

Contributions

Le texte de ce document bénéficie des contributions de A. Petrenko et F.d'Ovidio, qui interviennent aussi dans les séances du cours.

Remerciements

Je désire remercier tous mes étudiants et mes collègues pour leurs commentaires, questions, corrections et suggestions.

En particulier ces notes bénéficient des contributions de A. Allou, R. Belon, N. Daniault, J.L. Devenon, J. Gatti, Z. Hu, Y. José, M. Kersalé, M. Magaldi, E. Martinez, F. Mattioli, F. Nencioli, D. Piga.

Doglioli, A.M. (2023), *Notes de Cours et Travaux Dirigés de Approche Lagrangienne*, Université d'Aix-Marseille, Marseille, France.

www.mio.univ-amu.fr/~doglioli/Doglioli_ApprocheLagrangienne.pdf

Ce matériel est distribué selon la licence Créative Commons [<http://creativecommons.org/>]

Vous êtes libres :

- * de reproduire, distribuer et communiquer cette création au public
- * de modifier cette création

Selon les conditions suivantes :

- * **Paternité.** Vous devez citer le nom de l'auteur original de la manière indiquée par l'auteur de l'œuvre ou le titulaire des droits qui vous confère cette autorisation (mais pas d'une manière qui suggérerait qu'ils vous soutiennent ou approuvent votre utilisation de l'œuvre).
- * **Pas d'Utilisation Commerciale.** Vous n'avez pas le droit d'utiliser cette création à des fins commerciales.
- * **Partage des Conditions Initiales à l'Identique.** Si vous modifiez, transformez ou adaptez cette création, vous n'avez pas le droit de distribuer la création qui en résulte que sous un contrat identique à celui-ci.



Cet ouvrage a été réalisé avec le logiciel libre OpenOffice <http://www.openoffice.org>

Table des matières

1. Introduction

- 1.1 Historique
- 1.2 Échelles temporelles et spatiales
- 1.3 Les processus d'advection et de dispersion

2. Fondements

- 2.1 Équation de continuité
- 2.2 Équations de la quantité de mouvement
- 2.3 L'approximation de mouvements quasi-horizontaux
- 2.4 L'approximation hydrostatique et l'approximation de Boussinesq
- 2.5 Le frottement sur le fond et à la surface
- 2.6 La viscosité turbulente
- 2.7 Linéarisation des équations
- 2.8 Les équations en eaux peu profondes
- 2.9 Exemples de modèles simples: géostrophie et dérive d'Ekman
- 2.10 Les courants d'inertie (séance de A.Petrenko)
- 2.11 L'équation Oméga pour l'estimation de w (séance de A.Petrenko)

3. Tourbillons côtiers

- 3.1 Fondements
- 3.2 Couches limites
- 3.3 Régimes d'écoulement
- 3.4 Équation de la vortacité en eau peu profonde
- 3.5 Décollement en proximité d'un cap
- 3.6 Exemple : circulation autour du Promontoir de Portofino
- 3.7 Exemple : tourbillons du Golfe du Lion (séance de A.Petrenko)
- 3.8 Exemple : circulation autour des îles Hawaii

4. Tourbillons isolés

- 4.1 Équations de la dynamique des tourbillons isolés
- 4.2 Vortacité
- 4.3 Exemple : Meddies
- 4.4 Exemple : Étude numérique de la collision d'un Meddy avec une montagne sous-marine
- 4.5 Techniques d'identification et de suivi de tourbillons
- 4.6 Exemple : suivi des tourbillons dans le *Cape Basin* et dans le Golfe du Lion

5. Advection et diffusion

- 5.1 Théorème de conservation
- 5.2 La turbulence comme un processus stochastique
- 5.3 Approche Eulérienne et Lagrangienne
- 5.4 Modèles numériques à particules Lagrangiennes
- 5.5 Implémentation d'un modèle « random walk » et d'un modèle d'advection-diffusion
- 5.6 Modélisation couplée physique/biogéochimie
- 5.7 Exemple : dispersion de copepodes et des méduses en Méditerranée Nord Occidentale
- 5.8 Exemple : dispersion des rejets d'une ferme aquacole
- 5.9 Exemple : étude lagrangien de la connectivité en mer Méditerranée
- 5.10 Les structures lagrangiennes cohérentes et les exposants de Lyapunov
- 5.11 Exemple : observation in situ d'un point hyperbolique dans le Golfe du Lion (Séance A.Petrenko)
- 5.12 Exemple : étude des FSLE dans le Golfe de Trieste par mesure radar

Bibliographie et Liens utiles

- Csanady, G. (1982), *Circulation in the coastal ocean*. D.Reidel Publishing Company, Kluwer Group, Dordrech, Holland .
- Daniault, N. (2005), Océanographie Physique pour l'École Navale. Cours en ligne, Université de Bretagne Occidentale, Brest, France .http://stockage.univ-brest.fr/~daniault/oceano_physique.pdf
- Tomczak, M. (1998), *Shelf and Coastal Oceanography*. Cours en ligne, Flinders University of South Australia, Adelaide, Australia .<http://www.es.flinders.edu.au/~mattom/ShelfCoast/newstart.html>
- Pedloski, J (2003), *Waves in the Ocean and Atmosphere. Introduction to Wave Dynamics*. Springer, USA .
- Carton, X. (2001), *Hydrodynamical modeling of oceanic vortices*. Surv. Geophys., 22,179-263.
- Berta, M., Ursella, L., Nencioli, F., Doglioli, A.M., Petrenko, A.A., Cosoli, S. (submitted after minor revision). *Surface transport in the Northeastern Adriatic Sea from FSLE analysis of HF radar measurements*. Cont. Shelf Res. [see preprint](#)
- Bouffard, J., Nencioli, F., Escudier, R., Doglioli, A.M., Petrenko, A.A., Pascual, A., Poulain, P.-M. (submitted after revision). *Lagrangian analysis of satellite-derived currents: Application to the North Western Mediterranean coastal dynamics*. Adv. Space Res. [see preprint](#)
- Doglioli, A.M., Nencioli, F., Petrenko, A.A., Fuda, J.-L., Rougier, G., Grima, N. (2013). *A software package and hardware tools for in situ experiments in a Lagrangian reference frame*. J. Atmos. Ocean. Tech., Vol.30, pp.1940-1950, [doi: 10.1175/JTECH-D-12-00183.1](#). [see preprint](#)
- Kersalé, M., Petrenko, A.A., Doglioli, A.M., Dekeyser, I., Nencioli, F. (2013). *Physical characteristics and dynamics of the coastal Latex09 Eddy derived from in situ data and numerical modeling*. J. Geophys. Res., Vol.118, pp.1-11, [doi:10.1029/2012JC008229](#). [see preprint](#)
- Campbell, R., Diaz F., Hu, Z.Y., Doglioli, A.M., Petrenko, A.A., Dekeyser, I. (2013). *Nutrients and plankton spatial distributions induced by a coastal eddy in the Gulf of Lion. Insights from a numerical model*. Progr. Oceanogr., Vol.109, pp.47-69, [doi : 10.1016/j.pocean.2012.09.005](#). [see preprint](#)
- Nencioli, F., d'Ovidio, F., Doglioli, A.M., Petrenko, A.A. (2011). *Surface coastal circulation patterns by in-situ detection of Lagrangian Coherent Structures*. Geophys. Res. Lett., Vol.38, L17604, [doi:10.1029/2011GL048815](#). [see preprint](#)
- Hu, Z.H., Petrenko, A.A., Doglioli, A.M., Dekeyser, I. (2011). *Numerical study of eddy generation in the western part of the Gulf of Lion*. J. Geophys. Res., Vol.116, C12030, [doi:10.1029/2011JC007074](#). [see preprint](#)
- Kersalé, M., Doglioli, A.M., Petrenko, A.A. (2011). *Sensitivity study of the generation of mesoscale eddies in a numerical model of Hawaii islands*. Ocean Sci., Vol.7, pp.277-291, [doi : 10.5194/os-7-277-2011](#) . [see Open Access paper](#) or [see preprint](#)
- Hu, Z.H., Petrenko, A.A., Doglioli, A.M., Dekeyser, I. (2011). *Study of a mesoscale anticyclonic eddy in the western part of the Gulf of Lion*. J. Mar. Syst., Vol.88/1, pp.3-11, [doi: 10.1016/j.jmarsys.2011.02.008](#) . [see preprint](#)
- De Gaetano, P., Vassallo, P., Bartoli, M., Nizzoli, D., Doglioli, A.M., Magaldi, M.G., Fabiano, M. (2011). *Impact of new measured Mediterranean mineralization rates on the fate of simulated aquaculture wastes*. Aquac. Res., Vol.42, pp.1359-1370, [doi: 10.1111/j.1365-2109.2010.02724.x](#). [see preprint](#)
- Qiu, Z.F., Doglioli, A.M., He, Y.J., Carlotti, F.(2011). *Lagrangian model of Zooplankton dispersion: numerical schemes comparisons and parameter sensitivity tests*. Chin. J. Oceanol. Limn., Vol. 29/2, pp.438-445, [doi: 10.1007/s00343-011-0015-9](#) . [see preprint](#)
- Qiu, Z.F., Doglioli, A.M., Hu, Z.Y., Marsaleix, P., Carlotti, F. (2010). *The influence of hydrodynamic processes on zooplankton transport and distributions in the North Western Mediterranean: estimates from a Lagrangian model*. Ecol. Model., Vol.221/23, pp.2816-2827, [doi: 10.1016/j.ecolmodel.2010.07.025](#) . [see preprint](#)
- Hu, Z.H., Doglioli, A.M., Petrenko, A.A., Marsaleix, P., Dekeyser, I. (2009). *Numerical simulations of eddies in the Gulf of Lion*. Ocean Model., Vol.28/4, pp.203-208, [doi: 10.1016/j.ocemod.2009.02.004](#) . [see preprint](#)
- De Gaetano, P., Doglioli, A.M., Magaldi, M.G., Vassallo, P., Fabiano, M. (2008). *FOAM, a new simple benthic degradative module for the LAMP3D model: an application to a Mediterranean fish farm*. Aquac. Res., Vol.39/11, pp.1229-1242, [doi:10.1111/j.1365-2109.2008.01990.x](#) . [see preprint](#)
- Doglioli, A.M., Blanke, B., Speich, S., Lapeyre, G. (2007). *Tracking coherent structures in a regional ocean model with wavelet analysis: application to Cape Basin Eddies*. J. Geophys. Res., 112, C05043, [doi:10.1029/2006JC003952](#) . [see preprint](#)

- Doglioli, A.M., Veneziani, M., Blanke, B., Speich, S., Griffa, A. (2006). *A Lagrangian analysis of the Indian-Atlantic interocean exchange in a regional model*. Geophys. Res. Lett., 33, L14611, doi:10.1029/2006GL026498 . [see preprint](#)
- Vassallo, P., Doglioli, A.M., Rinaldi, F., Beiso, I. (2006). *Determination of physical behaviour of feed pellets in Mediterranean water*. Aquac. Res., Vol.37/2, pp.119-126, doi: 10.1111/j.1365-2109.2005.01403.x . [see preprint](#)
- Doglioli, A. M., Griffa, A., Magaldi, M.G. (2004). *Numerical study of a coastal current on a steep slope in presence of a cape: The case of the Promontorio di Portofino*. J. Geophys. Res., 109, C12033, doi:10.1029/2004JC002422 . [see preprint](#)
- Doglioli, A. M., Magaldi, M. G., Vezzulli, L., Tucci, S. (2004). *Development of a numerical model to study the dispersion of wastes coming from a marine fish farm in the Ligurian Sea (Western Mediterranean)*. Aquaculture. Vol.231/1-4, pp.215-235, doi:10.1016/j.aquaculture.2003.09.030 . [see preprint](#)
- Lévy, M. (2008). *The modulation of biological production by oceanic mesoscale turbulence*, Lect. Notes Phys., 744, 219-261, DOI 10.1007/978-3-540-75215-8_9, Transport in Geophysical flow: Ten years after, J. B. Weiss and A. Provenzale (Eds), Springer ([pdf](#))
- Signell, R. e Geyer, W. (1991). *Transient eddy formation around headlands*. J. Geophys. Res., 96(C2):2561–2575.
- Pizzigalli, C., V. Rupolo, E. Lombardi, and B. Blanke (2007), Seasonal probability dispersion maps in the Mediterranean Sea obtained from the Mediterranean Forecasting System Eulerian velocity fields, *J. Geophys. Res.*, 112, C05012, doi:10.1029/2006JC003870.
- Griffa gr12008**
- Griffa, A. 1996. Applications of stochastic particle models to oceanographic problems, *in Stochastic Modeling in Physical Oceanography*, P. M. R. Adler and B. Rozovskii, eds., Birkhäuser Verlag, 114–140.
- Gaspar, Grigoris, Lefevre, 1990, A Simple Eddy Kinetic Energy Model for Simulations of the Oceanic Vertical Mixing' Tests at Station Papa and Long-Term Upper Ocean Study Site, JGR
- Monin A S and Ozmidov R V 1981 *Ocean turbulence* (Leningrad:Gidrometeoizdat)
- Batchelder, H.P., Edwards, C.A., Powell T.M., 2002. Individualbased models of copepod populations in coastal upwelling regions: implications of physiologically and environmentally influenced diel vertical migration on demographic success and nearshore retention. *Progress in Oceanography*. 53, 307333
- Bennett, J.R., Clites, A.H., 1987. Accuracy of trajectory calculation in a finitedifference circulationmodel. *J. comp. Phys.* 68(2), 272282.
- Darmofal, D.L., Haines, R., 1996. An analysis of 3D particle path integration algorithms. *Journal of computational physics*. 123, 182195.
- Garcia, R.M., Flores, H.T., 1999. Computer Modeling of Oil Spill Trajectories With a High Accuracy Method. *Spill Science and Technology bulletin*. 5(5/6), 323330
- Oliveira, L.A., Costa V.A.F., Baliga, B.R., 2002. A lagrangianEulerian model of particle dispersion ina turbulent plane mixing layer. *International Journal for numerical methods in fluids*. 40, 639653.
- Parada, C., Van der Lingen C.D., Mullon, C., Penven, P., 2003. Modelling the effect of buoyancy on the transport of anchovy (*Engraulis capensis*) eggs from spawning to nursery grounds in the southern Benguela: an IBM approach. *Fisheries Oceanography*. 12(3), 170184
- Tittensor, D.P., Deyoung, B., Tang, C.L., 2003. Modelling the distribution, sustainability and diapause emergence timing of the copepod *Calanus finmarchicus* in the Labrador Sea. *Fisheries Oceanography*. 12(4/5), 299316.
- Visser, A.W., 1997. Using random walk models to simulate the vertical distribution of particles in a turbulent water column. *Marine Ecology Progress Series*. 158, 275281.

1. Introduction

1.1 Historique

Historiquement, l'océan a été très peu échantillonné, en raison des difficultés d'organiser, d'effectuer et de réussir des campagnes océanographiques.

Ces dernières représentent en effet en même temps un défi méthodologique lié à la complexité des écoulements marins, et aussi technologique (et par conséquent, financier) du à l'hostilité de ce milieu pour l'homme.

Les observations systématiques commencent dans les années 1880 avec les campagnes pionnières de Nansen, toutefois pendant toute la première moitié du XX^{ème} siècle, les efforts d'observation et théoriques se sont concentrés sur la description de la circulation à grande échelle. %, considérée comme stable.

Les modèles classiques de Sverdrup, Stommel ou Munk, proposent une circulation grande échelle stationnaire qui a fortement influencé les océanographes physiciens dans une vision de l'océan comme parcouru par des courants stables.

Cette vision a été principalement due d'un coté au manque d'informations *{\it in situ}* détaillées et de l'autre à la difficulté, voire l'impossibilité, de la résolution analytique des équations de Navier-Stokes sans poser de très fortes hypothèses simplificatrices.

Ce n'est que dans les années 60 du XX^{ème} siècle que le développement technologique a permis d'effectuer les premières mesures à plus haute fréquence temporelle ($\mathcal{O}(10 \text{ jours})$) et spatiale ($\mathcal{O}(10 \text{ km})$).

L'étude pionnière de *\cite{swallow59}* au large du Portugal, sur la partie orientale de la gyre subtropicale de l'Atlantique Nord, a mis en évidence comment les courants pouvaient varier sur des périodes de quelques semaines et sur des distances de quelques dizaines de milles nautiques.

De plus, ils soulignent qu'aucune décroissance uniforme de l'intensité du courant n'était relevée, rendant impossible la définition d'un niveau de fluide au repos, comme habituellement fait dans les équations de la géostrophie.

Ensuite, l'avènement des bouées dérivantes et de l'imagerie satellitaire de la température de surface a montré une variabilité spatio-temporelle qui a bouleversé la vision océanographique du Gulf Stream *\cite[e.g.]{}{richardson80}*: du fleuve tranquille à la rivière tourbillonnante.

La nomenclature "anneau" (*{\it ring}* en anglais) est ainsi devenue commune dans les années 70 pour désigner les tourbillons cycloniques ou anticycloniques qui se détachent d'un courant principal, piègent une masse d'eau à l'intérieur et la transportent sur des distances de centaines voire milliers de kilomètres pour des périodes allant du mois aux années *\cite{olson91}*.

La découverte de cette variabilité océanique a mis les océanographes face à "l'immensité de leur tâche", en citant \cite{semtner95}.

Ce dernier invoque donc l'aide des supercalculateurs afin de résoudre numériquement les équations qui gouvernent la dynamique océanique.

Les modèles numériques peuvent en effet apporter une aide vraiment précieuse dans la compréhension des processus de base et de leur interdépendance, et dans l'interprétation des observations.

Si les premiers modèles de circulation développés dans les années 60 avaient une trop faible résolution, la rapide augmentation de la puissance de calcul et la progression des techniques numériques ont permis d'arriver dans la moitié des années 70 à des modèles avec une résolution de l'ordre du premier rayon de déformation de Rossby et ainsi commencer à résoudre des processus tels que les méandres des grands courants et leur possible évolution dans des recirculations fermées donnant lieu aux plus grands tourbillons océaniques.

C'est grâce à l'intégration des trois approches, l'observation \{in situ\}, la télédétection satellite et la modélisation numérique, que nous disposons aujourd'hui de l'information nécessaire pour réaliser des animations telle que celle intitulée \{Perpetual Ocean\} mise en ligne par NASA (\url{https://www.nasa.gov/topics/earth/features/perpetual-ocean.html}), qui rend efficacement l'idée du caractère tourbillonnaire de la circulation océanique.

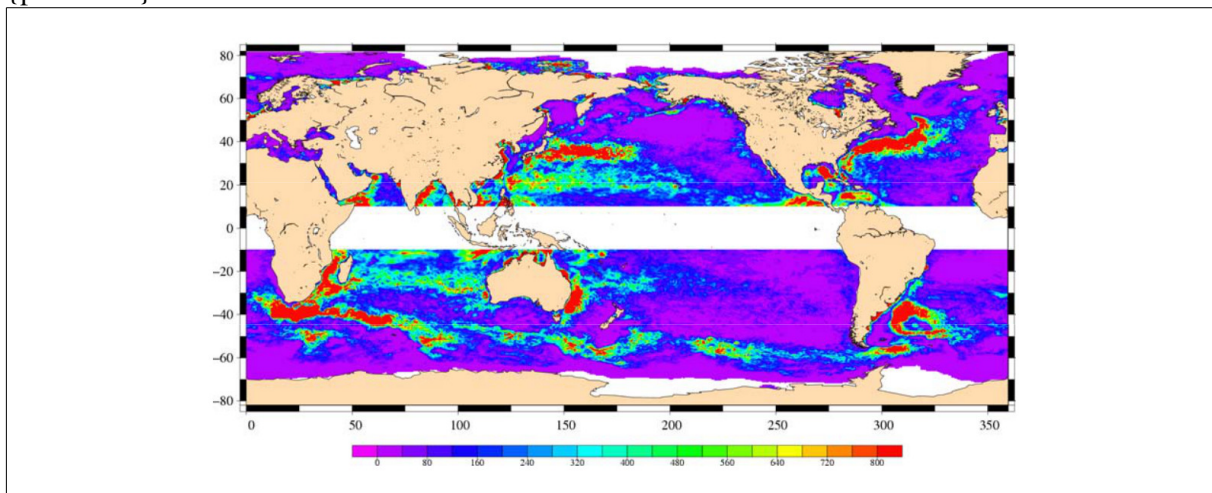
En admirant ces animations, on ne peut que rester fasciné par ces centaines de tourbillons et de méandres qui remplissent toutes les mers du globe et constituent la variabilité dite de méso-échelle.

Quand la circulation associée à ces tourbillons est particulièrement intense, on commence à s'éloigner de l'équilibre géostrophique et il faut commencer à tenir en compte dans le bilan des forces, la force centrifuge créée par la rotation du tourbillon, on parle alors d'équilibre cyclo-géostrophique (Carton, 2001).

Les mesures effectuées avec les bouées lagrangiennes dans les années 80 ont mis en évidence comment une grosse partie de l'énergie cinétique océanique est associée aux tourbillons de méso-échelle \cite{richardson83}.

est en générale supérieure à celle de la circulation moyenne d'au moins un ordre de grandeur (Wyrтки et al., 1976; Richardson, 1983). \AD{Ferrari}

Les cartes d'énergie cinétique tourbillonnaire (EKE - \{Eddy Kinetic Energy\}) issue des mesures d'altimétrie satellite permettent d'identifier les zones où les courants sont soumis à de grandes instabilités et génèrent des "anneaux" \cite[pour un exemple voir \fig{EKEpascual} tirée de][pascual06}.



Carte de l'énergie cinétique tourbillonnaire [cm^2s^{-2}] dans l'océan global, issue de mesures satellites.

D'après \cite{pascual06}

Le nombre des tourbillons de méso-échelle dans l'océan rendent très probables leurs interactions. Ces interactions induisent de forts étirements des masses d'eau qui vont générer de nouvelles structures à des échelles plus petites que le premier rayon interne de déformation de Rossby (R_{gi}^d).

Ces plus petites structures dites de sousmésos-échelle sont typiquement agéostrophiques et leur dynamique devient tridimensionnelle.

Leur taille représente une barrière à leur observation, ce qui a longtemps retardé l'appréciation de leur abondance \citep{mcwilliams16}: trop petites et en évolution rapide pour les mesures classiques de campagnes en mer et pour la première télédétection par satellite, souvent difficiles à distinguer des ondes à inertie dans les séries temporelles à un point fixe ou dans les profils verticaux.

De plus, les difficultés liées à leur caractère non-linéaire ont fortement limité les prédictions théoriques.

C'est seulement à partir des années 2000 que la résolution des modèles numériques de circulation est devenue suffisante pour les représenter.

Ces derniers ajoutés à l'imagerie satellite à très haute résolution, ont constitué le démarrage pour l'étude de ces structures qui a connu un intérêt rapidement grandissant au cours des quinze dernières années.

En effet, elles peuvent représenter l'«étape manquante» dans la cascade directe de l'énergie de la méso-échelle à la dissipation \citep{ferrari09} et jouer un rôle clé dans le transfert vertical de la chaleur et du sel et dans l'injection des sels nutritifs dans la zone photique \citep{mahadevan16}.

En descendant encore d'échelle, on arrive dans le domaine de la micro-échelle, où la turbulence domine.

L'étude de la turbulence océanique est, à la différence de la sousmésos-échelle, très vaste et de longue tradition.

Typiquement on suppose qu'à micro-échelle, la turbulence est homogène et stationnaire, pouvant ainsi définir un écoulement turbulent comme l'état d'un fluide dans lequel se superpose au mouvement moyen un mouvement d'agitation aléatoire \citep{reynolds1895}.

On arrive ainsi à la vision classique de la dernière partie de la cascade de l'énergie où les plus petits tourbillons deviennent enfin si petits qu'il peuvent être dissipés par la viscosité du fluide.

En générant des gradients très importants de la vitesse sur de petites échelles spatiales, le processus physique de la turbulence domine dans le transfert de masse et de chaleur et dans la dispersion de solutés et petites particules organiques et inorganiques.

Malgré la longue histoire des études de la turbulence océanique, nombre de questions restent ouvertes, en particulier en ce qui concerne sa représentation dans les modèles de circulation et son rôle dans la dispersion des traceurs biogéochimiques.

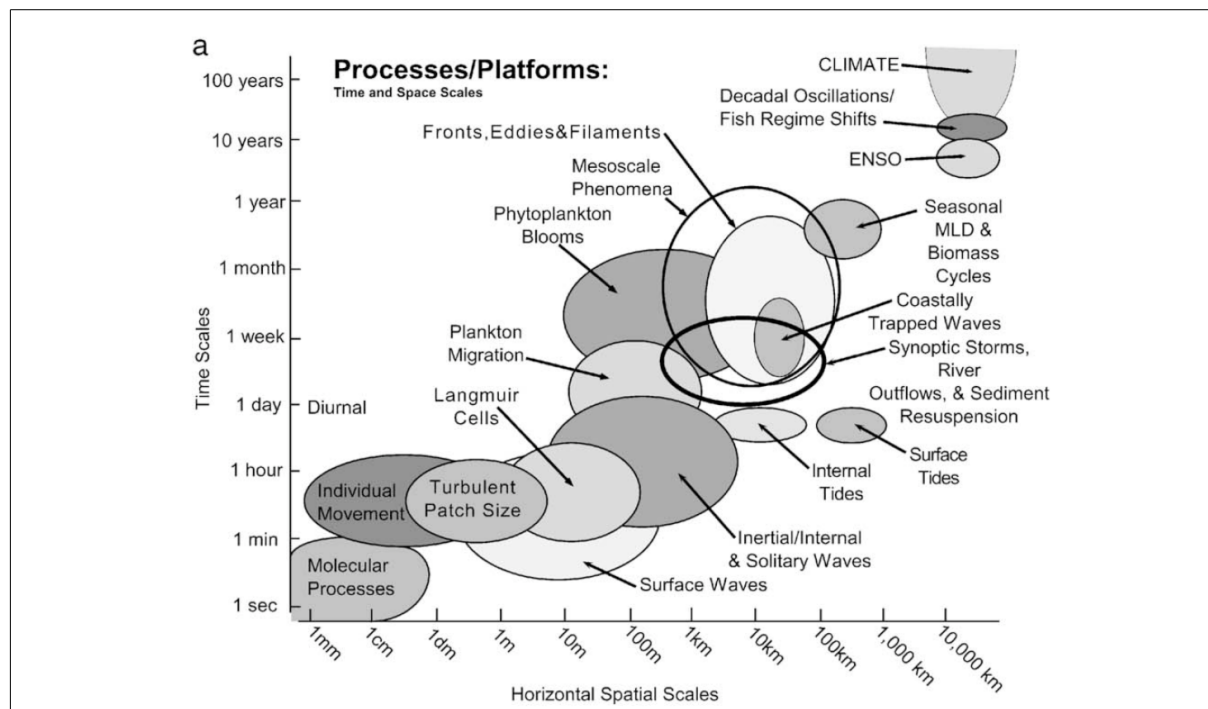


Diagramme temps-espace pour le principaux processus physiques et biologiques dans l'océan. D'après \citep{dickey03}.

Depuis les travaux historiques de \cite{riley42} et \cite{sverdrup53} sur le rôle de la turbulence verticale sur le déterminisme de la floraison printanière, ou ceux de \cite{haury78} sur le rôle de la dynamique océanique sur la distribution spatiale du plancton (à l'origine de la notion de ``\it patchiness''), il est admis que la physique de l'océan affecte la dynamique des communautés planctoniques

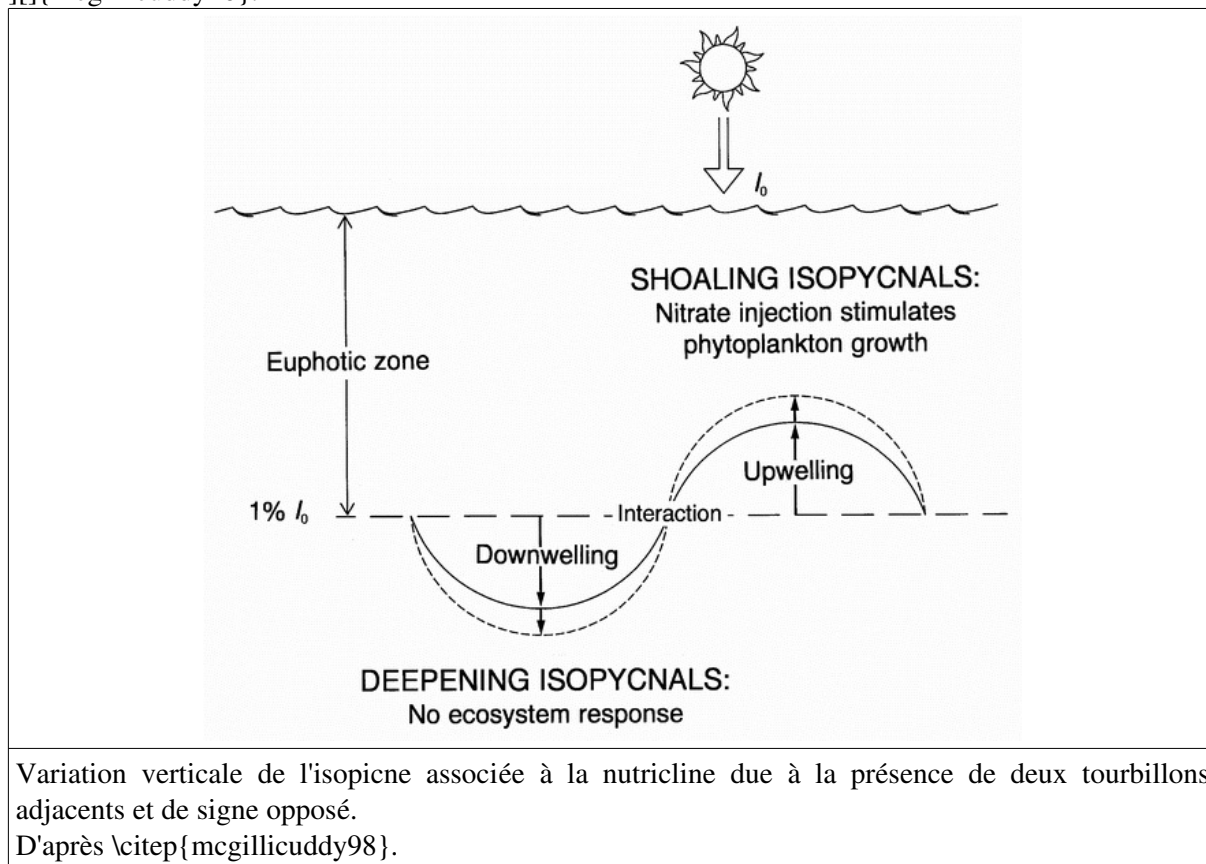
\footnote{Le terme plancton est depuis un peu plus d'un siècle utilisé pour définir les organismes vivant dans l'eau, plus ou moins passivement, en suspension et qui sont donc transportés par les courants

\citep[pour une révision sur les études Lagrangiens du plancton, voir][]{hitchcock07}.

Le lien avec la géochimie est identifiable dès les années 60 via les travaux de \cite{dugdale67} sur la limitation de la production planctonique par les sels nutritifs.

L'émergence de la problématique du réchauffement climatique lié au cycle du carbone, amenant la notion de ``pompe biologique" \citep{volk85,raven99}, a encore considérablement renforcé cette vision pluridisciplinaire de l'océan et la nécessité d'étudier conjointement et aux échelles spatio-temporelles pertinentes les processus physiques et bio-géochimiques.

La méso-échelle joue un rôle clef dans la dynamique, dans les transports de chaleur et de matière et dans le contrôle de l'activité biologique \citep[e.g. \fig{mcgillicuddy}; pour une révision récente, voir][]{mcgillicuddy16}.



Les études numériques montrent toute l'importance de ces processus, mais les confirmations expérimentales de ces effets sont difficiles à obtenir, principalement pour des raisons d'adéquation entre les stratégies expérimentales étudiant l'hydrodynamique et celles étudiant la biogéochimie.

La tâche est particulièrement compliquée pour ce qui concerne l'océan côtier à cause de la complexité de la circulation et la variabilité de la distribution des espèces et des grandeurs géochimiques associées et de la difficulté de l'estimation des transferts de matière et d'énergie côte-large et surface-fond.

À plus petite échelle, la turbulence verticale et, dans le cas particulier des zones de formation d'eaux profondes, la convection hivernale, jouent un rôle tout aussi important par leurs effets sur l'enrichissement nutritif de la couche éclairée ainsi que le transfert de matière vers le fond.

Une bonne connaissance des processus physiques conduisant à la stratification/déstratification de la colonne d'eau est donc primordiale pour une bonne résolution du cycle saisonnier de production. De plus, la turbulence peut modifier la compétition pour obtenir l'énergie radiative entre des espèces phytoplanctoniques en suspension et d'autres espèces qui sédimentent dans la colonne d'eau (Huisman 04) et peut donc jouer un rôle sur la succession des espèces à l'échelle saisonnière.

L'évaluation du mélange vertical induit par la turbulence est aussi un point clef pour l'évaluation de la dispersion du zooplancton, affectant donc possiblement la structure de l'écosystème.

A l'échelle globale, une augmentation de cette stratification est prédite suite au réchauffement climatique et la prise en compte d'une représentation fine de la turbulence dans les modèles couplés est susceptible de grandement modifier les bilans biogéochimiques à l'échelle globale (Klein 09). Cette stratification étant aussi fortement dépendante de l'activité physique à méso-échelle qui est peu ou mal prise en compte dans les modèles globaux et, dans le même temps, la turbulence agit en retour sur cette même activité méso-échelle.

Par exemple, différents modèles biogéochimiques conceptuel des tourbillons existent: le modèle fermé (le tourbillon peut être assimilé à un réacteur isolé de l'extérieur) et le modèle ouvert (le tourbillon déclenche les réactions biogéochimiques le long de son déplacement, (e.g.) (Nencioli 08)). (Olaizola et al., 1993, Nencioli et al., 2008).

La représentation par l'un ou l'autre de ces modèles conceptuels semble dépendre de l'hydrodynamisme local, en particulier en regard du rôle de la turbulence.

A fin de répondre à ce genre de questionnement, la modélisation couplée physique/biogéochimie a connu un formidable essor depuis les 30 dernières années.

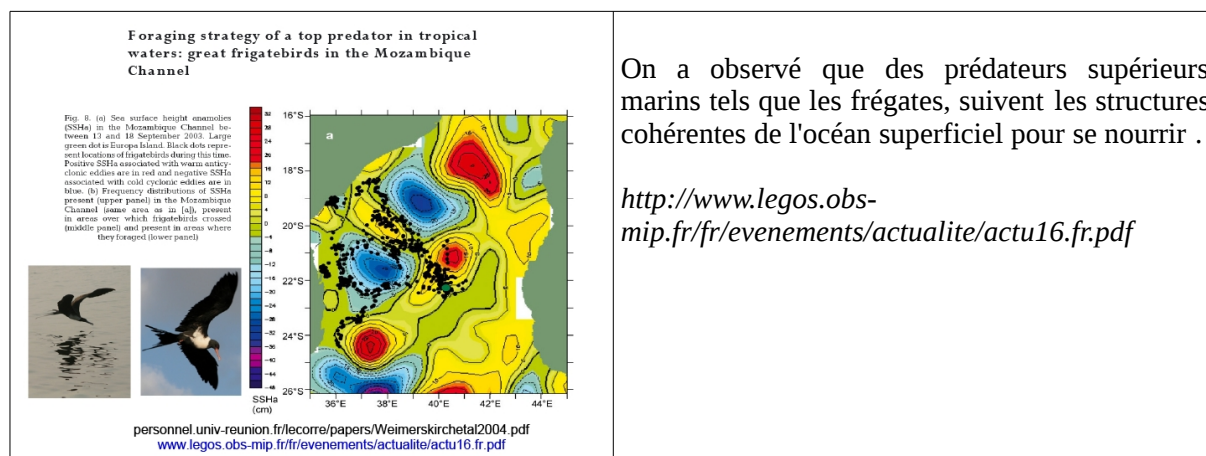
Basée sur l'équation fondamentale de conservation de la matière et profitant d'outils de modélisation physique de plus en plus performants, la modélisation couplée permet de simuler la réponse de l'écosystème planctonique en terme de production et de biomasse, ainsi que les flux géochimiques associés, à la variabilité des conditions océaniques, incluant les processus de hautes fréquences (cycles diurnes des marées et du transfert radiatif, précipitations), de basses fréquences (passages des perturbations atmosphériques) et saisonniers (variations saisonnières des débits d'eaux douces, convection hivernale, stratification estivale).

L'intégration de cette variabilité sur des échelles annuelle, pluri-annuelle, voir séculaire, donne accès à des estimations quantitatives des grandeurs biogéochimiques et des groupes écologiques fonctionnels. En réponse à la variabilité du « climat » océanique.

Les récents développements d'instrumentation permettant les mesures biogéochimiques *in situ* et en continu (e.g. ISUS qui permet la mesure de nitrate à haute fréquence, ou la cytométrie automatisée) donnent la possibilité d'explorer l'influence des processus physiques sur les processus biogéochimiques pour un continuum d'échelles spatiales et temporelles.

Ces mesures sont primordiales pour permettre de calibrer et valider aux mêmes échelles temporelles les processus simulés par les modèles physiques et biogéochimiques couplés ainsi que les produits satellites.

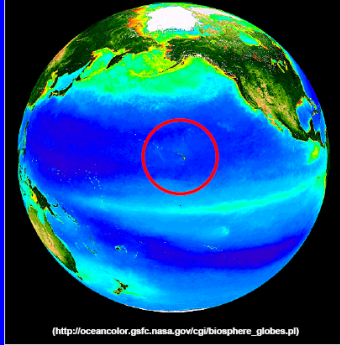
Exemple : les frégates et les tourbillons du canal du Mozambique



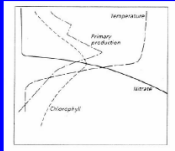
Exemple : les tourbillons « passoire » d'Hawaii (Nencioli et al. 2008)

Intro

North Pacific Subtropical Gyre



Oligotrophic region:



- Nutrient Limited
- Low biomass and primary productivity
- Small size phytoplankton
- High regeneration rates (recycled nutrients)

(http://oceancolor.gsfc.nasa.gov/cgi/biosphere_globes.pl)

Intro

Primary Production and the Biological Pump

Regenerated Production: primary production supported by recycled nutrients

New Production: primary production supported by input of nutrients from outside the euphotic zone
(Dugdale and Goering, 1987)

Biological Pump: Steady state over seasonal time scales: **New Production = Carbon Export**
(Volk and Hoffert, 1985)

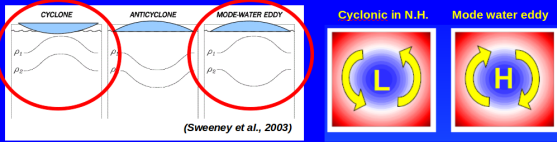
Subtropical Gyres:

- New P. small fraction of Total P.
- They cover 75% of world oceans


Important sink term for the global carbon cycle!!!

Intro

The Role of Mesoscale Eddies

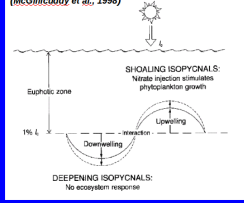


Cyclonic in N.H. **Mode water eddy**



(Sweeney et al., 2003)

(McGillicuddy et al., 1998)

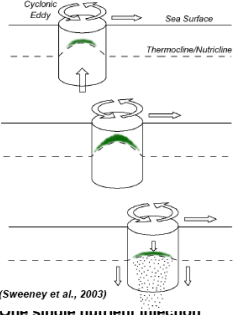


- Uplift of the seasonal thermocline
- Nutrients into the euphotic zone
- Downwelling of nutrient depleted SW
- Net vertical flux of nutrients

• 1/2 of "new" production due to cyclonic or mode water eddies!!

