$$Q_x = \frac{\Delta Y M_x}{\rho_o} \quad Q_y = \frac{\Delta X M_y}{\rho_o}$$



Dessiner les vecteurs du vent et du transport d'Ekman dans l'hémisphère Nord .

Notons qu'un vent soufflant du Nord ($F_x=0, F_y < 0$), génère un transport de masse vers l'Ouest (dans d'hémisphère Nord où $f < 0$).



C'est toujours l'effet de la force de Coriolis: pour un observateur regardant dans le sens du vent, l'eau va être poussée vers la droite dans l'hémisphère Nord et vers la gauche dans l'hémisphère Sud .

En utilisant la fermeture newtonienne de la turbulence, on peut replacer le terme de tension du vent par le terme de viscosité turbulente et en suite obtenir les profils verticaux de u_E et v_E dans la couche d'Ekman. Écrire les formules de la fermeture newtonienne pour la tension du vent et les équations d'Ekman correspondantes en composantes, en forme vectorielle et en forme complexe.

$$\begin{aligned} \tau_{zy} &= -A_z \frac{\partial v}{\partial z} & -fv_E &= A_z \frac{\partial^2 u_E}{\partial z^2} & f \vec{k} \times \vec{u}_E &= A_z \frac{\partial^2 \vec{u}_E}{\partial z^2} \\ \tau_{zx} &= -A_z \frac{\partial u}{\partial z} & +fu_E &= A_z \frac{\partial^2 v_E}{\partial z^2} & if(u_E + iv_E) &= A_z \frac{\partial^2}{\partial z^2}(u_E + iv_E) \end{aligned}$$

Pour obtenir la forme vectorielle il faut multiplié l'équation pour la composante x par i et sommer les deux équations, en se rappelant que $i^2 = -1$.

Estimer avec cette équation et les valeurs des ordres de grandeur du TD précédant, l'épaisseur de la couche de surface ou couche d'Ekman

Dans cette couche la friction équilibre la force de Coriolis :

$$fU \simeq A_z \frac{U}{H_E^2} \rightarrow H_E = \sqrt{\frac{A_z}{f}} \text{ , alors si } A_z \simeq 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \text{ , } f \simeq 10^{-4} \text{ s}^{-1} \text{ , on a } H_E \simeq 10 \text{ m.}$$

Les couches d'Ekman de surface ont une épaisseur typique de quelques dizaines de mètres.

Écrire les conditions à la surface ($z=0$) et au fond ($z \rightarrow -\infty$) en forme complexe dans le cas d'un vent qui souffle en direction y (i.e $\tau_{x0} = 0$).

$$z = 0 \quad \rho A_z \frac{\partial}{\partial z} (u_E + iv_E) = iF_y$$

$$z \rightarrow -\infty \quad (u_E + iv_E) \rightarrow 0$$

RAPPEL: équations différentielles linéaires d'ordre deux à coefficients constants.

Elles sont de la forme $ay'' + by' + cy = 0$ où a, b et c sont des réels et a est non nul; dans notre cas $b=0$.

On les rencontre, entre autres, dans la modélisation de mouvement avec force de rappel (type ressort), avec ou sans amortissement.

On cherche des solutions sous forme exponentielle, c'est-à-dire telles que $y = e^{\lambda x}$.

Une telle fonction sera solution de l'équation différentielle si et seulement si λ est solution de $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Cette équation est appelée équation caractéristique de l'équation différentielle. Comme pour toute équation du second degré, trois cas se présentent selon le signe du discriminant.

Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, l'équation possède deux solutions λ_1 et λ_2 , c'est-à-dire deux fonctions exponentielles solutions $f_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ et $f_2(x) = e^{\lambda_2 x}$.

On démontre que ces deux solutions engendrent l'ensemble des solutions. C'est-à-dire que l'ensemble des solutions sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par $f(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$ où C_1 et C_2 sont deux réels quelconques.

Tirée de http://fr.wikipedia.org/wiki/Équation_différentielle_linéaire_d'ordre_deux

Trouver les valeur de λ dans notre cas

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(u_E + iv_E) - \frac{if}{A_z}(u_E + iv_E) = 0 \quad \lambda^2 - \frac{if}{A_z} = 0 \quad \lambda = \pm \sqrt{\frac{if}{A_z}}$$

Quels sont les dimensions de λ ?

$$\sqrt{\frac{if}{A_z}} \rightarrow \sqrt{\frac{[T^{-1}]}{[L^2][T^{-1}]}} = L^{-1}$$

Ayant définie la profondeur d'Ekman comme :

$$D_E = \pi \sqrt{\frac{2A_z}{f}} \quad \text{exprimer } \lambda \text{ en fonction de } D_E \quad \lambda = \pm \sqrt{\frac{if}{A_z}} = \pm \sqrt{2i} \frac{\pi}{D_E} = \pm (1+i) \frac{\pi}{D_E}$$

Écrire la solution générale

$$u_E + iv_E = C_1 e^{+(1+i)\frac{\pi}{D_E}z} + C_2 e^{-(1+i)\frac{\pi}{D_E}z}$$

Appliquer la condition au fond

$$C_2 = 0 \rightarrow u_E + iv_E = C_1 e^{+(1+i)\frac{\pi}{D_E}z}$$

Appliquer la condition à la surface

$$\begin{aligned} \rho A_z \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(C_1 e^{+(1+i)\frac{\pi}{D_E}z} \right) \right]_{z=0} &= iF_y \\ \rho A_z \left[C_1 e^{+(1+i)\frac{\pi}{D_E}z} (1+i) \frac{\pi}{D_E} \right]_{z=0} &= iF_y \\ \rho A_z C_1 (1+i) \frac{\pi}{D_E} &= iF_y \end{aligned}$$

$$C_1 = \frac{iF_y D_E}{(1+i)\pi \rho A_z} = \frac{i}{(1+i)} \frac{F_y D_E}{\pi \rho A_z} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{F_y D_E}{\pi \rho A_z} = U_o e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ avec } U_o = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{F_y D_E}{\pi \rho A_z}$$

NB: $\frac{i}{(1+i)} = \frac{i(1+i)}{(1+i)(1+i)} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{i}{2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}$ avec la formule d'Euler

Quels sont les dimensions de U_o ?

$$\frac{M L^{-3} M^2 T^{-2} L}{M L^{-3} M^2 T^{-1}} = L T^{-1}$$

Celles d'une vitesse, en effet il s'agit de la vitesse à la surface

Écrire la solution d'Ekman en forme complexe et par composantes

$$u_E + iv_E = U_o e^{i\frac{\pi}{4}} e^{+(1+i)\frac{\pi}{D_E}z} = U_o e^{\frac{\pi}{D_E}z} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{D_E}z\right)}$$

$$u_E = U_o e^{\frac{\pi}{D_E} z} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{D_E} z\right)$$

$$v_E = U_o e^{\frac{\pi}{D_E} z} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{D_E} z\right)$$

Calculer la profondeur d'Ekman à la latitude de $45^\circ N$ ($f=1.03 \cdot 10^{-4} s$) avec $A_s=10^{-2} m^2 s^{-1}$

$$D_E = \pi \sqrt{2 \cdot 10^{-2} \frac{1}{1.03} 10^4} \simeq 42 [m]$$

En se mettant toujours à la latitude de $45^\circ N$, calculer à la profondeur d'Ekman $z = -D_E$ l'intensité de la vitesse en pourcentage par rapport à la vitesse de surface et sa direction

$$(u_E + i v_E)_{z=-D_E} = U_o e^{-\pi} e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \pi\right)} = U_o e^{-\pi} e^{i\left(-\frac{3}{4}\pi\right)} \simeq 0.04 U_o e^{i\left(-\frac{3}{4}\pi\right)}$$

L'intensité est le 4% de la valeur en surface, soit est négligeable.

La direction est $-\frac{3}{4}\pi = -135^\circ$ par rapport au vent et donc 180° (direction opposée) par rapport à la vitesse de surface.

Dessiner la Spirale d'Ekman en 3D

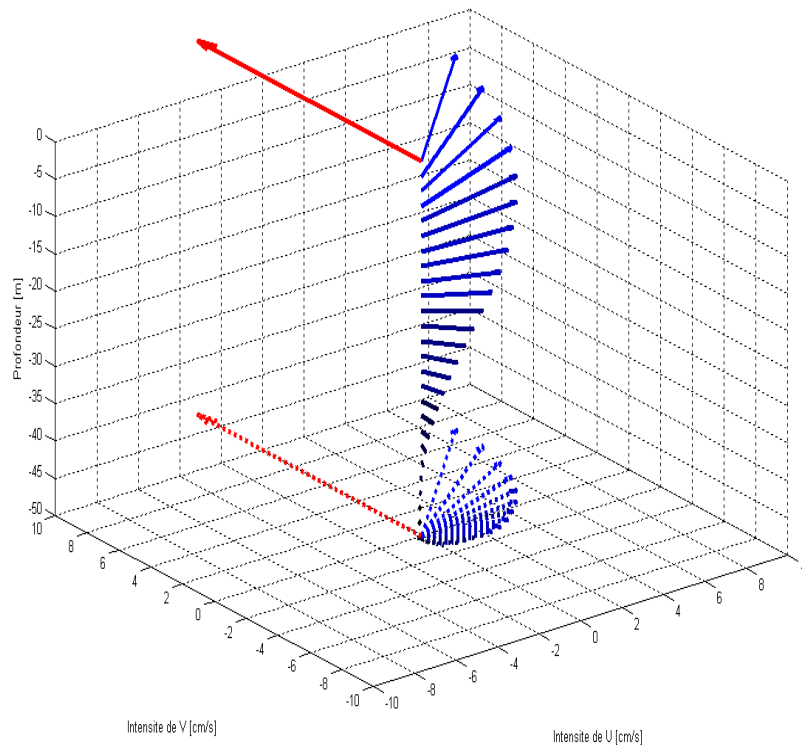


figure Matlab obtenue avec le script en annexe

```
%Script Octave/Matlab pour dessiner la Spiral d'Ekman de surface
```

```
clear all;close all

f=1.04*10^-4 %facteur de Coriolis [s^-1]
Az=10^-1.5 %viscosité turbulente [m^2 s^-1]
U0=1%Vitesse de frottemen du vent [m s^-1]

De=sqrt(2*Az/f)%Profondeur d'Ekman [m]
Uw=U0*(cos(pi/4)-sin(pi/4));
Vw=U0*(sin(pi/4)+cos(pi/4));

z=[-50:0]%Profondeur [m]

%%Equation EKMAn surface
[trash,izmax]=size(z);
for iz=izmax:-1:1;
    Ue=U0*exp(pi/De*z(iz))*cos(pi/4 + pi/De*z(iz));
    Ve=U0*exp(pi/De*z(iz))*sin(pi/4 + pi/De*z(iz));
    We=0;

    figure(1); hold on
    h=quiver(0,0,Ue,Ve,10);
    set(h,'color',[0 0 iz/izmax],'LineWidth',3)

    figure(2); hold on
    h=quiver3(0,0,z(iz),Ue,Ve,We,10);
    set(h,'color',[0 0 iz/izmax],'LineWidth',3)
    h=quiver3(0,0,z(1),Ue,Ve,We,10);
    set(h,'color',[0 0 iz/izmax],'LineWidth',3,'LineStyle',':')
end

figure(1); hold on
h=quiver(0,0,Uw,Vw,10,'r');
axis([-10 10 -10 10])
xlabel('Intensite de U [cm/s]')
ylabel('Intensite de V [cm/s]')

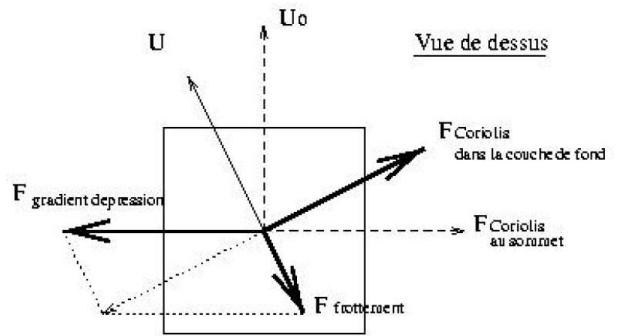
figure(2); hold on
h=quiver3(0,0,0,Uw,Vw,0,10,'r','LineWidth',3);
h=quiver3(0,0,z(1),Uw,Vw,0,10,'r','LineWidth',3,'LineStyle',':');
axis([-10 10 -10 10 -50 0])

xlabel('Intensite de U [cm/s]')
ylabel('Intensite de V [cm/s]')
zlabel('Profondeur [m]')
view(3)
grid on
```

TD 9 couche d'Ekman de fond

Démontrer qualitativement que dans la **couche d'Ekman de fond** le courant est dévié vers la gauche dans l'hémisphère Nord. Dessiner un diagramme des forces comme celui de Nansen.

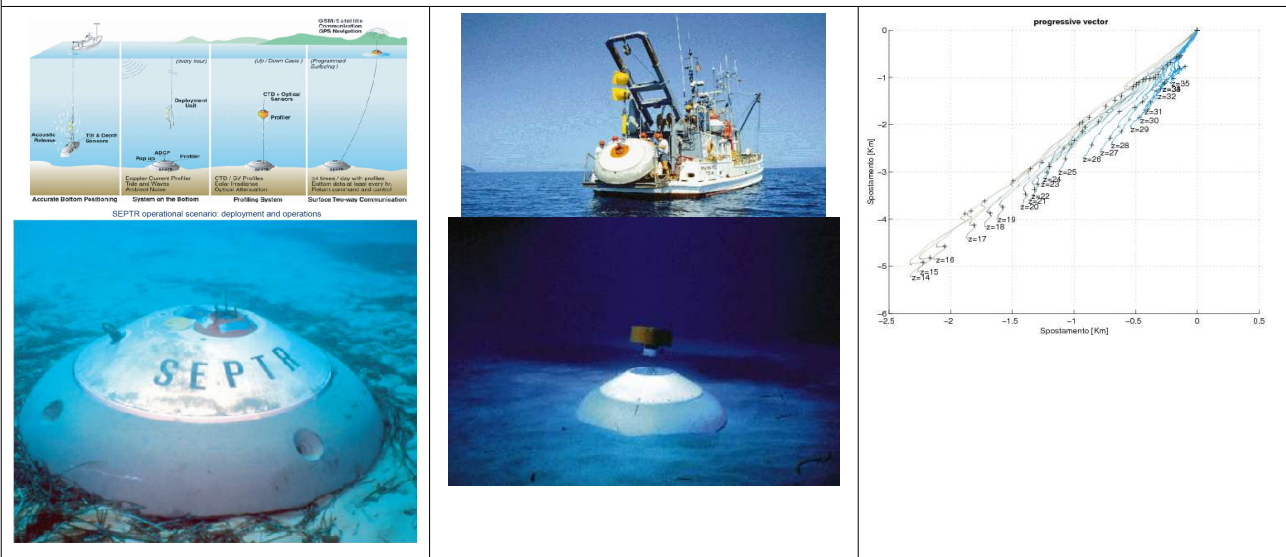
S'il existe un courant à l'intérieur de l'océan, il doit de même exister une "couche de frottement" permettant de ramener la vitesse à zéro au contact du fond. Un argument qualitatif identique à celui de Nansen permet de prédire que le courant est dévié vers la gauche dans la couche d'Ekman de fond: au dessus de la couche d'Ekman de fond, le courant est en équilibre géostrophique, avec la force de Coriolis agissant à droite (hémisphère nord) et la force du gradient de pression à gauche. On suppose que l'écoulement est barotrope, donc le gradient de pression ne dépend pas de la profondeur.