Intro

The "closed" system model



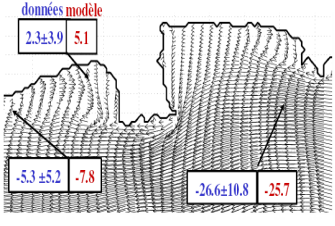
- 1. Intensification Phase (0-1 month):**
 - Upwelling of nutrients into the euphotic zone
 - Increase of primary productivity
- 2. Mature Phase (1-2 months):**
 - Phytoplankton bloom after the nutrient injection and shift in community
 - DCM follows the eddy (no lateral exchanges of waters)
- 3. Decay Phase (>2 months):**
 - As the eddy relax and nutrients are depleted the bloom decay
 - Increase in carbon export within the eddy

(Sweeney et al., 2003)

- One single nutrient injection
- Physical and biogeochemical characteristics tightly coupled and strongly related to the age of the eddy

NB : mode water—A term for water of exceptionally uniform properties over an extensive depth range, caused in most instances by convection. Mode waters represent regions of water mass formation; they are not necessarily water masses in their own right but contribute significant volumes of water to other water masses. Because they represent regions of deep sinking of surface water, mode water formation regions are atmospheric heat sources.

Exemple : les effets des tourbillons en aval des capes sur la redistribution des solutés

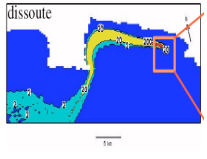


données modèle
2.3±3.9 5.1

-5.3±5.2 -7.8

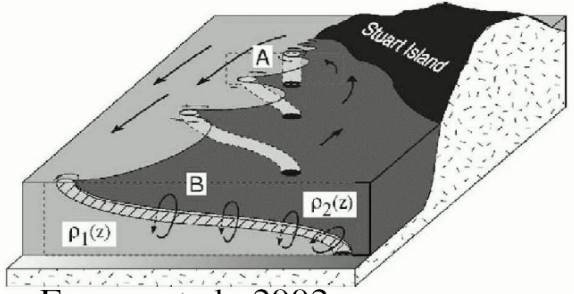
-26.6±10.8 -25.7

Doglioli et al. 2004



dissoute

10m



Stuart Island

A

B

$\rho_1(z)$

$\rho_2(z)$

Farmer et al., 2002

Les rayons de Rossby

Le rayon de déformation barotrope ou externe est le rapport entre la vitesse de propagation des ondes de gravité en eaux peu profonde et le paramètre de Coriolis :

$$\delta_R = \frac{\sqrt{gh}}{f}$$

avec h profondeur de l'océan. Il représente l'échelle spatiale typique à laquelle pour une onde de gravité barotrope les effets de la rotation terrestre deviennent importants, autant que ceux de la

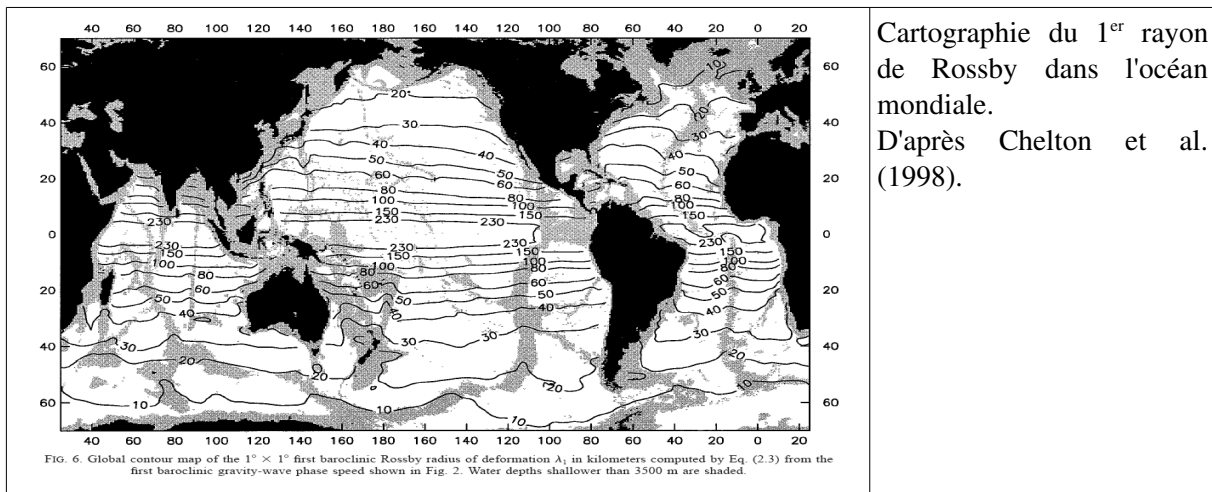
gravité .

$$\delta'_R = \frac{\sqrt{g'D}}{f} \text{ avec } g' = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} g \text{ gravité réduite}$$

est le premier rayon de déformation barocline ou interne ; il concerne une onde de gravité qui se propage dans la première couche de un océan stratifié, où $\rho_2 > \rho_1$ et plus profond .

Le rayon de déformation externe de Rossby est de l'ordre de 2000 km à mi-latitude sur des fonds de 4000 m (pour des ondes longues de célérité $c \sim 200$ m/s), tandis qu'il ne sera plus que de 300 km pour des profondeurs de 100m (c de l'ordre de 30 m/s). Quant au rayon interne de Rossby, il passera de 10-30 km en hauturier à quelques kilomètres (5-7 km) en milieu côtier.

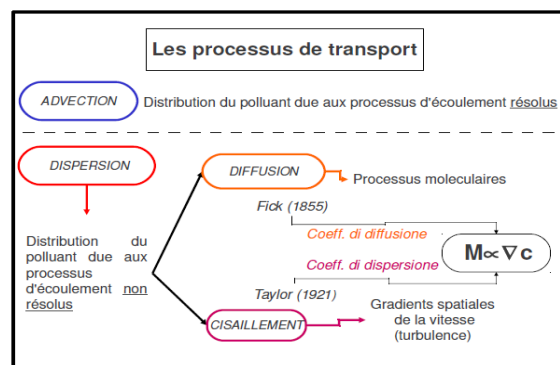
Ce rayon interne de Rossby est l'échelle spatiale naturelle à laquelle s'ajustent les processus physiques avec frontières, tels que les fronts et les courants de pente. On peut donc définir comme phénomène de méso-échelle ceux qui se développent sur des échelles spatiales du même ordre de grandeur du δ'_R local.



1.3 Les processus d'advection et de dispersion

Le terme dispersion indique le processus qui fait que une certaine substance, immergée dans un fluide se distribue à son intérieur . L'advection est le transport par action des courants déterministes (moyens dans le sens de Reynolds), tandis que la dispersion dépend de processus aléatoires (diffusion) et aussi du cisaillement du courant .

Fick (1855) et Taylor (1921) ont paramétré les flux de masse des solutés du aux mouvement moléculaires et turbulents, en assumant que ces flux soient proportionnels aux gradients de concentration . Les constantes de proportionnalité ont été appelées coefficients de diffusion moléculaire et turbulente .

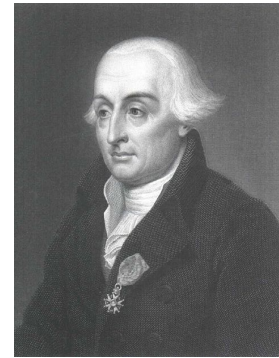


En suite Taylor a étendu cette approximation aussi au flux du aux effets combinés de la diffusion et du cisaillement, en introduisant les coefficients de dispersion .

Approches Eulérienne et Lagrangienne

Joseph Louis, comte de Lagrange (en italien Giuseppe Lodovico Lagrangia), né à Turin le 25 janvier 1736 et mort à Paris le 10 avril 1813, est un mathématicien, mécanicien et astronome. Né en Italie, mais de famille française par son père, il passa 30 ans dans le Piémont, puis 21 ans à Berlin et le restant de ses jours à Paris.

Nommé très jeune professeur à l'école d'artillerie de Turin en 1755, il y fonde en 1758 l'Académie de Turin qui publie ses premiers travaux. Il est admis à l'Académie de Berlin par Euler, à qui il succède comme président. Transféré à Paris, où il avait fait publier sa Mécanique analytique (1787), peu avant la Révolution française, il doit à son génie d'échapper aux mesures de répression contre les étrangers. Des arrêtés spéciaux du Comité de salut public lui permettent de continuer d'exercer ses fonctions. Devenu associé étranger de l'Académie des sciences en 1772, il est directeur de l'Académie en 1788 et membre de la section de mathématiques en 1795.



http://fr.wikipedia.org/wiki/Joseph-Louis_Lagrange

Il est nommé sénateur au Sénat conservateur le 4 nivôse an VIII (25 décembre 1799). Avec Monge et Laplace, il fait partie des savants nommés à siéger dans cette assemblée.

Surtout connu pour avoir introduit la méthode analytique en géométrie, il n'en a pas moins étudié toutes les branches des mathématiques et a laissé d'importants travaux tant en géométrie qu'en trigonométrie et en mécanique.

Il est inhumé au Panthéon de Paris.

Leonhard Paul Euler, né le 15 avril 1707 à Bâle et mort le 18 septembre 1783 à Saint-Pétersbourg, est un mathématicien et physicien suisse, qui passa la plus grande partie de sa vie en Russie et en Allemagne.

Euler fit d'importantes découvertes dans des domaines aussi variés que le calcul infinitésimal et la théorie des graphes. Il introduisit également une grande partie de la terminologie et de la notation des mathématiques modernes, en particulier pour l'analyse mathématique, comme pour la notion d'une fonction mathématique. Il est également connu pour ses travaux en mécanique, en dynamique des fluides, en optique et en astronomie.



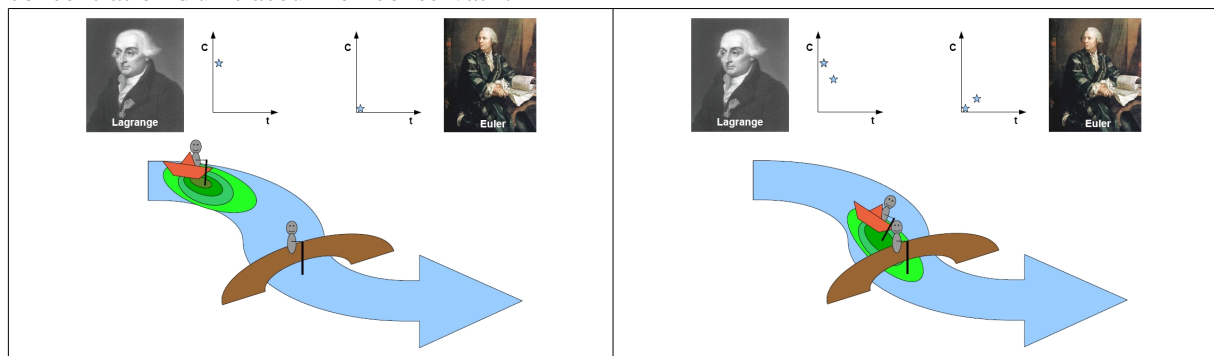
http://fr.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler

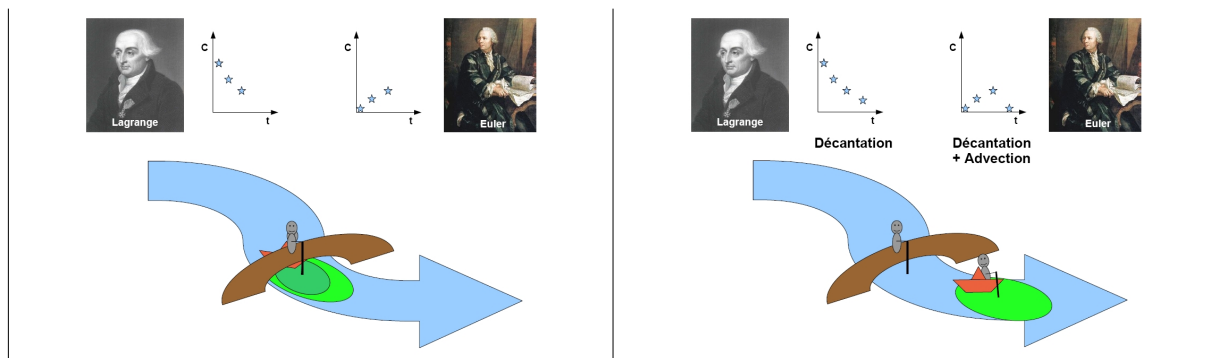
Euler est considéré comme un éminent mathématicien du XVIIIe siècle et l'un des plus grands de tous les temps. Il est aussi l'un des plus prolifiques, et une déclaration attribuée à Pierre-Simon Laplace exprime l'influence d'Euler sur les mathématiques : « Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous ».

Définition de dérivée Lagrangienne (ou particulière) :

$$\frac{DC}{Dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla C = \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z}$$

Schéma de comparaison entre approche Lagrangienne et Eulérienne dans la mesure de la concentration d'un traceur non conservatif.



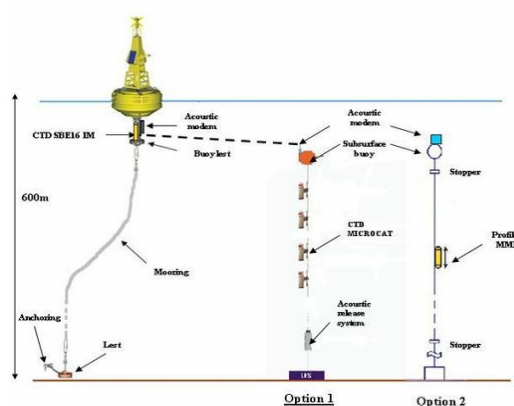


Exemples de mesures Eulériennes et Lagrangiennes.

A) La plateforme automatisée autonome MOLA

<http://observation.obs-banyuls.fr/spip.php?article106>

Il s'agit d'une plate-forme de type bouée (MOBILIS modèle Jet) d'un diamètre de 3m et de 5.5m de hauteur environ. Une structure de type pyramidale y est intégrée pour supporter toutes les mesures externes (une station météorologique et un GPS), la signalisation, l'alimentation (panneaux solaires et batteries), le cerveau central électronique et les systèmes de communication. Une CTD SBE16+ sera placée en dessous des flotteurs sur le mat central pour les données de salinité, température de surface, fluorescence et turbidité, ainsi qu'une optode à oxygène et un capteur de GTD.



Pour simplifier les opérations de relevé et de maintenance sur les capteurs, une seconde ligne de mouillage sera déployée à proximité de la plateforme mère qui comportera l'ensemble de capteurs suivants : CTD, turbidité, fluorescence, O2d et courantomètre ADCP (*Acoustic Doppler Currentmeter Profiler*). Cette seconde ligne sera munie d'un largeur acoustique pour la récupération et la maintenance et d'un système de modem acoustique pour dialoguer avec la plateforme mère. Le but de cette seconde ligne de mouillage étant de réaliser des profils sur la colonne d'eau. A terme, un autre objectif est de compléter ce dispositif par un observatoire du milieu profond au même endroit et de se servir de la plateforme MOLA comme un champ d'investigation et d'intégration de capteurs biologiques.

B) Les bouées dérivantes

Ce système est un mouillage dérivant constitué d'une bouée de surface reliée à une ancre flottante par un câble (orin, câblot). Il doit suivre avec le plus de précision possible la masse d'eau dans laquelle l'ancre flottante est immergée. Cet ensemble est couramment appelé *surdrift* pour *surface drifter*.

La bouée est de faible dimension afin d'offrir une traînée minimum et une faible prise au vent. Elle est positionnée par satellites Argos ou par GPS. Dans ce dernier cas, les positions sont stockées pendant plusieurs jours dans une mémoire interne à la bouée et elles sont ensuite transmises par le système Argos, Imersat ou autre. L'avantage de cette méthode est de diminuer le coût d'utilisation des satellites tout en obtenant plus souvent et à des périodes régulières des positions plus précises.

L'orin est de faible section, il ne fait que quelques millimètres de diamètre afin d'avoir une traînée parasite minimum. Comme il doit être suffisamment résistant il est généralement en Aramide (fibre très résistante). Il maintient l'ancre flottante à une immersion constante qui peut être de quelques dizaines de mètres à un millier de mètres.

L'ancre flottante doit offrir un maximum de traînée puisqu'elle doit suivre la masse d'eau à étudier. Sa traînée doit être au moins 30 fois plus grande que les autres éléments du mouillage. Les formes d'ancres les plus diverses sont utilisées mais les plus courantes sont cylindriques (*Holey sock*) ou en "diamant" (*Tristar*). Ces dernières sont constituées de 3 panneaux carrés en tissus montés à 90° les un des autres en se croisant suivant leurs diagonales. La forme des panneaux est maintenue par un système de tiges.

Un lest est fixé à la base de l'ancre flottante afin de maintenir l'ensemble vertical.

Texte et figures tirés de <http://www.univ-brest.fr/lpo/instrumentation/16.htm>

446 / David L. Mackas, William R. Crawford and Pearn P. Niiler

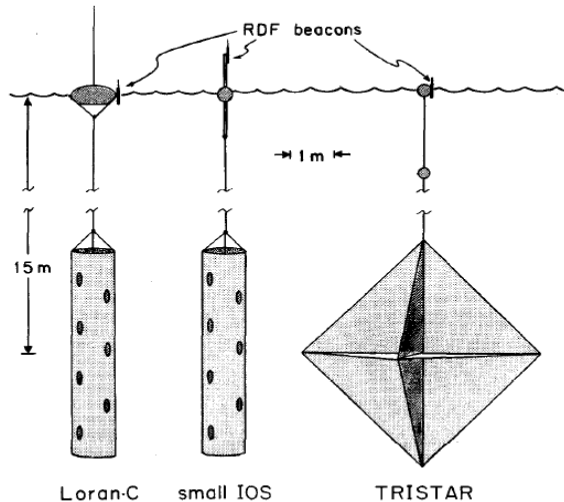
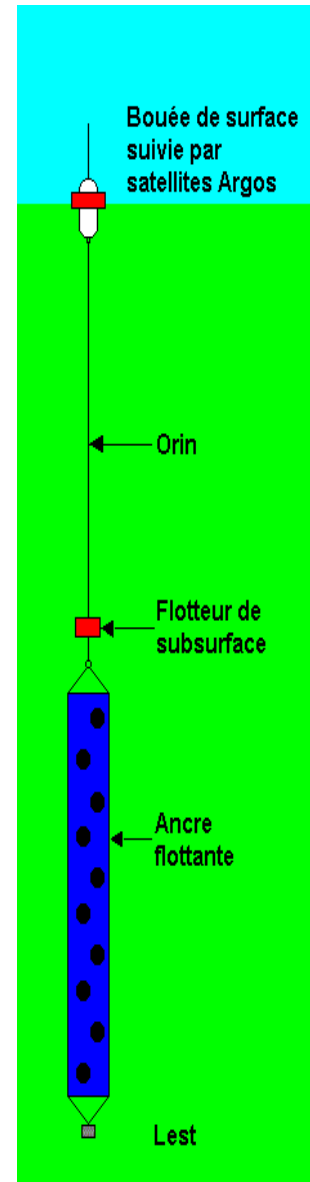


Fig.1 Relative size of float and drogue elements for the three drifter designs compared in this study. All drogues were centred at 15-m depth. Float : drogue frontal area ratios ranged from about 10 : 1 for the Loran drifter to about 50 : 1 for the TRISTAR and the IOS small drifter. The TRISTAR uses two flotation spheres, with most of the buoyancy provided by the deeper float, allowing the tether to the surface (ARGOS transmitter) float to be slack much of the time and thus transmit less surface wave energy to the drogue.

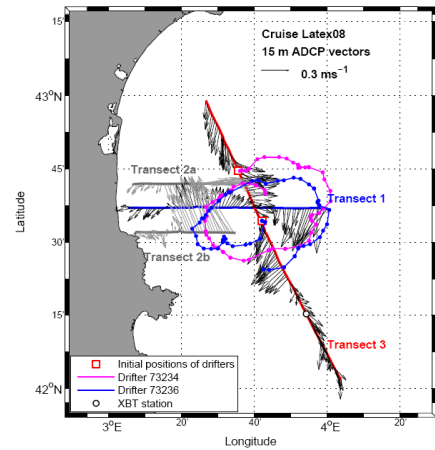


Superposition des vecteurs de vitesse du courant mesurés par l'ADCP monté dessous la coque du bateau du CNRS Tethys II et les trajectoires de deux bouée dérivantes.

Mesures effectuée pendant la campagne LATEX 2008 :

les vecteurs sont dessinés tout les 4 minutes sur trois transects: Transept 1 (Sept. 1), Transept 2a et 2b (Sept. 3), Transept 3 (Sept. 5);

les lignes des trajectoires sont pointillés tous les heures (Sept. 5 – 11).



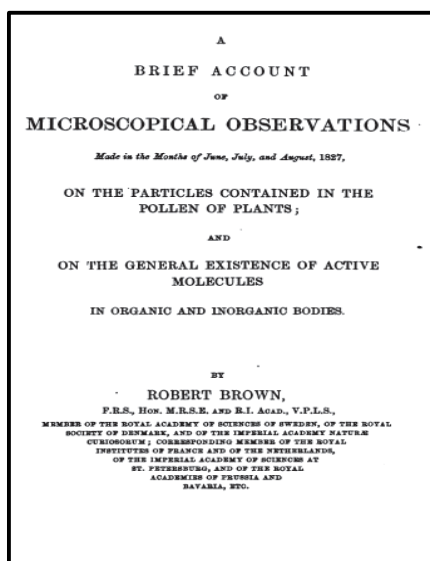
Tirée de Hu et al., 2009

La diffusion et le mouvement Brownien

Avec le terme diffusion on veut indiquer le processus qui se passe quand une substance immergée dans un liquide se distribue dans tout le milieu. Le même processus arrive aussi à l'intérieur du fluide même pour les propriétés tel que la densité ou la salinité, si la distribution n'es pas uniforme . En générale dans ces processus se redistribue d'un point à l'autre de l'espace de la matière, de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvement : ces trois processus ont beaucoup de similitude et sont très interconnecté entre eux . La diffusion est reductible au mouvement Brownien, du nom de Robert Brown qui décrit ce phénomène pour la première fois au début du 19ème siècle.

Robert Brown, né le 21 décembre 1773 à Montrose (Angus) et mort le 10 juin 1858 à Londres, est un botaniste écossais.

Sa notoriété est liée à une découverte qui ne concerne pas vraiment la botanique : le mouvement brownien. Cela est dû en particulier au fait qu'il a été l'un des premiers à utiliser couramment un microscope dans son métier. Ainsi, en 1827, il observe le pollen de *Clarkia pulchella* et constate au microscope la présence de très petites particules bougeant dans tous les sens. Il renouvelle cette observation chez d'autres plantes, croyant dans un premier temps en la manifestation d'un « fluide vital ». L'observation du même phénomène sur des particules inorganiques le fait changer d'avis.



<http://books.google.com/books?id=KwUAAAAYAAJ>

Il publie ses résultats en 1828 dans un opuscule reconnaissant qu'il avait été précédé par d'autres savants dans la constatation de ces mouvements erratiques. L'explication de ceux-ci ne sera donnée que bien plus tard par la théorie atomiste.

En observant des grains de pollens au microscope, il remarqua de très petites particules agitées d'un mouvement irrégulier, dans le fluide situé à l'intérieur des grains. Il attribua alors ce phénomène au domaine de la biologie. Plus tard il observa au microscope une goutte d'eau emprisonnée dans un morceau de quartz, n'ayant ainsi jamais pu être contaminé par des grains de pollens ou de spores. Il constata de nouveau que de petites particules étaient animées d'un mouvement chaotique et incessant. Il revint alors sur ses conclusions précédentes, et attribua ce mouvement, à juste titre, de nature physique et non biologique, sans pouvoir l'expliquer.

Plus tard, Albert Einstein considéra alors que le mouvement des grains de pollen pouvait se ramener à une marche au hasard : soumis aux chocs incessants des molécules d'eau, une grosse particule produit de petits déplacements de direction aléatoire (toutes équiprobables) et de longueur aléatoire. Einstein montre que la mesure de certaines propriétés de particules en mouvement brownien permet de déterminer plusieurs constantes physiques importantes, comme la masse des atomes, ou encore le nombre d'Avogadro. Beaucoup de mathématiciens se sont ensuite intéressés à ce phénomène.

Aujourd'hui, le mouvement brownien se retrouve partout : il fournit la base de la compréhension de tous les phénomènes diffusifs présents dans les systèmes chimiques et biologiques, mais aussi en économie. En 1900, Louis Bachelier avait développé une théorie des fluctuations boursières à partir d'une approche de marche aléatoire. Ces approches ont été reprises et enrichies dans les années 1970 et le mouvement brownien occupe désormais une place centrale dans les mathématiques financières.

Le modèle de la marche au hasard (représentant le mouvement brownien) peut expliquer le processus de diffusion. La diffusion est régie par deux types de diffusion distincte : 1) l'Auto-Diffusion : régie uniquement par le mouvement d'une espèce sous le seul effet du mouvement brownien; 2) s'y superpose, la diffusion due à une force (électrostatique, chimique, physique) ou encore due à un gradient de température et/ou de concentration.

Un simple modèle à particules Lagrangiennes permet par exemple de modéliser l'évolution spatiale et temporelle d'une goutte d'encre dans un verre d'eau et d'en observer son Auto-Diffusion. Cela permet aussi de réfléchir sur comment le désordre microscopique génère un ordre macroscopique.



Yellow food coloring diffusing through water. The glass on the left contains hot water, while the glass on the right contains cold water. The food coloring was added to the cold water slightly before the coloring was added to the hot water, yet after a few seconds it has diffused more thoroughly through the hot water. The frames are roughly 1 second apart (so the animation is roughly 2x real-time).

en>User:CTho made this. It is available (along with the source images) at <http://ctho.ath.cx/pics/new/2006-09-24/> - It has been released into the public domain. [1]

<http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Diffusion.gif>

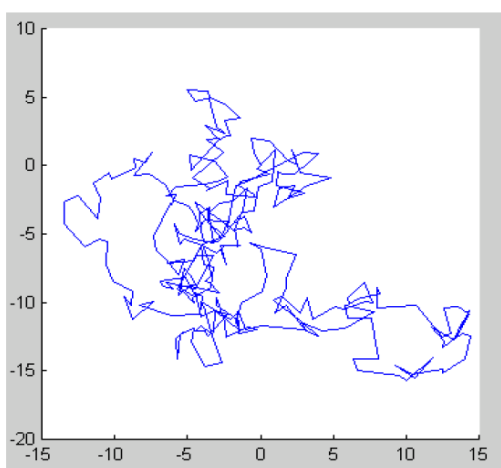


Figure 2 : Marche aléatoire d'une particule dans un espace à 2 dimensions

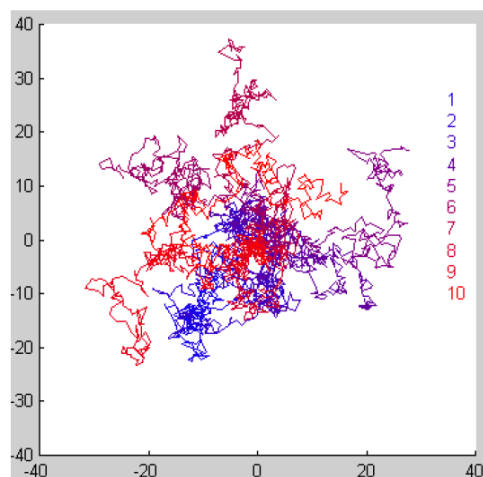


Figure 3 : Marche aléatoire de 10 particules indépendantes

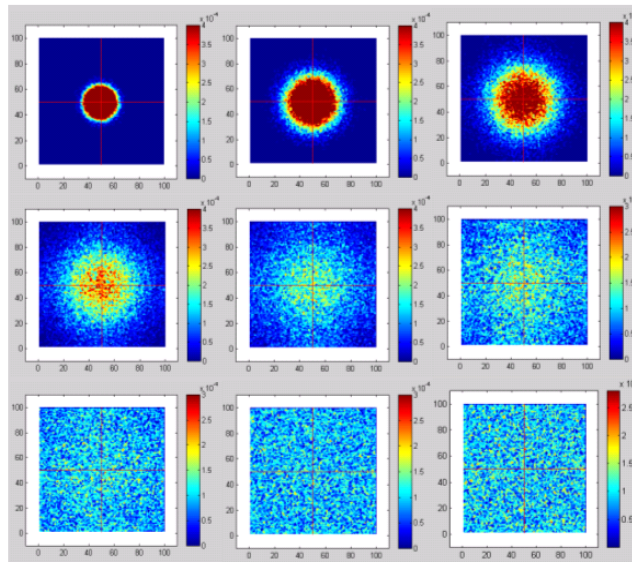
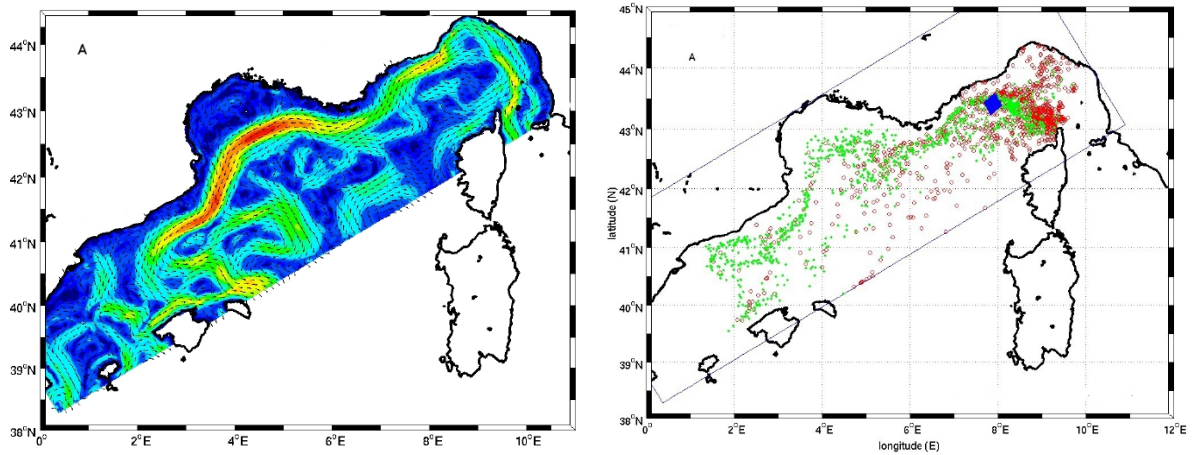


Figure 5 : Diffusion d'une goutte d'encre dans de l'eau

Simulation numérique avec un modèle à particules Lagrangiennes de la diffusion d'une goutte d'encre dans un verre d'eau .

Exemples de modèles Eulérien et Lagrangien

Sortie d'un modèle de circulation Eulérien et d'une simulation Lagrangienne conjointe (Qiu et al. 2011).



2. Fondements

2.1 Équation de continuité

Dans la mécanique des fluides classique l'équation de continuité est généralement écrite dans la forme Eulérienne

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0$$

avec ρ masse volumique, t temps et u_i vitesse du fluide le long des trois axes x_i (avec $i=1,2,3$ et application de la règle de l'addition, voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Convention_de_sommation_d'Einstein). L'équation exprime l'idée que la densité locale change seulement s'il y a une convergence ou une divergence du flux de masse (ρu_i).

Une autre forme de l'équation est

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.1)$$

avec

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i}$$

dérivé totale de la masse volumique, i.e. la vitesse de changement de la densité en suivant la particule.

Si on veut appliquer cette équation à l'océan côtier, on s'aperçoit que l'eau de mer n'est pas une substance très simple! D'abord on ajoute des changements en masse volumique dus à la diffusion du sel. En eau douce on peut simplifier en considérant que les causes principales des variations de masse volumique sont le refroidissement et le réchauffement du fluide et que ces effets sont pris en compte dans l'équation (1.1) si on considère que u_i comprend aussi les expansions et les contraction thermiques, mais cela n'est pas possible en eau de mer. Toutefois, dans la gamme des valeurs réalistes des variations de flux de chaleur et de sel, la température et la salinité varient très lentement.

La masse volumique et la « densité »

La masse volumique est le paramètre fondamental pour l'étude dynamique des océans. Des faibles variations horizontales de masse volumique (générées par exemple par des différences de rayonnement solaire) peuvent produire des courants importants.

En toute rigueur, densité = (masse 1 m³ d'eau de mer)/(masse 1 m³ d'eau distillée à 4°C) [pas d'unité]. En océanographie, traditionnellement on lui donne une autre définition : pour des raisons pratiques on nomme « densité » la masse volumique [kg m⁻³] – 1000 et on utilise le symbole σ .

La masse volumique ρ de l'eau de mer dépend de la salinité S , de la température T et de la pression p . La relation entre ces termes est l'équation d'état de l'eau de mer. Cette relation empirique est le résultat de nombreuses études en laboratoire. La première équation établie en 1902 par Knudsen et Ekman a été ensuite remplacée par "l'Equation d'Etat Internationale (1980)" :

IES80 : équation d'état de l'eau de mer
(International Equation of State of Seawater)

$$\rho(S, t, p) = \rho(S, t, 0) \left[1 - p/K(S, t, p) \right]$$

avec

$$\begin{aligned} \rho(S, t, 0) = & 999.842594 + 6.793952 \times 10^{-2} t - 9.095290 \times 10^{-3} t^2 + 1.001685 \times 10^{-4} t^3 - 1.120083 \times 10^{-6} t^4 \\ & + 6.536332 \times 10^{-9} t^5 + 8.24493 \times 10^{-1} S - 4.0899 \times 10^{-3} tS + 7.6438 \times 10^{-5} t^2 S - 8.2467 \times 10^{-7} t^3 S \\ & + 5.3875 \times 10^{-9} t^4 S - 5.72466 \times 10^{-3} S^2 + 1.0227 \times 10^{-4} tS^2 - 1.6546 \times 10^{-6} t^2 S^2 \\ & + 4.8314 \times 10^{-4} S^3 \end{aligned}$$

et

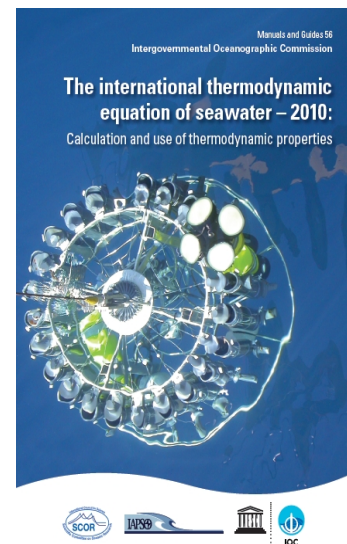
$$\begin{aligned} K(S, t, p) = & 19652.21 + 148.4206 t - 2.327105 t^2 + 1.360447 \times 10^{-2} t^3 - 5.155288 \times 10^{-5} t^4 + 3.239908 p \\ & + 1.43713 \times 10^{-3} tp + 1.16092 \times 10^{-4} t^2 p - 5.77905 \times 10^{-7} t^3 p + 8.50935 \times 10^{-5} p^2 \\ & - 6.12293 \times 10^{-6} tp^2 + 5.2787 \times 10^{-8} t^2 p^2 + 54.6746 S - 0.603459 tS + 1.09987 \times 10^{-2} t^2 S \\ & - 6.1670 \times 10^{-5} t^3 S + 7.944 \times 10^{-2} S^2 + 1.6483 \times 10^{-2} tS^2 - 5.3009 \times 10^{-4} t^2 S^2 + 2.2838 \times 10^{-3} pS \\ & - 1.0981 \times 10^{-5} tpS - 1.6078 \times 10^{-6} t^2 pS + 1.91075 \times 10^{-4} pS^2 - 9.9348 \times 10^{-7} p^2 S \\ & + 2.0816 \times 10^{-8} tp^2 S + 9.1697 \times 10^{-10} t^2 p^2 S \end{aligned}$$

<http://lecalve.univ-tln.fr/oceano/ies80/index.html>

Des formules plus fine et récentes sont aussi présentes dans la littérature (Anati, 1999; Feistel 2003, 2005), ainsi que des formulations prenant en compte la variabilité géographique liée à la forme du géoïde (pour le concept de « *neutral density* » voir McDougall, 1987).

En juin 2009, la Commission Intergouvernementale Océanographique (IOC, “*Intergovernmental Oceanographic Commission*”), avec l’appui du Comité Scientifique de Recherche Océanographique (SCOR, “*Scientific Committee Oceanic Research*”) et de l’Association Internationale Des Sciences Physiques de l’Océan (IAPSO, “*International Association of the Physical Sciences of the Oceans*”), a adopté l’Équation Thermodynamique de l’eau de mer 2010 (TEOS-10, “*Thermodynamic Equation of Seawater – 2010*”) comme définition officielle des propriétés de l’eau de mer et de la glace en science de l’océan.

Il est d’ors et déjà fortement conseillé aux océanographes d’utiliser les algorithmes et variables définis par TEOS-10 pour rapporter leurs résultats.



Les différences fondamentales de TEOS-10 par rapport à EOS-80 sont :

(1) l’utilisation de la Salinité Absolue (Absolute Salinity SA) pour décrire la salinité de l’eau de mer; la Salinité Absolue prend en considération la variabilité spatiale de la composition de l’eau de mer. En pleine mer, l’usage de cette nouvelle salinité a un effet non trivial sur le gradient horizontal de masse volumique, et ainsi sur les vitesses calculées via l’équation du “vent thermique”.

(2) l’utilisation de la Température Conservatrice (Conservative Temperature Q) pour remplacer l’utilisation de la température potentielle q. Ces deux températures sont des grandeurs déterminées à partir d’une expérience de pensée (à savoir, grandeurs ramenées à la pression de surface de manière adiabatique et isohaline). La Température Conservatrice présente l’avantage de mieux représenter la capacité calorifique de l’eau de mer, avec une précision supérieure par deux ordres de grandeur à celle de la température potentielle.

(3) Les propriétés de l’eau de mer définies par TEOS-10 découlent toutes mathématiquement d’une fonction de Gibbs (notamment par différenciation) et sont ainsi compatibles les unes avec les autres (contrairement à l’approche EOS-80 désormais obsolète, dans laquelle différents polynômes définissaient chaque variable thermodynamique et n’étaient pas mutuellement compatibles).

Pour permettre à tout océanographe d’utiliser le nouveau formalisme TEOS-10, deux logiciels sont disponibles :

- (i) La 'toolbox' océanographique Gibbs SeaWater (GSW) (pour MATLAB et FORTRAN) et,
(ii) Sea-Ice-Air (SIA) (Fortran et Visual Basic).
Ces deux logiciels sont libres d'accès depuis le site Internet suivant : <http://www.TEOS-10.org> .

2.2 Équations de la quantité de mouvement

En approche Eulérienne la seconde loi de Newton (ou principe fondamental de la dynamique de translation) s'écrit

$$\frac{d(\rho u_i)}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i \quad (1.3)$$

Dans la partie gauche il y a le taux de changement de la quantité de mouvement par unité de volume en suivant une particule de fluide tandis que dans la partie droite il y a la somme des forces de surface et de volume.

Les forces de surface sont les gradients de pression hydrostatique p et la divergence du tenseur des contraintes τ_{ij} .

Les forces de volume ρb_i ont plusieurs origines (gravité, Coriolis), mais toutes sont caractérisées par le fait qu'elles soient proportionnelles à la masse de la particule.