tirée de Danialt (2005), Oceanographie Physique

En s'approchant du fond, le frottement ralentit l'écoulement; la force de Coriolis, proportionnelle à la vitesse, diminue; la force du gradient de pression, agissant vers la gauche, n'est donc plus totalement équilibrée. L'écoulement est dévié vers la gauche, jusqu'à ce que les forces de Coriolis et de frottement puissent de nouveau équilibrer la force du gradient de pression. Contrairement à l'équilibre géostrophique, la vitesse a une composante dirigée vers les basses pressions. Cet écoulement à travers les isobares implique que les forces de pression produisent un travail qui compense la dissipation visqueuse et permet de maintenir l'écoulement.

EXAMPLE: mesures à Portofino (Golfe de Gênes) avec le SEPTR (Shallow water Environmental Profiler in Trawl-safe Real-time configuration): on retrouve le profile du BOTTOM EKMAN LAYER?



TD 10 : la circulation forcée par le vent

1) Calculer le transport méridien d'Ekman et total sur une zone de l'Atlantique nord s'étendant 1000 km autour d'un point à 35° de latitude nord où le vent d'Ouest souffle à 7 m/s.

En considérant l'océan Atlantique comme large 5000 km, calculer aussi les transports de volume correspondant aux transports de masse.

Pour calculer le frottement dû au vent, utiliser la formule quadratique: $\vec{F} = \rho_{air} C_D |\vec{W}_{10}| \vec{W}_{10}$ où $\rho_{air} \simeq 1.2 \text{ kg m}^{-3}$ et $C_D \simeq 10^{-3}$, tandis que le frottement au fond peut être négligé.

Considérant les vents d'Ouest dans une direction purement zonales $F_x = 0.06 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2}$ ou N m^{-2} ou Pa, $F_y = 0$, le paramètre le Coriolis vaut $f_{35^\circ} = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, alors le transport dans la couche d'Ekman est

$$M_{yE} = -\frac{F_x}{f} = -6 \cdot 10^2 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

Le rotationnel du frottement du vent donne $\hat{k}(\nabla \times \vec{F}) = -\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{0.06}{10^6} = -6 \cdot 10^{-8} \text{ N m}^{-3}$,

le coefficient $\beta = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial(2\Omega \sin \phi)}{\partial \phi} \frac{1}{R} = \frac{2\Omega \cos \phi}{R} = 2 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$, alors

si $w_b = 0$ le transport totale est

$$M_y = \frac{\hat{k}(\nabla \times \vec{F})}{\beta} = -3 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

Le transport méridien d'Ekman contribue donc au 1/5 du transport méridien total.

Le signe négatif indique que le transport se fait vers le sud.

Intégré sur la largeur de l'océan, et considérant $\rho_o = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ le transport d'Ekman en volume donne

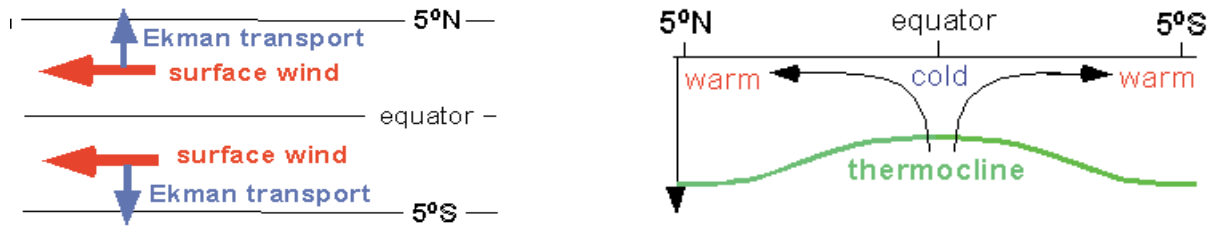
$$Q_{yE} = \frac{\Delta X M_{yE}}{\rho_o} = -3 \cdot 10^6 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \text{ ou } 0.6 \text{ Sv}$$

tandis que le transport total en volume est de

$$Q_y = \frac{\Delta X M_y}{\rho_o} = -15 \cdot 10^6 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \text{ ou } 3 \text{ Sv}$$

2) Calculer le pompage d'Ekman (i.e. la vitesse verticale à la base de la couche d'Ekman) créée par les alizés à l'équateur entre 2.5°N et 2.5°S.

Dessiner d'abord un schéma du phénomène sur le plan horizontal et vertical, en suite faire le calcul en considérant une vitesse du vent de 5 m/s.



http://www-das.uwyo.edu/~geerts/cwx/notes/chap11/equat_upwel.html

La formule pour le pompage d'Ekman est $w_E = \frac{\vec{k}(\nabla \times \vec{F}) - \beta [M_y]_{-h}^0}{\rho_o f}$

Si on met l'axe x en correspondance de l'équateur et on néglige les effets liés à la variation de Coriolis avec la latitude (attention au signe de f et de Δy !)

$$w_E = \frac{\vec{k}(\nabla \times \vec{F})}{\rho_o f}$$

Pour le forçage du vent

$$\vec{F} = \rho_{air} C_D |\vec{W}_{10}| \vec{W}_{10} \text{ donne } F_x = 0.03 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2} \text{ ou N m}^{-2} \text{ ou Pa .}$$

En prenant $\Phi = 2.5^\circ \rightarrow f = 2\Omega \sin \Phi \approx 6 \cdot 10^{-6} [\text{s}^{-1}]$

$$\Delta y = 5 \cdot 10^5 [\text{m}]$$

$$\rho_o \approx 10^3 [\text{kg m}^{-3}]$$

on obtient finalement,

$$w_E \approx -\frac{F_x}{\rho_o f \Delta y} \approx -\frac{-3 \cdot 10^{-2}}{10^3 \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^5} \approx 10^{-5} \text{ m s}^{-1} \approx 1 \text{ m par jour}$$

RAPPEL

Le **pascal (symbole: Pa)** est l'unité SI de contrainte et de pression. Contrainte qui, agissant sur une surface plane de 1 mètre carré, exerce sur cette surface une force totale de 1 newton. Pression uniforme qui, agissant sur une surface plane de 1 mètre carré, exerce perpendiculairement à cette surface une force totale de 1 newton. Cette unité s'exprime en unités de base comme étant le $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$.

Le pascal étant une unité relativement petite par rapport aux valeurs usuelles, on utilise principalement un de ses multiples :

le mégapascal (Mpa), 1 MPa = 10⁶ Pa. Conversion vers des unités hors du SI :

$$1 \text{ Pa} \approx 7,500 \text{ 615} \cdot 10^{-3} \text{ millimètre de mercure (mmHg, ou torr)}$$

$$1 \text{ Pa} \approx 9,869 \text{ 233} \cdot 10^{-6} \text{ atmosphère standard}$$

(atm)

$$1 \text{ Pa} = 10^{-5} \text{ bar}$$

$$1 \text{ Pa} \approx 1,42 \cdot 10^{-4} \text{ PSI}$$

Le **newton (symbole : N)** est l'unité SI de force, nommé ainsi en l'honneur d'Isaac Newton pour ses travaux en mécanique classique. Un newton est la force capable de communiquer à une masse de 1 kilogramme une accélération de 1 m/s^2 . Cette unité dérivée du système international s'exprime en unités de base comme étant le kg m s^{-2} . Le système international impose d'écrire le nom de l'unité avec une minuscule et le symbole (N) avec une majuscule.