Le premier index dans τ_{ij} est utilisé pour définir la direction de cisaillement (parallèle à x_i) tandis que le second index définit le plan de cette action (perpendiculaire à x_i). L'axe x_3 indique la verticale. Donc, τ_{13} et τ_{23} sont les contraintes de cisaillement sur les plans horizontaux, tandis que τ_{12} et τ_{21} sont celles sur les frontières latérales.

Entre les différentes composantes du tenseur des contraintes, les contraintes de cisaillement sur les plans horizontaux sont particulièrement importantes dans les eaux peu profondes, parce que ce sont elles qui transmettent le forçage du vent aux couches de surface et le frottement aux couches de fond.

En utilisant l'équation de continuité pour un fluide incompressible (1.2) on peut réécrire la dérivée totale à droite dans (1.3) de la façon suivante

$$\frac{d(\rho u_i)}{dt} = \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) \quad (1.4)$$

Le deuxième terme sur la droite est la divergence du flux de la quantité de mouvement entraînée par l'écoulement même. Il représente la redistribution de la quantité de mouvement dans l'espace, dont heureusement les effets sont importants seulement dans une partie limitée du champ d'écoulement. En effet ce terme non linéaire dans les composantes de la vitesse est la source de beaucoup de complexités mathématiques (voir paragraphe « Le tenseur de Reynolds »)!

Les forces de volume

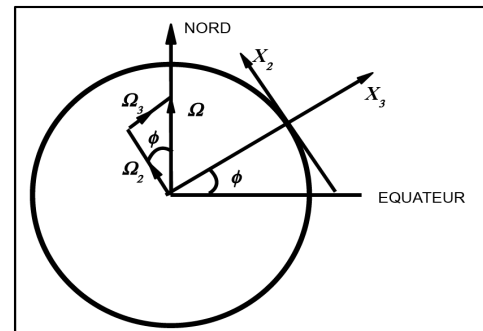
Les composantes de la vitesse u_i sont mesurées dans un système de référence en rotation tel que la Terre, donc les forces de volume incluent la force centrifuge et celle de Coriolis associées à la rotation de la Terre. Généralement la force centrifuge est contenue dans le terme de la force de gravité et les forces de volume sont écrites dans la forme suivante

$$\begin{aligned}
 b_i &= 2 \epsilon_{ijk} u_j \Omega_k + g_i \\
 g_i &= -g \delta_{i3}
 \end{aligned}
 \tag{1.5}$$

avec Ω_k qui représente les composantes de la vitesse angulaire de la Terre dans le système de coordonnées locales et g l'accélération gravitationnelle locale.

Entre les autres forces de volume il y a l'attraction gravitationnelle de la Lune et du Soleil, qui sont importantes surtout dans l'océan profond, tandis qu'en océanographie côtière on étudie les effets de la propagation de la marée en eaux peu profondes plus que les mécanismes de sa génération.

Le système de coordonnées locales horizontales (x_1, x_2) et verticale (x_3) à la latitude ϕ et les composantes du vecteur vitesse angulaire de la Terre.



L'intensité du vecteur vitesse angulaire de la Terre Ω est 2π radiant en 24 h, donc

$$\Omega = 0.7292 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}.$$

En substituant (1.4) et (1.5) dans la (1.3) on obtient

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - g \rho \delta_{i3} + 2 \rho \epsilon_{ijk} u_j \Omega_k + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}
 \tag{1.6}$$

Dans cette forme les équations du mouvement sont plus ou moins impossibles à traiter analytiquement. Pour arriver à des modèles appropriés pour des écoulements simples dans l'océan côtier il faut encore faire des idéalizations et des simplifications.

2.3 L'approximation de mouvements quasi-horizontaux

En océanographie côtière le rapport entre la vitesse verticale et les vitesses horizontales est petit. Cela est en partie dû au petit rapport d'échelle entre profondeur et largeur de l'océan côtier, qui est de l'ordre de 10^{-3} et par simple contrainte géométrique on peut s'attendre que les mouvements à l'échelle de bassin aient le même rapport pour les vitesses. En plus, la présence fréquente de stratification empêche les mouvements verticaux.

Alors étant que $|u_3| \ll |u_1|, |u_2|$ les composantes du terme de l'accélération de Coriolis dans les équations du mouvement deviennent

$$\begin{aligned}
 \text{1ère eq.} & \quad 2(u_2 \Omega_3 - u_3 \Omega_2) \cong 2 u_2 \Omega_3 \\
 \text{2ème eq.} & \quad 2(u_3 \Omega_1 - u_1 \Omega_3) \cong -2 u_1 \Omega_3
 \end{aligned}$$

la géométrie du système nous donne

$$\Omega_3 = \Omega \sin\phi$$

avec ϕ = latitude. On peut alors introduire le paramètre de Coriolis

$$f = 2 \Omega \sin\phi = 1.458 \cdot 10^{-4} \sin\phi \quad [\text{s}^{-1}]$$

On aura donc

$$\begin{array}{ll} \text{dans la 1ère eq.} & f u_2 \\ \text{et dans la 2ème eq.} & -f u_1 \end{array}$$

Aux moyennes latitudes autour de 41 degrés, la valeur approximative de f est 10^{-4} s^{-1} . Généralement on prend f positive et on fait référence à l'hémisphère nord.

2.4 L'approximation hydrostatique et l'approximation de Boussinesq

L'équation (1.6) s'applique séparément dans les trois dimensions, mais pour un grand ensemble de mouvements la force de gravité est fortement prévalent sur la verticale.

Si on prend l'équation de la quantité de mouvement pour la composante verticale on a

$$\frac{d u_3}{d t} = -\frac{1}{\rho} \frac{d p}{d x_3} - g + 2(u_1 \Omega_2 - u_2 \Omega_1) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{3j}}{\partial x_j} \quad (1.7)$$

L'accélération gravitationnelle g est presque de 10 m s^{-2} ; pour ce qui concerne les mouvements horizontaux on a déjà vu que dans l'océan côtier leur ordre de grandeur est entre le 0.1 et le 1.0 m s^{-1} , ainsi l'accélération de Coriolis est de l'ordre de $10^{-5} - 10^{-4} \text{ m s}^{-2}$. Les valeurs maximales des gradients des tensions de Reynolds sont de quelques 0.1 N m^{-2} (0.1 Pa) = 0.1 kg m s^{-2} sur une couche de 10 m , donc le dernier terme est de l'ordre de grandeur de 10^{-5} m s^{-2} . Les vitesses verticales typiques de l'océan côtier sont au maximum de 10^{-2} m s^{-1} et les échelles de temps au minimum de 10^3 s , par conséquent les accélérations verticales sont de l'ordre de 10^{-5} m s^{-2} . Par conséquent on a des mouvements presque horizontaux dans lesquels le seul terme qui balance la prépondérante accélération de gravité est le gradient de pression :

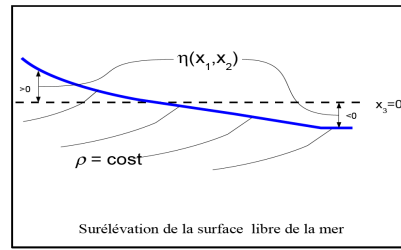
$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = \rho g \quad (1.8)$$

étant donné que ce bilan est le même que celui d'un fluide au repos, on l'appelle approximation hydrostatique.

Toutefois il faut penser que si le fluide était vraiment au repos, cet équilibre nous dit que la position de la surface libre de la mer doit être $x_3 = 0$, par contre dans un fluide en mouvement la surface libre peut avoir une certaine inclinaison par rapport à l'horizontal. Généralement on utilise une fonction $\eta = \eta(x,y)$ pour indiquer la position de la surface libre de la mer (surélévation ou, en anglais, *sea surface height, ssh*). Des valeurs négatives de η indiquent que la surface libre est au dessous du niveau moyen de référence, les valeurs positives indiquent que η est au dessus.

Si on intègre l'éq.(1.8) entre un certain niveau x_3 et la surface on obtient

$$p = p_a + \int_{x_3}^{\eta} \rho g dx_3 \tag{1.9}$$



où p_a est la pression atmosphérique.

Les équations du mouvement horizontales (1.6 avec $i=1,2$) contiennent les gradients de pression qui peuvent être calculés à partir de l'approximation hydrostatique (1.9) de la façon suivante :

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial p_a}{\partial x_i} + \rho_{surf} g \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \int_{x_3}^{\eta} g \frac{\partial \rho}{\partial x_i} dx_3 \quad (i = 1,2) \tag{1.10}$$

Cette équation nous dit que le gradient de pression dans la colonne d'eau est le résultat de la somme de trois termes: le gradient de la pression atmosphérique, celui de la surélévation de la surface libre et du gradient du champs de densité interne.

Le gradient de pression atmosphérique constitue un forçage externe pour les mouvements dans les eaux peu profondes, mais si on le compare avec le forçage du vent ce terme peut généralement être négligé.

Le deuxième terme est l'accélération de gravité due à l'inclinaison de la surface libre, comme si les particules d'eau qui se trouvent à la surface roulent le long de la pente.

Le troisième terme exprime les effets de flottabilité (en anglais *buoyancy*) liés aux différences de masse volumique le long des surfaces horizontales (ou mieux de geopotentiel). Dans les conditions typiques de la circulation côtière ce dernier terme peut être reformulé pour une plus grande simplicité.

Les différences verticales en masse volumique dans les eaux côtières sont de l'ordre de un sur mille, donc dans (1.10) une densité de référence ρ_o peut substituer ρ_{surf} sans faire des erreurs trop grandes. Par contre les échelles horizontales de la variation en masse volumique ($\partial \rho / \partial x_i$) ne sont pas négligeables . Boussinesq a suggéré alors d'écrire la masse volumique comme

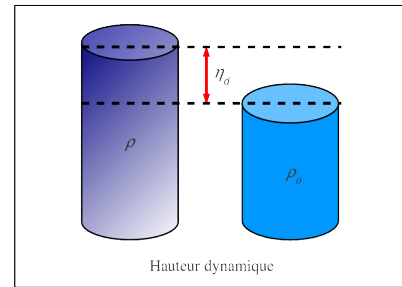
$$\rho = \rho_0(1+\epsilon) \quad \text{avec } \epsilon = O(10^{-3}) \tag{1.11}$$

et de retenir dans le terme de flottabilité (*buoyancy*) seulement les quantités qui ont cet ordre de grandeur.

Laissant tomber le terme de la pression atmosphérique, on peut récrire la (1.10)

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} = g \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \int_{x_3}^{\eta} g \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} dx_3 = g \frac{\partial}{\partial x_i} [\eta - \eta_d(x_3)] \quad (i = 1,2) \tag{1.12}$$

La quantité η_d est la différence de hauteur entre une colonne d'eau de densité ρ_0 et une à la « vrai » densité $\rho(x_3)$. En résumé, l'approximation de Boussinesq permet de remplacer la densité exacte par sa valeur de référence ρ_0 partout sauf dans le terme d'accélération de la pesanteur. Dans les termes de pression il ne reste plus que la part due à ϵ qui est appelée hauteur dynamique, car c'est le principal moteur de l'écoulement. Souvent comme densité de référence on prend la densité la plus grande ainsi ϵ est toujours négative et la hauteur dynamique est nulle ou positive



Si le gradient de pression $-\partial p / \partial x_i$ disparaît à un certain niveau suffisamment profond $x_3 = -h$, l'équation (1.12) devient

$$\eta = \eta_d(-h) \quad (1.13)$$

ayant négligé la constante d'intégration, i.e. en faisant un choix astucieux du niveau zéro de la surface libre. Dans ce cas la topographie du niveau de la mer peut être déterminée directement par la distribution de la densité (Sverdrup, 1942). Dans les eaux peu profondes toutefois il est rarement raisonnable de faire l'hypothèse que les gradients de pression deviennent nuls à un niveau suffisamment profond, donc le calcul (1.13) peut être fait seulement quand la profondeur totale H est beaucoup plus grande que la profondeur de référence h . Cela empêche pratiquement toute simplification dans les eaux côtières qui sont généralement des zones avec de très forts gradients de densité et sont dynamiquement très actives.

Toutefois, avec un choix attentif du niveau de référence h on peut regarder η_d comme une contribution à la hauteur dynamique de quelque chose qui est relative à la distribution de la densité et sur laquelle il y a une distribution de $h - \eta_d(-h)$ qui n'est pas nécessairement liée avec la distribution interne de la densité.

Les vitesses typiques dans l'océan côtier sont de l'ordre de 0.1 m s^{-1} avec des échelles de temps de quelques jours (ex. tempête) i.e. 10^5 s . Cela correspond à une accélération moyenne de 10^{-6} m s^{-2} . Une inclinaison de la surface libre de 10^{-7} (1 cm sur 100 km) va créer la même accélération, donc elle est importante dans le bilan de la quantité de mouvement.

Une anomalie de densité ϵ d'une partie sur 1000 constante sur une couche superficielle profonde de 30 m, donne une contribution de 3 cm à la hauteur dynamique relative à une profondeur de 30 m. Sur l'échelle typique des 100 km un gradient créé par la densité de 10^{-7} est observé s'il y a une couche légère de surface qui est profonde de 30 m dans un point et de 20 m 100 km plus loin. Les différences de densité de cet ordre de grandeur (et plus) sont presque toujours présentes dans l'océan côtier, donc on peut dire que tous les processus physiques qui contrôlent le champ de densité peuvent affecter les bilans horizontaux de quantité de mouvement de façon considérable.

Le tenseur des contraintes de Reynolds

L'écoulement dans les eaux côtières est généralement turbulent, surtout dans les couches de surface et de fond et les échelles de temps de ces mouvements sont typiquement plus grandes que les échelles typiques des fluctuations turbulentes. Dans ces circonstances il est possible d'utiliser l'approche de Reynolds et penser les équations de la continuité et du mouvement comme relatives à un écoulement moyen convenablement défini.

Donc, toutes les quantités turbulentes qui interviennent dans les équations sont supposées être la somme d'une composante moyenne et d'une composante fluctuante

$$u_i = \bar{u}_i + u_i'$$

$$p = \bar{p} + p'$$

Les moyennes temporelles étant de u_i' , p' nulles par hypothèse, dans les équations de continuité et du mouvement moyennées tous les termes qui contiennent des fluctuations disparaissent, sauf les termes contenant la moyenne du produit $\rho \overline{u_i' u_j'}$. La divergence de ces termes joue un rôle dans les équations du mouvement qui est très similaire à celui des termes visqueux ainsi ces termes sont généralement mis dans la partie droite de l'équation du mouvement et combinés avec les termes visqueux moyennés :

$$\tau_{ij} = \bar{\tau}_{ij} - \rho \overline{u_i' u_j'}$$

La contribution de la viscosité moléculaire est toute petite par rapport à celle de la viscosité turbulente (mis à part quelques cas exceptionnels) donc, par la suite, on considérera toujours que les contraintes turbulentes de Reynolds sont toujours incluses dans les termes visqueux et que l'équation (1.3) est toujours appliquée à l'écoulement moyen, bien que d'un point de vue pratique on ne mettra plus sur toutes les quantités les barres symbolisant l'opération de moyenne .

RAPPEL (voir Cours OPB205)

Les équations de l'écoulement moyen (Reynolds)

Pour un écoulement turbulent, plutôt que de rechercher la vitesse instantanée, que nous donnent les équations de Navier-Stokes vues précédemment, on cherche une vitesse lissée dans le temps, c'est à dire moyennée sur une période de temps dépendant du phénomène étudié.

Dans le même temps, pour chacune des variables (composantes de la vitesse et pression) on fait la décomposition suivante $u = \bar{u} + u'$, où \bar{u} est la moyenne et u' la variabilité autour de u , telle que $\overline{u'} = 0$:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u dt \quad \overline{u'} = \frac{1}{T} \int_0^T u' dt = 0$$

Cette technique a été mise au point par Osborne Reynolds (http://en.wikipedia.org/wiki/Osborne_Reynolds). Établissons pour exemple la moyenne du produit de deux composantes indépendantes u et v :

$$\overline{uv} = \frac{1}{T} \int_0^T uv dt = \frac{1}{T} \int_0^T \bar{u}\bar{v} dt + \frac{1}{T} \int_0^T \bar{u}v' dt + \frac{1}{T} \int_0^T u'\bar{v} dt + \frac{1}{T} \int_0^T u'v' dt$$

ainsi

$$\overline{uv} = \bar{u}\bar{v} + \overline{\bar{u}v'} + \overline{u'\bar{v}} + \overline{u'v'}$$

mais puisque $\overline{u'} = \overline{v'} = 0$

$$\overline{uv} = \bar{u}\bar{v} + \overline{u'v'}$$

T représente un laps de temps suffisamment long pour que les valeurs moyennes soient indépendantes du temps. On a pour v , w , p ... des définitions analogues. Si $\overline{u'} = 0$ il faut noter que les fluctuations elles-mêmes peuvent être du même ordre de grandeur que u . De plus les fluctuations superposées au vecteur vitesse moyen sont tridimensionnelles, c'est à dire u' , v' , w' sont toujours présentes même si l'écoulement est mono ou bidimensionnel.

On peut montrer que tous les termes linéaires des équations de Navier-Stokes gardent, pour l'écoulement moyen, la même forme que pour l'écoulement instantané, par contre les termes d'advection (à démontrer en exercice) deviennent :

$$\overline{\vec{V} \cdot \nabla u} = \overline{\vec{V}} \cdot \nabla \bar{u} + \underbrace{u' \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} + w' \frac{\partial u'}{\partial z}}_{\text{termes turbulents}}$$

Les équations de Reynolds diffèrent donc de celles de Navier-Stokes par l'apparition des termes « turbulents ». En anglais elles sont aussi appelées *RANS equations* (*Reynolds-averaged Navier-Stokes equations*).

Tension de Reynolds et viscosité turbulente

On démontre que l'équation de continuité pour un fluide incompressible

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

satisfait pour l'écoulement moyen (à faire en exercice) à la forme:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0$$

D'après les définitions de \bar{u} et u' nous obtenons:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial u}{\partial x} dt = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{T} \int_0^T u dt \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{T} \int_0^T (\bar{u} + u') dt \right] = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$$

on en déduit par soustraction ($u' = u - \bar{u}$) que

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

On peut donc écrire les termes turbulents de la façon suivante, sans en changer la valeur (selon Ox):

$$\overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y}} + \overline{w' \frac{\partial u'}{\partial z}} + u' \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) = \frac{\partial \overline{u' u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u' v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u' w'}}{\partial z}$$

et l'équation de Reynolds pour la composante u s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + f \bar{v} + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial \overline{u' u'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u' v'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u' w'}}{\partial z}$$

Les trois derniers termes sont appelés termes de tensions de Reynolds.

J.V. Boussinesq (1842 – 1929) proposa de relier ensuite ces tensions de Reynolds aux composantes du gradient des vitesses moyennes de la façon suivante :

$$\overline{u' u'} = -A_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} ; \quad \overline{u' v'} = -A_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} ; \quad \overline{u' w'} = -A_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} ;$$

où les coefficients A sont appelés coefficients d'échange turbulent (*Austauch* = échange en allemand) ou *eddy viscosity* en anglais.

Si on néglige les variations spatiales de ces coefficients les termes turbulents prennent une forme identique aux termes de frottement moléculaires, e.g. pour la composante x :

$$\frac{d \bar{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + f \bar{v} + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right] + A \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right]$$

et vu que ces derniers sont beaucoup plus petits (en océan, 10^{-5} à 10^{-6} en verticale, 10^{-10} à 10^{-12} sur l'horizontale) ils seront par la suite être négligés.

Il faut par contre faire attention dans les simplifications, parce que, contrairement à ν , les A ne sont pas des propriétés du fluide, mais de l'écoulement. Ils varient de place en place et dépendent de l'échelle de « lissage » choisie. En océanographie généralement, on fait une distinction entre coefficients horizontaux

$$A_x = A_y = A_h \text{ et coefficient verticale } A_z .$$

2.5 Frottement à la surface et au fond

Tandis que les composantes diagonales du tenseur des contraintes de Reynolds représentent une petite correction de la pression hydrostatique, les composantes $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \overline{u' v'}$ représentent le flux de quantité de mouvement turbulent dont la divergence est très importante dans les deux premières équations de la quantité de mouvement (équations des composantes horizontales). Dans la pratique la

valeur de τ_{xy} est rarement plus grande que 1 Pa et son échelle de variation spatiale est rarement moins que 10 km. Donc, le terme de sa divergence

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}, \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \approx O(10^{-7}) \text{ m s}^{-2} < \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}, \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \quad (\text{voir ci-dessous})$$

Bien que la divergence verticale soit plus importante, la différence n'est pas assez grande pour éliminer complètement τ_{xy} et τ_{yx} , toutefois Csanady (82) souligne que il est difficile de démontrer que les effets de frottement latérale aient un rôle vraiment significatif dans des problèmes de circulation générale dans l'océan côtier.

Par contre, les tensions de Reynolds dans les plans horizontaux $\tau_{xz} = \overline{u'w'}$ et $\tau_{yz} = \overline{v'w'}$ sont très importantes en eaux peu profondes. Le frottement du vent est le principal forçage de l'écoulement et il est transmis des couches superficielles à celle de fond par ces termes-là. De même, le frottement au fond représente un processus clé sur la circulation côtière.

Si on indique avec $\vec{F} = (F_x, F_y)$ ($z=0$) les composantes du frottement dû au vent, la continuité du frottement à l'interface air-mer impose

$$\tau_{xz} = F_x \quad \tau_{yz} = F_y$$

Généralement le frottement dû au vent s'exerce le long de la direction du vent et son intensité peut être calculée avec une loi quadratique.

$$\vec{F} = \frac{\rho_a}{\rho_w} C_{10} \vec{W} |\vec{W}| \quad (1.23)$$

avec $\vec{W} \equiv (W_x, W_y)$ intensité du vent, ρ_a/ρ_w rapport entre la masse volumique de l'air et celle de l'eau et C_{10} un coefficient de traînée qui par convention est référé à la vitesse du vent à 10 m au-dessus du niveau de la mer.

La valeur de C_{10} peut être estimée avec des mesures de terrain et par exemple Csanady (1982) propose :

$$\begin{aligned} C_{10} &= 1.6 \times 10^{-3}, & (W \leq 7 \text{ m s}^{-1}) \\ C_{10} &= 2.5 \times 10^{-3}, & (W \geq 10 \text{ m s}^{-1}) \end{aligned}$$

avec un lissage entre les deux valeurs pour des vitesses du vent comprises entre 7 et 10 m s^{-1} . La raison de la variation de C_{10} avec la vitesse du vent est due au fait que avec une augmentation de la vitesse du vent, la surface de la mer devient de plus en plus irrégulière (rugueuse) avec la formation de vagues et leur éventuel déferlement.

Ces valeurs de C_{10} correspondent à celles pour une rugosité de Nikuradse (voir encadré) de 1.4 cm pour les vents faibles qui créent des ondes capillaires et 10 cm pour les vents forts qui créent des vagues écreçées d'écume.

Pour une valeur typique de vitesse du vent de 7 m s^{-1} l'équation (1.23) donne $F = 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ où bien $\tau = 0.1 \text{ Pa}$.

Une autre raison de l'importance des termes $\tau_{xz} = \overline{u'w'}$ et $\tau_{yz} = \overline{v'w'}$ est qu'ils sont aussi responsables de la transmission du frottement au fond. L'inclinaison du fond en zone côtière est de l'ordre de grandeur de 10^{-2} - 10^{-3} donc pratiquement horizontale (NB: sur des distances de l'ordre des kilomètres les irrégularités du fond peuvent être considérées comme de la « rugosité »).

Si on indique avec $\vec{B}=(B_x, B_y)$ ($z=-H$) les composantes du frottement au fond, on peut écrire, d'une façon similaire à (1.22),

$$\tau_{xz}=B_x \quad \tau_{yz}=B_y \quad (1.25)$$

et le frottement au fond peut être traité avec une loi quadratique similaire à (1.23)

$$\vec{B}=C_d \vec{U}_1 |\vec{U}_1| \quad (1.26)$$

ou C_d est un coefficient de traînée et $\vec{U}_1 \equiv (U_1, V_1)$ est la vitesse du courant à une certaine hauteur du fond, qui généralement est de 1 m.

L'estimation expérimentale à partir de données en mer n'est pas facile à obtenir et dans beaucoup de cas on fixe une valeur $C_d = 2 \cdot 10^{-3}$.

Toutefois cette valeur montre que l'intensité typique du frottement au fond correspondant à une vitesse sur le fond de 0.2 m s^{-1} est au peu près la même que celle d'un vent modéré, tandis que pour un courant de 1 m s^{-1} on a des valeurs équivalentes au vent d'un ouragan. Donc le terme de divergence

$\partial \tau_{(x,y)z} / \partial z$ du frottement au fond est par conséquent important comme celui du vent.

2.6 La viscosité turbulente

Le frottement sur le fond et à la surface ne se distribuent pas uniformément dans une colonne d'eau de 100 m. Typiquement il y a deux mécanismes qui s'opposent à une distribution uniforme : la rotation et la stratification .

Dans un fluide visqueux et homogène en rotation, le frottement sur une surface de frontière non parallèle à l'axe de rotation génère des couches de profondeur limitées dans lesquelles le frottement est réduit à zéro (Ekman 1905). La profondeur de la couche d'Ekman visqueuse est de l'ordre de

$$\sqrt{2 \frac{\nu}{f}}$$

avec ν viscosité cinématique. En dehors de la couche d'Ekman l'écoulement reste pratiquement sans frottement. Quand la couche d'Ekman est turbulente, comme pratiquement toujours en eaux côtières, les tensions de Reynolds restent de la même façon confinées dans une couche de profondeur limitée, de sorte que dans ce cas la turbulence agisse comme la viscosité. Toutefois, l'épaisseur de la couche limite turbulente est indépendante des propriétés du fluide et elle est de l'ordre de

$$0.1 \frac{u_*}{f} \quad \text{où } u_* = \left(\frac{\tau}{\rho} \right)^{1/2} \quad \text{est une vitesse de frottement, avec } \tau \text{ intensité de la tension à la frontière}$$

Pour une valeur typique de stress $t = 0.1 \text{ Pa}$, $u_* = 1 \text{ cm s}^{-1}$, l'épaisseur de la couche d'Ekman est de l'ordre de 10 m aux moyennes latitudes, tandis que pour un ouragan où on a des tensions de 3 Pa ou plus, les couches d'Ekman de fond et de surface peuvent se rejoindre et occuper une entière colonne d'eau de 100 m.

La stratification due au réchauffement de la surface ou à l'apport d'eau douce réduit l'épaisseur des couches de surface et de fond, bien que faiblement, sûrement pas d'un ordre de grandeur. Les couches de fond et de surface restent bien mélangées par l'action de la turbulence et alors toute la variation de densité est confinée à l'intérieur de la colonne d'eau entre les deux couches. Au dessous et au dessus des couches peuvent se former des zones de très forte variation de densité. Bien que des tensions de Reynolds peuvent être générées par le mouvement de type ondulatoire, elle sont plus faibles (environ de 2 ordres de grandeur) que les tensions générées par le frottement au fond et à la surface. On peut avoir des exceptions aux interfaces en correspondance avec des fortes variations de densité à l'intérieur du fluide, où les vitesses peuvent changer brusquement.

Afin de rendre les équations du mouvement traitables, il est nécessaire de paramétrer les tensions de Reynolds à l'intérieur du fluide τ_{13} , τ_{23} en termes de vitesses. Avec un peu d'attention et de connaissance de cause, on peut exprimer les tensions comme proportionnelles aux gradients de la vitesse

$$\tau_{xz} = K_z \frac{\partial u}{\partial z}, \tau_{yz} = K_z \frac{\partial v}{\partial z} \quad \text{où } K_z \text{ est la viscosité turbulente}$$

(1.27)

Quand on utilise cette relation il faut toujours se rappeler que la viscosité turbulente K_z n'est pas une propriété du fluide, mais de l'écoulement. A priori il n'est donc pas raisonnable d'utiliser une seule valeur sur toute la colonne d'eau et non plus pour toute une couche limite. En effet, dans une couche limite de 1 m, K_z varie très rapidement avec la profondeur sur le fond et sous la surface et même en proximité des interfaces. En générale, le vecteur vitesse change rapidement à travers ces surfaces, mais pas la tension de Reynolds. Si on s'intéresse à des écoulements avec une distribution de la vitesse dans la couche limite on peut utiliser la loi logarithmique. En océanographie côtière l'étude des couches limites est très compliquée et leur connaissance est restée longtemps très limitée. Des instruments modernes de mesure permettent maintenant de commencer une étude *in situ* plus approfondie (voir figures des expériences avec le *SEPTR*).

En dehors des couches limites, mais dans une région d'écoulement avec un cisaillement turbulent homogène, la viscosité turbulente peut être considérée comme constante et proportionnelle à la vitesse et à une longueur d'échelle de l'écoulement. Dans les régions influencées par les stress de surface et de fond on peut avoir une relation de proportionnalité avec la vitesse de friction et la profondeur de la couche mélangée :

$$K_z = \frac{u_* h}{Re} \quad \text{où } Re \text{ nombre de Reynolds turbulent.} \quad (1.28)$$

Des mesures sur le terrain suggèrent des valeurs de Re entre 12 et 20.

À l'intérieur d'une colonne d'eau stratifiée progressivement, donc sans interfaces de brusque variation de densité, il n'y a pas d'observations qui peuvent aider à spécifier K . Une estimation de l'ordre de grandeur est $K = 1 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} = 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, c'est à dire deux ordres de grandeur plus petit que la valeur typique pour une couche limite bien mélangée en appliquant la (1.28).

Aux interfaces de brusque variation de densité il est mieux d'utiliser un loi quadratique du type (1.23) et (1.26). Alors, si on indique les composantes des contraintes avec $\vec{I} = (I_x, I_y)$ ($z = -h_I$), on peut écrire

$$I_i = C_s \vec{U}_i |\vec{U}_i| \quad (1.29)$$

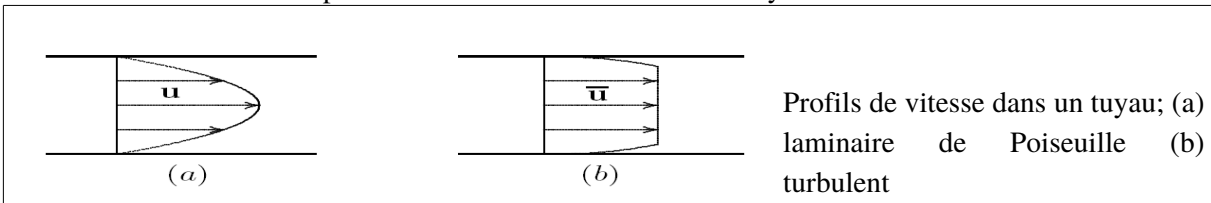
où C_s est un coefficient de frottement approprié pour ce type d'interface et \vec{U}_i représentent les différences des vitesses à travers l'interface. Une valeur obtenue en laboratoire pour le coefficient est

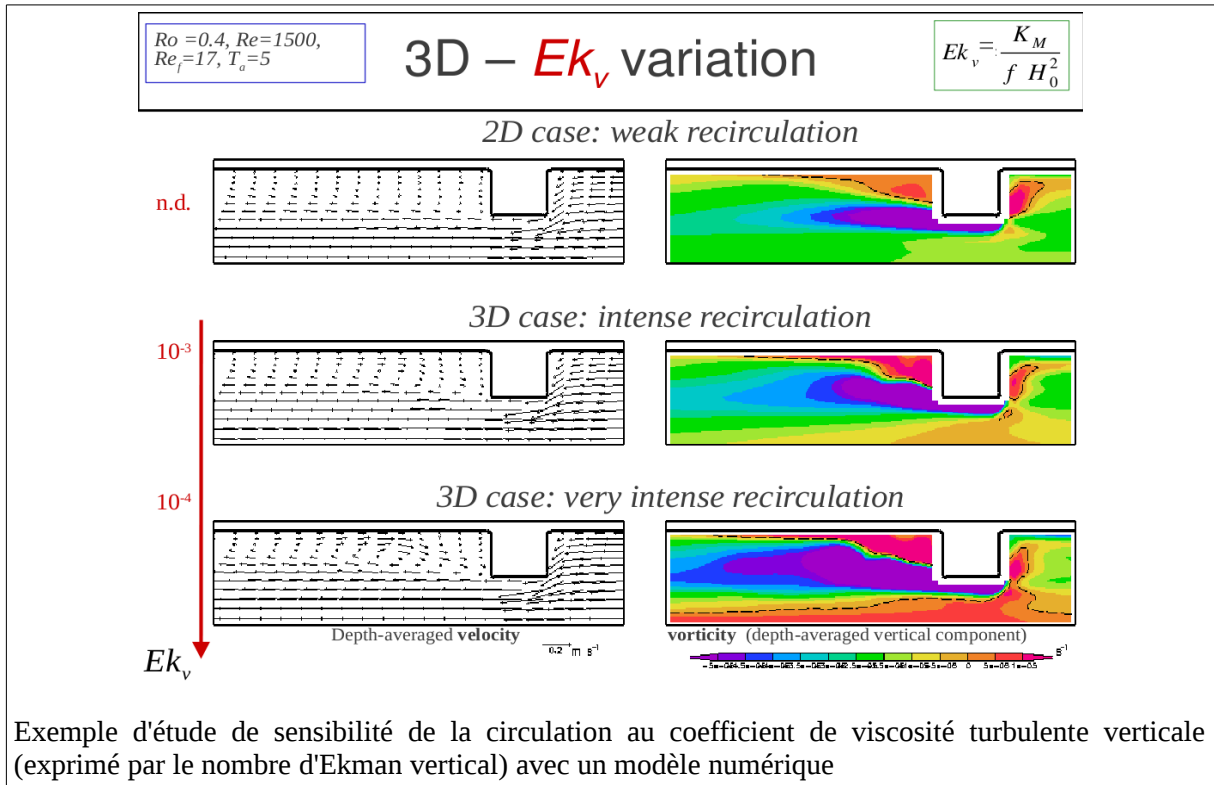
$$C_s = 0.5 \times 10^{-3} \quad \text{mais il est très difficile de vérifier si cette valeur est réaliste en mer.}$$

En résumé, il est possible d'utiliser l'équation (1.27) avec $K=constante$ dans une couche homogène et utiliser les équations (1.23), (1.26) et (1.29) au frontières (voir schéma ci-contre).

Bien évidemment dans ce cas la procédure pour calculer les contraintes et la distribution de la vitesse devient très complexe, avec l'application des lois quadratiques et le *scaling* de la viscosité turbulente avec les tensions aux frontières.

Tandis qu'il est fréquemment possible de simplifier la relation paramétrique entre les contraintes aux frontières et à l'intérieur du fluide et la vitesse sans faire de grosses erreurs, il faut noter que négliger la présence des couches de fond et de surface n'est pas réaliste dans le calcul de la distribution interne de la vitesse. Si par exemple, pour un fluide visqueux on impose aux frontières solides une condition de *no-slip* et à l'intérieur on fait l'hypothèse de viscosité turbulente constante, on observera entre le profile calculé et celui mesuré la même différence qu'il y a entre la distribution de Poiseuille pour un écoulement laminaire et le profile de vitesse turbulent dans un tuyau.





2.8 Linéarisation des équations

Quand la relation (1.27) est introduite dans les équations horizontales de la quantité de mouvement, ces dernières assument la forme des équations de Navier-Stokes, qui dans leur forme non-linéaire sont notamment intraitables. Elles peuvent être simplifiées en négligeant les tensions intérieures qu'on suppose être distribuées d'une façon simplifiée, ou en négligeant les termes d'advection de la quantité de mouvement, un passage dit « linéarisation ».

Généralement on suppose que l'advection de la quantité du mouvement dans des problèmes géophysiques peut être négligée quand le rapport entre les termes non linéaires et la force de Coriolis (i.e. le nombre de Rossby) est petit:

$$\frac{u \frac{\partial u}{\partial x}}{f v} \simeq \frac{U}{f L} = Ro \ll 1 \tag{1.30}$$

où U et L sont les échelles appropriées pour la vitesse et la longueur respectivement. Ce critère se concentre sur le bilan de la quantité de mouvement à travers de l'écoulement .

Par contre si on veut faire un bilan le long de l'écoulement, vu qu'il n'y a pas de terme de Coriolis la comparaison est faite entre les termes non-linéaires et les termes de frottement du vent ou au fond. Les termes non-linéaires sont alors négligeables quand

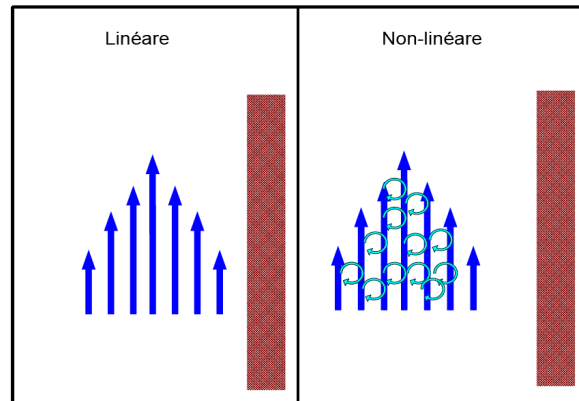
$$\frac{u \frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{u_*^2}{h}} \simeq \frac{U^2}{u_*^2} \cdot \frac{h}{L} \ll 1 \tag{1.31}$$

ou h est la profondeur de la couche sur laquelle la tension ρu_*^2 est distribuée.

En eaux côtières ni le critère (1.30) ni le critère (1.31) sont en générale satisfaits, vu que Ro est de l'ordre de 1 et de même pour le (1.31). L'advection de la quantité de mouvement est alors potentiellement importante. Toutefois, si on examine attentivement quels sont les effets précis de l'advection de la quantité de mouvement, on trouve que ces effets sont des modifications assez

compréhensibles et prévisibles des structures (*patterns*) créées et gouvernées par les termes linéaires (Coriolis, accélérations locales, frottement du vent et au fond). La raison de ce comportement est que les termes non-linéaires ont la forme d'une divergence, et donc ils disparaissent en proximité des frontières. Leur rôle est alors de transférer la quantité de mouvement d'une part à l'autre du bassin, sans modifier l'input de quantité de mouvement.

Par exemple, on prend le cas d'un jet côtier, i.e. un courant intense et plutôt étroit le long de la côte, généré par le vent. Selon le bilan des termes linéaires il reste en proximité de la côte, mais si on considère aussi les termes non-linéaires, on voit dans certains cas que l'advection de la quantité de mouvement déplace ce courant vers le large, mais sans modifier significativement les caractéristiques de base du courant, comme l'échelle horizontale ou la vitesse maximale.



Cet effet est clairement important et il faut le comprendre, mais il est également vrai qu'avec la théorie linéaire on peut déjà comprendre beaucoup de choses comme les échelles spatiales et temporelles, les fréquences d'oscillations et les nombre d'ondes des composantes ondulatoires du mouvement.

En résumé, l'utilisation d'une théorie linéaire a pour but de fournir de modèles théoriques assez simples pour mettre en évidence les relations physiques importantes dans des problèmes autrement trop compliqués.

Les principales limitations de la théorie linéaire sont surtout dans les fluides stratifiés avec des grands déplacements des particules fluides sur la verticale et l'horizontale, comme ceux générés par le vent ou par d'autres forçages dans une étroite bande côtière. Les effets de ces déplacements ne sont pas seulement inclus dans les termes de transport de la quantité de mouvement mais aussi dans les variations de premier ordre de la distribution de la pression provoquées par la distorsion du champ de densité. Comme déjà vu, les particules tendent à conserver leur température ou salinité pour des périodes d'environ un jour, alors un déplacement vertical rapide donne une surélévation similaire à un changement rapide de la hauteur dynamique η_a (1.12). Étant données que ces surélévations se produisent dans une bande côtière étroite, cela va créer des gradients de pression importants. Toutefois la théorie linéaire qui assume des petits déplacements sur la verticale, peut être encore utile pour comprendre seulement la phase initiale de ces mouvements.

2.8 Équations en eaux peu profondes

Auparavant on a vu que l'évolution de la vitesse horizontale moyenne (au sens de la turbulence) des particules du fluide géophysique est décrite par les équations de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P}{\partial x} + f v - \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P}{\partial y} - f u - \frac{\partial \overline{v'u'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \end{aligned}$$

u , v et w sont les composantes horizontales et verticale non turbulentes ou « moyennes » de la vitesse du mouvement ;

u' , v' et w' sont les composantes turbulentes de la vitesse du mouvement ;

f est le paramètre de Coriolis ;

P est la pression ;

ρ_o est la densité de référence de l'eau de mer au sens de l'hypothèse de Boussinesq .

Le premier terme correspond à la variation locale de la vitesse en fonction du temps . Dans le deuxième, troisième et quatrième terme sont représentées les advections horizontales . Le cinquième terme est le gradient de pression.

Le sixième terme est le terme de Coriolis, qui rend compte de l'influence de la rotation de la Terre ; si les écoulements sont à une échelle suffisamment réduite, on peut approcher la surface terrestre par son plan tangent et considérer la force de Coriolis i) constante : approximation de plan- f , $f = f_o$, dynamique côtière ; ii) variable linéairement avec la coordonnée méridienne : approximation de plan- β , $f = f_o + \beta y$, dynamique régionale, mais aussi grande échelle .

Les trois derniers termes sont les termes turbulentes . La théorie dite de la « fermeture Newtonienne » dit que comme pour la viscosité moléculaire, on peut introduire des coefficients de viscosité turbulente et re-écrire les moyennes des produits des composantes turbulentes de la vitesse en terme de vitesse moyennes :

$$\begin{aligned} \overline{u'u'} &= -A_x \frac{\partial u}{\partial x} ; & \overline{u'v'} &= -A_y \frac{\partial u}{\partial y} ; & \overline{u'w'} &= -A_z \frac{\partial u}{\partial z} ; \\ \overline{v'u'} &= -A_x \frac{\partial v}{\partial x} ; & \overline{v'v'} &= -A_y \frac{\partial v}{\partial y} ; & \overline{v'w'} &= -A_z \frac{\partial v}{\partial z} . \end{aligned}$$

Pour les échelles typiques de la plus part des mouvements océaniques, l'équation pour la composante verticale de la vitesse est réduite à l'équation de l'hydrostatique, qui traduit l'équilibre entre la force de pression et la force de pesanteur. Elle fournit la pression:

$$P(z) = P_o + g \int_z^\eta \rho \cdot dz$$

où P_o est la pression atmosphérique, g est l'accélération de la gravité et η l'élévation de la surface par rapport au zéro de l'axe Oz . $z = \eta(x, y, t)$ constitue ainsi la surface libre de l'océan tandis que $z = -h(x, y)$ repère le fond. ρ est la masse volumique. En utilisant l'approximation de Boussinesq $\rho \equiv \rho_o + \rho'(x, y, z, t)$ avec $\rho' \ll \rho_o$, les dérivées horizontales deviennent

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P_o}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{g}{\rho_o} \int_z^\eta \frac{\partial \rho'}{\partial x} dz \\ \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P_o}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{g}{\rho_o} \int_z^\eta \frac{\partial \rho'}{\partial y} dz \end{aligned}$$

Le deuxième et le troisième terme de droite des équations ci-dessus sont respectivement les contributions barotrope et barocline au gradient de pression.

Si on néglige la contribution barocline et celle de la pression atmosphérique, le gradient horizontal de pression pourra alors s'exprimer :

$$\nabla_H P = \rho_o g \nabla_H \eta$$

Cette équation dit que les forces qui agissent dans le fluide sont purement horizontales, donc on peut supposer que les composantes horizontales de la vitesse seront indépendantes de z. Ainsi les quatrièmes termes dans les équations de Navier-Stokes sont nuls et le terme de viscosité turbulente verticale est remplacé par les conditions aux bords qui représentent les forçages du vent $\vec{F} \equiv (F_x, F_y)$ et au fond $\vec{B} \equiv (B_x, B_y)$.

Tandis que les termes de frottement du vent (F_x, F_y) représente un des forçages extérieurs, les termes de frottement au fond peuvent être écrits avec la loi quadratique

$$B_x = C_d u (u^2 + v^2)^{1/2}, \quad B_y = C_d v (u^2 + v^2)^{1/2} \quad (z = -H)$$

Les vitesses à $z = -H$ sont physiquement les vitesses au-dessus de la couche de fond, mais souvent dans les calculs sont considérées comme les vitesses extrapolées avec viscosité turbulente constante à l'intérieur du fluide et le coefficient de traînée doit être adapté à cette vitesse.

Les équations du mouvement deviennent

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + f v + A_h \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + F_x + B_x \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - f u + A_h \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + F_y + B_y \quad (2)$$

Il y a donc deux équations pour trois inconnues (les deux composantes de la vitesse et la surélévation). Pour fermer le système, il faut ajouter l'équation de continuité écrite en fonction de ces trois variables.

On prend alors l'équation de continuité pour un fluide incompressible :

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial w}{\partial z} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

en intégrant du fond à la surface libre, vu que les vitesses et leurs dérivées sont indépendantes de z on obtient:

$$w_{z=\eta} - w_{z=-h} + (h+\eta) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 .$$

À la surface

$$w_{z=\eta} = \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} .$$

Au fond, en considérant que la bathymétrie ne varie pas dans le temps

$$w_{z=-h} = -\frac{dh}{dt} = -u \frac{\partial h}{\partial x} - v \frac{\partial h}{\partial y} .$$

En substituant, on obtient :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(Hu)}{\partial x} + \frac{\partial(Hv)}{\partial y} = 0 \quad \text{avec } H = h + \eta \quad (3)$$

L'ensemble des trois équations (1-3) constitue les équations en eaux peu profondes (e. p. p. ou *shallow water equations*). Elles sont valables, comme pour l'approximation hydrostatique, quand l'eau est très basse par rapport aux échelles horizontales que l'on veut étudier.

Les équations e. p. p. sont utilisées pour étudier, entre autre, les ondes longues de gravité ou gyroscopiques. Pour cela il faut considérer les équation linéarisées, sans viscosité turbulente et faire l'hypothèse $\eta \ll h$. Par ailleurs, si $h = const, f = 0$ et le mouvement ne dépend que de x (1D) , les équations deviennent:

$$\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{si on dérive par} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + h \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{array} \quad \text{On obtient} \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gh \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0$$

Cette dernière est une équation d'onde qui a pour solution $\eta = F(x - ct)$ avec $c = \sqrt{gh}$. L'ensemble des équations précédentes peut décrire assez bien la dynamique d'un fluide dans l'océan côtier bien mélangé et est connue comme équations en eaux peu profondes, (e.p.p.), ou *shallow water equations*, ou encore équations de Saint-Venant.

Problème local et problème global

Quand on applique les équations ci-dessus, le problème de prévoir la réponse d'un océan côtier soumis à un certain forçage peut être opportunément séparé en problème local et global.

Une fois qu'une approximation appropriée a été choisie pour A_z , les équations (1.32) et (1.33) peuvent être résolues pour $u(z)$, $v(z)$ avec les gradients de surélévation η qui seront utilisés comme *input* extérieurs (forçage). La distribution de la vitesse vient alors d'un calcul « local » en chaque (x,y) pour un gradient de pression donné.

Il reste en suite à calculer la distribution de la pression, ou bien de la surélévation, à l'échelle du bassin, i.e. « globalement ». Cela peut être fait d'une façon appropriée avec les équations intégrées sur la verticale ou équations du transport. L'intégration sur la verticale implique qu'on définisse à partir des composantes de la vitesse les transports horizontaux

$$U = \int_{-H}^0 u dz, \quad V = \int_{-H}^0 v dz \quad (1.34)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} - fV &= -gH \frac{\partial \eta}{\partial x} + F_x - B_x \\ \frac{\partial V}{\partial t} + fU &= -gH \frac{\partial \eta}{\partial y} + F_y - B_y \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= -\frac{\partial \eta}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.35)$$

Dans les équations (1.34) et (1.35) les petites variations de la surélévation $\eta(x,y)$ ont été négligées par rapport à la profondeur $H(x,y)$. Le frottement à la surface (F_x, F_y) est pris comme un *input* externe. Le frottement au fond peut être calculé à partir des vitesses issues de la solution du problème local.

Les équations ci-dessus, dites équations du transport, constituent un ensemble fermé de trois équations pour les trois inconnues U , V , η et la solution est dite globale.

En générale la solution du problème global est difficile, mais on peut pour simplifier négliger le frottement au fond ou bien l'exprimer en terme de transport

$$B_x = C_d U (U^2 + V^2)^{1/2}, \quad B_y = C_d V (U^2 + V^2)^{1/2}$$

en obtenant des solutions pour un bon nombre de problèmes intéressants.

Pour résoudre les équations du transport il est nécessaire de définir des conditions à la côte et aux frontières ouvertes. À la côte on peut imposer que le transport normal est nul (condition dite « *coastal constraint* ») tandis qu'aux frontières ouvertes le transport normal et la surélévation sont continus.

Malheureusement pas mal de problèmes surgissent quand une frontière ouverte est située entre l'océan côtier et l'océan profond et une solution simultanée des deux régions n'est pas toujours possible.

2.9 Modèles simples

Dans l'évolution de la compréhension des mouvements atmosphériques et océaniques une poignée de modèles de base ont joué un rôle important et ils peuvent aider à mieux comprendre le comportement complexe de l'océan côtier. Ci-dessous on étudie trois modèles élémentaires basés sur les équations

en eaux peu profondes et qui illustrent des solutions pour le problème locale et global.

Bilan géostrophique

Si on considère le cas dans lequel i) le frottement dû au vent et celui au fond soient négligeables, ii) le fluide homogène et iii) le mouvement stationnaire, toutes les dérivées dans les équations du transport disparaissent. Ce cas est clairement peu réaliste, mais on peut penser à un courant d'abord généré par une quelque raison, en suite s'affaiblit très lentement.

Sans perdre de généralité, l'axe y peut être aligné dans la direction du transport, ainsi $U = 0$.

Alors les équations du transport deviennent :

$$\begin{aligned}
 -fV &= -gH \frac{\partial \eta}{\partial x} \\
 0 &= -gH \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
 \frac{\partial V}{\partial y} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{1.42}$$

La première et la troisième équations sont adéquates seulement si $\partial(H/f)/\partial y = 0$, donc si l'on considère un transport le long des isobathes tandis que la surélévation varie en direction perpendiculaire à la côte.

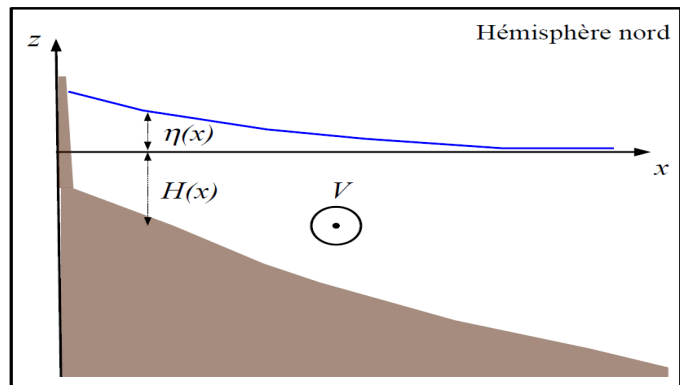
Le bilan des forces n'est pas triviale que dans la direction perpendiculaire à la côte, où la force de Coriolis est compensée par le gradient de pression.

Avec surélévation nulle et sans frottement au fond, la solution du problème local est simplement

$$v = \frac{V}{H} = \frac{g}{f} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \nabla_z \text{ et } y$$

avec $g \approx 10 \text{ m s}^{-2}$, $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ on a qu'un gradient de 10^{-5} (1 cm sur 1 km) donne une vitesse géostrophique de 1 m s^{-1} .

Ce type d'écoulement satisfait la condition « *coastal constraint* » pour chaque x et il est donc valable avec une ligne de côte parallèle à l'axe y . Il peut être considéré comme un écoulement côtier élémentaire.



Dérive d'Ekman

En considérant encore un écoulement loin des frontières, on suppose $h = 0$ partout. Si on considère que le mouvement soit forcé par un frottement du vent rF en direction de l'axe y et on fait l'hypothèse d'un écoulement stationnaire. On suppose aussi que la masse d'eau est assez profonde pour que le frottement au fond soit négligeable (on reverra cet hypothèse *a posteriori*).

Les équation du transport (1.35) deviennent

$$\begin{aligned} -fV &= 0 \\ +fU &= F_y \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

qui sont satisfaites par la solution

$$\begin{aligned} U &= \frac{F_y}{f} \\ V &= 0 \end{aligned}$$

On a donc un transport sur la droite (dans l'hémisphère Nord, où f est positive) avec une intensité de F/f . Pour des valeurs typiques de $F = 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$, $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ on obtient $U = 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ (équivalent à une vitesse du courant de 0.1 m s^{-1} sur une profondeur de 10 m). Ce transport est connu comme transport d'Ekman et le mouvement qui entame ce transport est dit dérive d'Ekman.

La solution du problème local dans ce cas n'est pas triviale. Si on utilise pour la viscosité turbulente l'équation (1.27) et on considère un K constant au dessous d'une couche de surface d'épaisseur négligeable.

Les gradients horizontaux sont nuls par hypothèse et les équation (1.32) deviennent

$$\begin{aligned} -fv &= A_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ fu &= A_z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \end{aligned}$$

avec comme conditions aux frontières

$$\begin{aligned} A_z \frac{du}{dz} = 0, \quad A_z \frac{dv}{dz} = F_y, \quad (z=0) \\ \frac{du}{dz} = \frac{dv}{dz} = 0, \quad (z \rightarrow -\infty) \end{aligned}$$

L'échelle spatiale est la profondeur d'Ekman

$$D = \sqrt{\frac{2A_z}{f}} \tag{1.50}$$

et la solution peut s'écrire

$$\begin{aligned} u &= \frac{F_y}{fD} e^{z/D} \left(\cos \frac{z}{D} - \sin \frac{z}{D} \right) \\ v &= \frac{F_y}{fD} e^{z/D} \left(\cos \frac{z}{D} + \sin \frac{z}{D} \right) \end{aligned} \tag{1.51}$$

À une profondeur $-z \gg D$ vitesse et tensions turbulentes disparaissent, ainsi il est raisonnable de

considérer négligeable le frottement au fond pour des eaux assez profondes.

On a déjà vu empiriquement que pour une couche d'Ekman turbulente la profondeur d'Ekman est

$$D \approx 0.1 \frac{u_*}{f} \quad (1.52)$$

alors pour la (1.50) on a

$$K = \frac{u_*^2}{200 f} = \frac{u_* D}{20}$$

qui a la même forme de la (1.28) et nous dit que pour une couche d'Ekman homogène le nombre de Reynolds turbulent est environ 20.

L'équation (1.52) montre en plus que le facteur u_*/fD qui est dans l'équation (1.51) vaut au peu près 10. Alors les composantes de la vitesse à $z=0$, i.e. jusqu'au dessous de la couche limite de surface, sont $u = v = 10 u_*$ et ici la direction de la vitesse est à 45 degrés par rapport au vent.

Les propriétés de la couche de surface ne sont pas bien connues, mais on peut prendre un profil logarithmique

$$\frac{v_s - v}{u_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{|z|}{r} + 8.5$$

où k est la constante de Von Karman (≈ 0.4) et r la rugosité équivalente en grain de sable de la surface. Cette dernière peut devenir très large (de l'ordre du mètre pour un vent modéré) ainsi la contribution du terme logarithmique pour une profondeur $-z = 1$ m devient négligeable. La variation de vitesse importante à travers la couche de surface est alors environ $8.5u_*$ entre la surface libre et la limite inférieure de la couche qui se situe à $z = -r$.

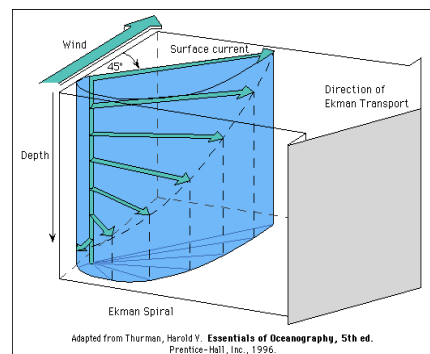
La distribution des vitesses dans une couche d'Ekman turbulente avec la couche limite de surface est représentée sous forme de hodographe.

La vitesse de surface est environ de 45 degrés sur la droite du vent et a une intensité de quelque $20u_*$, ce qui constitue selon l'équation (1.23) environ 3% de la vitesse du vent.

Pour une valeur typique de $u_* = 0.01 \text{ m s}^{-1}$ qui correspond à une vitesse du vent $W = 7 \text{ m s}^{-1}$ et de $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ la profondeur d'Ekman D est 10 m.

La vitesse du courant devient négligeable à une profondeur d'environ $z = -3D$ ou bien 30 m. Souvent la colonne d'eau est suffisamment homogène pour que cette profondeur soit réaliste.

Au contraire il faut se rappeler que dans ce modèle la côte est supposée être absente. En effet la distribution de vitesse montrée en figure est incompatible avec un profil de côte de n'importe quelle direction, vu que l'écoulement aurait toujours une composante normale à elle pour toutes les profondeurs. Toutefois il est aussi possible d'insérer une fine couche latérale pour régler le problème.



www-pord.ucsd.edu/~ltalley/sio210/Wind_forcing/

2.10 Courant d'inertie / Oscillations d'inertie

Si on considère un écoulement assez loin des côtes on peut considérer que, n'ayant pas de contraintes à la côte la surélévation reste nulle, $\eta = 0$ partout dans le modèle. En faisant l'hypothèse que le frottement au fond et du vent soient négligeables et que le mouvement aie été généré par une quelque action précédente. Alors les équations du transport deviennent

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} - f V &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + f U &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0\end{aligned}\tag{1.44}$$

Ce système, qui représente un bilan entre l'accélération locale et la force de Coriolis, a pour solution

$$U = U_o \cos f t \quad V = -U_o \sin f t$$

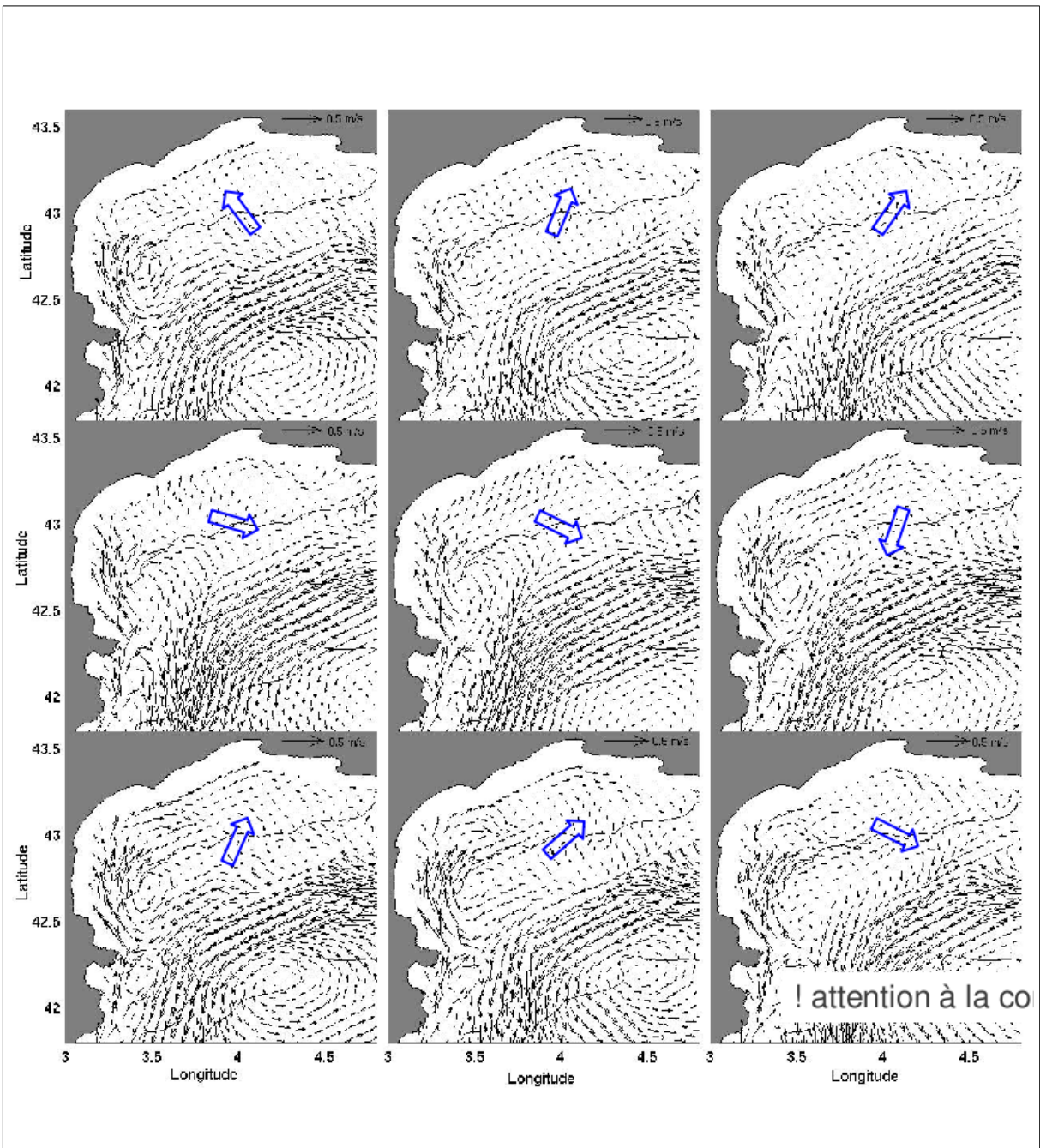
où $U_o = \text{const}$ et on choisit de positionner les axes d'une façon opportune ainsi $V = 0$ pour $t = 0$.

Les vitesses internes sont simplement

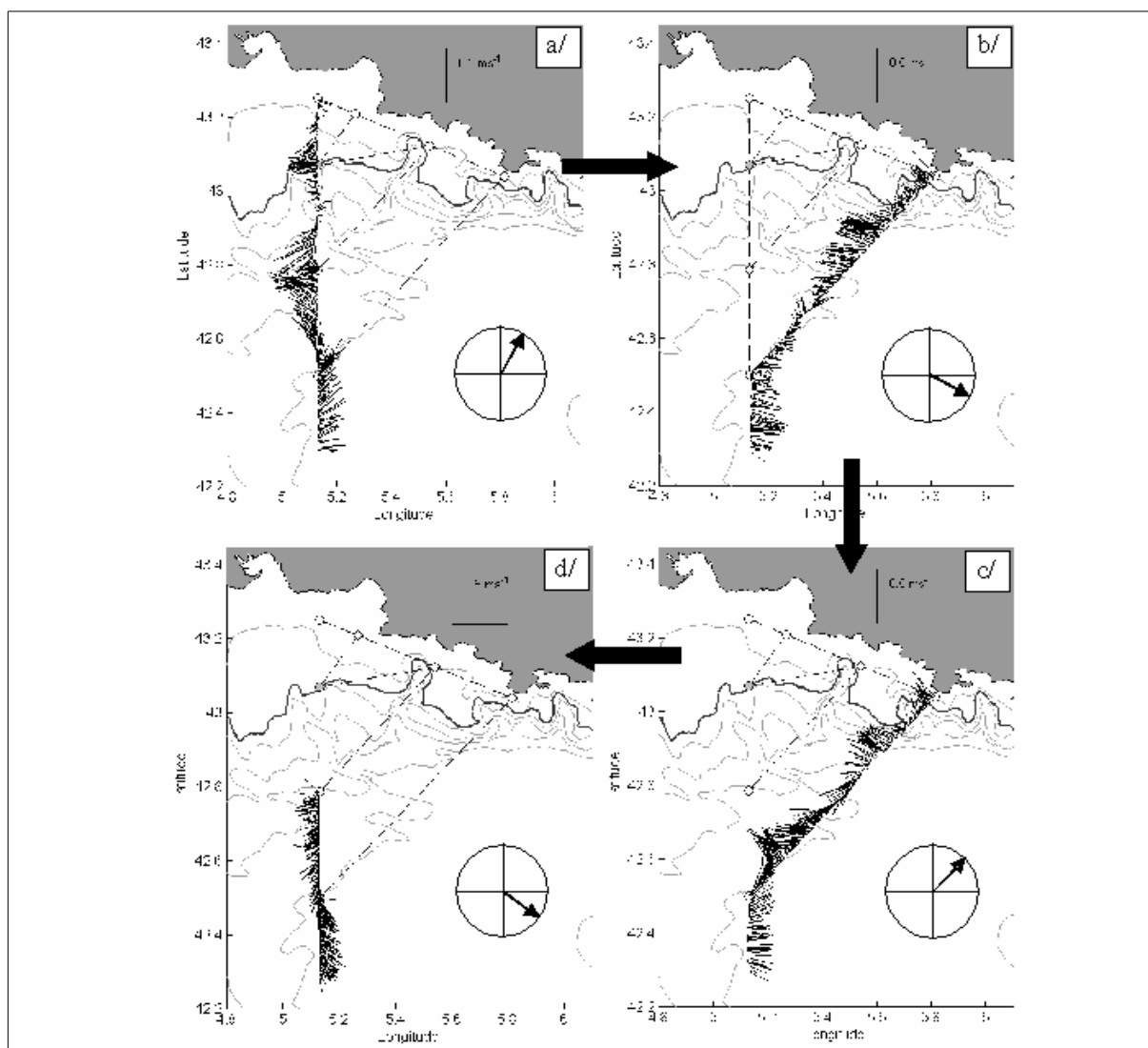
$$\begin{aligned}u &= \frac{U}{H} = u_o \cos f t, \\ v &= \frac{V}{H} = -u_o \sin f t\end{aligned}$$

Le mouvement est périodique avec une période $T = 2\pi/f$ qui est typiquement de 17 h aux moyennes latitudes. L'entière masse d'eau oscille en phase et les particules parcourent des trajectoires circulaires avec un rayon de u_o/f . Alors pour un $u_o = 1 \text{ m s}^{-1}$, vu que $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ on obtient un rayon de 10 km.

Ce type de mouvement, dit oscillations d'inertie, n'est pas consistant avec la présence de la côte et apparemment il semble pas réaliste pour l'océan côtier, mais le bilan des forces représenté par le système (1.44) est observé souvent dans des zones caractérisées par la présence de forts coups de vent tel que le Golf du Lion .



Simulation de la circulation dans le Golfe du Lion pendant la campagne Moogli-2 (Juin 1998) effectuée avec le modèle Symphonie. Les flèches représentent l'évolution temporelle de la vitesse à 32 m de profondeur toutes les 3 heures. Au centre du golfe on peut observer une oscillation d'inertie. (C. Dufau et A. Petrenko)



Courants mesurés par l'ADCP de coque à 16 m dans l'ordre chronologique (indiqué par les flèches pleines noires) sur les trajets a/ 1-66b, b/ 66-6a et 6-7a, c/ 7-6a et 6-66a, d/ 66-4a. L'orientation des courants à la station 6 est représentée sur le cercle trigonométrique en bas à droite de chaque figure.

Station 6	Date et heure	Direction des courants	$\Delta t = t_i - t_{i-1}$ en heure	$\Delta \theta_{obs} = \theta_i - \theta_{i-1}$ en degré	$\Delta \theta_{calc} = \theta_i - \theta_{i-1}$ en degré
sur 1-66b	13 juin à 20h13	35°	XXXXXX	XXXXXX	XXXXXXX
sur 66-6a / 6-7a	14 juin à 00h47	124°	4,57h	89°	94°
sur 7-6a / 6-66a	14 juin 15h15	49°	14,47h	285°	298°
sur 66-4a	14 juin 18h59	128°	3,73h	79°	77°

Tableau III.XX : pour chaque trajet de la campagne GOLTS juin 2002, au passage à la station 6, le tableau donne : la date du passage, la direction des courants mesurés, le laps de temps écoulé et la différence d'orientation des courants mesurés entre deux passages et la rotation que doit effectuer une oscillation d'inertie pendant le laps de temps mesuré.

(figure et tableau fournies par J.Gatti) .

(Séance de cours de A.Petrenko)

Résumé : L'oscillation d'inertie est, en milieu tournant, un mouvement horizontal et circulaire d'une particule soumise à la seule force de Coriolis et assujettie à glisser sans frottement sur une équipotentielle de la gravité (localement, un plan horizontal) avec une vitesse initiale non nulle. Un cycle de cette oscillation définit le cercle d'inertie qui est décrit dans le sens des aiguilles d'une montre dans l'hémisphère nord, en un temps égal à la période d'inertie.

Bibliographie

Chereskin T.K., M.D. Levine, A.J. Harding, L.A. Regier, *Observations of near-inertial waves in Acoustic Doppler Current Profiler measurements made in the Mixed Layer Dynamics Experiment*, J. Geophys. Res., 94 (C6) (1989), pp. 8135–8145

C. Millot, *The Gulf of Lion's hydrodynamics*, Cont. Shelf Res., 10 (9–11) (1990), pp. 885–894

Millot and Crepon, 1981, *Inertial oscillations on the Continental Shelf of the Gulf of Lions – Observations and Theory*, JPO vol 11, 5.

Petrenko A., C. Dufau and C. Estournel (2008), *Barotropic eastward currents in the western Gulf of Lion, north-western Mediterranean Sea, during stratified conditions*. J. Marine Syst., doi:10.1016/j.jmarsys.2008.03.004

Petrenko A., Y. Leredde, and P. Marsaleix (2005), *Circulation in a stratified and wind-forced Gulf of Lions, NW Mediterranean Sea: in-situ and modeling data*. Continental Shelf Res., 25, 5-27, doi:10.1016/j.csr.2004.09.004

Petrenko, A.A. (2003), *Circulation features in the Gulf of Lions, NW Mediterranean Sea; importance of inertial currents*, Oceanol. Acta, 26, pp. 323–338

Rappel du cours de L3 (Dynamique océanique A. Doglioli et A. Petrenko ; et rappel Section 2.9 de ce cours)

Si une particule n'est soumise à aucune force extérieure, son accélération dans un repère d'inertie obéit à la 2ème loi de Newton . Les équations du mouvement se simplifient de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= fv \\ \frac{dv}{dt} &= -fu\end{aligned}$$

en résolvant pour u et en remplaçant dans la deuxième équation

$$\begin{aligned}v &= \frac{1}{f} \frac{du}{dt} \\ \frac{1}{f} \frac{d^2u}{dt^2} &= -fu \quad \text{i.e.} \quad \frac{d^2u}{dt^2} + f^2u = 0\end{aligned}$$

La solution générale de cette équation différentielle du deuxième degré est :

$$\begin{aligned}u &= +V_o \cos(ft + \phi) \quad \text{et, si on remplace } u \text{ par cette solution dans l'équation pour } v : \\ v &= -V_o \sin(ft + \phi)\end{aligned}$$

où la vitesse V_o et la phase ϕ dépendent des conditions initiales .

Par exemple si on prend le cas des oscillations déclenchées par les coups de Mistral au large de Marseille, en positionnant les axes comme dans la figure ci-dessous, on fixe les conditions initiales

suivantes :

vitesse initiale du courant dans la direction du vent, i.e. $u_{t=0}=0$. Alors,

$$u_{t=0} = V_o \cos(\phi) = 0 \text{ et } \phi = \pi/2$$

En remplaçant dans l'équation pour v

$$v = -V_o \sin(ft + \pi/2) \text{ et donc}$$

$$v_{t=0} = -V_o \sin(\pi/2) = -V_o$$

L'intensité dépend du vent, par exemple, pour un vent de 80 km h^{-1} on peut estimer une vitesse du courant de surface de 50 cm s^{-1} .

Voir par exemple:

<http://www.dot.state.fl.us/rddesign/dr/Research/CE/Wind-Generated-Currents.pdf>

Comme $f = 2\Omega \sin \lambda$ [rad.s⁻¹] avec λ latitude, pour Marseille qui se trouve à la latitude de 43°N, on a approximativement :

$$f \approx 2 \frac{2\pi}{24} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx \frac{2\pi}{17} \text{ [rad.h}^{-1}\text{]}$$

i.e. la période sera $T \approx 17$ [h]

NB : Pour calculer une valeur plus précise, utilisez la durée du jour sidéral de 23 h 56 min 4 s et la latitude de Marseille à 43° et non pas 45° dans l'AN précédente (valeur de T plus précise obtenue 17h33').

Si on prend un valeur de T=16h (amusez vous à vérifier à quelle latitude cela correspond) pour simplifier les calculs, en remplaçant dans les équations pour u et v , on obtient

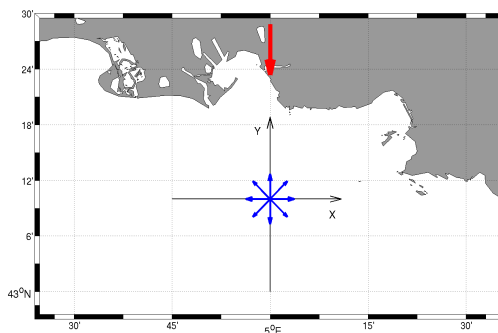
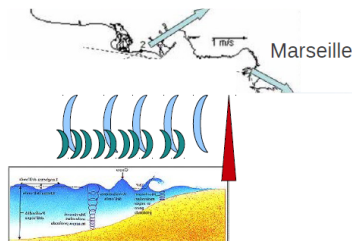
$$\vec{v}_{t=0} \equiv (0, -0.5) V_o, \quad \vec{v}_{t=4h} \equiv (-0.5, 0) V_o, \quad \vec{v}_{t=8h} \equiv (0, +0.5) V_o \text{ et}$$

$$\vec{v}_{t=12h} \equiv (+0.5, 0) V_o$$

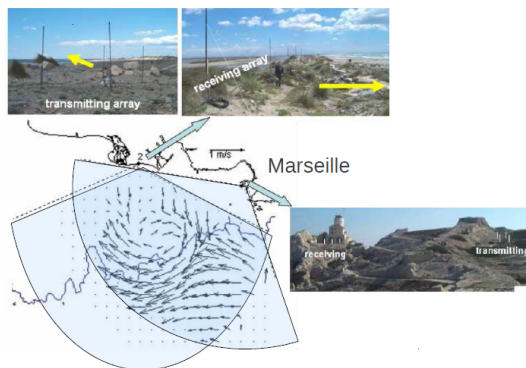
Les mesures effectuées avec un radar côtier par les collègues du MIO (ex- LSSET-Laboratoire des Sondages Électromagnétiques) de Toulon corroborent ce modèle analytique.

Mesure du courant de surface par radar cotier à haute resolution

Le radar est un système qui utilise les ondes radio pour détecter et déterminer la distance et/ou la vitesse d'objets tels que les avions, bateaux, ou encore la pluie. Un émetteur envoie des ondes radio, qui sont réfléchies par la cible et détectées par un récepteur, souvent situé au même endroit que l'émetteur. La position est estimée grâce au temps de retour du signal et la vitesse est mesurée à partir du changement de fréquence du signal par effet Doppler.



En rouge vecteur du vent, en bleu vecteurs du courant d'inertie, variant de direction avec le temps (script matlab disponible dans cours L3 (site web Doglioli)).



Note ; les radars sont à l'heure actuelle installés en face de Toulon et de Nice.

En intégrant de nouveau, avec $u = \frac{dx}{dt}$ et $v = \frac{dy}{dt}$ on obtient la trajectoire :

$$x = x_o + \frac{V_o}{f} \sin(ft + \phi)$$

$$y = y_o - \frac{V_o}{f} \cos(ft + \phi)$$

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = \left(\frac{V_o}{f}\right)^2$$

Cette dernière formule montre que la trajectoire parcourue par une particule fluide « piégée » dans une oscillation d'inertie, est un cercle de centre (x_o, y_o) et de rayon $|V_o/f|$.

La force de Coriolis agissant à droite du mouvement dans l'hémisphère nord, la particule parcourt le cercle d'inertie dans le sens indirect, soit dans le sens des aiguilles d'une montre. C'est l'inverse dans l'hémisphère sud.

Le cercle d'inertie est parcouru en un temps T dépendant uniquement de la fréquence d'inertie f .

A l'équateur, il n'y a pas de mouvement d'inertie et f croît avec la latitude.

Dans cette rotation circulaire, la force centrifuge (ou axifuge) est compensée par la force de Coriolis (rappel voir TD1 Cours Dynamique océanique ; Doglioli et Petrenko):

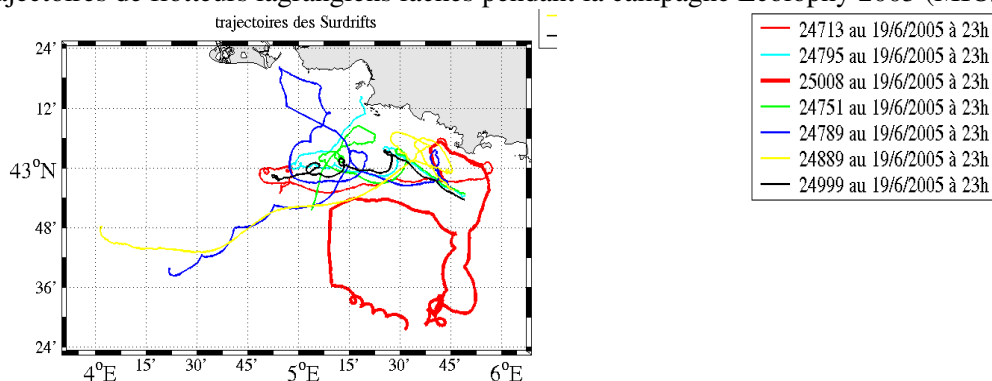
$$m \omega^2 r = m \left(\frac{u}{r}\right)^2 = m f u$$

$$f = \frac{u}{r}$$

$$\text{Du coup } T = \frac{2\pi}{f} = \frac{2\pi r}{u}$$

A une latitude donnée, il existe une relation entre vitesse et rayon du cercle d'inertie. Plus le module de la vitesse (dépendant du forçage générateur) est grand, plus le rayon est grand. La période de rotation elle ne change pas.

Des cercles purs sont difficiles à observer dans la nature à cause du frottement toujours présent dans la réalité, mais ils sont très souvent observés avec des flotteurs lagrangiens en tant que trajectoires circulaires s'atténuant au cours du temps. Dans la figure ci-dessous, sont dessinées les trajectoires de flotteurs lagrangiens lâchés pendant la campagne Ecolophy 2005 (MIO/Ifremer)



Les courants d'inertie sont générés par des variations locales du forçage atmosphérique. Le phénomène est le plus souvent observé en période de stratification. Dans ce cas, il y a un processus à deux couches qui se met en place, le courant d'inertie dans la couche inférieure est décalée temporellement de la moitié de la période d'inertie (déphasage de π).

Théorie

from Millot and Crepon, 1981, Inertial oscillations on the Continental Shelf of the Gulf of Lions – Observations and Theory, JPO vol 11, 5.