<http://www.wikipedia.org/>

3) Expliquer les différences spatiales de concentration en chlorophylle-a dans l'océan global à partir de la circulation forcée par le vent déduite de la carte de la circulation globale des vents et des courants.
 (en vert-jaune-rouge les zones où les concentrations sont les plus fortes, en bleu-violet celles où les concentrations sont plus faibles)

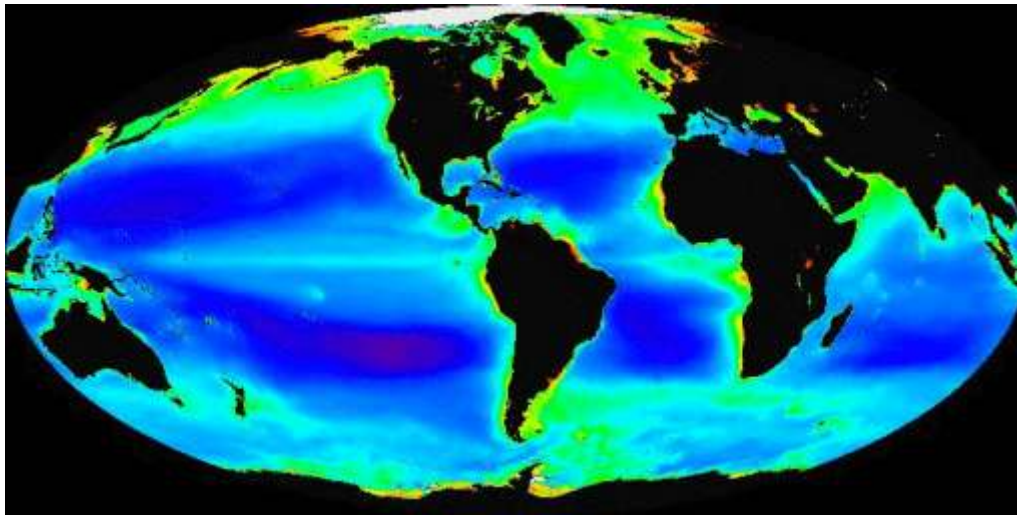
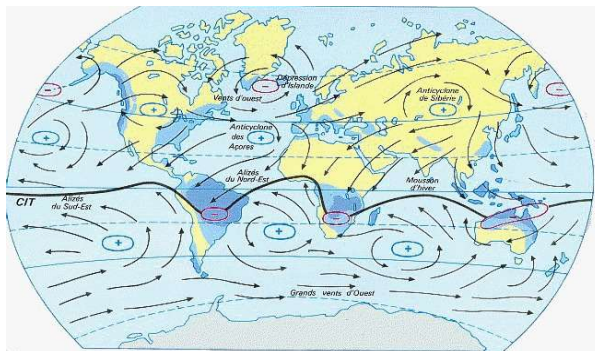
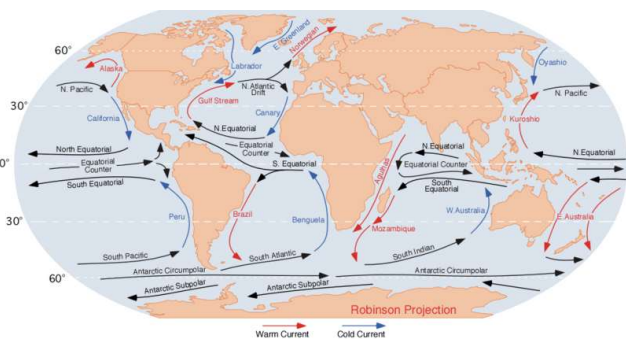


image SeaWiFS, <http://oceancolor.gsfc.nasa.gov>
 chlorophylle-a (moyenne annuelle)



La circulation atmosphérique générale
 Carte mondiale des vents de surface
<http://eduscol.education.fr/>

courants



http://en.wikipedia.org/wiki/Ocean_current

SOLUTION (voir aussi le poly de Océanographie du cour UE22 de A. Petrenko).

Traduction de <http://www.atmos.washington.edu/1998Q4/211/topics.htm>

La circulation des vents de surface sur l'océan est assez compliquée, mais on peut observer quelques structures caractéristiques.

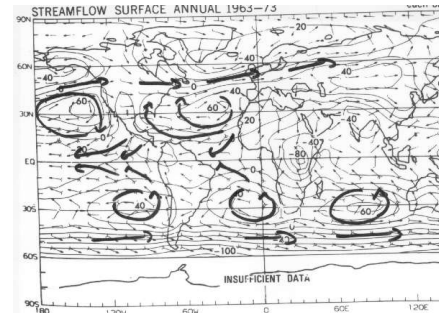
- les **alizés** (*tradewinds*) soufflent sur les régions tropicales du Pacifique et de l'Atlantique en provenance du nord-est dans l'hémisphère nord et en provenance du sud-est dans l'hémisphère sud. Les alizés du nord rencontrent les alizés du sud dans la zone de convergence intertropicale environ à la latitude de 7N.

Cette zone, large environ de 100-200 milles, est la zone la plus pluvieuse de la Terre, parce que la convergence des alizés provoque une ascension des masses d'air. La vitesse des alizés est typiquement de 10-25 nœuds ;

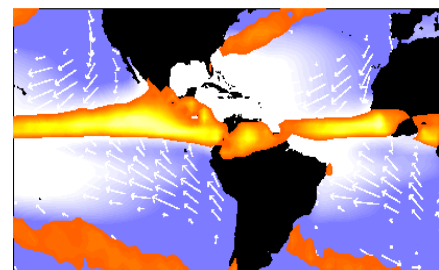
- les **vents d'ouest** (*westerlies*) soufflent aux latitudes supérieures à 30 degrés. Ils ne sont pas aussi stables comme les alizés et peuvent renverser de direction d'un jour à l'autre. Ils dépassent souvent les 30 nœuds aux latitudes des « quarantes rugissants » et des « cinquantes hurlants » (*roaring forties*) (latitudes entre 40S et 60S) et peuvent se renforcer dans le Pacifique Nord et le l'Atlantique Nord pendant l'hiver ;

- entre la zone des alizés et des vents d'ouest il y a les **anticyclones subtropicaux**, larges zones de circulation horaire dans l'hémisphère Nord (anti-horaire dans le Sud).

Enfin sur le golfe d'Alaska et sur l'Atlantique très au Nord la circulation est cyclonique (sens horaire)



PanAmerican Climate Studies (PACS)

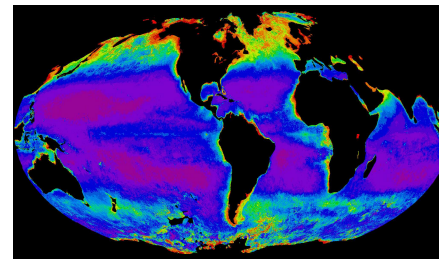


NB: par définition un cyclone est une circulation dans le sens de rotation de la terre, comme vue par un observateur situé au dessus du pôle.

Examinons maintenant la carte de la couleur de de l'Océan global vu par le satellite.