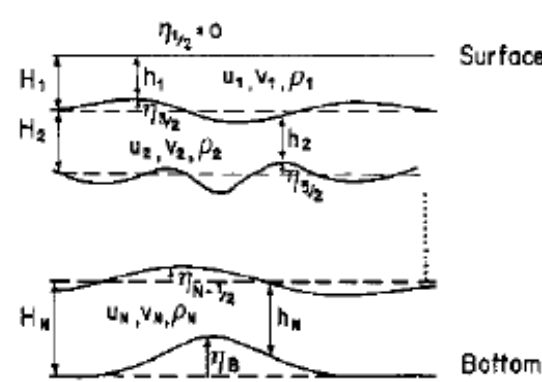
<p>The density variation of the ocean is simplified by using a two-layer fluid. This is a crude, but realistic assumption corresponding to retention of only the first internal mode, which is the most important for small motions (Lightill, 1969; Gill and Clarke, 1974). Because of the small depths of the Gulf of Lions we will also investigate the effects of bottom friction on the motions.</p> <p>Hydrostatic and Boussinesq assumptions are employed and we deal with the vertically averaged equations of hydrodynamics in each layer. Since we consider small perturbations from rest, the equations are linearized.</p>	<p style="text-align: center;">OCEAN VORTEX MODELING</p>  <p style="text-align: right;">Surface</p> <p style="text-align: right;">Bottom</p>
<p><i>In the upper fluid</i></p> $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}_1 + f\mathbf{z} \times \mathbf{u}_1 = -g\nabla\zeta_1 + \frac{1}{\rho_1 h_1} (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_I) \quad (4)$ $\frac{\partial}{\partial t} (\zeta_1 - \zeta_2) + \nabla h_1 \mathbf{u}_1 = 0. \quad (4)$ <p><i>In the lower fluid</i></p> $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}_2 + f\mathbf{z} \times \mathbf{u}_2 = -g\epsilon\nabla\zeta_2 - g(1 - \epsilon)\nabla\zeta_1 + \frac{1}{\rho_2 h_2} (\boldsymbol{\tau}_I - \boldsymbol{\tau}_b), \quad (4)$ $\frac{\partial}{\partial t} \zeta_2 + \nabla h_2 \mathbf{u}_2 = 0. \quad (4)$	<p>The terms are defined as follows:</p> <ul style="list-style-type: none"> ζ_1 (ζ_2) elevation at sea surface (interface) from rest \mathbf{u}_1 (\mathbf{u}_2) averaged velocity in the upper fluid (lower fluid) f Coriolis parameter g acceleration of the gravity ϵ fractional change in density $[(\rho_2 - \rho_1)/\rho_2]$ ∇ two-dimensional operator $\partial/\partial x, \partial/\partial y$ \mathbf{z} unit vector along the vertical axis, positive upward h_1 (h_2) thickness of the upper layer (lower layer) at rest $\boldsymbol{\tau}$ stress at the sea surface $\boldsymbol{\tau}_I$ stress at the interface $\boldsymbol{\tau}_b$ bottom stress.

Figure 2a. Vertical cross-section of a N-layer shallow-water model.

Voir Section 6 (Carton 2005) du cours pour les équations en eaux peu profondes (EPP) en système multi-couche (Figure 2a ci-dessus), ici à 2 couches

Voir section 2.8 (EPP ou Equations de Saint Vénant) pour la notation de l'équation de la masse

Etant donné les échelles spatio-temporelles du processus, on peut faire l'hypothèse que f est constant et que la profondeur totale $H = h_1 + h_2$ l'est aussi.

D'après Thompson et O'Brien (1973), l'ordre de grandeur du stress à l'interface (τ_I) est un ordre de magnitude plus petit que τ_b et τ . Donc le couplage entre les 2 couches est dû aux forces de pression. La tension de fond est considérée comme proportionnelle à la vitesse:

$$\tau_b = \rho_2 h_2 \nu u_2$$

ou ν est un coefficient d'atténuation (dimension t^{-1}).

Méthode de résolution

L'étude est effectuée le long d'une côte rectiligne $x=0$ (repère classique: x positif vers l'est, y positif vers le nord) avec un vent transitoire (i.e., VARIABLE). On fait l'hypothèse que la solution sera indépendante de y (dérivées par rapport à y nulles).

En effectuant la transformée de Laplace (Voir section 4.3 pour un résumé sur Laplace et la méthode de transformée de Laplace) par rapport au temps pour l'élévation, les vitesses et les tensions de stress, on a :

$$Z_i(p, x) = \int_0^\infty e^{-pt} \zeta_i(t, x) dt = \mathcal{L}(\zeta_i),$$

$$U_i(p, x) = \int_0^\infty e^{-pt} \mathbf{u}_i(t, x) dt = \mathcal{L}(\mathbf{u}_i),$$

$$\mathbf{T}(p, x) = \int_0^\infty e^{-pt} (\mathbf{x}\tau^x + \mathbf{y}\tau^y) dt = \mathcal{L}(\boldsymbol{\tau}).$$

A partir des équations EPP (4.1 et 4.3), on peut trouver U_i à partir de Z_i . Si on entre alors U_i dans les équations dérivés de la cons. de la masse (4.2 et 4.4), cela donne :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} Z_1 - (p^2 + f^2)(Z_1 - Z_2) \frac{1}{gh_1} \\ &= \frac{1}{\rho_1 g h_1} \left(\nabla \mathbf{T} + \mathbf{z} \frac{f}{p} \nabla \times \mathbf{T} \right) \\ & \times (p + \nu) \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(1 - \epsilon)Z_1 + \epsilon Z_2] \\ & - p[(p + \nu)^2 + f^2] Z_2 \frac{1}{gh_2} = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Alors :

If $\boldsymbol{\tau}$ does not depend on x , and taking into account the radiation condition (the motions must vanish as x tends to infinity), the solution of (4.6) is

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= A_1 e^{-\alpha_1 x} + A_2 e^{-\alpha_2 x} \\ Z_2 &= B_1 e^{-\alpha_1 x} + B_2 e^{-\alpha_2 x} \end{aligned} \right\}, \quad (4.7)$$

where

$$B_i = \left(1 - \alpha_i^2 \frac{gh_1}{p^2 + f^2} \right) A_i,$$

The solution of the homogeneous differential equation associated with (4.6) is of the form

$$Z = A e^{\pm \alpha_i x},$$

where α_i is a positive eigenvalue of Eq. (4.6).

$$A_i = (-1)^i \frac{1}{\rho_1 (gh_1)^2 \epsilon} (fT^y + pT^x)$$

$$\times \frac{p^2 + f^2 - \alpha_{3-i}^2 g \epsilon h_1}{(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) p \alpha_i}.$$

Here A_i does not depend on x ; it is determined by the boundary condition $\mathbf{u}_i(t, 0) = 0$.

1) Simplification – Cas ou ν le coefficient d'atténuation est pris nul (= pas de tension de fond)

processus très étudié voir O'Brien et al (déjà en 1977)

les valeurs propres solutions pour α_i sont les suivantes:

$$\alpha_1^2 = \frac{p^2 + f^2}{c_1^2} \quad \text{et} \quad \alpha_2^2 = \frac{p^2 + f^2}{c_2^2}$$

avec $c_1 = (gH)^{1/2}$ vitesse des ondes longues barotropes

et $c_2 = \left(\frac{g \epsilon h_1 h_2}{H} \right)^{1/2}$ vitesse des ondes longues baroclines

avec r_i les rayons de déformation associés $r_i = \frac{c_i}{f}$

On a généralement $c_1 \gg c_2$ (eg, dans le golfe du Lion, $\frac{c_2}{c_1} \approx 2.10^{-2}$) et $r_1 \gg r_2$

Deux cas sont généralement traités:

1a – cas ou le vent est perpendiculaire à la côte

1b - cas ou le vent est parallèle à la côte

1a - cas ou le vent est perpendiculaire à la côte avec $\tau = \tau_0 Y(t) x$
avec $Y(t) = 1$ pour $t \geq 0$ et $Y(t) = 0$ pour $t < 0$

On trouve un upwelling près de la côte dans le terme d'élévation (voir papier pour plus de détails) et on obtient les vitesses suivantes pour les deux couches quand $0 < x < r_2 \leq r_1$ et $ft > 2$:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \frac{\tau_0}{\rho_1 f H} \frac{h_2}{h_1} \left\{ (e^{-x/r_2} - 1) \mathbf{y} + (x/r_2) \right. \\ &\quad \times (ft)^{-1/2} (2/\pi)^{1/2} [\cos(ft - \pi/4) \mathbf{x} \\ &\quad \left. - \sin(ft - \pi/4) \mathbf{y}] \right\} \\ \mathbf{u}_2 &= - \frac{h_1}{h_2} \mathbf{u}_1 \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

The spin-up time of (4.16) is $T = 2f^{-1}$. The inertial oscillations are polarized clockwise. The currents are baroclinic. The mean currents and the inertial oscillations in the upper and the lower layers have opposite phases, in agreement with the observations of Section 3.

1b - cas ou le vent est parallèle à la côte avec $\tau = \tau_0 Y(t) y$
avec $Y(t) = 1$ pour $t \geq 0$ et $Y(t) = 0$ pour $t < 0$

On retrouve un upwelling près de la côte dans le terme d'élévation et on obtient les vitesses suivantes pour les deux couches quand $0 < x < r_2 \leq r_1$ et $ft > 2$:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \frac{\tau_0}{\rho_1 H f} \frac{h_2}{h_1} \left\{ \left(\frac{h_1}{h_2} + e^{-x/r_2} \right) f t y \right. \\ &\quad + (1 - e^{-x/r_2}) \mathbf{x} + (x/r_2) (ft)^{-1/2} \\ &\quad \times (2/\pi)^{1/2} [\sin(ft - \pi/4) \mathbf{x} \\ &\quad \left. + \cos(ft - \pi/4) \mathbf{y}] \right\} \\ \mathbf{u}_2 &= \frac{\tau_0}{\rho_1 H f} \left\{ (1 - e^{-x/r_2}) (f t y - \mathbf{x}) \right. \\ &\quad - (x/r_2) (ft)^{-1/2} (2/\pi)^{1/2} \\ &\quad \left. \times [\sin(ft - \pi/4) \mathbf{x} + \cos(ft - \pi/4) \mathbf{y}] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

where the spin-up time of (4.20) is $T = 2f^{-1}$.

Il y a la présence d'un jet côtier près de la côte le long de y.

On remarque aussi que le cas est plus complexe que le précédent avec

$$u_1 = A + B \text{ et } u_2 = \frac{-h_1}{h_2} B$$

On the continental shelf, the behavior of currents is similar to that in (4.16). The inertial oscillations are polarized clockwise. The mean current perpendicular to the shore and the inertial oscillations are in opposite phases in the two layers, but the mean current parallel to the shore increases linearly with time and has a tendency to become semi-barotropic for distances off the shore of the order of r_2 . This agrees with the observations of currents off the Oregon shore where the wind is parallel to a straight coastline (Smith, 1974).

2) Cas où ν le coefficient d'atténuation n'est pas nul; solution plus complexe (voir Annexe du papier Millot and Crepon, 1981, Inertial oscillations on the Continental Shelf of the Gulf of Lions – Observations and Theory, JPO vol 11, 5.

Exemples de données

Déphasage de π sous la thermocline visible sur les coupes verticales.

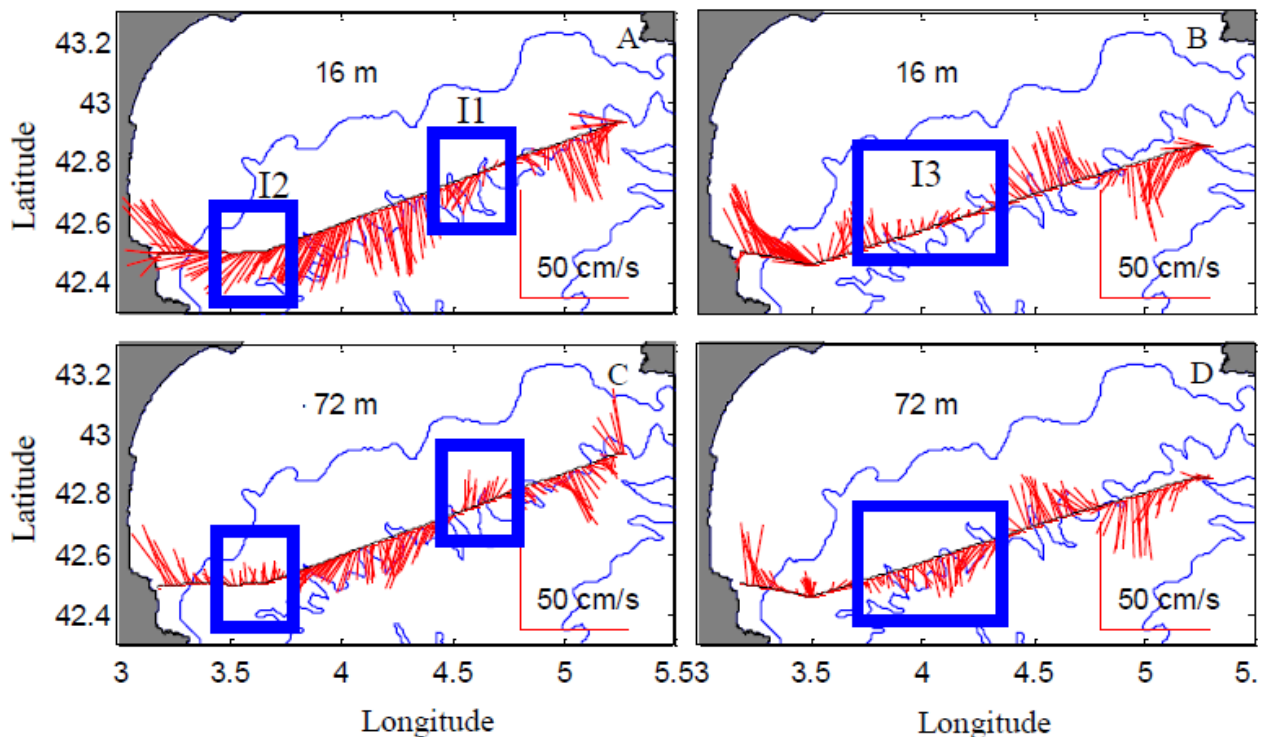


Fig. - Horizontal currents during MOOGLI 2 at A) 16 m and C) 72 m along transect TR1, and B) 16 m and D) 72 m along transect TR2. The boxes isolate the zones with inertial currents. At 16 m, they are labeled (I1, I2, and I3) in the chronological order currents were measured. Isobaths 100 m, 1000 m, and 2000 m are shown. (Fig 9 extraite de **Petrenko A.** (2003), *Circulation features in the Gulf of Lions, NW Mediterranean Sea; importance of inertial currents*. *Oceanol. Acta*, 26, 323-338)

and associated text:

“The presence of inertial currents can also be verified on the spatial maps of TR1 and TR2 currents. For example, surface inertial currents are oriented southwestward at the end of TR1 (I2) and northward in the center of TR2 (I3), about 10 hours after (Figure 9 and Table 1). A full rotation of 360 degrees representing 17.5 hours, it is expected that the inertial currents rotate by 126 degrees (taking into account the geostrophic component of the NC) clockwise in 10 hours. The observed clockwise rotation is ~ 120 degrees, in nearly perfect agreement with the one calculated. The inertial currents compared are separated by 50 to 75 km. This shows that our horizontal coherence assumption was acceptable. No coherence is found between I1 and I2, nor between I1 and I3.”

Détection des intrusions

Quand des courants locaux pré-existent avant le coup de vent, ils peuvent continuer à être présents durant le coup de vent ; par exemple, superposition de deux courants: Courant Nord considéré comme quasi-géostrophique + courant d'inertie.

Si on veut filtrer les courants d'inertie pour obtenir les courants pré-existants, plusieurs méthodes sont possibles.

a) Modèle

Dans les sorties numériques de modèle de circulation, les courants peuvent être très nets. Dans l'exemple donné, les courants sont montrés sur une période inertielle (Figure). Les courants d'inertie sont principalement visibles au sud et à l'est du plateau. Les courants sur le plateau tournent également dans le sens horaire mais avec un léger déphasage avec le courant d'inertie au large du plateau (déphasage ou légère différence de période ?).

Pour contourner ce problème, si l'on veut « retirer » l'influence des courants d'inertie, il suffit de moyenniser les sorties numériques de courant sur la période inertielle, ou sur une période proche (ex période journalière mais avec un risque d'aliasing).

From Petrenko A., Y. Leredde, and P. Marsaleix (2005), *Circulation in a stratified and wind-forced Gulf of Lions, NW Mediterranean Sea: in-situ and modeling data*. *Continental Shelf Res.*, 25, 5-27, doi:10.1016/j.csr.2004.09.004

“A strong inertial oscillation, with maximum amplitude of 60 cm/s, is clearly observed at the western side of the gulf due to the absence of the NC there. The model also exhibits this oscillation, and provides its temporal variations. The analysis, closely coupling in situ measurements and model

results, provides information that would not have been obtained using either data separately. »

(voir papier pour plus de détails)

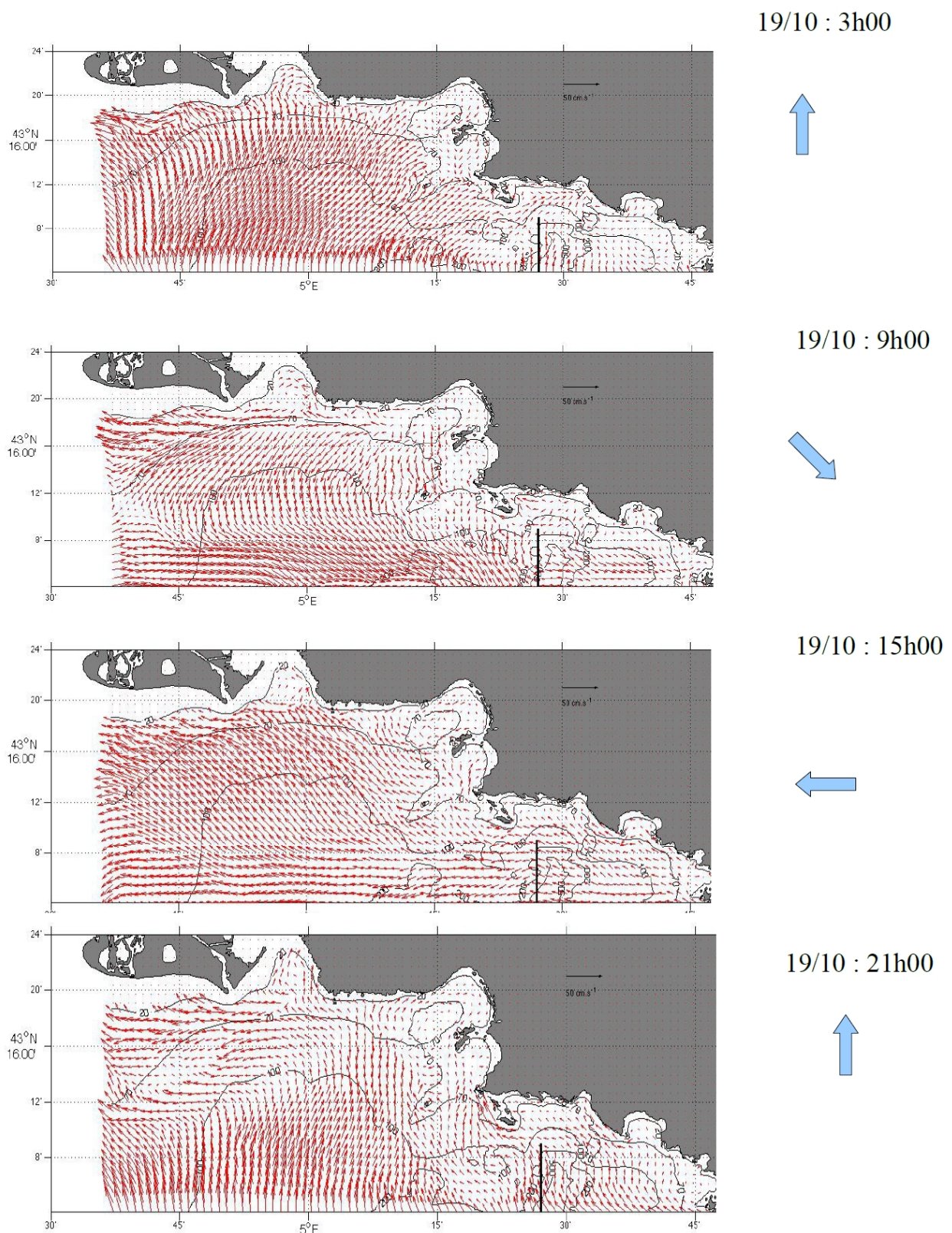


Fig. - Modélisation océanique au large de Marseille avec MARS 3D – Rhoma (remerciements F. Desbiolles, stage avec I. Pairaud et A. Petrenko, 2010)

b) *Données de courant mesurées in situ*

From Petrenko, A.A. (2003), *Circulation features in the Gulf of Lions, NW Mediterranean Sea; importance of inertial currents*, *Oceanol. Acta*, 26, pp. 323–338

“The summer stratification allows the development, after strong wind variations, of inertial currents with their characteristic 2-layer baroclinic structure. In the surface layer, the speed of

the inertial oscillation can locally be as high as 200 % the NC speed. Otherwise the inertial current is about 2/3 the NC. Horizontal spatial coherence of inertial currents is found on scales up to 50 - 75 km. The contribution of these inertial currents to the measured circulation can not be neglected but is hard to estimate without the detailed and local analysis done in this article. The situation is different with time series data sets where high frequency motions such as inertial currents are classically filtered out. Spatial interpolation technique [Candela *et al.*, 1992] was tried unsuccessfully on the MOGLI 1 ADCP data to isolate inertial currents (Durrieu de Madron, pers. comm.). The retrieval of the inertial component from the circulation is one of the main problems that oceanographers and modelers, working on the circulation in the Gulf of Lions and elsewhere, are presently dealing with.”

plusieurs méthodes sont appropriées suivant les données disponibles

- 1 Plot de $u+iv$
- 2 Déroulement de phase
- 2 Sinusoïde additionnée au courant
- 3 Filtre passe-bande

1) Plot de $u+iv$ - Soient u et v les composantes est et nord du courant, on peut dessiner $u+iv$ en représentation graphique. Si la courbe tourne autour de 0 en une période d'inertie, on a affaire à un courant inertiel. Si la courbe tourne autour de d'un point (u_0, v_0) en une période d'inertie, on a affaire à un courant inertiel superposé à un courant fixe de grandeur (u_0, v_0) .

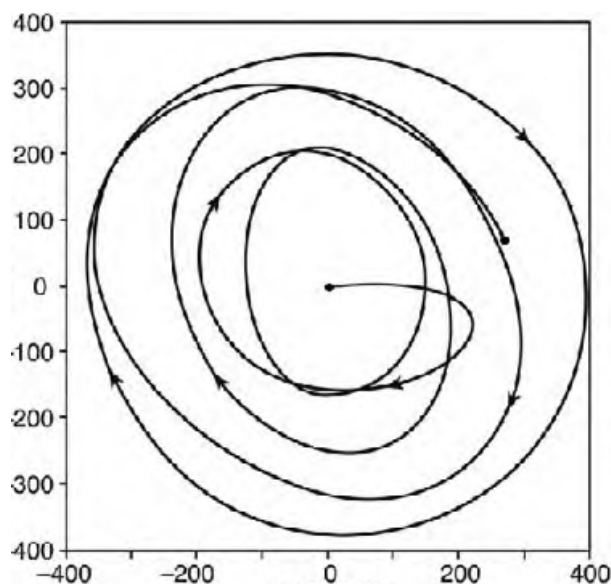


Fig Inertial circles observed by a current meter in the main thermocline of the Atlantic Ocean at a depth of 500 m; 28°N, 54°W. Five inertial periods are shown. The inertial period at this latitude is 25.6 h. (Courtesy of Carl Wunsch, MIT, via J. Marshall and A. Plumb « Atmosphere, Ocean and Climate Dynamics », Elsevier book, 2008, Fig 6.16)

2) Déroulement de phase

Chereskin JGR 1989

“La stratification estivale permet le développement, après un fort épisode de vent, de courants inertiels de structure barocline à 2 couches. Dans la couche supérieure, la vitesse de l'oscillation inertielle peut s'élever localement à 200 % la vitesse du CN. Sinon, dans la couche de surface, le courant inertiel représente à peu près 2/3 du CN. La cohérence des courants inertiels s'étend jusqu'à 75 km.” extrait de Petrenko (2003).

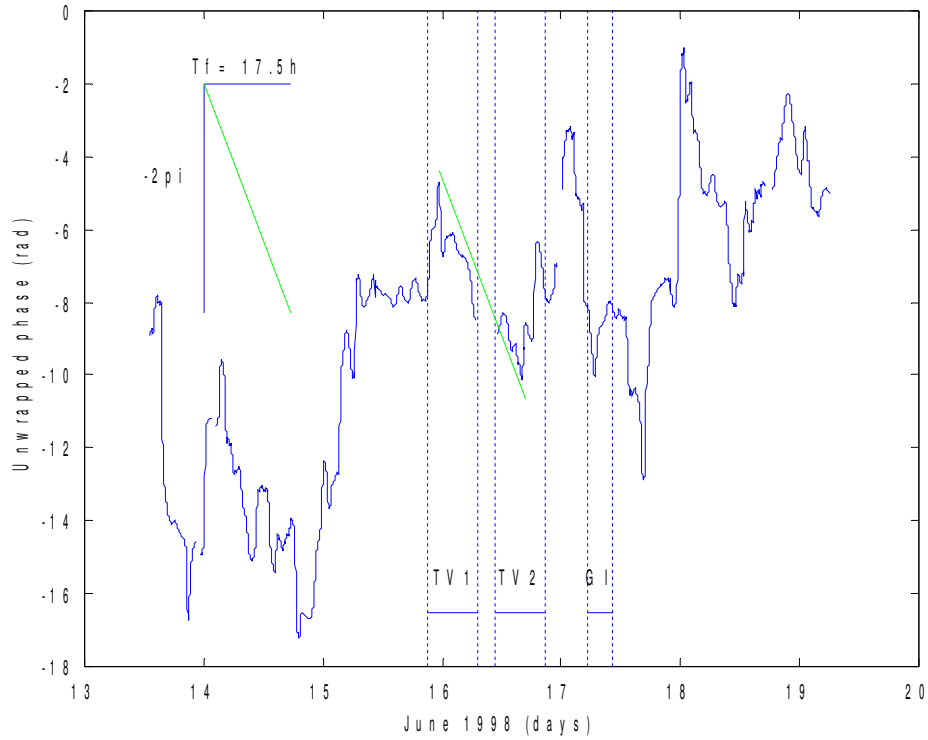
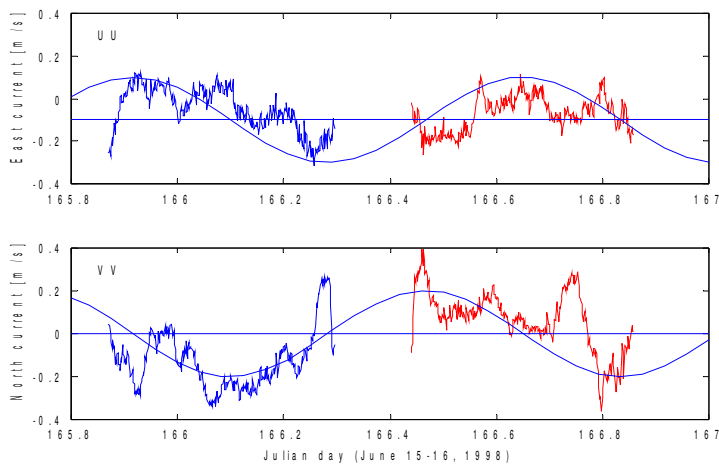


Fig. - Phase unwrapping of the horizontal current shear (16 m - 72 m) during June 13-19, 1998 (Moogli 2 cruise). The negative slope corresponding to the Coriolis factor is shown. Transects TR1, TR2 and GI were done during the periods indicated by vertical dotted lines. (Fig. 8 extraite de **Petrenko A.** (2003), *Circulation features in the Gulf of Lions, NW Mediterranean Sea; importance of inertial currents.* Oceanol. Acta, 26, 323-338)

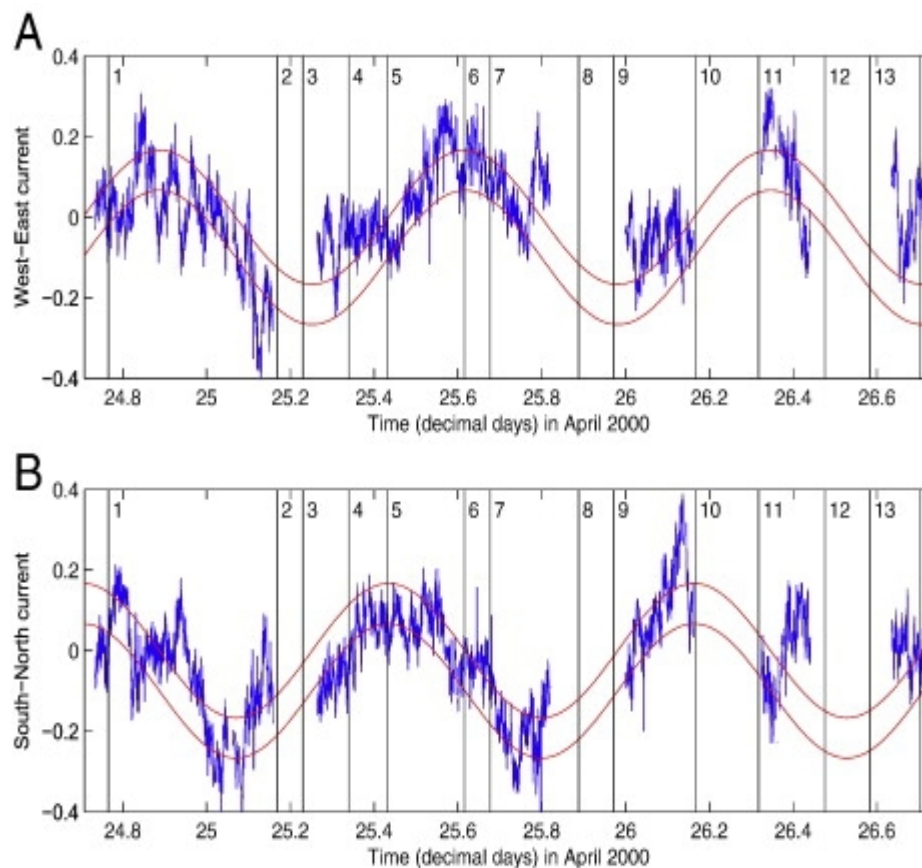
3) Sinusoïde additionnée au courant



Time series of the A) west-east and B) south-north current components, at 16 m depth, along transects TR1 and TR2 of MOOGLI 2. Superimposed is a sinusoidal curve of inertial period, shifted by $+\pi/2$ on A compared to B. The means of the two components are also drawn: A) -0.10 m/s; and B) 0 m/s. (Fig 12 extraite de **Petrenko A.** (2003), *Circulation features in the Gulf of Lions, NW Mediterranean Sea; importance of inertial currents*. *Oceanol. Acta*, 26, 323-338).

and associated text:

“The mean current of the eastward component is around -10 cm/s, corresponding to the average westward speed of the NC. The mean component of the northward component is zero. The amplitude of the sinusoidal curve, corresponding to the inertial current, is about 20 cm/s. Hence, at that depth (16 m), the speed of the inertial oscillation can be locally as high as 200% the NC speed. Otherwise, the average speed of the NC in its core is about 30 cm/s; so the inertial current is about $2/3$ the NC. It is important to remember that the thickness of the top layer of the inertial oscillation is about 30 m while the NC extends over 200 m; hence, the inertial oscillation energy is much smaller than the NC energy.”



Time series of the ADCP current differences between two depths, in m/s A) $u(12\text{ m})-u(48\text{ m})$, u being the west-east (+ east) component of the horizontal current and B) $v(12\text{ m})-v(48\text{ m})$, v being the south-north (+ north) component during Sarhygol 2, April 2000. A sinusoid at the Coriolis frequency, representing the inertial oscillation is added to A and shifted by $\pi/2$ in B. (from Petrenko A., C. Dufau and C. Estournel (2008), *Barotropic eastward currents in the western Gulf of Lion, north-western Mediterranean Sea, during stratified conditions*. *J. Marine Syst.*, doi:10.1016/j.jmarsys.2008.03.004, Fig 2)

3 Filtre

papier à venir

D. Allain, 2014, Numerical filtering of geophysical data : methods and application on ocean inertial waves.

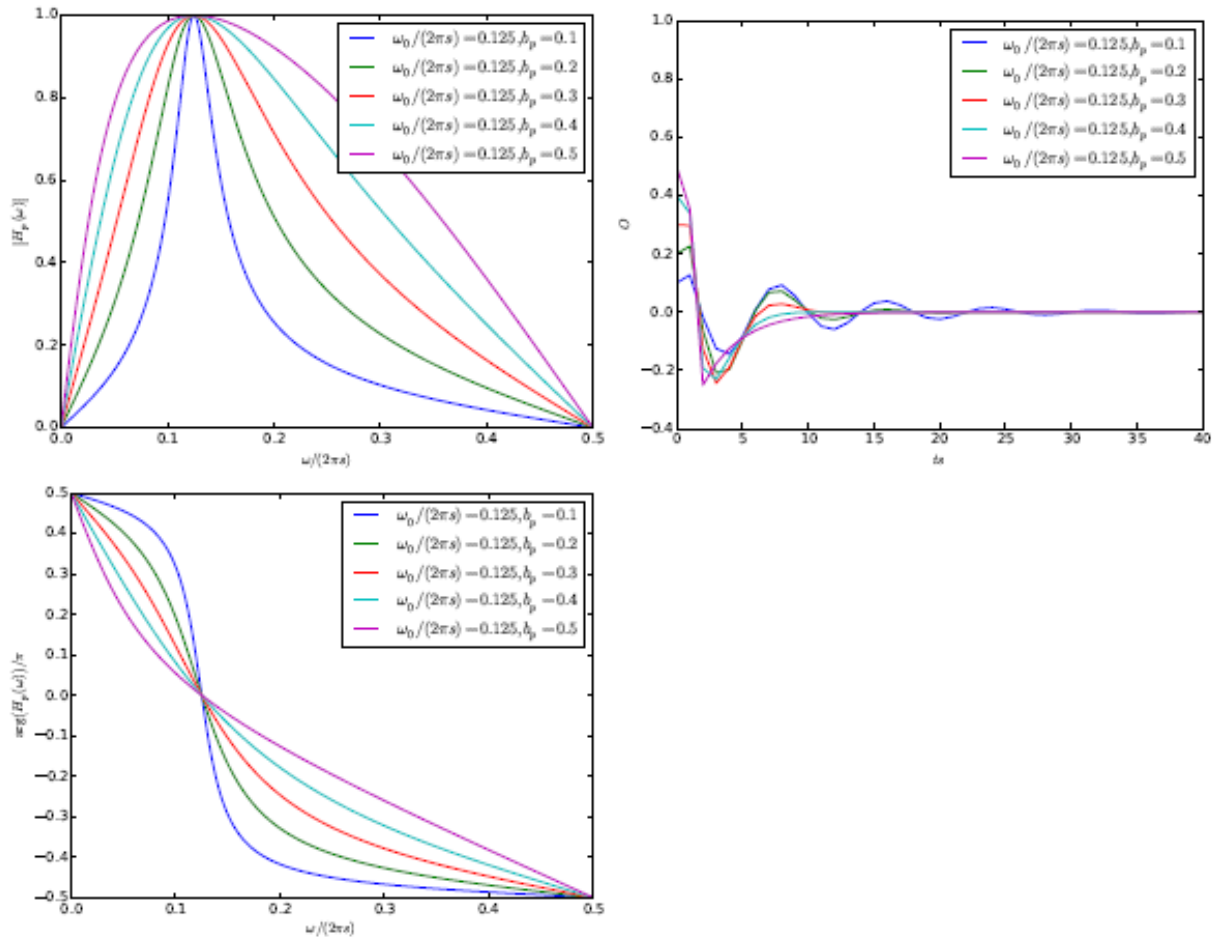
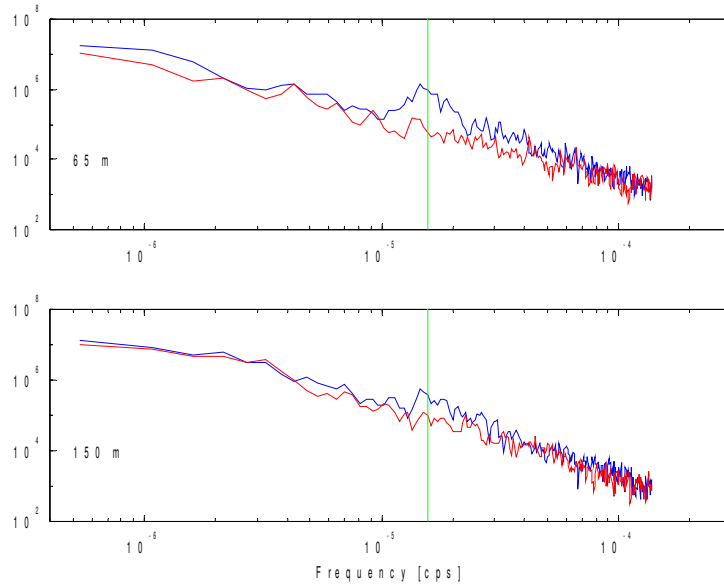


Figure 2: Amplitude and phase diagrams and convolution kernels of the DF-II IIR BP filter for different values of b_p

Pour plus de détails, contacter D. Allain (SHOM-founded CNRS research engineer working within the ECOLA team, damien.allain@legos.obs-mip.fr)

4) Rotary spectra



Rotary spectra versus frequency (bottom x-axis) for A) 65 m, B) 150 m currents measured at SOFI during April to June 1998. The black (grey) line is the clockwise (counter-clockwise) component of the spectra. Note that, at the inertial frequency (indicated by the vertical line), the clockwise component is much higher than the counter-clockwise component. (Fig 11 extraite de **Petrenko A.** (2003), *Circulation features in the Gulf of Lions, NW Mediterranean Sea; importance of inertial currents.* Oceanol. Acta, 26, 323-338).

5) Analyse en ondelettes

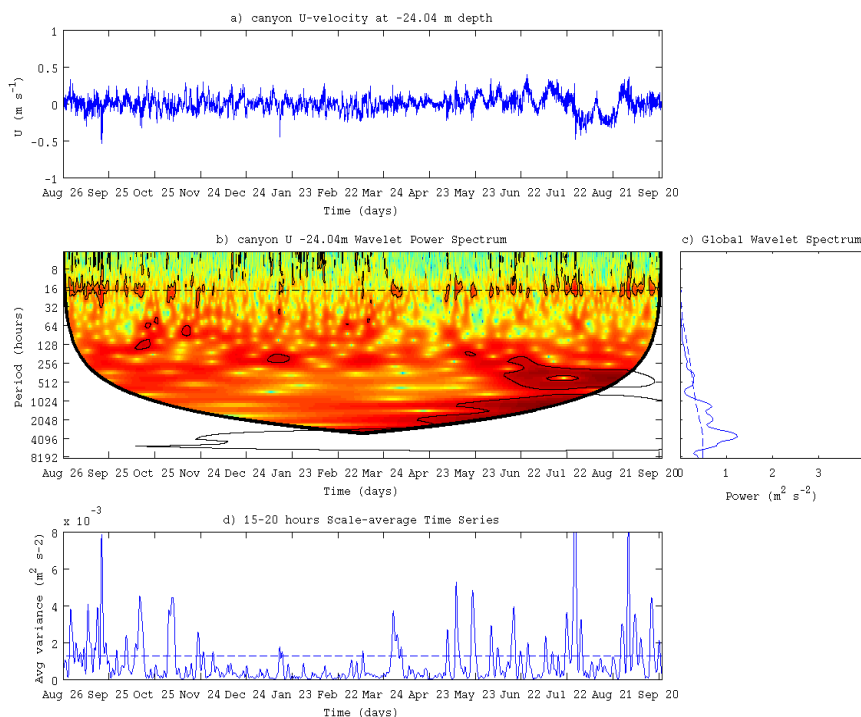


Fig – Analyse en Ondelettes de la série temporelle de vitesse acquise durant Latex (Mouillage du canyon) de aout 2009 à aout 2010 (Courtesy F. Nencioli) – outil d'analyse spectrale d'après Torrence and Compo, 1998.