Les images satellites de couleur de l'océan permettent d'obtenir des cartes de concentration en chlorophylle de l'océan de surface. Pour mettre en évidence les légères variations, l'échelle des couleurs a été étirée de façon que les eaux les plus riches en chlorophylle soient en couleur chaudes et les eaux plus pauvre soient en violet et bleu foncé.

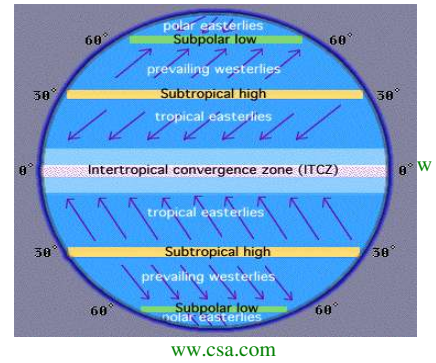
La chlorophylle est un pigment contenu dans les cellules phytoplanctoniques et qui est utilisé comme proxy de la biomasse du phytoplancton.



Les zones au couleurs chaudes indiquent de fortes concentrations en phytoplancton . Le phytoplancton pour se développer a besoin de lumière et de sels nutritifs. La zone de surface (zone éclairée) et la plupart du temps très pauvre en sels nutritifs, alors que le fond des océans constitue un réservoir en sels nutritifs.

Les courants verticaux qui induisent des remontées d'eaux dans la couche éclairée constituent de forts apports en sels nutritifs. Une fois en surface les sels nutritifs permettent au phytoplancton de se développer. Donc, les zones en couleurs chaudes sont des zones d' upwelling et donc aussi des régions de pêche très productive, vu que le phytoplancton constitue le base de la chaîne trophique.

Il y a des zones de couleurs chaudes le long de plusieurs côtes, mais particulièrement à proximité des côtes du Pérou et des côtes africaines en Atlantique, au nord et au sud de l'équateur. Les eaux du golfe de l'Alaska et l'extrémité nord de l'Atlantique sont aussi en couleur chaude, et il y a une ceinture verte le long de l'équateur. Les zones les moins productives sont autour de 30 degrés de latitude. Beaucoup de structure dans la distribution de la couleur de l'océan peuvent être expliquées à partir de la circulation induite par le vent. Les alizés génèrent des upwellings et des courants froids et directs vers l'équateur le long des côtes du Pérou et de l'Afrique. Au contraire, les gyres (anticycloniques) autour de 30 degrés sont des zones de convergence et donc de downwelling, ce qui en fait des déserts biologiques.



Annales des sujets d'examen

Conseils pour l'examen écrit

- écrire de manière le plus lisible possible
- soigner à l'orthographe
- attention au majuscules et minuscules et aux noms propres
- gérer les temps
- consision et precision
- ecrire sur la copie la question, de façon a bien reflechir sur la réponse à donner

2006/2007
A. Petrenko – A. Doglioli

1^{ère} session
Durée : 2 heures

UE COM 23

Documents non autorisés ; Calculatrice autorisée

ATTENTION, rédiger les deux parties sur des feuilles séparées.

A) 1ère partie

1) Influence du vent en océanographie

Pourquoi Nansen en océan Arctique observait les icebergs dériver dans une direction à droite de la direction du vent?

Dessiner le diagramme des forces et décrire la démarche d'Ekman pour obtenir une solution mathématique du problème.

Qu'est-ce qu'un courant d'inertie?

2) Adimensionalisation

Donner la définition du nombre de Reynolds. Durant l'adimensionalisation des équations du mouvement, où apparaît-il ? expliquer son ordre de grandeur et ce qui en découle. Donner des ordres de grandeurs de Re pour des phénomènes connus.

3) Circulation de Sverdrup

Décrire la circulation de Sverdrup avec schéma à l'appui. Quelles sont les limites de cette circulation ?

ATTENTION Prendre une autre feuille pour la seconde partie.

B) 2ème Partie

1) Méthode Dynamique

Qu'est-ce que l'anomalie géopotentielle? À quoi sert-elle dans la méthode dynamique?

Pourquoi dans la méthode dynamique faut-il faire le nivellement par rapport à un isobare profond?

2) La vorticité

Écrire les formules et expliquer la signification des quatre différents types de vorticité utilisés en océanographie physique.

3) Circulation de la Méditerranée

113

Décrire la circulation générale de la Méditerranée et en expliquer les caractéristiques principales sur la base de principaux forçages. Dessiner un schéma sur la carte bathymétrique ci-contre.

2007/2008

A. Petrenko – A. Doglioli

1^{ère} session

Durée: 2 heures

UE 23 Dynamique OcéaniqueDocuments non autorisés ; Calculatrice autorisée

ATTENTION, rédiger les deux parties sur des feuilles séparées.

A) 1^{ère} partie :

- 1) Donner les équations de l'équilibre hydrostatique et décrire ses applications.
- 2) Expliquer la différence entre les forces absolues, forces secondaires et force d'entraînement. En déduire une explication sur la différence entre l'approximation de plan f et de plan \square .
- 3) Expliquer le pompage d'Ekman et le transport méridien.

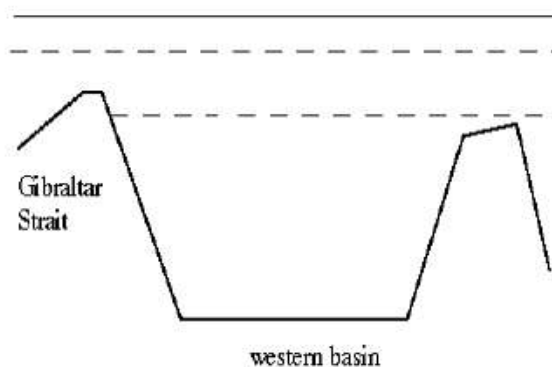
ATTENTION %%%%%%%%%% Prendre une autre feuille %%%%%%%%%%

B) 2^{ème} partie :

- 1) Pourquoi dans la méthode dynamique faut-il faire le nivellement par rapport à une isobare profonde?
- 2) Dériver la conservation de la vorticité potentielle à partir de l'équation de la conservation de la vorticité absolue ci-dessous et de l'équation de continuité pour une couche dans laquelle la densité est supposée homogène.

$$\frac{d(\zeta + f)}{dt} + (\zeta + f)\nabla \cdot \vec{V}_H = 0$$

- 3) Pourquoi on affirme que à Gibraltar l'écoulement de l'eau Méditerranéenne est de type opposé à celle d'un estuaire? Quels types de circulation et de forçage génère ce comportement? Dessiner un schéma dans la figure ci-dessous.



Licence SVT - Science de la Vie et de la Terre	SNT5U27L	Parcours Mer 3 ^{ème} année
2008/2009 A. Petrenko – A. Doglioli	UE 23 Dynamique Océanique	1 ^{ère} session Durée: 2 heures
<u>Documents non autorisés</u>		<u>Calculatrice autorisée</u>

Les réponses doivent, le plus possible, être concises et précises.

1^{ère} partie

- 1) Effectuer l'adimensionalisation des équations de N-S dans le cas de la circulation grande échelle .
- 2) Qu'est-ce qu'un courant inertie ? Sont-ils fréquemment observés ? par quelle instrumentation ? Donner des informations sur leurs trajectoire et période, avec des exemples numériques .
- 3) Dessiner le diagramme des forces impliquées dans la spirale Ekman et décrire la solution mathématique du problème .