2.11 Équation Oméga pour l'estimation des vitesses verticales (séance A.Petrenko)

A INSERER

3. Tourbillons côtiers

Fondements

Les écoulement potentiels satisfaisaient simultanément les relations

$$\nabla \times \vec{v} = 0 \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

i.e. le champ de vitesse est irrotationnel et incompressible.

Si le champs de vitesse est irrotationnel (ou conservative), vu que par définition $\nabla \times (\nabla \Phi) = 0$, il doit exister un champ scalaire Φ dit potentiel des vitesses tel que

$$\vec{v} = \nabla \Phi \quad (3.1)$$

Si le champs de vitesse est solénoïdale (ou incompressible), vu que par définition $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{\Psi}) = 0$, il doit exister un champ vectoriel $\vec{\Psi}$ dit potentiel vecteur des vitesses tel que

$$\vec{v} = \nabla \times \vec{\Psi} \quad (3.2)$$

Si l'écoulement est plan (bidimensionnel horizontal), on a $\vec{\Psi} \equiv (0, 0, \Psi)$ et le champ scalaire $\Psi \equiv \Psi(x, y)$ est dit fonction de courant.

Les écoulement potentiels sont équivalents à des problèmes d'électrostatique dans le vide. Ces écoulements interviendront toutes le fois qu'on pourra négliger les effets de la viscosité.

Exemples

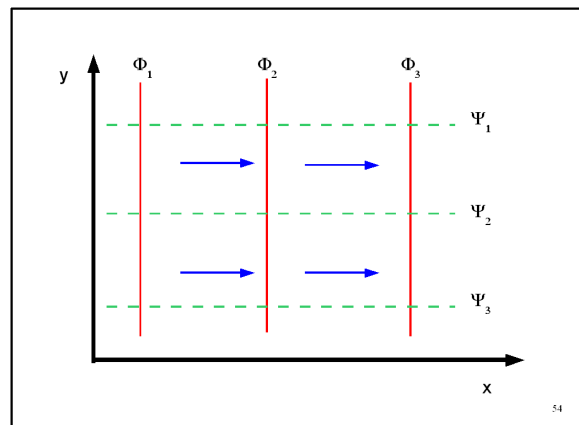
Écoulement parallèle uniforme

$$v_x = U \quad v_y = 0$$

D'après les définitions (3.1) et (3.2)

$$v_x = \partial_x \Phi = \partial_y \Psi \quad \text{et} \quad v_y = \partial_y \Phi = -\partial_x \Psi \quad \text{d'où}$$

$$\Phi = U x \quad \text{et} \quad \Psi = U y$$



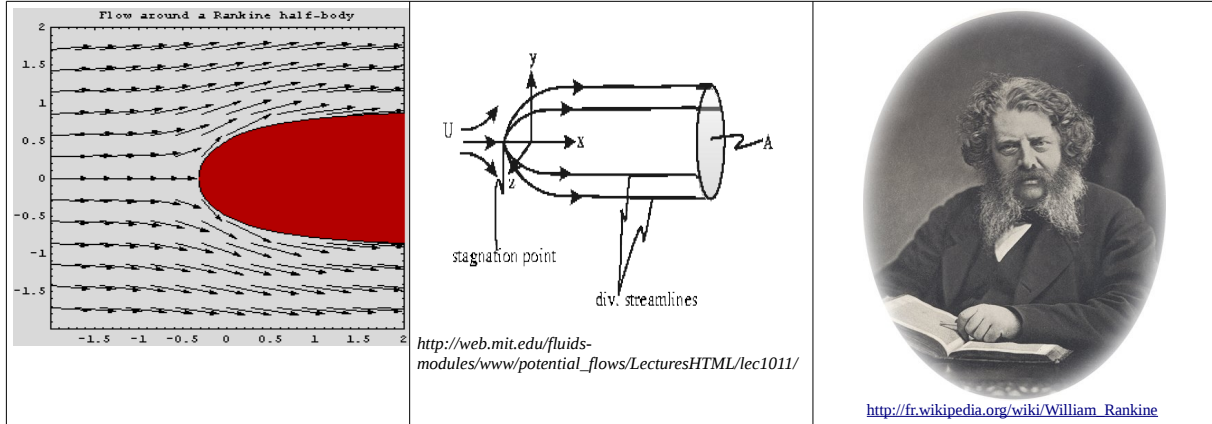
<p>Source ou puits</p>	$v_r = \frac{Q}{2 \pi r} \quad v_\theta = 0$ $\Phi = \frac{Q}{2 \pi} \log\left(\frac{r}{r_o}\right)$ $\Psi = \frac{Q}{2 \pi} \theta$	
<p>Tourbillon</p>	$v_r = 0 \quad v_\theta = \frac{\Gamma}{2 \pi r}$ $\Phi = \frac{\Gamma}{2 \pi} \theta$ $\Psi = \frac{\Gamma}{2 \pi} \log\left(\frac{r}{r_o}\right)$	
<p>Dipôle</p>	$v_r = \frac{p \cos \theta}{2 \pi r^2} \quad v_\theta = \frac{p \sin \theta}{2 \pi r^2}$ $\Phi = -\frac{Qd \cos \theta}{2 \pi r}$ $\Psi = \frac{Qd \sin \theta}{2 \pi r}$	

La superposition des écoulements simples ci-dessus permet d'introduire des écoulements toujours potentiels mais un un peu plus compliqués.

<p>Écoulement uniforme + Source/Puits</p>	
<p>Écoulement uniforme + Dipôle</p>	

Dans ce type d'écoulement il y a des points où la vitesse est nulle dits points d'arrêt. La courbe qui représente la ligne de courant qui comprend le/les point/s d'arrêt sépare l'espace en deux régions où le fluide est apporté par chacun des deux écoulements de base. On peut la remplacer par un obstacle solide, sans modifier l'écoulement déterminé.

En 3D on parle de « Solides de Rankine » depuis le nom du chercheur qui a développé cette technique pour l'étude de l'architecture des bateaux.



Couche limite laminaire

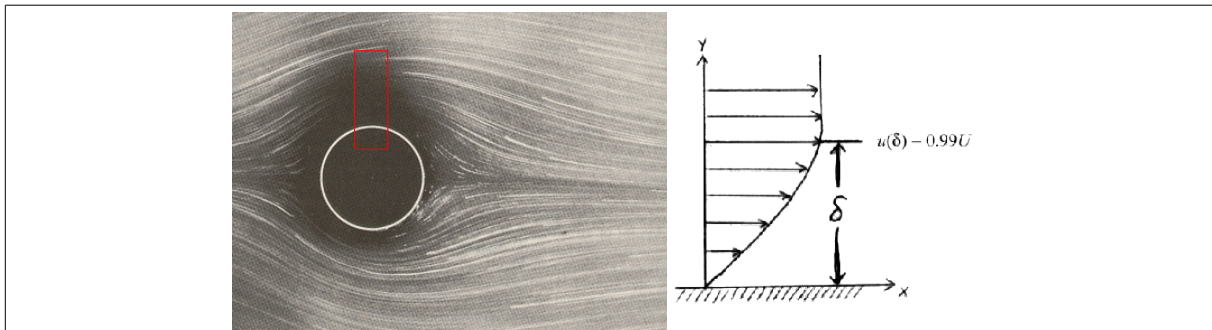
Loin du corps et tant que l'écoulement incident n'est pas turbulent, les termes des forces de viscosité de l'équation du mouvement (eq. Navier -Stokes)

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{u}$$

sont négligeables et l'écoulement a pratiquement le même profil de celui d'un fluide parfait. Le raccordement entre la solution de fluide parfait et la condition de vitesse nulle sur les parois solides se fait dans une zone appelée couche limite, d'épaisseur d'autant plus faible que le nombre de

Reynolds $Re = \frac{UL}{\nu}$ est grand. Dans cette région les termes de viscosité et de convection sont à

prendre en compte simultanément. La notion de couche limite est la liaison entre 2 domaines de la mécanique de fluides l'écoulement potentiels des fluides parfaits et l'étude expérimentale de l'écoulement des fluides visqueux.



Création de vorticité relative

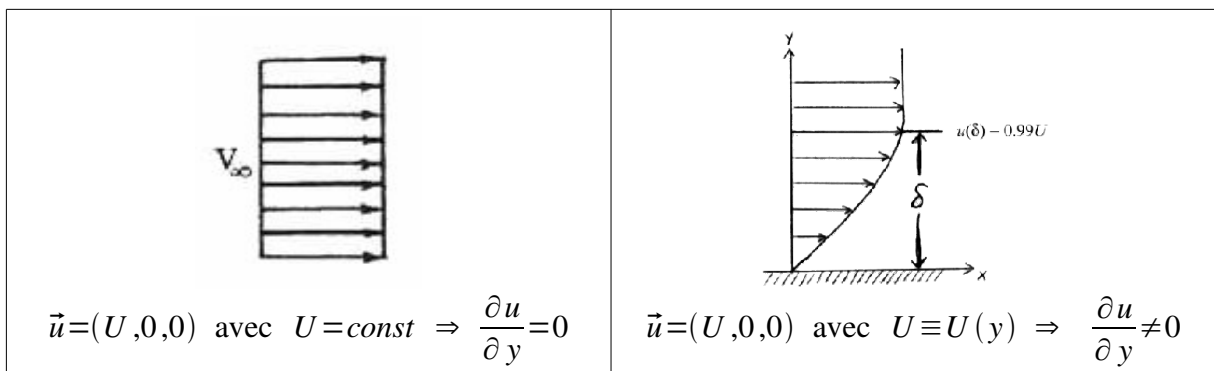
La vorticité relative est la composante verticale du rotationnel de la vitesse

$$\zeta = \vec{k}(\nabla \times \vec{V}) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

La vorticité relative exprime la tendance d'un fluide à tourner. Le signe de ζ peut être illustré avec le schéma suivant :

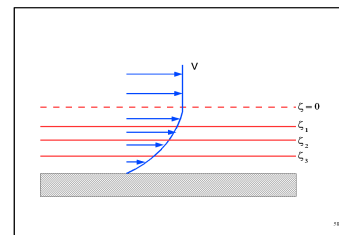


Elle est appelée vorticité relative, car elle est mesurée par rapport à la terre. Dans la couche limite à cause de la condition de vitesse nulle sur la paroi solide on a création de vorticité. Faisons un parallèle entre le cas visqueux et celui non visqueux



Dans la couche limite il y a donc création de vorticité relative.

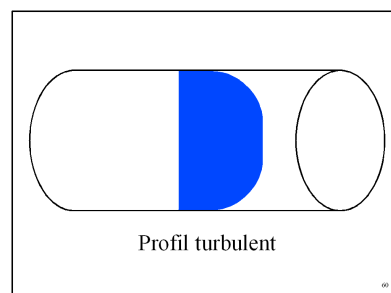
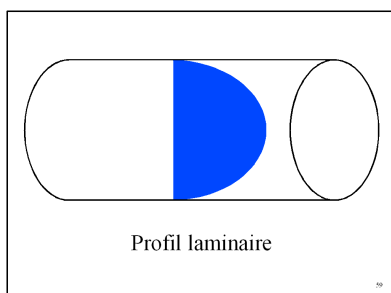
si on dessine les isolignes on peut mettre en évidence comme la vorticité est concentré dans la couche limite



Couche limite turbulente

Jusqu'à maintenant on a parlé de viscosité en pensant à la viscosité moléculaire donc on a été dans des couche limites laminaires. Prandtl a adapté la notion de couche limite au cas turbulent.

Dans le cas laminaire le transport de quantité de mouvement est du à la viscosité moléculaire, il s'agissait donc d'un transport diffusif. Quand le transport convectif de quantité de mouvement joue un rôle plus important que le transport diffusif on est dans un écoulement turbulent. Les profiles de vitesse changent considérablement de forme. L'expérience de Reynolds a bien montré ce changement dans le cas d'un tube cylindrique: dans le cas laminaire on a le profile parabolique de l'écoulement de Poiseuille tandis que dans le cas turbulent, le profil est plus plat



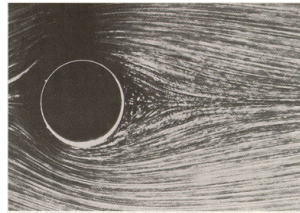
Mais dans tout les deux cas il y a une couche limite. Dans le cas turbulent il s'agisse d'une couche limite turbulente et dans cette couche il y a création de vorticité.

Différents régime d'écoulement

Selon les vitesses et les géométrie des écoulements, le transport de la quantité de mouvement d'un fluide peut être dominé par des phénomènes diffusifs ou convectifs. L'ordre de grandeur relatif de ces termes est le nombre de Reynolds qui peut être aussi interprété comme rapport entre le temps caractéristique de la diffusion de la quantité de mouvement et celui de la convection de celle ci.

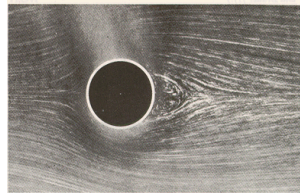
Une expérience pour visualiser les différents régimes d'écoulement est la suivante: on pose un cylindre de diamètre D aligné le long de l'axe z dans un écoulement de vitesse U suivant la direction Ox perpendiculaire à son axe. En réalité en laboratoire en générale le fluide est a repos et on fait avancé le cylindre à la vitesse U , ce qui est équivalent. Pour visualiser les ligne de courant on peut mettre dans le fluide des particules fines et éclairer le dispositif par une nappe de lumière perpendiculaire. En fonction de la valeur de Re on distingue différent régimes.

Pour $Re \ll 1$ la vitesse est faible (ou le fluide très visqueux, mais ça nous intéresse pas trop en océanographie), l'écoulement laminaire, parfaitement symétrique entre l'amont et l'aval du cylindre. On a une situation très similaire à la solution du solide de Rankine.

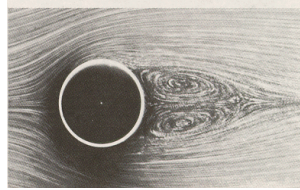


$Re = 1.54$

Pour $Re \approx 1$ on commence à observer deux tourbillons contrarotatifs fixes en aval du cylindre (écoulement de récirculation). La longueur de la zone de récirculation croît à l'augmenter de Re



$Re = 13.1$



$Re = 26$

Pour $Re \approx 50$ l'écoulement cesse d'être stationnaire et la vitesse du fluide dépend du temps: des tourbillons sont émis périodiquement en aval de l'écoulement. Ils forment une double rangée de tourbillons appelée allée de Von Karman. La fréquence d'émission est caractérisée par le nombre de Strouhal

$$Sr = f \frac{D}{u}$$

avec f fréquence d'émission des tourbillons .

Physiquement, il représente le rapport du temps d'advection et du temps caractéristique de l'instationnarité. Si $Sr \ll 1$, l'écoulement est dit quasi-stationnaire. Dans ce cas est constant et de l'ordre de 1 .



$Re = 105$

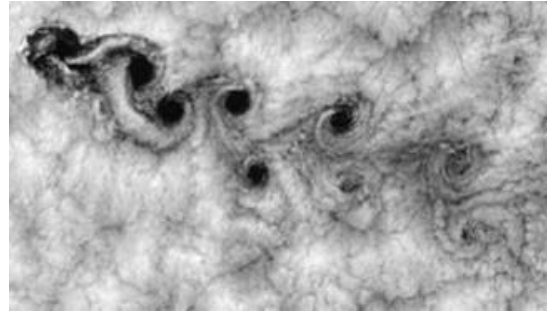
$Re = 150$

<http://www.media.mit.edu/physics/pedagogy/nmm/student/95/aries/mas864/obstacles.html>

Pour $Re \gg 1$ il y a superposition entre ces grandes structures cohérentes et des mouvements incohérentes, à des échelles spatiales plus faibles, autant plus petites que Re est grand. En pratique leur taille minimale décroît comme $1/\sqrt{Re}$

L'allée de Von Karman peut être observée jusqu'à très grand nombre de Re dans des écoulements océanographiques ou atmosphériques, derrière des îles ou des obstacles de grande taille.

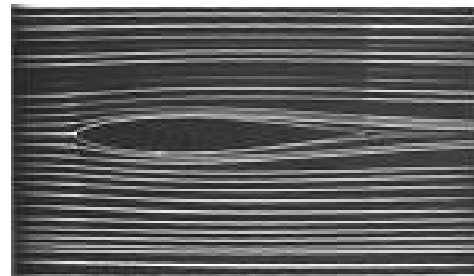
Ci-contre une allée de tourbillons de Von Kármán observé dans l'atmosphère au large de la côte chilienne près de l'île Juan Fernandez



Décollement

Qu'est-ce qu'il arrive à la vorticité une fois qu'elle a été générée?

La vorticité générée près des parois est entraînée par l'écoulement dans un sillage en aval de l'obstacle. Dans le cas d'un profil d'aile placé sous incidence nulle dans un écoulement uniforme on peut voir un tout petit sillage en aval.



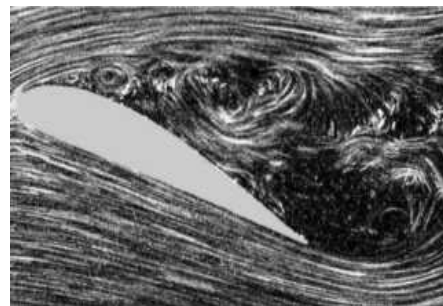
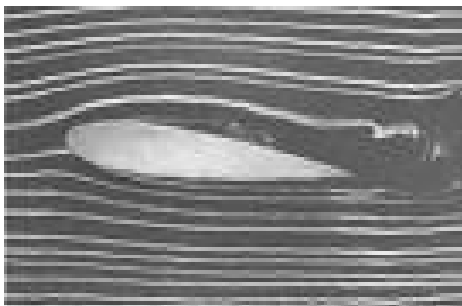
Quand on met un corps mal profil   il y a des changements importants. Re change parce que L change.

Prenons par exemple un cylindre. Dans ce cas la couche limite n'existe alors que sur la partie en amont de la surface du corps. En aval il y a un sillage turbulent de longueur comparable au corps même.



Ce phénomène est appelé décollement des couches limites. Dans ce cas l'écoulement en aval n'a plus rien à voir avec celui d'un fluide parfait et la dissipation d'énergie ainsi que la force de traînée sur le corps sont considérablement augmentées.

Ci dessous deux exemples de décollement en aval d'une aile. Qu'est-ce que fait varier le nombre de Reynolds?



Équation de la vorticité relative intégrée sur la verticale

La formation et l'évolution des tourbillons en aval des caps peut être expliqués plus « simplement » en termes de production, advection et dissipation de vorticité.

Pour décrire les phénomènes qui nous intéressent les équations les plus simples sont celle en eaux peu profondes. Dans ces équations, malgré les approximations faites il y a encore toute la physique qui nous intéresse.

Pour un fluide homogène et en approximation hydrostatique les équations de la quantité de mouvement et de continuité peuvent s'écrire [Signell et Geyer, 91] :

$$\partial_t \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + f(\vec{k} \times \vec{u}) = -g \nabla \eta - \frac{c_D \vec{u} |\vec{u}|}{h + \eta} + \nabla \cdot (A_H \nabla \vec{u}) \quad (\text{A})$$

$$\partial_t \eta + \nabla \cdot [\vec{u}(h + \eta)] = 0 \quad (\text{B})$$

L'équation de la vorticité moyennée sur la verticale est obtenue en calculant le rotationnel de l'équation (A).

Dans la suite on analyse chaque terme de l'équation

Le premier terme devient

$$\nabla \times \partial_t \vec{u} = \partial_t \nabla \times \vec{u} = \partial_t \vec{\zeta}$$

Le deuxième devient

$$\begin{aligned} \nabla \times (\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}) &= \nabla \times (\vec{\zeta} \times \vec{u}) = \\ &= (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{\zeta} - (\vec{\zeta} \cdot \nabla) \vec{u} + \vec{\zeta} (\nabla \cdot \vec{u}) - \vec{u} (\nabla \cdot \vec{\zeta}) = \\ &= (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{\zeta} - (\vec{\zeta} \cdot \nabla) \vec{u} - \frac{\zeta}{H} (\partial_t \eta + \vec{u} \cdot \nabla H) \end{aligned}$$

où le terme $\vec{u} (\nabla \cdot \vec{\zeta})$ est nul parce que c'est la divergence du rotationnel de la vitesse et où on a substitué la divergence de la vitesse obtenue à partir de (B) et $H = h + \eta$

Le terme de Coriolis peut s'écrire

$$\nabla \times f(\vec{k} \times \vec{u}) = f [\vec{k} (\nabla \cdot \vec{u}) - \vec{u} (\nabla \cdot \vec{k}) + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{k} - (\vec{k} \cdot \nabla) \vec{u}] = f \vec{k} (\nabla \cdot \vec{u}) = -\frac{f}{H} \vec{k} (\partial_t \eta + \vec{u} \cdot \nabla H)$$

Le terme de gravité est nul parce que il est le rotationnel d'un gradient

$$\nabla \times (g \nabla \eta) = 0$$

Le terme de frottement sur le fond pour le moment on l'écrit simplement dans la façon suivante

$$\nabla \times \frac{c_D \vec{u} |\vec{u}|}{h + \eta}$$

et enfin le terme visqueux en considérant une viscosité turbulente constante, devient

$$\nabla \times A_H \nabla^2 \vec{u} = A_H \nabla^2 (\nabla \times \vec{u}) = A_H \nabla^2 \vec{\zeta}$$

Étant dans le cas bidimensionnel, la vorticité $\vec{\zeta} = \vec{k} (\partial_x v - \partial_y u)$ est un vecteur avec la seule composante verticale non nulle, on peut donc écrire l'équation cette seule composante

$$\partial_t \zeta + \vec{u} \cdot \nabla \zeta = \frac{\zeta + f}{H} [\partial_t \eta + \vec{u} \cdot \nabla H] - \left[\nabla \times \left(\frac{C_D \vec{u} |\vec{u}|}{H} \right) \right] \cdot \vec{k} + A_H \nabla^2 \zeta$$

Dans cette équation, la partie gauche décrit la vitesse de changement de la vorticité et son advection, i.e. le changement de vorticité en suivant une particule de fluide avec masse fixée.

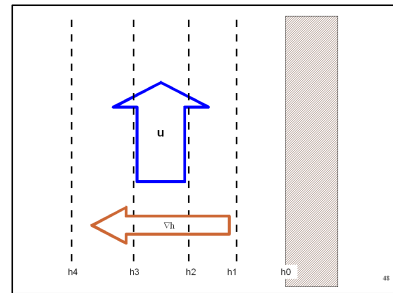
La partie droite représente les processus qui provoquent ces changements:

- i) le premier terme est la production de vorticité due à la compression (ou à l'étirement) et à la vorticité planétaire;
- ii) le deuxième est la production et dissipation due à la friction sur le fond.
- iii) le troisième est la diffusion de la vorticité due au processus de mélange turbulent.

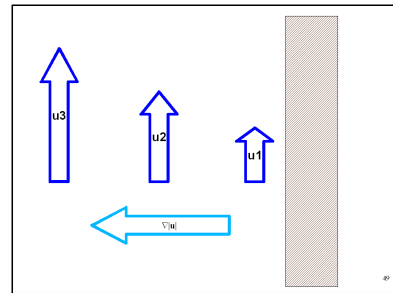
À cause de la petite profondeur des zones côtières le deuxième terme peut être très important. Si on développe ce terme on obtient encore une fois trois termes:

$$\left[\nabla \times \left(\frac{C_D \vec{u} |\vec{u}|}{H} \right) \right] \cdot \vec{k} = \frac{C_D |\vec{u}|}{H^2} [\vec{u} \times \nabla H] \cdot \vec{k} - \frac{C_D (\vec{u} \times \nabla |\vec{u}|)}{H} + \frac{C_D |\vec{u}| \zeta}{H}$$

a) « slope torque »: création de vorticité quand il y a une composante de la vitesse perpendiculaire au gradient de la bathymétrie. Physiquement on peut expliquer ça en pensant que l'eau plus proche de la côte subie un frottement intégré sur la verticale plus fort que l'eau au large.



b) « speed torque »: il y a création de vorticité quand il y a une composante de la vitesse perpendiculaire au gradient de la vitesse même. Ce phénomène est lié au fait que le frottement obéit à une loi quadratique. Un écoulement plus rapide est beaucoup plus retardé que un écoulement un peu plus lent.

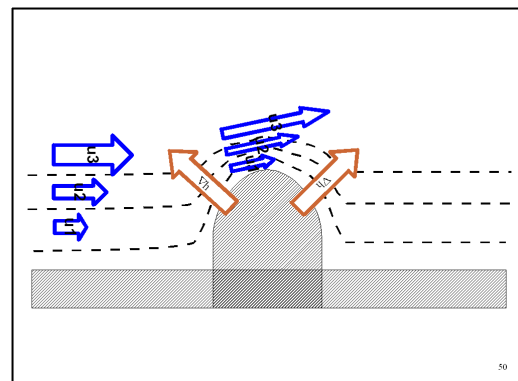


c) dissipation de la vorticité à cause du frottement. L'échelle temporelle du phénomène est

$$\tau = \frac{H}{C_D |\vec{u}|}$$

En proximité d'un cape il y a plusieurs mécanismes qui peuvent générer de la vorticité.

La faible profondeur et les forts gradients de bathymétrie peuvent correspondre au mécanisme a) comme aussi au mécanisme b). En effet, l'écoulement le long des isobathes subit des forts gradients de bathymétrie, mais aussi des fort gradients de vitesse perpendiculaires à la direction de l'écoulement générale. Un troisième source de vorticité sera aussi la condition latérale de vitesse nulle à la côte.



En proximité d'un cape, on a donc un fluide généralement très riche en vorticité, mais on n'a pas forcément des tourbillons. Afin que ces derniers puissent se former il faut que le fluide riche en vorticité ne reste pas confiné dans la couche limite mais il puisse rejoindre l'intérieur du fluide. Si l'écoulement reste parallèle à la côte, le phénomène ne peut pas se passer, en revanche s'il y a un décollement oui. Il faut alors étudier les conditions de décollement.

Décollement en proximité d'un cape

Dans la couche limite, si on adopte un système de coordonnées qui suit l'écoulement, les dérivées par rapport à la coordonnée parallèle à la côte x_1 sont beaucoup plus petites que celles par rapport à la coordonnée perpendiculaire x_2 .

L'équation de la composante parallèle et celle de continuité s'écrivent:

$$\partial_t u_1 + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x_1} - \frac{c_D U_o u_1}{h} + A_H \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \tag{C}$$

$$\partial_{x_1} u_1 h + \partial_{x_2} u_2 h = 0 \tag{D}$$

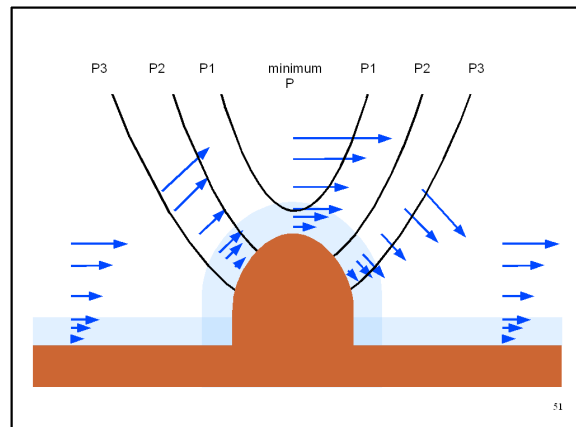
avec U_o amplitude de l'écoulement loin du cap (en particulier pour les courant de marée).

En absence de frottement au fond et de topographie, ces équations sont équivalentes aux équations de Prandtl pour la couche limite d'un écoulement bidimensionnel.

On considère d'abord le cas d'un écoulement stationnaire et sans frottement au fond.

En dehors de la couche limite l'écoulement accélère en s'approchant à la pointe du cape. En suite il ralenti dès que la pointe a été dépassée.

Selon la loi de Bernoulli cela génère un minimum local de pression à l'extrémité du cap. Le long de la frontière de la couche limite il y a donc un gradient de pression favorable (dans le sens que P diminue dans la direction de l'écoulement) en amont et défavorable en aval.

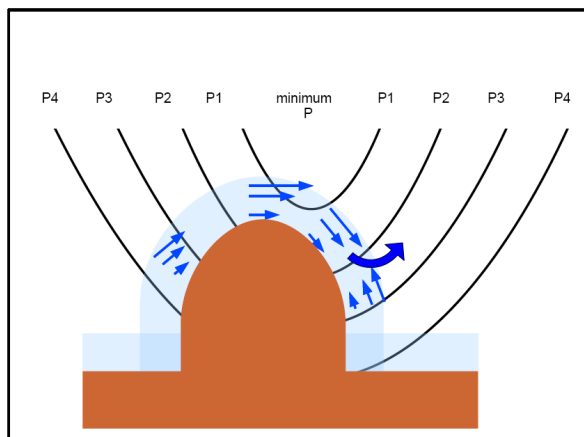


En amont, le gradient de pression favorable maintient le mouvement de l'amont à l'aval du fluide dans la couche limite, parce qu'il compense la perte de quantité de mouvement dans la couche limite.

En revanche, en aval, le gradient de pression défavorable soustrait de la quantité de mouvement à la couche limite.

Quand dans la couche limite il n'y a plus assez d'advection de quantité de mouvement de l'amont, l'écoulement commence à virer en arrière.

Par continuité la décélération de l'écoulement parallèle à la côte doit être accompagnée par un flux vers le fluide intérieure, loin de la couche limite.



Le point le long de la frontière de la couche limite où l'écoulement parallèle à la côte devient nul est dit point de décollement.

Ici la ligne de courant à la frontière avec la couche limite part vers l'intérieur de l'écoulement.

La distance entre le point de pression minimale et le point de décollement dépend du flux de quantité de mouvement et de l'intensité du gradient de pression défavorable (donc, de l'écoulement).

Pour un fluide visqueux sans frottement au fond les termes d'advection sont tous petits proche de la couche limite et le bilan de la quantité de mouvement (équation C) est fait entre le gradient de

pression et le termes d'étirements

$$g \frac{\partial \eta}{\partial x_1} = A_H \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \tag{C'}$$

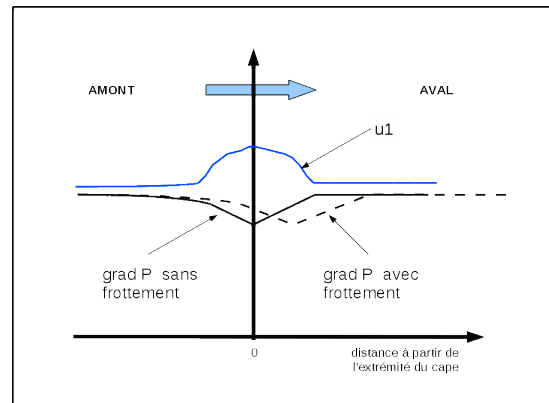
un gradient de pression défavorable demande seulement que l'écoulement ait une courbature négative près de la couche limite et par conséquent que le profil de vitesse parallèle à la côte aie un point d'inflexion.

Physiquement cela signifie que il n'y a pas de décollement si le flux de quantité de mouvement est assez fort pour contraster le gradient de pression défavorable.

Mais en circulation côtière le frottement au fond est important!

Dans ce cas le maximum de vitesse ne correspond plus au minimum de pression parce que le gradient de pression doit contraster advection *et aussi* le frottement!

Le minimum de pression se déplace donc en aval du maximum de vitesse.



Le bilan de la quantité de mouvement devient entre le gradient de pression et le terme de pression:

$$g \frac{\partial \eta}{\partial x_1} = - \frac{c_D U_o u_1}{h} \tag{C''}$$

Notez que maintenant le gradient de pression défavorable demande que u_1 aie un signe opposé: donc si jamais il y a l'inversion du gradient alors il y a tout de suite décollement parce que u_1 change de signe.

Le problème du décollement devient donc celui de l'inversion du gradient de pression.

Avec un modèle analytique, Signal et Geyer ('91) démontrent que il y a inversion du gradient de pression quand (en absence de marée) le terme d'advection domine le frottement.

Pour un cape avec forme fixée a/b , l'importance des termes de advection est mesurée par le nombre de Reynolds équivalent:

$$Re_f = \frac{H}{C_D a}$$

D'une façon similaire au nombre de Reynolds, à la variation de la valeur de Re_f on observe différentes régimes d'écoulement en aval d'un cape [Doglioli et al, 2004 et présentation ci-dessous].

3.5 Exemple : circulation autour du Promontoir de Portofino

Capes → coastal currents dynamics and associated transport.

Leeward eddies → local distributions of: { sediments; pollutants; nutrients; marine species. }

Previous numerical studies:

- Flat bathymetry;
- Tidal forcing;
- 2D models.

This numerical study:

- Steep slope;
- Inflow steady current;
- 2D & 3D model.

Bibliography

Boyer and Tao, 1984, J.Fluid.Mech.
 Freeland, 1990, Atmosphere-Ocean
 Veron et al., 1991, Fluid Dynamics Res.
 Signell and Geyer, 1991, J.Geoph. Res.
 Davies et al., 1995, J. Coastal Res.

Study area and measurements

Latitude: 44°N, 20°00'

Longitude: 9°E, 10°, 20°, 30°

IOF-CNR, 1972-92 ENEA, 1986-88, 1991-94, 1997 (Airoldi and Manca, 1982)

Physical system

simplified coastline

simplified bathymetry

$H = H_0 e^{-2x/(45000)}$
 $H_0 = 20$
 $\lambda = 0.0002$

Numerical setting

Numerical domain: 202 x 81 grid points ↔ **Physical domain: 100 x 50 km**

Horizontal resolution: $Dx=500m$ $200m < Dy < 1000m$

Vertical resolution: **31 sigma layers**

Inflow current

Flather boundary condition $U = U_e + \sqrt{gH}(\eta - EL_e)$

- Constant inflow: → $U_e = 0.067, 0.025, 0.50$ m/s
- Gaussian jets:

$U_e = -U_{max} e^{-\left(\frac{y-Y_{H100}}{\xi}\right)^2}$

t.c. $\int_{H=0}^{H=300} U_e dy = -0.5$ Sv

Western boundary condition test

(comparison between boundary results of a small grid and internal value of a big grid)

Numerical experiments

$Ro = \frac{U_0}{f a}$

$Re = \frac{U_0 a}{A_M}$

$Re_f = \frac{H_0}{C_D a}$

$Ek_v = \frac{K_M}{f H_0^2}$

$Sb = g \frac{\Delta \rho}{\rho} \frac{H_0}{f^2 a^3}$

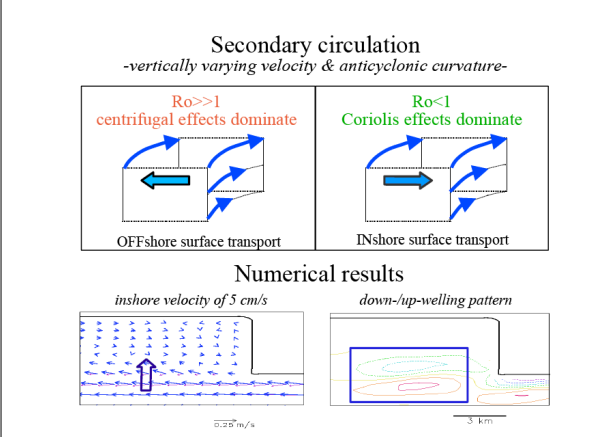
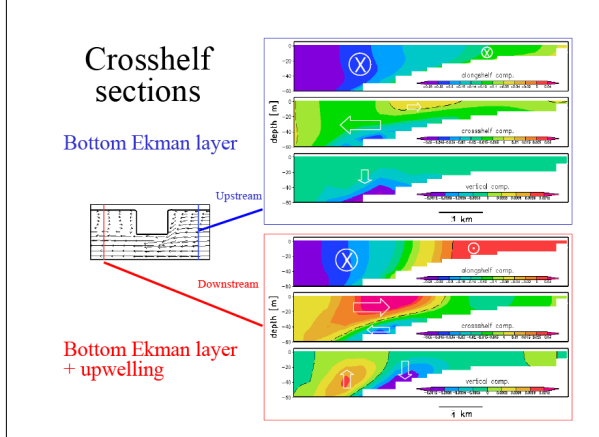
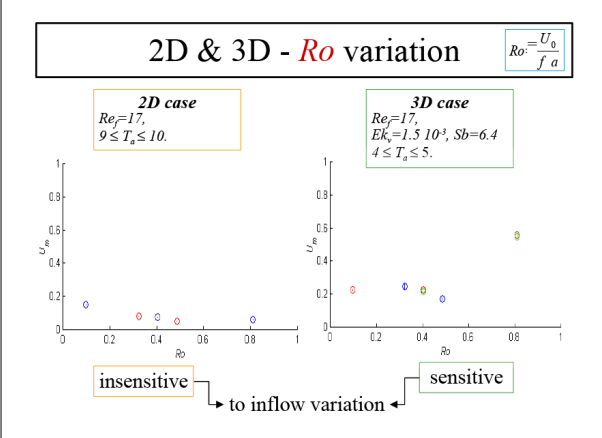
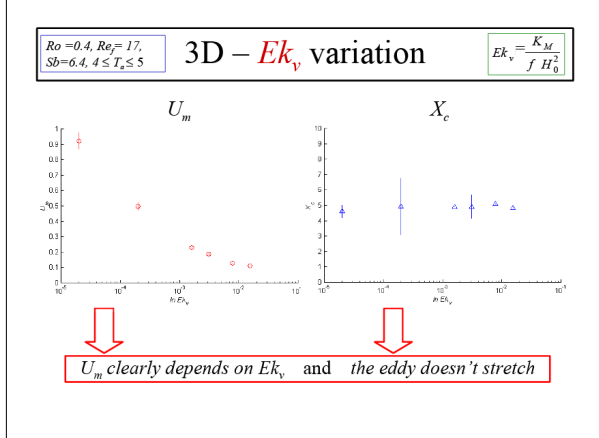
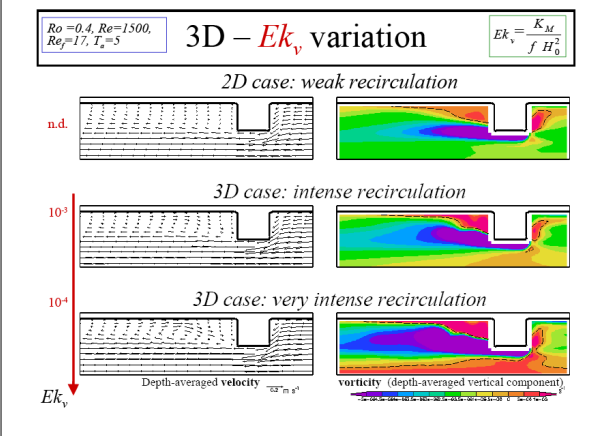
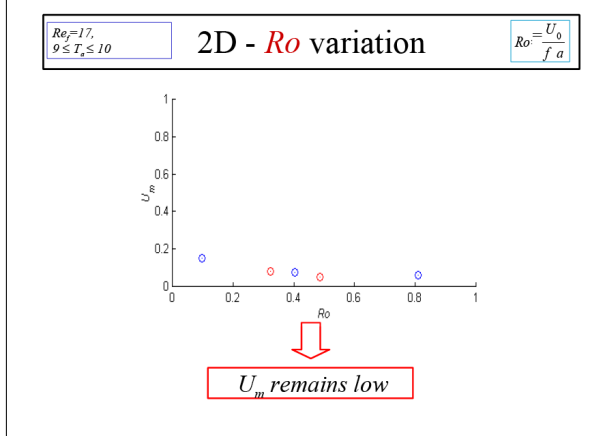
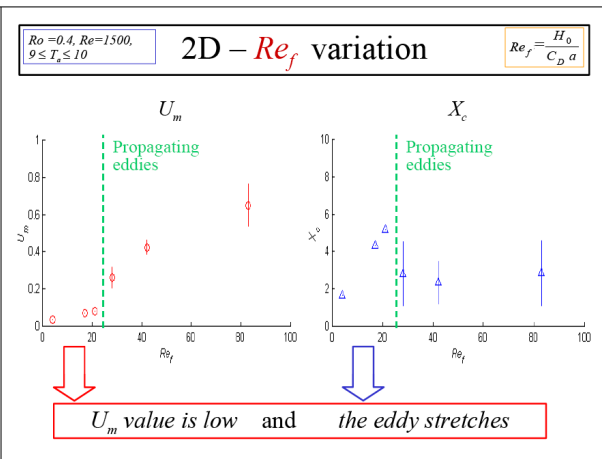
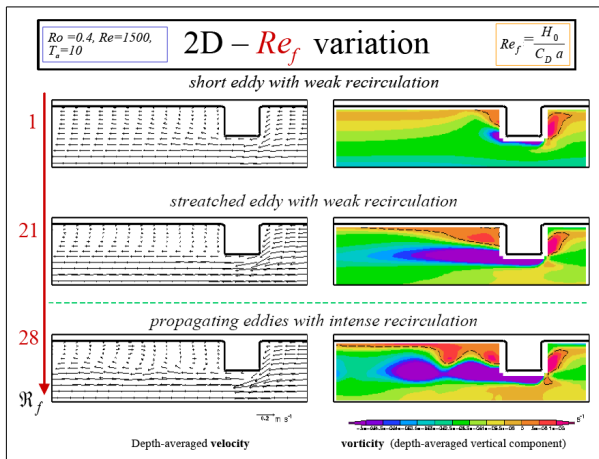
Exp.	Ro	Re	Re_f	Ek_v	Sb
$C_D 2D$	0.4	1500	4 - 83	n.d.	n.d.
$U_0 2 \& 3D$	0.1 - 0.8	360 - 3000	17	1.5×10^{-3}	0 - 6.4
$K_M 3D$	0.4	1500	17	$1.5 \times 10^{-5} - 1.5 \times 10^{-2}$	0 - 6.4
$H_0 2D$	0.4	1500	1 - 17	n.d.	n.d.

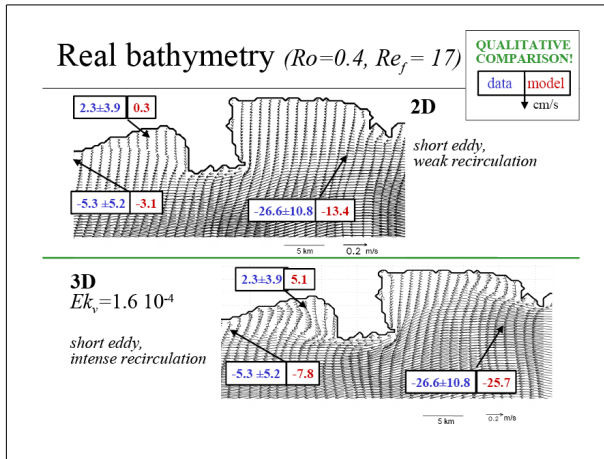
Varying parameters:
bottom friction: $10^{-4} < C_D < 10^{-2}$, linear & quadratic drag;
inflow: $0.06 < U_0 < 0.50$ [m s⁻¹], uniform & gaussian jet
vertical kinematic viscosity (3D): $10^{-4} < K_M < 10^{-1}$ [m² s⁻¹]

Observables

- X_c : dimensionless distance where the recirculation starts
- U_m : dimensionless maximum value of the recirculation current

a and U_0 used to normalise length and velocities, average and std on a $t_f = \frac{H_0}{C_D U_0}$ period



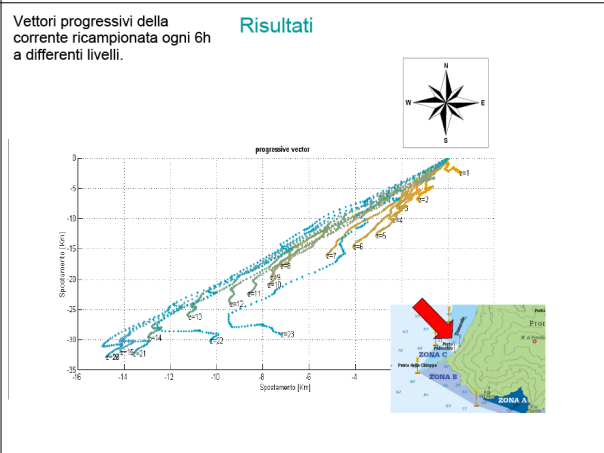
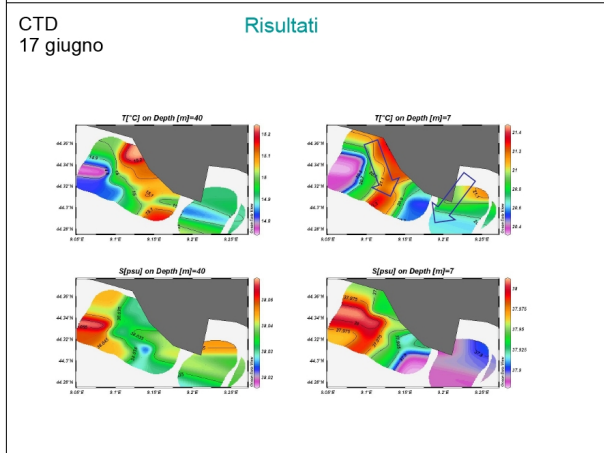
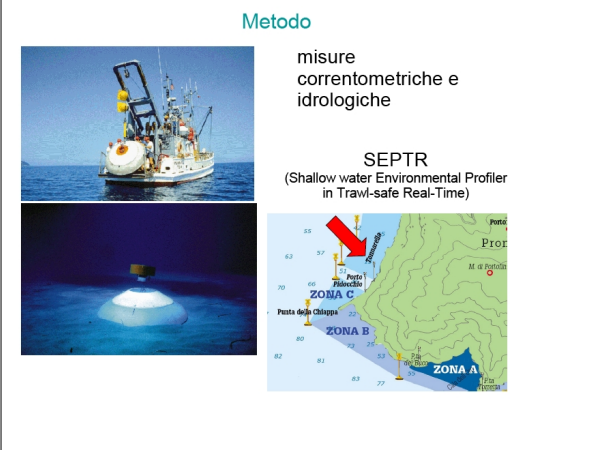
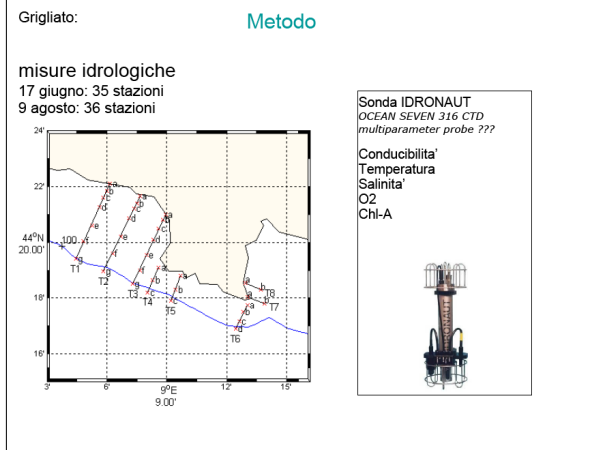


Conclusions

- in the case of *inflow steady current + narrow shelf + steep slope* the 2D models might not be appropriate;
- in 3D, the resolved bottom Ekman layer and secondary circulation could explain the leeward eddy intensification;
- with the realistic bathymetry 3D model, a good calibration is obtained varying both Re_f and Ek_v ;

Outlooks

- time varying inflow;
- real stratification;
- new data.



3.6 Exemple : tourbillons dans l'ouest du Golfe du Lion

<p>Motivations – Question ouvertes</p> <p>Les processus de (sub)mésoséchelle peuvent avoir une grande influence sur la biogéochimie (e.g. budgets de la production primaire, disponibilité nutriments)</p> <p>(Sweeney et al., 2003)</p> <p>(McGillicuddy et al., 1998)</p> <p>Études récentes intéressants en océan ouvert (e.g. Benitez-Nelson et al. 2007, McGillicuddy et al. 2007, Dickey et al 2008)</p> <table border="1"> <tr> <td>TOURBILLONS</td> <td>TYPE D'EAU</td> <td>BIOLOGICAL PUMP</td> </tr> <tr> <td>Cyclones</td> <td>oligotrophique</td> <td>sousestimation</td> </tr> <tr> <td>Anticyclones</td> <td>eutrophique</td> <td>suresstimation</td> </tr> </table>	TOURBILLONS	TYPE D'EAU	BIOLOGICAL PUMP	Cyclones	oligotrophique	sousestimation	Anticyclones	eutrophique	suresstimation	<p>Motivations – Question ouvertes</p> <p><i>En plus, peu est connu en eaux côtières</i></p> <p>Comment se forment ces tourbillons? Quel est leur dynamique?</p> <p>Y a-t-il des circulations secondaires? Avec des fortes vitesses secondaires? Quel est leur rôle dans la dispersion?</p> <p>Facilitent-ils le transfert horizontal de matière au travers du plateau et de la pente continentale? Peuvent-ils piéger des larves?</p> <p>Nof, 1999</p> <p>Hernandez Garcia d'Ovidio</p>
TOURBILLONS	TYPE D'EAU	BIOLOGICAL PUMP								
Cyclones	oligotrophique	sousestimation								
Anticyclones	eutrophique	suresstimation								
<p>Study zone: Gulf of Lion (GoL)</p> <p>Forcings:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1- Rhone plume 2- Winds : Tramontane, Mistral. 3- Northern Current (NC) 	<p>Zone d'étude : Golfe du Lion</p> <p>Le Courant Nord est partie intégrante de la circulation générale de la Méditerranée</p> <p>Millot and Taupier-Letage, 2005</p> <ul style="list-style-type: none"> — principale/permanente — secondaire/re circulation ••••• tourbillons et méandres (instabilités du courant) ++ front Nord-Est-Sud • zone de convection hivernale ••••• tourbillon induit par le vent <p>l approximation : courant géostrophique, i.e. barrière dynamique reputation de stabilité par rapport aux courants coté sud, mais aussi comportement turbulent</p>									
<p>Zone d'étude : Golfe du Lion</p> <p>Circulation anticyclonique dans l'ouest</p> <p>Millot, 1979</p> <p>Millot, 1982</p>	<p>LATEX - LAgrangian Transport Experiment</p> <p>PIs: Anne Petrenko and Frédéric Diaz financement LEFE/IDAO&CYBER – Région PACA Pilot project 2007 – Main project 2008-11</p> <p>Objectif comprendre le rôle de la dynamique couplée physique-biogéochimie à (sub) mésoéchelle dans les échanges de matière et d'énergie entre les zones côtière et hauturière</p> <p>Méthode utilisation sélective et combinée de modélisation numérique et d'observations in situ (Lagrangian floats, SF6, ADCPs de coque, mouillages, images satellitaires, gliders, radars)</p>									
<p>LATEX - LAgrangian Transport Experiment</p> <table border="1"> <tr> <td style="text-align: center;">MODÉLISATION</td> <td style="text-align: center;">EXPÉRIMENTAL</td> </tr> <tr> <td> <p>Hydrodynamique (Symphonie) with C.Estoumel et P.Marsaleix [POC, Toulouse]</p> <p>Analyse en ondelettes (WATERS)</p> <p>Particules numériques (ARIANE) with B.Blanke et N.Grimas [LPO, Brest]</p> <p>Couplage Physique (Symphonie) Biogéochimie (Eco-3M)</p> </td> <td> <p>Sept 2007 - Tests de communication et mesure de concentration ambiante du traceur</p> <p>Sept 2008 – Identification d'un tourbillon</p> <p>Sept 2009 – Mouillages & Identification d'un tourbillon</p> <p>Oct 2009 – Test du dispositif SF6</p> <p>Sept 2010 – campagne avec Suroit and Thélys II</p> </td> </tr> </table>	MODÉLISATION	EXPÉRIMENTAL	<p>Hydrodynamique (Symphonie) with C.Estoumel et P.Marsaleix [POC, Toulouse]</p> <p>Analyse en ondelettes (WATERS)</p> <p>Particules numériques (ARIANE) with B.Blanke et N.Grimas [LPO, Brest]</p> <p>Couplage Physique (Symphonie) Biogéochimie (Eco-3M)</p>	<p>Sept 2007 - Tests de communication et mesure de concentration ambiante du traceur</p> <p>Sept 2008 – Identification d'un tourbillon</p> <p>Sept 2009 – Mouillages & Identification d'un tourbillon</p> <p>Oct 2009 – Test du dispositif SF6</p> <p>Sept 2010 – campagne avec Suroit and Thélys II</p>	<p>MODÉLISATION – étude de sensibilité</p> <p>Modèle aux équations primitives Symphonie</p> <p>modeled velocity intensity (July 25, 2001) at 20 m boxes: model domains</p> <p>Emboîtement 1-km resolution One – Way Nesting</p> <p>Coefficient d'atténuation introduit dans le schéma d'advection-diffusion</p> <p>[Hu et al., 2009]</p>					
MODÉLISATION	EXPÉRIMENTAL									
<p>Hydrodynamique (Symphonie) with C.Estoumel et P.Marsaleix [POC, Toulouse]</p> <p>Analyse en ondelettes (WATERS)</p> <p>Particules numériques (ARIANE) with B.Blanke et N.Grimas [LPO, Brest]</p> <p>Couplage Physique (Symphonie) Biogéochimie (Eco-3M)</p>	<p>Sept 2007 - Tests de communication et mesure de concentration ambiante du traceur</p> <p>Sept 2008 – Identification d'un tourbillon</p> <p>Sept 2009 – Mouillages & Identification d'un tourbillon</p> <p>Oct 2009 – Test du dispositif SF6</p> <p>Sept 2010 – campagne avec Suroit and Thélys II</p>									

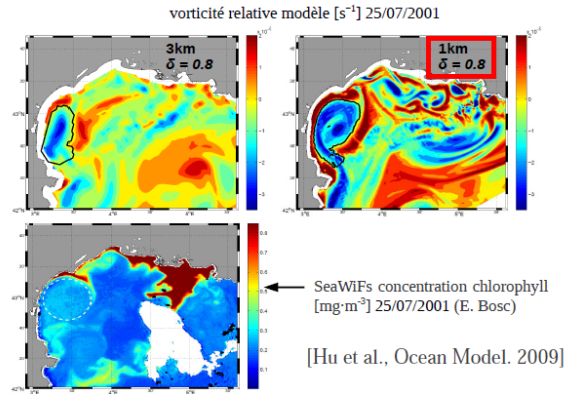
I-2. Sensitivity study

Advection – Diffusion Scheme in Symphonie (upwind + Leapfrog time-stepping):

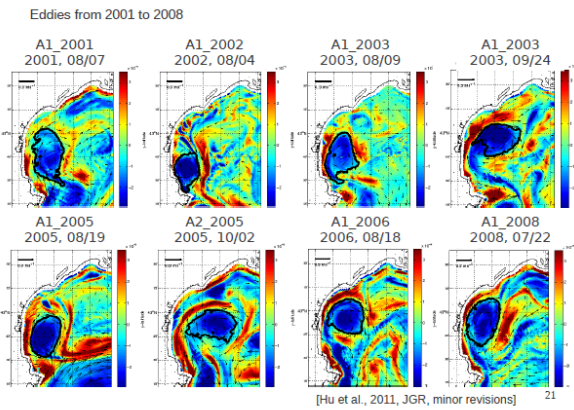
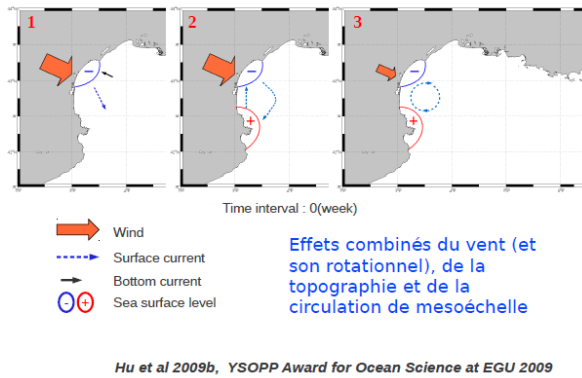
$$\frac{\phi_i^{t+\Delta t} - \phi_i^{t-\Delta t}}{2\Delta t} = \underbrace{-\frac{u_{i+1/2} \phi_i^t + \phi_{i+1}^t}{\Delta x} + \frac{u_{i-1/2} \phi_i^t + \phi_{i-1}^t}{\Delta x}}_{\text{Advection}} + \underbrace{\frac{A_{i+1/2}(\phi_{i+1}^{t-\Delta t} - \phi_i^{t-\Delta t})}{\Delta x} - \frac{A_{i-1/2}(\phi_i^{t-\Delta t} - \phi_{i-1}^{t-\Delta t})}{\Delta x}}_{\text{Numerical diffusion}}$$

Viscosity Coefficient: $A = |u| \frac{\Delta x}{2} \rightarrow \bar{A} = \delta \cdot |u| \frac{\Delta x}{2}$
 $\delta \in [0,1]$
 $\delta = 0$ No dissipation effect
 $\delta = 1$ Dissipation totally taken into account

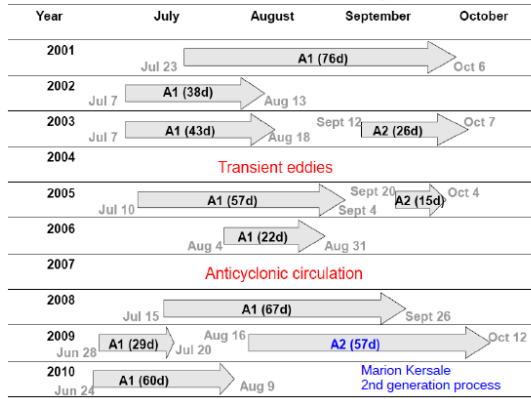
MODÉLISATION – étude de sensibilité



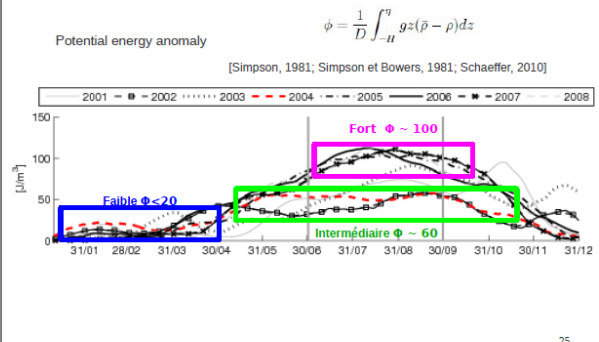
MODÉLISATION – hyp. génération du tourbillon



Presence of eddies (>15 days)



Influence of stratification on the eddy



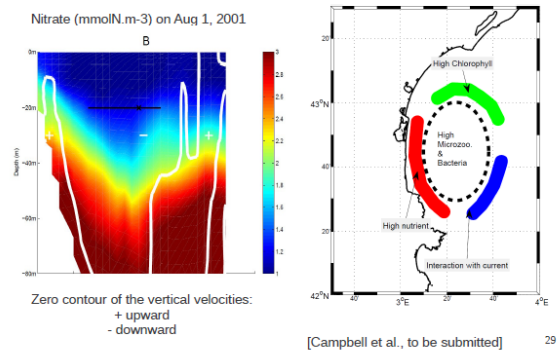
Generation process

2 conditions are necessary to generate a long-life eddy:
 - strong North-West wind (Tramontane)
 - strong stratification

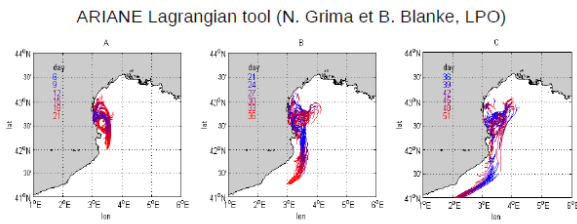
Wind	weak	strong	strong	strong	strong & persistent	strong & persistent
Stratif.	strong weak	no	intermediate	strong	intermediate	strong
Eddy	no	no	transient	long-life	long-life	anticyclonic circulation
	winter spring		early summer, end of fall, summer 2004	summers: 2001, 2003, 2005, 2006, 2008	summer 2002	summer 2007

[Hu et al., 2011, JGR, minor revisions]

Coupled Physical (Symphonie) - Biogeochemical (Eco3M) Modeling

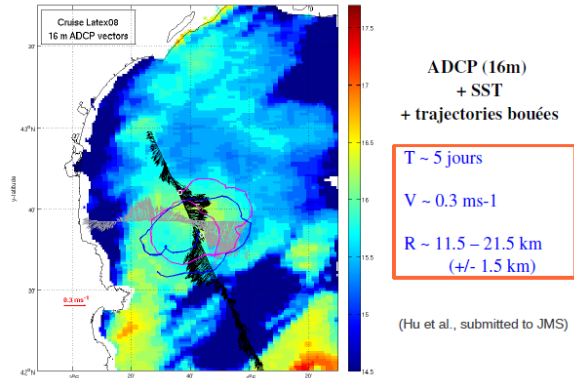


MODÉLISATION – échanges (résultats préliminaires)

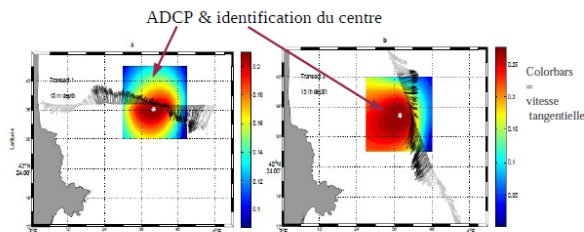


170 particules lancées le 11/08/2001 dans un transect de A1 eddy (toute la colonne d'eau) et intégrées pour 51 jours

EXPERIMENTAL - Latex08, 1-6 Septembre 2008



EXPERIMENTAL - Latex08, 1-6 Septembre 2008

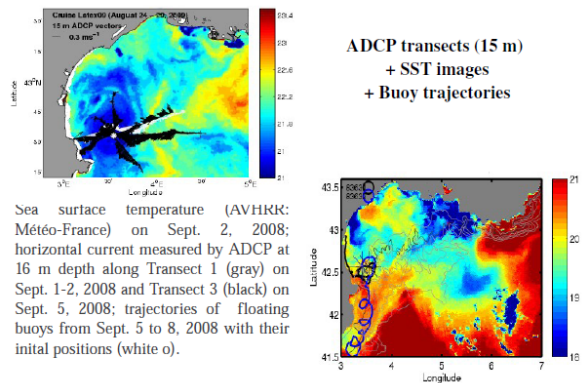


collaboration avec F. Nencioli, UCSB

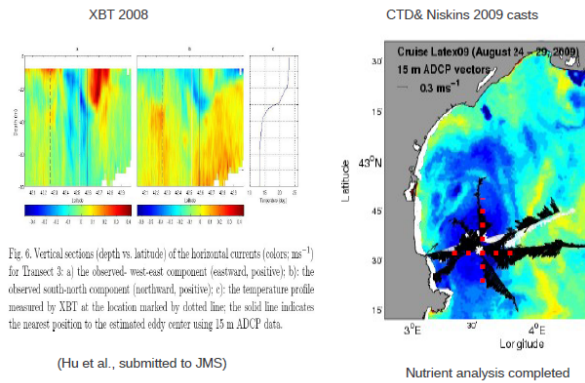
Center moved ~ 4 km in 5 days - Drift velocity 1.4 cm/s

Hu et al., submitted to JMS

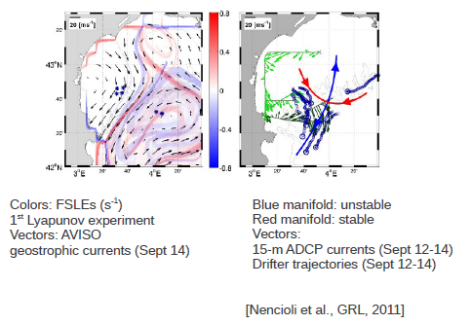
EXPERIMENTAL - Latex09, 24-29 Août 2009



EXPERIMENTAL - Latex08 & Latex09



**Latex10 (September 2010)
Example of Lyapunov exponents real-time experiments**



Conclusions

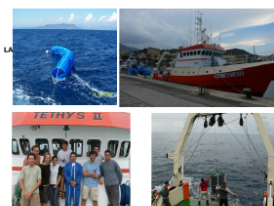
- Physical model: 10 years of realistic simulations 2001 – 2010
- Characteristics of the eddies
- Eddy-induced coastal plankton community changes
- Generation process of the eddy : wind forcing + stratification

Perspectives


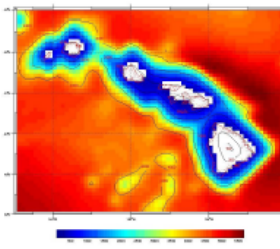
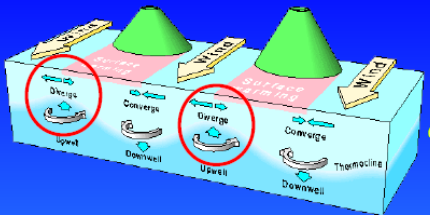
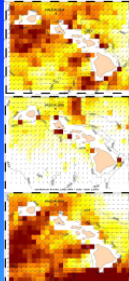
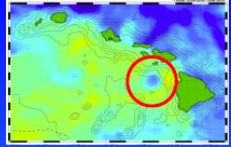
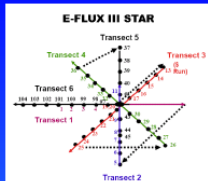
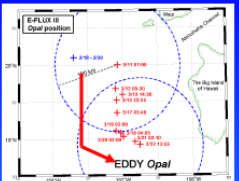
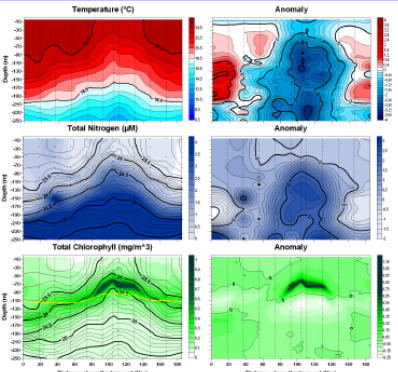
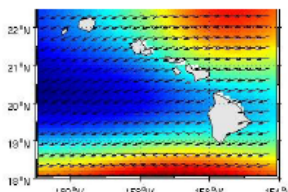
- Second generation mechanism (M. Kersale, PhD)
- Quantification of the coast-offshore exchanges; 2 cases :
 - 1) when the eddy is present : eddy-retention on the coastal shelf ? eddy interaction with the NC ?
 - 2) when there is no eddy : corridors as potential exit pathways ? (Latex10 case)
- Estimation of *in situ* eddy diffusivity (tracers and SCAMP)

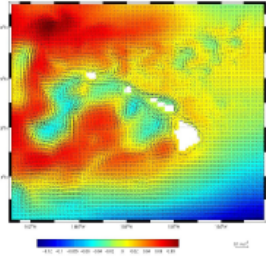
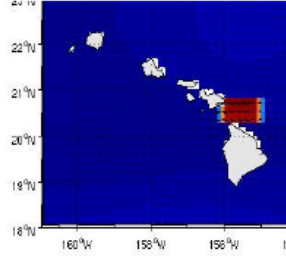
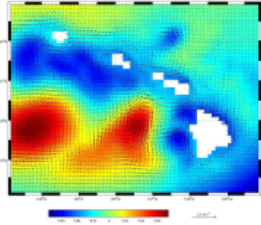
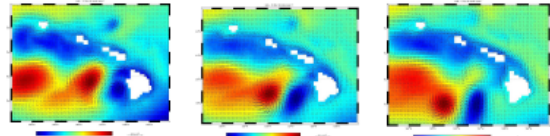
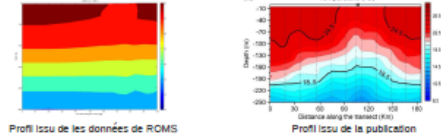
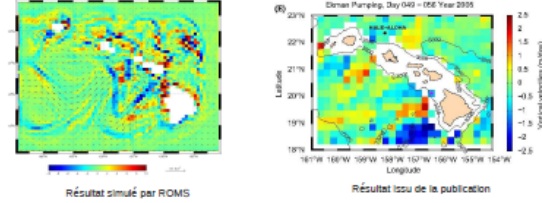
LATEX web site

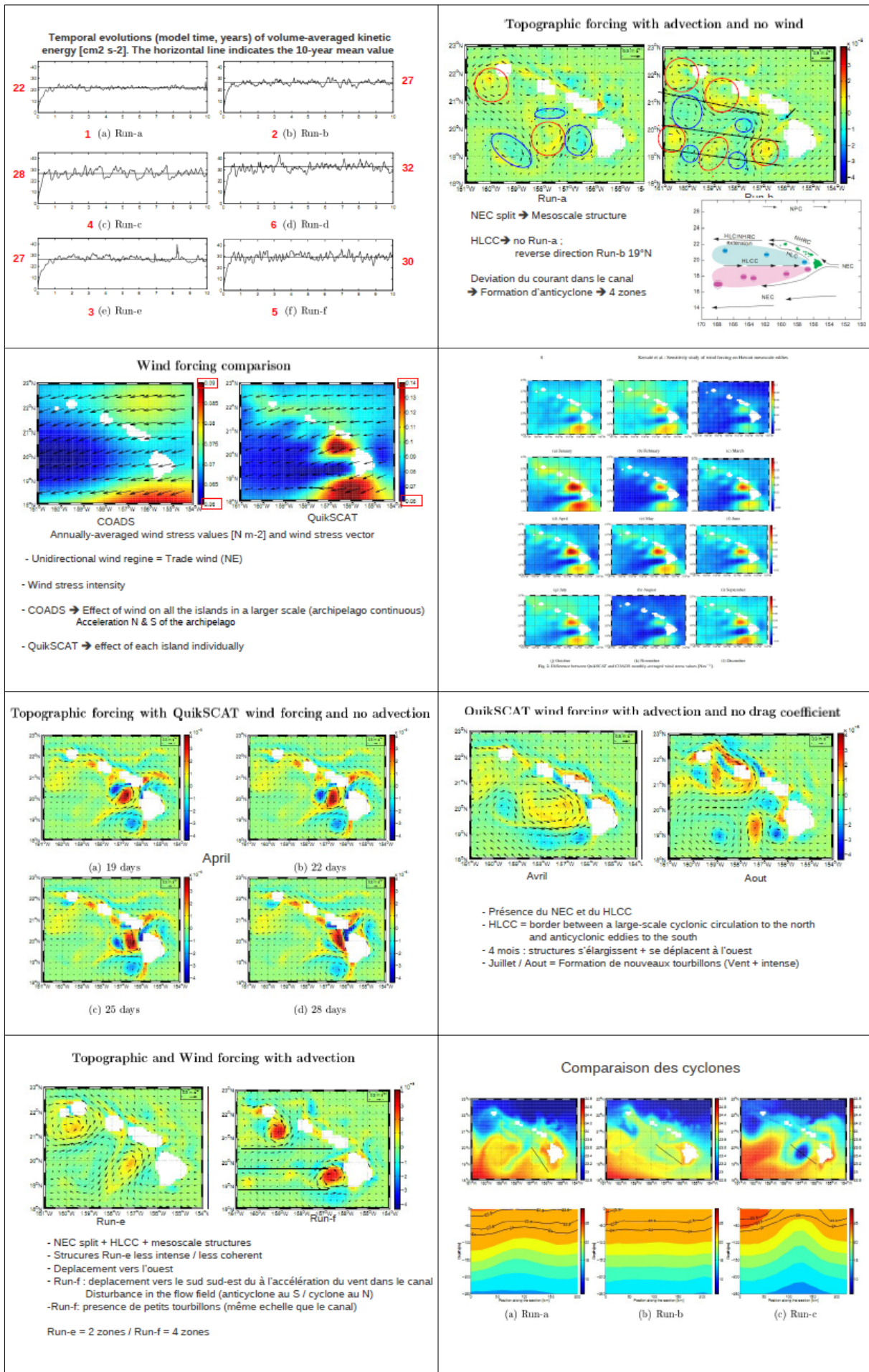
<http://www.com.univ-mrs.fr/LOPB/LATEX>

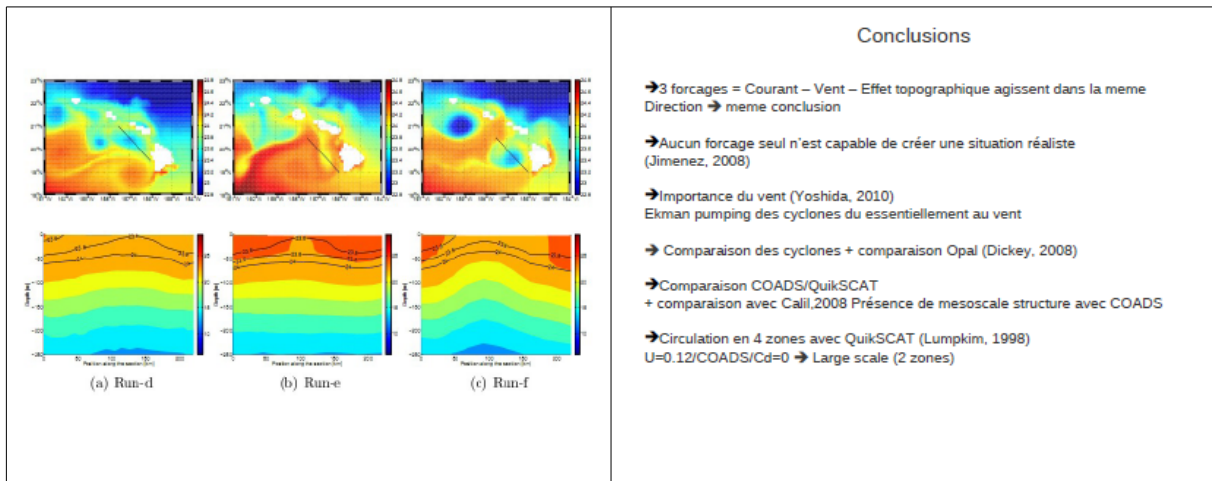


3.7 Exemple : circulation autour des îles Hawaii

<p>Introduction Modèle ROMS Résultats Conclusion</p> <p>→ Caractéristiques de la zone d'étude</p>  <ul style="list-style-type: none"> • Longitude : 154°40' - 162°W • Latitude : 16°55' - 23°N • Plus longue chaîne d'île au monde (2451 km de long) • Topographie élevée • Climat de type tropical 	<p>Introduction Modèle ROMS Résultats Conclusion</p> <p>→ Implémentation du modèle</p>  <ul style="list-style-type: none"> • Construction de la grille : Lonmin=154°W - Lonmax=161°W Latmin=18°N - Latmax=23°N Frontières ouvertes : Nord, Sud, Est, Ouest Résolution : dl=1/10° Script <code>make_grid.m</code> → Figure de la bathymétrie + paramètres de la grille L=70, M=54, N=32 • Mise en place des forçages et des conditions initiales : Script <code>make_forcing.m</code> et <code>make_clim.m</code> • Calcul du pas de temps interne et externe Script <code>ad_cfl.m</code> → $\Delta t_i=720s$, $\Delta t_e=12s$
<p>E-Flux Eddy formation in the lee of Hawaii</p>  <p>(Chevonne et al., 2002)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Trade winds accelerate between islands • Different Ekman transport between channels and island wakes • Result in alternating divergences/convergences and up/downwelling • Spin up of cyclonic and anti-cyclonic eddies • Cyclonic eddies are biologically productive 	<p>E-Flux The E-Flux Project</p> <p>Objective of the project was to study the physical and biogeochemical interactions within cyclonic eddies in the lee of Hawaii Islands.</p> <p>Three field experiments:</p> <ul style="list-style-type: none"> • E-Flux I (November 4-22, 2004): Cyclone Noah • E-Flux II (January 10-28, 2005): no eddies • E-Flux III (March 10-28, 2005): Cyclone Opal 
<p>Cyclone Opal E-Flux III: Cyclone Opal</p>  <p>Cold core of Opal appeared in GOESS SST in the second week of February</p> <p>(Courtesy of Carrie Leonard)</p> <p>Sampling strategy:</p> <p>Collected Data: CTD, ADCP, Optical Properties, Biogeochemical Variables and Microscopy from water samples</p> <p>Three week field experiment:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Week 1 (Mar. 10 to 15): 6 Transects across the center of Opal • Week 2 (Mar. 16 to 22): Time series at the center of Opal (IN-stations) • Week 3 (Mar. 24 to 27): Time series outside Opal (OUT-stations) 	<p>Cyclone Opal First week: 6 Transects</p>  <p>Planned spatial arrangement</p> <p>~160 Km North to South migration</p>  <p>6 transect had to be rearranged to follow Opal's migration</p> <p>Focus on transect 3 (red):</p> <ul style="list-style-type: none"> • closest to the center • Water samples
<p>Cyclone Opal CTD and Biogeochemical variables: Transect 3</p>  <ul style="list-style-type: none"> • Intense doming • ~80 km radius • Deep feature • Nutrients upwelled into the euphotic zone • Shoaling and intensification of the DCML • Diatom bloom!! 	<p>Introduction Modèle ROMS Résultats Conclusion</p> <ul style="list-style-type: none"> • Simulations effectuées 1- Implémentation du modèle décrite précédemment Données de forçage du modèle : COADS Analyse des vecteurs et vitesse du vent au mois de Mars  <p>Aucune amplification du vent à la sortie du canal d'Alenuihaha</p>

Introduction	Modèle ROMS	Résultats	Conclusion																												
<p>2- Domaine de simulation plus grand</p> <p>Analyse des vecteurs et vitesse du vent → Aucune amplification</p>		 <p>Analyse des vecteurs du courant et du champ d'élévation le 8 Mars → Circulation océanique régionale (Lumpkin,1998)</p>																													
		<p>3- Modification du script <code>make_forcing.m</code> → impose une augmentation du vent dans le canal d'Alenuihaha</p> 																													
<p>Visualisation du résultat</p>  <p>Analyse du champ d'élévation en surface le 14 Mars → Formation du tourbillon cyclonique OPAL</p>		<p>• Comparaison avec des résultats issues de la publication de Dickey & al. (2008)</p> <p>➢ Comparaison de la trajectoire du cyclone</p>  <p>Champ d'élévation le 17/03/07, le 29/03/07, le 08/04/07</p> <p>Déplacement vers le Sud ensuite vers l'ouest</p> <p>Dans la publication : Déplacement du cyclone OPAL vers le sud et ensuite vers l'est.</p> <p>➔ Propagation des tourbillons problématique</p>																													
<p>➢ Comparaison d'un profil vertical en fonction de la température</p>  <p>Profil issu de les données de ROMS</p> <p>Profil issu de la publication</p> <p>Différence : Remontée des isothermes</p> <p>Similitude : 'Outcropping' d'une isotherme</p>		<p>➢ Comparaison de la composante verticale de la vitesse du courant</p>  <p>Résultat simulé par ROMS</p> <p>Résultat issu de la publication</p> <p>Zones d'upwelling → $w = +2,5$ m/jour</p> <p>Zone de downwelling → $w = -2,5$ m/j</p>																													
<p>IV- PREMIÈRE CONCLUSION</p> <ul style="list-style-type: none"> • Ile d'Hawaïi → Rôle important dans la circulation océanique et atmosphérique → Formation de tourbillons cycloniques et anticycloniques • Tourbillon + Alycée Nord → Variations locales de la température et de la salinité des eaux • Les structures du vent à méso-échelle doivent être inclus dans le forçage des modèles océaniques • Résultats difficiles à généraliser → Perturbations locales des flux dues à la présence de ces îles • Mêmes perturbations observées aux îles Canaries et aux îles du Cap-Vert 		<p>Différentes simulations</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Run</th> <th>Wind forcing</th> <th>Advection (m s-1)</th> <th>Topographic forcing</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>a</td> <td>∅</td> <td>0.12</td> <td>oui</td> </tr> <tr> <td>b</td> <td>∅</td> <td>0.24</td> <td>oui</td> </tr> <tr> <td>c</td> <td>QuikSCAT</td> <td>∅</td> <td>oui</td> </tr> <tr> <td>d</td> <td>QuikSCAT</td> <td>0.12</td> <td>Cd=0</td> </tr> <tr> <td>e</td> <td>COADS</td> <td>0.12</td> <td>oui</td> </tr> <tr> <td>f</td> <td>QuikSCAT</td> <td>0.12</td> <td>oui</td> </tr> </tbody> </table>	Run	Wind forcing	Advection (m s-1)	Topographic forcing	a	∅	0.12	oui	b	∅	0.24	oui	c	QuikSCAT	∅	oui	d	QuikSCAT	0.12	Cd=0	e	COADS	0.12	oui	f	QuikSCAT	0.12	oui	
Run	Wind forcing	Advection (m s-1)	Topographic forcing																												
a	∅	0.12	oui																												
b	∅	0.24	oui																												
c	QuikSCAT	∅	oui																												
d	QuikSCAT	0.12	Cd=0																												
e	COADS	0.12	oui																												
f	QuikSCAT	0.12	oui																												





Conclusions

- 3 forcages = Courant – Vent – Effet topographique agissent dans la meme Direction → meme conclusion
- Aucun forçage seul n'est capable de créer une situation réaliste (Jimenez, 2008)
- Importance du vent (Yoshida, 2010)
Ekman pumping des cyclones du essentiellement au vent
- Comparaison des cyclones + comparaison Opal (Dickey, 2008)
- Comparaison COADS/QuikSCAT
+ comparaison avec Calif,2008 Présence de mesoscale structure avec COADS
- Circulation en 4 zones avec QuikSCAT (Lumpkin, 1998)
 $U=0.12/COADS/Cd=0$ → Large scale (2 zones)

Ajouter ici qqe slides sur Marquises

4. Tourbillons isolés

Définition (Carton, 2005)

Des mouvements de recirculation peuvent être identifiés pratiquement à toute échelle dans l'océan, dès grand gyres océaniques ($L=O(5000\text{km})$) à la turbulence de petite échelle ($L=O(1\text{km})$). Entre ces deux extrémités les tourbillons de mesoéchelle ($L=O(100\text{km})$) sont des structures particulièrement intéressantes : bien que présents sous différentes formes et produits par différents mécanismes, ils sont tous énergétiques et vivent longtemps. Souvent ils peuvent alors parcourir des grandes distances et jouer un rôle très important dans la dynamique océanique. Pour cette raison ils sont très étudiés.