***** **ATTENTION, rédiger les deux parties sur des feuilles séparées!** *****

2^{ème} partie

- 4) Qu'est-ce que le géopotential ? À quoi sert-il ?
- 5) Pourquoi les gyres subtropicaux sont des zones de très faible production primaire ? Expliquer qualitativement et avec des schémas la dynamique de ces structures .
- 6) Expliquer qualitativement et avec des schémas l'intensification des courants de bord Ouest par la conservation de la vorticité potentielle .

Licence SVT - Science de la Vie et de la Terre	SNT5U27L	Parcours Mer 3 ^{ème} année
2009/2010 A. Petrenko – A. Doglioli	UE 23 Dynamique Océanique	1 ^{ère} session Durée: 2 heures
<u>Documents non autorisés</u>		<u>Calculatrice autorisée</u>

Les réponses doivent, le plus possible, être concises et précises.

1^{ère} partie

- 1) Qu'est-ce qu'un courant d'inertie? quelles sont ses équations? qu'observe-t-on ?
- 2) Donner la définition du nombre de Reynolds. Durant l'adimensionalisation des équations du mouvement, où apparaît-il ? expliquer son ordre de grandeur et ce qui en découle. Donner des ordres de grandeurs de Re pour des phénomènes connus.
- 3) À partir de la différence entre référentiel absolu et référentiel relatif, dériver la force de Coriolis et expliquer la différence entre force absolue et pseudo-force. Introduire les différentes approximations de la force de Coriolis.

***** **ATTENTION, rédiger les deux parties sur des feuilles séparées!** *****

2^{ème} partie

- 4) Décrire la démarche pour obtenir les équations du mouvement et de continuité dans l'approximation de Boussinesq et expliquer la signification des différents termes.
- 5) Qu'est-ce qu'un courant géostrophique ? quelles sont ses équations? Donner des exemples dans le monde.
- 6) Écrire les formules des quatre différents types de vorticité utilisés en océanographie physique et en expliquer la signification.

2010/2011 A. Petrenko – A. Doglioli	UE 23 Dynamique Océanique	1 ^{ère} session Durée: 2 heures
<u>Documents non autorisés</u>		<u>Calculatrice autorisée</u>

Les réponses doivent, le plus possible, être concises et précises.

1^{ère} partie

1) En différenciant correctement un repère fixe R_F de centre T tel que $R_F = (T, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'un repère mobile R' de centre O tel que $R' = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et en partant de la loi de composition des vitesses $\vec{V}_A = \vec{V}_E + \vec{V}_r$ avec \vec{V}_A la vitesse absolue, \vec{V}_r la vitesse relative et \vec{V}_E la vitesse d'entraînement démontrez la loi de composition des accélérations

$$\vec{y}_A = \vec{y}_E + \vec{y}_r + \vec{y}_C$$

Comment s'écrit la force de Coriolis par rapport à l'accélération ?

Rappel: $\vec{V}_E = \frac{d\vec{T}O}{dt} + x \frac{d\vec{i}}{dt} + y \frac{d\vec{j}}{dt} + z \frac{d\vec{k}}{dt}$

2) Explicitez la force de Coriolis et indiquez ces répercussions sur la circulation océanique.

***** **ATTENTION, rédiger les deux parties sur des feuilles séparées!** *****

2^{ème} partie

3) Qu'est ce que la viscosité? Quelle est la différence entre la viscosité moléculaire et la viscosité turbulente?

4) Qu'est-ce qu'un courant géostrophique? Quelles en sont les équations? Donnez des exemples dans l'océan mondial.

5) Qu'est-ce que la circulation de Sverdrup? Expliquez en les approximations et les limites d'application.

6) Quelles sont les différences entre la vorticité relative, planétaire, absolue et potentielle?

Licence SVT - Science de la Vie et de la Terre	SNT5U27L	Parcours Mer 3 ^{ème} année
2011/2012 A.Petrenko – A.Doglioli	UE 23 Dynamique Océanique	1ere session Durée : 2 heures
Documents non autorisés		Calculatrice autorisée

Les réponses doivent être les plus concises et précises possible.


1ère partie

- 1) Quel est la différence entre les équations d'Euler et celles de Navier-Stokes ? Quels phénomènes décrivent-elles respectivement ?
- 2) Expliquer l'origine de la force de marée.
- 3) Donner la définition du nombre de Rossby Ro ; et fournir au minimum un exemple d'application de ce nombre pour des phénomènes connus.

***** **ATTENTION, rédiger les deux parties sur des feuilles séparées!** *****

2ème partie

- 4) Qu'est-ce que la force de Coriolis? Quelles approximations peut-on faire pour des applications océanographiques?
- 5) Expliquer le pompage d'Ekman et le transport méridien.
- 6) Dériver les équations en eaux peu profondes à partir des équations du mouvement horizontal et de l'équation de continuité.

 <p>Faculté des Sciences Aix-Marseille Université</p>	Année universitaire 2012/2013					
	Site : <input checked="" type="checkbox"/> Luminy	<input type="checkbox"/> St-Charles	<input type="checkbox"/> St-Jérôme	<input type="checkbox"/> Cht-Gombert	<input type="checkbox"/> Aix-Montperrin	<input type="checkbox"/> Aubagne-SATIS
	Sujet session de : <input checked="" type="checkbox"/> 1 ^{er} semestre - <input type="checkbox"/> 2 ^{ème} semestre - <input type="checkbox"/> Session 2			Durée de l'épreuve : ... 2 heures		
	Examen de : <input type="checkbox"/> L1/ <input type="checkbox"/> L2/ <input checked="" type="checkbox"/> L3 - <input type="checkbox"/> M1/ <input type="checkbox"/> M2 - <input type="checkbox"/> LP - <input type="checkbox"/> DU			Nom diplôme : ... Licence SNTÉ		
	Code Apogée du module : SNT5U27TL			Libellé du module : ... Dynamique des Océans		
Document autorisé : <input type="checkbox"/> OUI - <input checked="" type="checkbox"/> NON			Calculatrices autorisées : <input checked="" type="checkbox"/> OUI - <input type="checkbox"/> NON			

***** *Les réponses doivent être les plus concises et précises possible.* *****

1^{ère} partie (A.Petrenko)

1) Quelles sont les équations de l'hydrodynamique ? Donnez la signification physique de chacun des termes et décrivez plus en détail la force de Coriolis (type de force, simplification, description de son effet...).

2) Décrivez la méthode dynamique et sur quelle théorie elle repose. Quels sont ses inconvénients ?
Bonus: quels sont les avantages d'utiliser les anomalies de volume massique ?

***** *ATTENTION, rédiger les deux parties sur des feuilles séparées!* *****

2^{ème} partie (A.Doglioli)

4) Expliquer la circulation de Sverdrup et ses limitations dans la modélisation de la circulation de la circulation de l'Atlantique Nord . Dessiner aussi un schéma .


FORMULES UTILES :

Relation de Sverdrup entre transport méridien et frottement du vent $M_y = \frac{\vec{k}(\nabla \times \vec{F})}{\beta}$

Relation entre transport méridien et fonction de courant $M_x = +\partial_y \psi$, $M_y = -\partial_x \psi$

Frottement du vent idéalisé $F_x = -F_o \cos(\pi y/b)$, $F_y = 0$

5) Qu'est-ce que la vorticité potentielle? Fournir au minimum un exemple d'application de la loi de conservation de cette grandeur .

	Année universitaire 2013/2014
Site : <input checked="" type="checkbox"/> Luminy <input type="checkbox"/> St-Charles <input type="checkbox"/> St-Jérôme <input type="checkbox"/> Cht-Gombert <input type="checkbox"/> Aix-Montperrin <input type="checkbox"/> Aubagne-SATIS	
Sujet session de : <input checked="" type="checkbox"/> 1 ^{er} semestre - <input type="checkbox"/> 2 ^{ème} semestre - <input type="checkbox"/> Session 2	Durée de l'épreuve : ... 2 heures.....
Examen de : <input type="checkbox"/> L1/ <input type="checkbox"/> L2/ <input checked="" type="checkbox"/> L3 - <input type="checkbox"/> M1/ <input type="checkbox"/> M2 - <input type="checkbox"/> LP - <input type="checkbox"/> DU	Nom diplôme : ... Licence SNTÉ.....
Code Apogée du module : SNT5U27TL	Libellé du module : ... Dynamique des Océans.....
Document autorisé : <input type="checkbox"/> OUI - <input checked="" type="checkbox"/> NON	Calculatrices autorisées : <input checked="" type="checkbox"/> OUI - <input type="checkbox"/> NON

***** *Les réponses doivent être les plus concises et précises possible.* *****


1^{ère} partie (A.Petrenko)

- 1) Qu'est ce que la force de Coriolis ? Quelle est son origine ?
Définissez un repère pour introduire l'approximation la plus courante de la force de Coriolis.
- 2) Qu'est-ce que la décomposition de Reynolds ? À quoi sert-elle ?
Introduisez les viscosités cinématiques turbulentes et énoncez les équations de Navier-Stokes d'un écoulement moyenné en utilisant ces notations.

***** *ATTENTION, rédiger les deux parties sur des feuilles séparées!* *****

2^{ème} partie (A.Doglioli)

- 3) Qu'est-ce que un courant géostrophique ?
- 4) Qu'est-ce que la spirale d'Ekman ?

	Année universitaire 2013/2014
Site : <input checked="" type="checkbox"/> Luminy <input type="checkbox"/> St-Charles <input type="checkbox"/> St-Jérôme <input type="checkbox"/> Cht-Gombert <input type="checkbox"/> Aix-Montperrin <input type="checkbox"/> Aubagne-SATIS	
Sujet session de : <input type="checkbox"/> 1 ^{er} semestre - <input type="checkbox"/> 2 ^{ème} semestre - <input checked="" type="checkbox"/> Session 2	Durée de l'épreuve : ... 2 heures
Examen de : <input type="checkbox"/> L1/ <input type="checkbox"/> L2/ <input checked="" type="checkbox"/> L3 - <input type="checkbox"/> M1/ <input type="checkbox"/> M2 - <input type="checkbox"/> LP - <input type="checkbox"/> DU	Nom diplôme : ... Licence SNTÉ
Code Apogée du module : SNT5U27TL	Libellé du module : ... Dynamique des Océans
Document autorisé : <input type="checkbox"/> OUI - <input checked="" type="checkbox"/> NON	Calculatrices autorisées : <input checked="" type="checkbox"/> OUI - <input type="checkbox"/> NON

***** *Les réponses doivent être les plus concises et précises possible.* *****

- 1) Comment est représentée la force visqueuse dans les équations de Navier-Stokes ?
- 2) Qu'est-ce que le nombre d'Ekman ?
- 3) Qu'est ce qu'un gyre océanique? Quelle est son origine ?
- 4) Qu'est ce que la vorticité relative ?

Faculté
des Sciences

Aix-Marseille Université

Année universitaire 2014/2015

Site : Luminy St-Charles St-Jérôme Cht-Gombert Aix-Montperrin Aubagne-SATIS

Sujet session de : 1^{er} semestre - 2^{ème} semestre - Session 2 Durée de l'épreuve : ... **2 heures**.....

Examen de : L1/ L2/ L3 - M1/ M2 - LP - DU Nom diplôme : ... **Licence SVT**.....

Code Apogée du module : SNT5U27TL Libellé du module : ... **Dynamique des Océans**.....

Document autorisé : OUI - NON Calculatrices autorisées : OUI - NON


1^{ère} partie (A.Petrenko)

- 1) Quel est la différence entre les équations d'Euler et celles de Navier-Stokes ? Quels phénomènes décrivent-elles respectivement ?
- 2) À partir de la différence entre référentiel absolu et référentiel relatif, dériver la force de Coriolis et expliquer la différence entre force absolue et pseudo-force. Introduire les différentes approximations de la force de Coriolis.

***** *ATTENTION, rédiger les deux parties sur des feuilles séparées!* *****

2^{ème} partie (A.Doglioli)

- 3) Qu'est-ce que un courant d'inertie ? Expliquer les approximations et donner un exemple d'application.
- 4) Expliquer le rôle du pompage d'Ekman dans la circulation forcée par le vent .

	Année universitaire 2014/2015
Site : <input checked="" type="checkbox"/> Luminy <input type="checkbox"/> St-Charles <input type="checkbox"/> St-Jérôme <input type="checkbox"/> Cht-Gombert <input type="checkbox"/> Aix-Montperrin <input type="checkbox"/> Aubagne-SATIS	
Sujet session de : <input type="checkbox"/> 1 ^{er} semestre - <input type="checkbox"/> 2 ^{ème} semestre - <input checked="" type="checkbox"/> Session 2	Durée de l'épreuve : ... 2 heures
Examen de : <input type="checkbox"/> L1/ <input type="checkbox"/> L2/ <input checked="" type="checkbox"/> L3 - <input type="checkbox"/> M1/ <input type="checkbox"/> M2 - <input type="checkbox"/> LP - <input type="checkbox"/> DU	Nom diplôme : ... Licence SVT
Code Apogée du module : SNT5U27TL	Libellé du module : ... Dynamique des Océans
Document autorisé : <input type="checkbox"/> OUI - <input checked="" type="checkbox"/> NON	Calculatrices autorisées : <input checked="" type="checkbox"/> OUI - <input type="checkbox"/> NON

Les réponses doivent, le plus possible, être concises et précises.

1^{ère} partie (A.Petrenko)

- 1) Décrire la méthode d'adimensionalisation des équations du mouvement et donner un exemple .
- 2) Qu'est ce que la force de Coriolis ? Quelle est son origine ?
Définir un repère pour introduire l'approximation la plus courante de la force de Coriolis.

***** **ATTENTION, rédiger les deux parties sur des feuilles séparées!** *****

2^{ème} partie (A.Doglioli)

- 3) Qu'est-ce que le nombre de Rossby et à quoi sert-il ?
- 4) Quelles sont les différences entre la vorticité relative, planétaire, absolue et potentielle ?

 Faculté des Sciences Aix-Marseille Université	Année universitaire 2015/2016						
	Site :	<input checked="" type="checkbox"/> Luminy	<input type="checkbox"/> St-Charles	<input type="checkbox"/> St-Jérôme	<input type="checkbox"/> Cht-Gombert	<input type="checkbox"/> Aix-Montperrin	<input type="checkbox"/> Aubagne-SATIS
	Sujet session de :	<input checked="" type="checkbox"/> 1 ^{er} semestre - <input type="checkbox"/> 2 ^{ème} semestre - <input type="checkbox"/> Session 2			Durée de l'épreuve : ... 2 heures		
	Examen de :	<input type="checkbox"/> L1/ <input type="checkbox"/> L2/ <input checked="" type="checkbox"/> L3	<input type="checkbox"/> M1/ <input type="checkbox"/> M2	<input type="checkbox"/> LP	<input type="checkbox"/> DU	Nom diplôme : ... Licence SVT	
	Code Apogée du module :	SNT5U27TL		Libellé du module : ... Dynamique des Océans			
Document autorisé :	<input type="checkbox"/> OUI - <input checked="" type="checkbox"/> NON			Calculatrices autorisées : <input checked="" type="checkbox"/> OUI - <input type="checkbox"/> NON			

Les réponses doivent, le plus possible, être concises et précises.

1^{ère} partie (A.Petrenko)

1) Décrire l'origine physique des pseudo-forces, leur relation aux forces absolues et relatives. Détailler un exemple de pseudo-force dont l'impact est important en océanographie.

***** *ATTENTION, rédiger les trois parties sur des feuilles séparées!* *****

2^{ème} partie (M.Bosco)

2) Rappeler les observations effectuées par Nansen lors de son expédition et démontrer qualitativement que dans la couche d'Ekman de fond, le courant est dévié vers la gauche dans l'hémisphère Nord. Dessiner un diagramme des forces comme celui de Nansen.

3) En s'intéressant à une colonne d'eau verticale, décrire le système général de courant, en distinguant notamment les différentes couches que vous nommerez. Un schéma complet et concis est attendu en faisant notamment apparaître les différentes approximations utilisées pour chacune des couches et dériver les vecteurs vitesses pour chacune de ses couches. Vous apporterez une attention particulière à la rédaction et structure de votre argumentation.

***** *ATTENTION, rédiger les trois parties sur des feuilles séparées!* *****

3^{ème} partie (A.Doglioli)

4) Quelle est la différence entre la vorticité absolue et la vorticité potentielle ?

 Faculté des Sciences Aix-Marseille Université	Année universitaire 2015/2016						
	Site :	<input checked="" type="checkbox"/> Luminy	<input type="checkbox"/> St-Charles	<input type="checkbox"/> St-Jérôme	<input type="checkbox"/> Cht-Gombert	<input type="checkbox"/> Aix-Montperrin	<input type="checkbox"/> Aubagne-SATIS
	Sujet session de :	<input type="checkbox"/> 1 ^{er} semestre - <input type="checkbox"/> 2 ^{ème} semestre - <input checked="" type="checkbox"/> Session 2			Durée de l'épreuve : ... 2 heures		
	Examen de :	<input type="checkbox"/> L1/ <input type="checkbox"/> L2/ <input checked="" type="checkbox"/> L3	<input type="checkbox"/> M1/ <input type="checkbox"/> M2	<input type="checkbox"/> LP	<input type="checkbox"/> DU	Nom diplôme : ... Licence SVT	
	Code Apogée du module :	SNT5U27TL		Libellé du module : ... Dynamique des Océans			
Document autorisé :	<input type="checkbox"/> OUI - <input checked="" type="checkbox"/> NON			Calculatrices autorisées : <input checked="" type="checkbox"/> OUI - <input type="checkbox"/> NON			

Les réponses doivent, le plus possible, être concises et précises.

1^{ère} partie (A.Petrenko)

1) Quelle est la différence entre les équations de Navier-Stokes et celles d'Euler ? Décrire les phénomènes correspondant à chacun de ces systèmes d'équations.

***** *ATTENTION, rédiger les trois parties sur des feuilles séparées!* *****

2^{ème} partie (M.Bosco)


2) Décrire la technique de la décomposition des vitesses de Reynolds. Appliquer cette technique (décomposition et moyenne de l'équation) à l'équation de continuité pour un fluide incompressible afin d'obtenir l'équation pour les valeurs moyennes et celle pour les écarts.

3) Rappeler les hypothèses du modèle d'un écoulement géostrophique et en donner les équations. Dessiner le diagramme des forces agissant sur une particule d'eau du Gulf Stream (Hémisphère Nord) et du courant des Aiguilles (Hémisphère Sud) si on considère ces courants en équilibre géostrophique.

***** *ATTENTION, rédiger les trois parties sur des feuilles séparées!* *****

3^{ème} partie (A.Doglioli)

4) Expliquer le pompage d'Ekman .

	Année universitaire 2016/2017				
	Site : <input checked="" type="checkbox"/> Luminy	<input type="checkbox"/> St-Charles	<input type="checkbox"/> St-Jérôme	<input type="checkbox"/> Cht-Gombert	<input type="checkbox"/> Aix-Montperrin
Sujet session de : <input checked="" type="checkbox"/> 1 ^{er} semestre - <input type="checkbox"/> 2 ^{ème} semestre - <input type="checkbox"/> Session 2			Durée de l'épreuve : ... 2 heures		
Examen de : <input type="checkbox"/> L1 / <input type="checkbox"/> L2 / <input checked="" type="checkbox"/> L3 - <input type="checkbox"/> M1 / <input type="checkbox"/> M2 - <input type="checkbox"/> LP - <input type="checkbox"/> DU		Nom diplôme : ... Licence SVT			
Code Apogée du module : SNT5U27TL		Libellé du module : ... Dynamique des Océans			
Document autorisé : <input type="checkbox"/> OUI - <input checked="" type="checkbox"/> NON			Calculatrices autorisées : <input checked="" type="checkbox"/> OUI - <input type="checkbox"/> NON		

Les réponses doivent, le plus possible, être concises et précises.

1^{ère} partie (A.Petrenko)

1) Qu'est-ce que le nombre de Reynolds ? et à quoi sert-il ?

***** *ATTENTION, rédiger les trois parties sur des feuilles séparées!* *****

2^{ème} partie (M.Durafour)


2) Décrivez l'upwelling et le downwelling côtier (schémas légendés à l'appui). Expliquez leurs mécanismes de formations en détaillant les processus physiques mentionnés et leurs conséquences.

3) Expliquer les deux approximations possibles sur le paramètre de Coriolis si l'on approche la surface terrestre par un plan tangent. Réaliser les calculs aux pôles, aux moyennes latitudes et à l'équateur dans les deux cas (avec $R=6371\text{km}$). Concluez sur ces résultats.

***** *ATTENTION, rédiger les trois parties sur des feuilles séparées!* *****

3^{ème} partie (A.Doglioli)

4) Que est-ce que la viscosité? Quel est la difference entre viscosité moléculaire et viscosité due à la turbulence ?

	Année universitaire 2016/2017
Site : <input checked="" type="checkbox"/> Luminy <input type="checkbox"/> St-Charles <input type="checkbox"/> St-Jérôme <input type="checkbox"/> Cht-Gombert <input type="checkbox"/> Aix-Montperrin <input type="checkbox"/> Aubagne-SATIS	
Sujet session de : <input type="checkbox"/> 1 ^{er} semestre - <input type="checkbox"/> 2 ^{ème} semestre - <input checked="" type="checkbox"/> Session 2	Durée de l'épreuve : ... 2 heures
Examen de : <input type="checkbox"/> L1/ <input type="checkbox"/> L2/ <input checked="" type="checkbox"/> L3 - <input type="checkbox"/> M1/ <input type="checkbox"/> M2 - <input type="checkbox"/> LP - <input type="checkbox"/> DU	Nom diplôme : ... Licence SVT.....
Code Apogée du module : SNT5U27TL	Libellé du module : ... Dynamique des Océans
Document autorisé : <input type="checkbox"/> OUI - <input checked="" type="checkbox"/> NON	Calculatrices autorisées : <input checked="" type="checkbox"/> OUI - <input type="checkbox"/> NON

Les réponses doivent, le plus possible, être concises et précises.

1^{ère} partie (A.Petrenko)

- 1) Décrivez la méthode d'adimensionalisation des équations du mouvement .
- 2) Comment est représentée la force visqueuse dans les équations de Navier-Stokes ?

***** *ATTENTION, rédiger les trois parties sur des feuilles séparées!* *****

2^{ème} partie (A.Doglioli)

- 3) Rappeler les hypothèses du modèle d'un écoulement géostrophique et en donner les équations.
- 4) Qu'est ce qu'un gyre océanique? Quelle est son origine ?