Les tourbillons océaniques cohérents ont une longue durée de vie, un écoulement intense et fermé, bloqué sur le plan horizontal par la rotation planétaire et la stratification. Souvent ils ont une forme presque circulaire et des rayons de 20 à 200 km et une vorticité relative qui rejoint une fraction considérable de la vorticité planétaire.

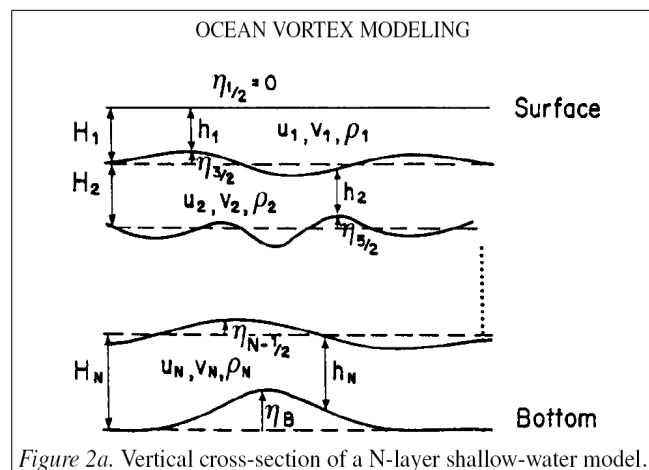
Les temps caractéristiques de recirculation au rayon de vitesse maximale sont de quelques jours. Au-delà de ce rayon la vitesse tangentielle décroît rapidement en fonction de la distance du centre. En générale ils sont isolés. Sauf que dans les zones de formation, ils sont distants les uns des autres et ils n'interagissent pas entre eux pour de longues périodes de temps, mais quand il y a une interaction, elle peut avoir un effet destructif. Ils peuvent disparaître rapidement aussi à cause d'interactions avec des forts courants ou quand ils rencontrent des forts gradients de topographie, ou bien être peu à peu détruits par la dispersion, la dissipation ou les échanges thermiques avec l'atmosphère.

Les tourbillons océaniques peuvent piéger à l'intérieur de leur noyau des masses d'eau caractéristiques pour de longues périodes. En effet ils sont souvent le produit final de processus d'instabilité locale et ils piègent les masses d'eau de leur région d'origine. Cette eau est ensuite transportée par les tourbillons à travers l'océan sans qu'elle se mélange avec l'eau ambiante sinon un peu à la périphérie du tourbillon.

Dans les régions de formation des tourbillons des fins filaments ou des mouvements convectifs à petite échelle (dans le cas d'instabilités statiques) peuvent aussi apparaître et participer aux transferts d'énergie et aux processus de mélange locaux. Les tourbillons peuvent aussi contribuer à la thermodynamique locale, en favorisant la propagation d'ondes inertielles et la pénétration des flux atmosphériques ou la subduction des eaux de la couche de mélange au-dessous des fronts de grande échelle.

6.1 Équations de la dynamique des tourbillons isolés

L'océan peut être idéalisé comme une succession de couches homogènes (modèle isopycne). En générale l'épaisseur de chaque couche varie entre quelques dizaines de mètres et 1-2 centaines de mètres, tandis que l'échelle des mouvements horizontaux à mesoéchelle est entre quelques dizaines et quelques centaines de kilomètres. Ce petit rapport d'échelle nous permet de adopter pour ces phénomènes l'approximation de Boussinesq, l'approximation hydrostatique et les équations en eaux profondes.



$$\begin{aligned}
\frac{Du_j}{Dt} - f v_j &= \partial_t u_j + u_j \partial_x u_j + v_j \partial_y u_j - f v_j = \frac{-1}{\rho_j} \partial_x p_j + F_{xj}, \\
\frac{Dv_j}{Dt} + f u_j &= \partial_t v_j + u_j \partial_x v_j + v_j \partial_y v_j + f u_j = \frac{-1}{\rho_j} \partial_y p_j + F_{yj}, \\
\frac{Dh_j}{Dt} + h_j \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_j &= \partial_t h_j + u_j \partial_x h_j + v_j \partial_y h_j + h_j (\partial_x u_j + \partial_y v_j) = 0 \quad (1)
\end{aligned}$$

où $u_j, v_j, p_j, h_j, \rho_j, F_j$, représentent respectivement les composantes de la vitesse horizontale, la pression, l'épaisseur de la couche, la masse volumique et les forces de volumes dans la couche j (avec j qui varie entre 1 à la surface et N au fond) .

f est le paramètre de Coriolis en approximation de plan β , $f = f_o + \beta y$.

L'épaisseur locale est $h_j = H_j + \eta_{j-1/2} - \eta_{j+1/2}$ avec H_j épaisseur de la couche à repos et $\eta_{j+1/2}$ l'interface entre la couche j et la couche $j+1$ due au mouvement locale . Aux limites verticales, une approximation souvent adoptée est aussi celle de toit rigide à la surface ($\eta_{1/2} = 0$) tandis que la topographie du fond est décrite par $\eta_{N+1/2} = \eta_B(x, y)$.

Enfin le bilan hydrostatique est

$$p_j = p_{j-1} + g(\rho_j - \rho_{j-1})\eta_{j-1/2}.$$

Les tourbillons océaniques peuvent être considérés comme circulaires et on peut alors récrire les équations de la dynamique (sans mettre de index j) en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}
\frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\theta^2}{r} - f v_\theta &= \partial_t v_r + v_r \partial_r v_r + \frac{v_\theta}{r} \partial_\theta v_r - \frac{v_\theta^2}{r} - f v_\theta = \frac{-1}{\rho} \partial_r p + F_r, \\
\frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} + f v_r &= \partial_t v_\theta + v_r \partial_r v_\theta + \frac{v_\theta}{r} \partial_\theta v_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r} + f v_r = \frac{-1}{\rho r} \partial_\theta p + F_\theta, \\
\frac{Dh}{Dt} + h \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= \partial_t h + v_r \partial_r h + \frac{v_\theta}{r} \partial_\theta h + \frac{h}{r} (\partial_r (r v_r) + \partial_\theta v_\theta) = 0, \quad (2)
\end{aligned}$$

En absence de forçage et de dissipation ($F = 0$), un tourbillon circulaire est une solution invariante de ces équations dans le plan f ($\beta = 0$) . En effet, si $\partial_t = 0, v_r = 0, \partial_\theta = 0$ les deux dernières équations disparaissent et la première équation se réduit à

$$-\frac{v_\theta^2}{r} - f_0 v_\theta = \frac{-1}{\rho} \frac{dp}{dr}. \quad (3)$$

Cette équation est dite bilan cyclo-géostrophique (ou *gradient wind balance*, Cushman-Roisin, 1994) .

Il s'agit du bilan entre la force centrifuge créée par la rotation du tourbillon, la force de Coriolis et le gradient radiale de pression . Quand la force centrifuge est négligeable (i.e. il n'y a pas une forte rotation) le bilan est simplement le bilan géostrophique .

Principe fonctionnement altimétrie satellite-derived

ajouter ici slides jerome

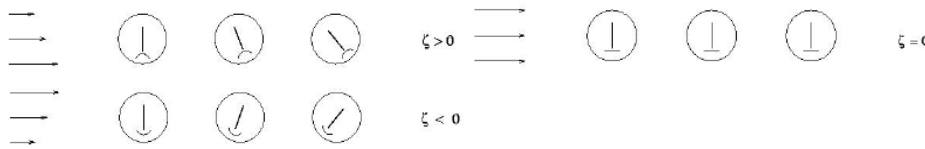
4.2 Vorticité

La vorticité relative

Elle est définie comme la composante verticale du rotationnel de la vitesse

$$\zeta = \vec{k}(\nabla \times \vec{V}) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

La vorticité relative exprime la tendance d'un fluide à tourner. Le signe de ζ peut être illustré avec le schéma suivant :



Elle est appelée vorticité relative, car elle est mesurée par rapport à la terre.

La vorticité planétaire

Pour un solide en rotation la vorticité est égale à deux fois sa vitesse angulaire. A la latitude Φ la vitesse angulaire par rapport à l'axe verticale en ce point est $\Omega \sin \Phi$, la vorticité est donc

$$2 \Omega \sin \Phi = f$$

Une colonne d'eau à repos sur la terre en rotation possédera donc une vorticité dite « planétaire » f . La vorticité planétaire correspond au paramètre de Coriolis en approximation dite de « mouvements quasi-horizontaux » (voir TD4).

La vorticité absolue

On prend les équations de la quantité de mouvement pour les composantes horizontales, qui on considère ne varient pas sur la verticale. On néglige aussi la viscosité et le frottement (on se positionne donc hors des couches d'Ekman et des couches limites de bords Ouest) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}\end{aligned}$$

Différentiation croisée et soustraction $\partial_x(2) - \partial_y(1)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial f}{\partial y} v - f \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} u + f \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}\end{aligned}$$

conduisent à une seule équation (en se rappelant que $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y}$)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{df}{dt} + f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

qui peut être re-écrite

$$\frac{\partial}{\partial t} \zeta + \frac{\partial u}{\partial x} \zeta + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \zeta + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{df}{dt} + f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

en regroupant les termes 1, 3 et 5, qui représentent la dérivée totale de la vorticité relative et aussi les termes 2 et 4

$$\frac{d\zeta}{dt} + \zeta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{df}{dt} + f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

et finalement

$$\frac{d(\zeta + f)}{dt} + (\zeta + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

Cette équation exprime le principe de la conservation de la vorticité absolue $\zeta_{abs} = (\zeta + f)$ pour les écoulements sur terre lorsque le frottement est négligé : le module de la vorticité absolue s'accroît dans un écoulement convergent ($\nabla_H \vec{u} < 0$) et décroît dans un écoulement divergent ($\nabla_H \vec{u} > 0$).

La vorticité potentielle

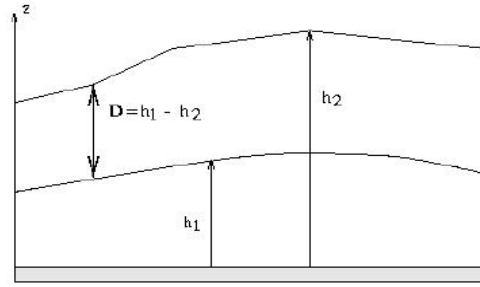
Soit une couche d'épaisseur D dans laquelle la densité est supposée homogène.

L'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

on peut écrire que :

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\left(\frac{dh_1}{dt} - \frac{dh_2}{dt} \right)}{(h_1 - h_2)} = \frac{1}{D} \frac{dD}{dt}$$



en remplaçant dans l'équation de continuité

$$\frac{1}{D} \frac{dD}{dt} = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

On peut alors remplacer la divergence horizontale dans l'équation de conservation de la vorticité absolue et obtenir

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\zeta + f}{D} \right) = 0$$

NB : On a utilisé la règle de la dérivé de la division:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\zeta_a}{D} \right) = 0 \rightarrow \left(\frac{d\zeta_a}{dt} D - \zeta_a \frac{dD}{dt} \right) \frac{1}{D^2} = 0 \rightarrow \frac{d\zeta_a}{dt} \frac{1}{D} - \zeta_a \frac{dD}{dt} \frac{1}{D^2} = 0 \rightarrow \frac{d\zeta_a}{dt} - \zeta_a \frac{dD}{dt} \frac{1}{D} = 0$$

Si on compare les dimensions de quatre vorticité: relative, planétaire, absolue et potentielle

$$\zeta_{rel} : \left[\frac{LT^{-1}}{L} \right] = [T^{-1}] \quad \zeta_{pla} : [T^{-1}] \quad \zeta_{abs} : [T^{-1}] \quad \zeta_{pot} : \left[\frac{T^{-1}}{L} \right] = [T^{-1}L^{-1}]$$

on voit que la vorticité potentielle n'a pas le mêmes dimensions que les autres!

NB: Une formulation plus générale de la vorticité potentielle tiens compte aussi des effets de la densité, de la température, de la salinité ou autre et les dimension dépendent de la grandeur prise en considération

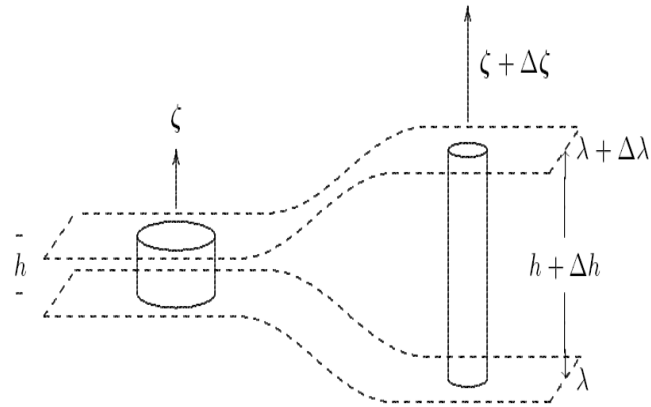
$$\frac{d}{dt} \left(\zeta_{abs} \cdot \frac{\nabla \lambda}{\rho} \right) = 0$$

Exemple : Intensification des tourbillons étirés

Si on se mets sur un plan- f

$$\left(\frac{\zeta}{D}\right) = \text{const}$$

alors une colonne d'eau qui bouge entre deux surface sur le quelles λ doit être conservée, doit se modifier pour satisfaire les lois de conservation de la masse et du moment angulaire. Plus grande sera la hauteur de la colonne, plus grande devra être la vitesse de rotation de la colonne de fluide.



Tirée de Mattioli (1995) Principi Fisici di Oceanografia e Meteorologia, Fig.48.1

$$\Delta D > 0 \rightarrow \Delta \zeta > 0$$

$$\Delta D < 0 \rightarrow \Delta \zeta < 0$$

Anomalie de la vorticité potentielle

Étant donné que la rotation d'un tourbillon est associé à un déplacement des isopycnes, une variable physique qui combine les deux quantités avec le paramètre de Coriolis est la grandeur plus appropriée pour quantifier la dynamique du tourbillon. Cette quantité est la vorticité potentielle (*potential vorticity, PV*) qui est conservé dans les modèles basés sur les équations en eaux peu profonde sans frottement.

$$\frac{d\Pi_j}{dt} = 0 \quad \Pi_j = \frac{\zeta_j + f}{h_j}$$

avec ζ_j vorticité relative et f vorticité planétaire .

En réalité, la dynamique d'un tourbillon est complètement caractérisée par la différence entre la vorticité potentielle à l'intérieur et à l'extérieur du tourbillon. En plus, la variation méridienne de la vorticité planétaire est en générale faible par rapport à la vorticité relative . On peut donc définir l'anomalie de vorticité potentielle la quantité :

$$Q_j = \Pi_j - \Pi_j^o = \frac{\zeta_j + f_o}{h_j} - \frac{f_o}{H_j} = \frac{1}{h_j} \left(\zeta_j - f_o \frac{\delta \eta_j}{H_j} \right)$$

avec $\delta \eta_j = h_j - H_j$ variation verticale des surfaces isopycnales à l'intérieur du tourbillon . Il faut se rappeler que l'anomalie de PV toute seule n'est pas conservée et que les échanges avec la vorticité planétaire peuvent avoir des conséquences importantes, comme la dérive des tourbillons (*vortex drift*)

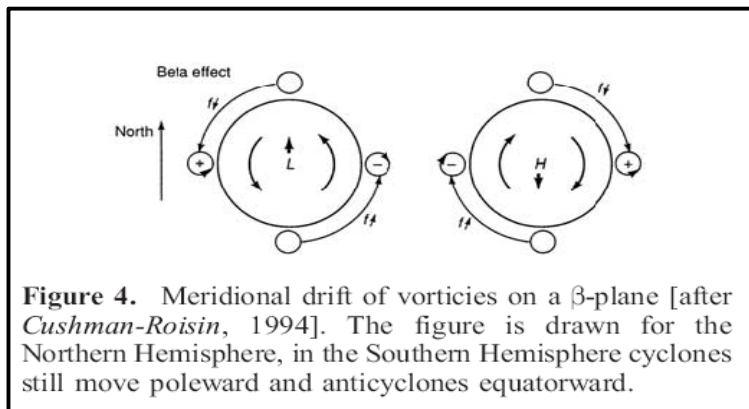
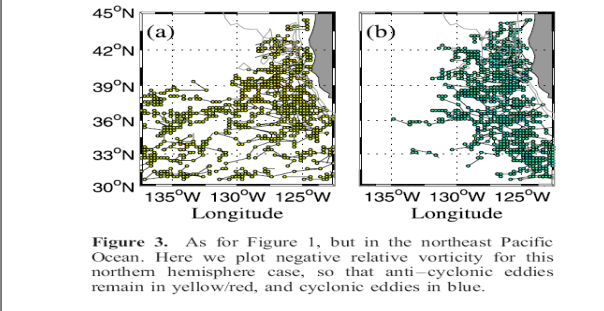
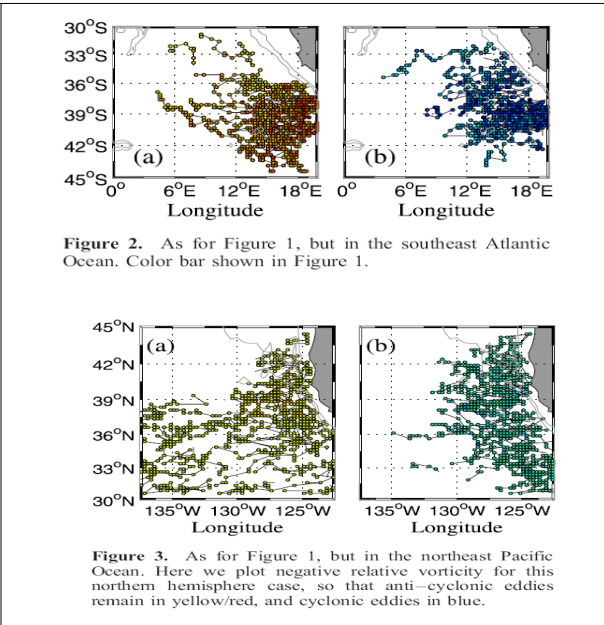
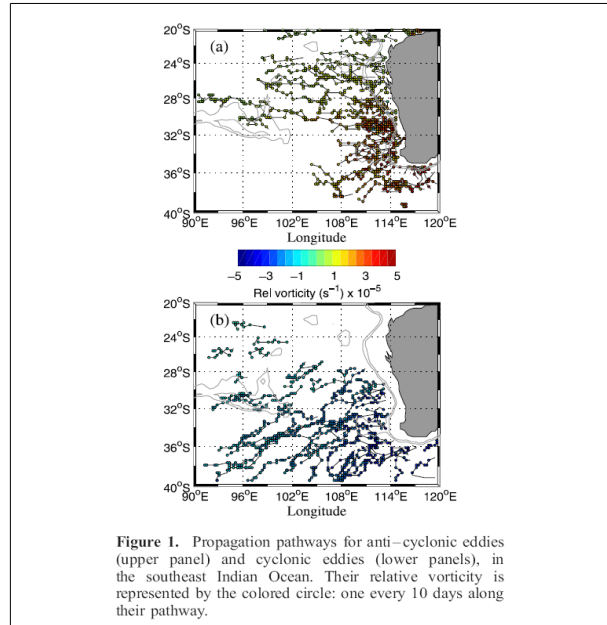


Figure 4. Meridional drift of vortices on a β -plane [after Cushman-Roisin, 1994]. The figure is drawn for the Northern Hemisphere, in the Southern Hemisphere cyclones still move poleward and anticyclones equatorward.

Morrow et al

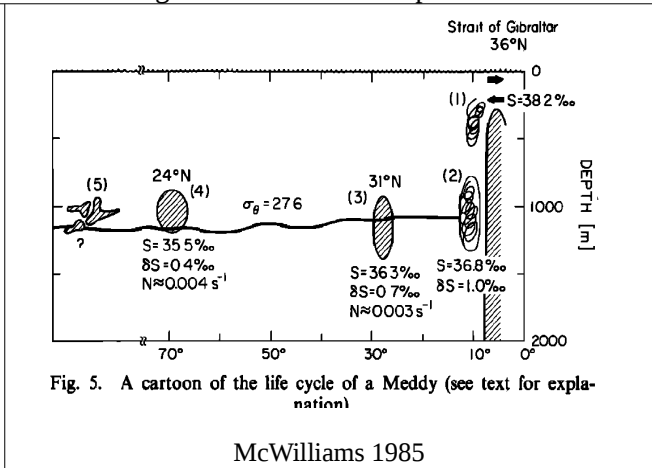


4.3 Exemple : Meddies

La découverte historique des meddies repose sur une erreur (voir l'article en ligne de McDowell et Rossby [http://www.gso.uri.edu/maritimes/Back_Issues/00%20Fall/Text%20\(htm\)/meddy.htm](http://www.gso.uri.edu/maritimes/Back_Issues/00%20Fall/Text%20(htm)/meddy.htm)). Tout d'abord, les chercheurs découvrent en 1976 un énorme tourbillon au large des Bahamas, très chaud et très salé. Ces caractéristiques hors normes les amènent à conclure que ce tourbillon a une origine méditerranéenne. Cette découverte singulière initia la recherche d'autres structures de ce type. Une étude systématique fut alors menée entre 1984 et 1986 en Atlantique Nord-Est et Nord-Ouest. On en découvrit en effet quelques uns dans l'Atlantique Est, mais aucun meddy n'avait la taille du fameux "meddy des Bahamas" et surtout aucun meddy n'avait été détecté dans le bassin ouest... Les chercheurs, honnêtes, admirent leur erreur mais cela les obligea à chercher une autre origine pour ce tourbillon de père inconnu. La solution fut trouvée bien plus tard, dans les années 90 : le meddy des Bahamas avait plutôt pour origine la Dérive Nord-Atlantique, extension du Gulf Stream, après que celui-ci ait tourné vers le nord au niveau des Grands Bancs de Terre-Neuve. De temps en temps, les eaux de ce courant se détachent en tourbillons anti-cycloniques aux coeurs chauds (10,8° observé) et salés (35,4 g/l observé). La "double ironie" dont parle les auteurs repose donc sur le fait que c'est le vrai-faux meddy des Bahamas qui a entraîné la découverte des vrais meddies mais que cette erreur mena à la découverte que la Dérive Nord-Atlantique pouvait générer des tourbillons capables de se déplacer sur une distance de 4000 km le long du continent nord-américain...

Dans son papier de 1985, McWilliams propose en effet la figure ci-dessous et l'explication suivante .

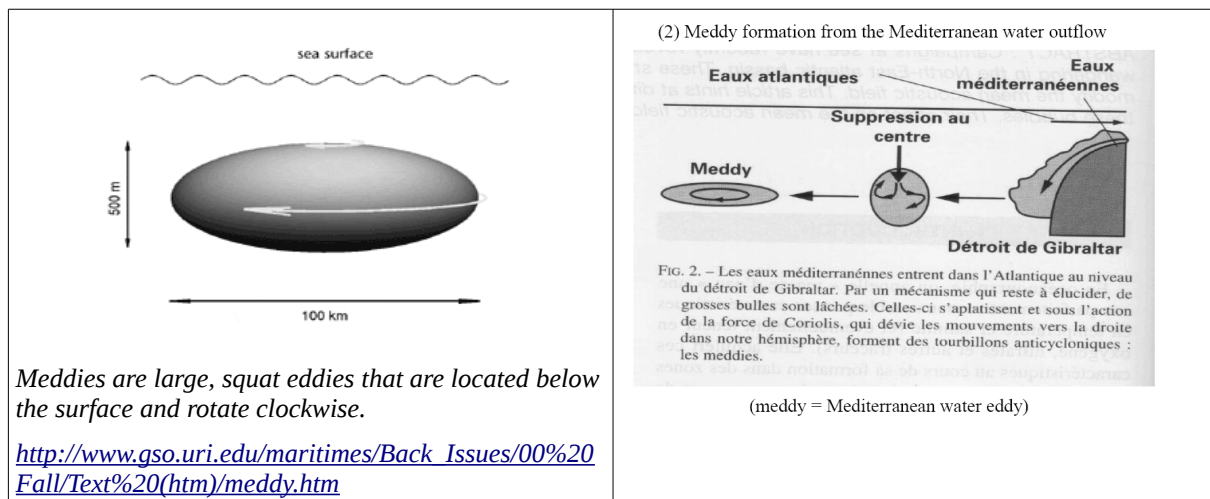
Dense, salty Mediterranean water enters the North Atlantic above 350 m depth with a salinity S of about 38.2‰ [Bryden and Stommel, 1984] and is gravitationally unstable outside the Strait of Gibraltar. Consequently, convection, entrainment, and sinking occur (process (1) in Figure 5), until a depth around 1000 m is reached where isolated, diluted Mediterranean water blobs are marginally gravitationally stable. The International Geophysical Year hydrographic section along 36°N shows its saltiest water along the eastern boundary, with $S = 34.8‰$ [Fuglister, 1960].



For lack of more complete observations, we identify this water with the end-state of the convection process; this would indicate a dilution of the outflow water with 1-2 times as much Atlantic water, depending upon the depths at which the entrainment occurs. The relatively well mixed blobs then undergo an adjustment process and acquire a geostrophic or cyclostrophical anticyclonic circulation(

process(2) in Figure 5) (see appendix, note 2). This protects the core water mass from straining and diffusion by the general circulation as the latter advects Meddies into the interior of the Atlantic, approximately along the $\sigma = 27.6$ potential density surface.

Cross sections of the locally anomalous salinity cores are shaded at processes(3) and (4) in Figure 5, where the horizontal scale has been exaggerated by a factor of 5 relative to the abscissa. These particular Meddies are depictions of the observations of Arni and Zenk [1984] for Meddy (3) and of McDowell and Rossby [1978] and McDowell r1985a-I for Meddy (4). From maps of the salinity anomalies the approximate dimensions of Meddy (3) are $L = 40$ km and $h = 300$ km, while for Meddy (4), $L = 60$ km and $h = 200$ km. Adjacent to the cross sections are values for the local maximum S , maximum salinity anomaly relative to the local environment $5S$, N for the environment at the depth of the Meddy core, and latitude. In the migration away from Gibraltar, S and $5S$ systematically decrease, consistent with weak diffusion en route. Between Meddies (3) and (4) there is also a change of core volume and shape: the volume increases by about 50% (again a sign of diffusion), and the aspect ratio h/L decreases from about 0.0075 to 0.0033. The latter might be an indication of anisotropic diffusion (horizontal dominating vertical), but it may also reflect a partial compensation for the changing N/f of the Meddy environment in such a way as to tend to preserve the B value or the SCV: N/f changes from 42 to 70, so that B only changes from 0.32 to 0.23. The lifetime of the Meddy at (4) is more than 4 years by the previous estimate of the general circulation transport rate. Destruction of a Meddy (process (5)) probably occurs when interactions with other currents fragment the core water mass



Les eaux de la Méditerranée tourbillonnent dans l'Atlantique

Tirée de http://www.mercator-ocean.fr/html/actualites/news/actu_meddies_fr.html

A Gibraltar, les eaux de la Méditerranée et de l'Atlantique se croisent. Les eaux atlantiques entrent en surface dans la Méditerranée et les eaux méditerranéennes, plus denses, sortent dans l'Atlantique par le fond du détroit en formant une veine d'eau méditerranéenne. Dans certaines conditions, cette veine donne naissance à des tourbillons qui vont ensuite se propager à travers l'Atlantique. Ce sont les meddies, ou lentilles d'eau méditerranéenne. Le modèle haute résolution de Mercator dans l'Atlantique est capable de simuler de tels événements.



Vitesse moyenne (moyennée sur 3 ans) à 870 m de profondeur, issue du modèle PAM : la présence de l'eau Méditerranéenne est marquée par des zones de vitesses plus élevées (zones sombres sur la figure) par rapport aux eaux environnantes. Les pointillés montrent les principales trajectoires des 4 principales veines d'eau méditerranéenne. Crédit : Yann Drillet et al., 2005 (cliquez pour agrandir)

Le détroit de Gibraltar (250 mètres de profondeur, 15 à 20 kilomètres de large) est le seul endroit d'échange de la Méditerranée avec l'extérieur. L'eau méditerranéenne, plus chaude, plus salée et plus dense s'écoule dans l'Atlantique au fond du détroit à un débit moyen de l'ordre de 0.57 Sv. Afin de rétablir l'équilibre, de l'eau Atlantique, plus froide et moins salée entre en surface. La Méditerranée étant un bassin d'évaporation, la quantité d'eau Méditerranéenne sortante est inférieure à la quantité d'eau Atlantique entrante. Une fois qu'elle a franchi Gibraltar, l'eau méditerranéenne plonge par effet de densité et se stabilise dans le Golfe de Cadix, entre 800 et 1000-1200 mètres, là où les profondeurs de l'océan atteignent 4000 à 5000 mètres. La branche principale tourne autour de l'Espagne, longe la côte portugaise, contourne la Corogne, entre dans le Golfe de Gascogne où elle longe le talus continental et continue son chemin jusqu'au large de l'Irlande, vers les 50°N.

Une autre branche part directement vers l'ouest en quittant la côte espagnole au large du Cap St-Vincent, à 36°N de latitude, pour atteindre les 25° ouest. La vitesse de l'eau méditerranéenne au fond du détroit de Gibraltar est de l'ordre de 15 cm/s. Entre le seuil et 700m de profondeur, dans une zone centrée sur 6,5°W et 36°N, cette vitesse peut atteindre des maxima de 1 m/s. L'écoulement se stabilise ensuite en aval du Cap St-Vincent vers 1000 m de profondeur avec des vitesses de l'ordre de 15 cm/s. La salinité est également déterminante pour identifier l'eau méditerranéenne. On définit le noyau de forte salinité avec des salinités supérieures à 35,8 g/kg.

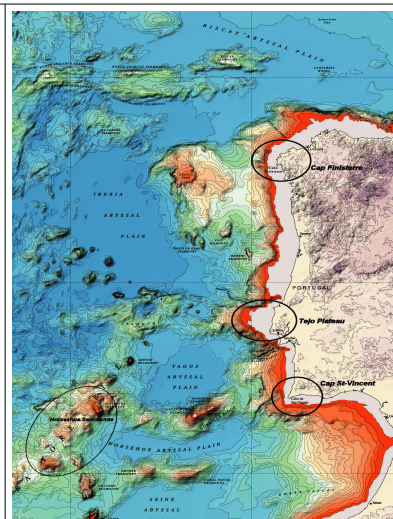
Les lentilles d'eau méditerranéenne (ou Mediterranean eddies ou meddies) sont des tourbillons (généralement anticycloniques, c'est-à-dire tournant dans le sens des aiguilles d'une montre), chauds et salés générés à partir des instabilités que subit l'eau méditerranéenne en provenance de Gibraltar, lors de sa rencontre avec des accidents topographiques (passage du Cap St Vincent, à l'extrémité sud-ouest de l'Espagne), du Tejo Plateau, au large de Lisbonne, et du Cap Finisterre à la pointe nord-ouest de l'Espagne).

Leur période de rotation (temps pour faire un tour complet) peut varier de 3 jours à 24 jours, avec une moyenne de 8 jours et leur vitesse de déplacement est de l'ordre de 2 cm/s. On estime qu'environ 70% entrent en collision avec les monts sous-marins Horseshoe (dans l'ouest-sud-ouest du Cap St-Vincent) en se désintégrant ou en s'affaiblissant fortement. Les 30% restant contournent les Seamounts par le nord et parviennent dans le Bassin des Canaries.

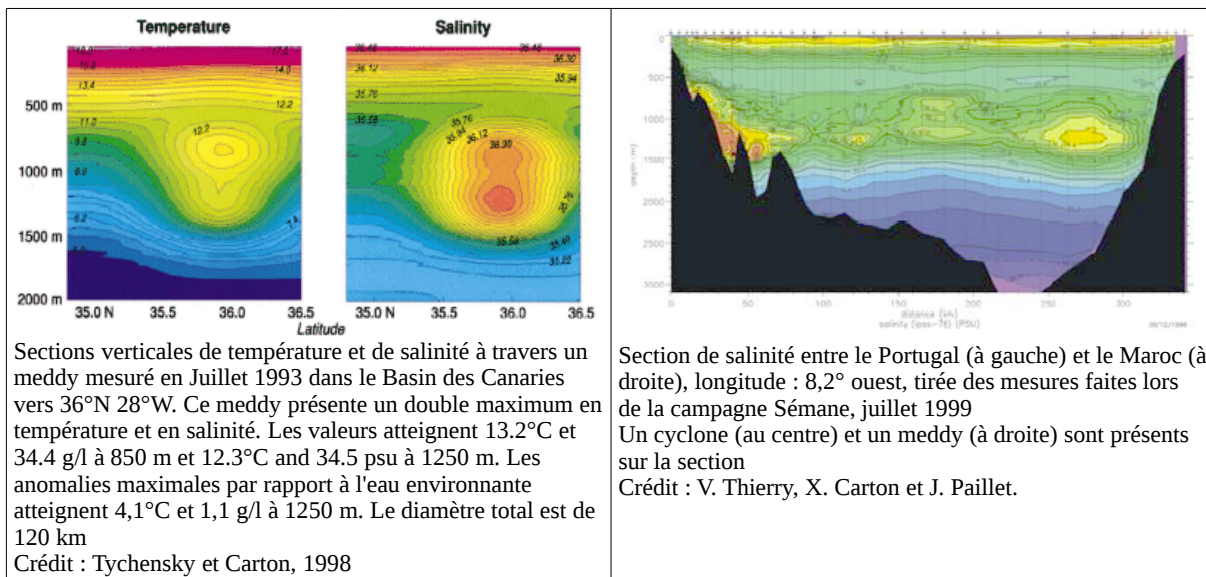
La durée de vie moyenne d'un meddy nouvellement formé est estimée à 1,7 ans, bien que certains aient été suivis pendant 5 ans. On estime qu'une vingtaine de meddies se forment chaque année, ce qui, combiné avec leur durée de vie, fait estimer à une trentaine le nombre de meddies qui se promènent en permanence dans l'Atlantique Nord.

On a également observé des phénomènes d'agrégation de deux meddies, puis le contraire : leur séparation.

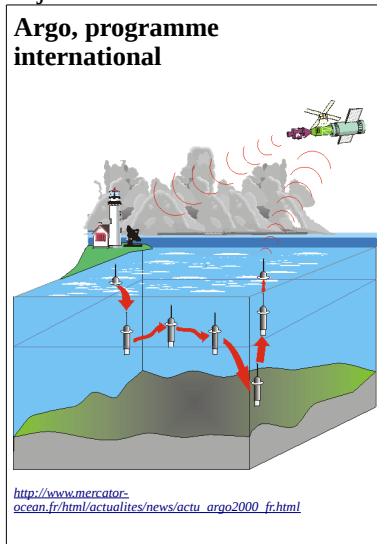
L'Eau Profonde Nord-Atlantique, est en partie alimentée par ces meddies qui lui confèrent un surplus de chaleur et de sel.



Bathymétrie de la zone de génération des meddies Crédit : [Bulletin de la Société Géologique de France](#)



Il faut une grande chance aux chercheurs embarqués sur les bateaux océanographiques pour capter un meddy. Les observations sont rares. En effet, le signal altimétrique étant trop faible, on ne peut les repérer du ciel (certaines études se penchent cependant sur la question, voir par exemple <http://conference.iproms.org/presentation/145>). Quelques observations ont pu être faites toutefois et sont décrites avec précision dans des articles de revues spécialisées (Richardson et al., 2000, Tychensky and Carton, 1998). Les rayons mesurés donnaient des valeurs entre 20 et 80 kilomètres et des épaisseurs verticales entre 800 et 1400 mètres, avec le coeur de la structure situé dans les 1000 mètres de profondeur. La salinité au coeur du meddy pouvait atteindre les 36,37 g/l et une température de 13,2°C. Les autres observations nous proviennent des flotteurs Argo (capteurs plongeant à 2000 mètres mesurant par cycles de plongées successives la température et la salinité le long de leur trajectoire et retransmettant leurs données aux satellites Argos lors de leur retour en surface.

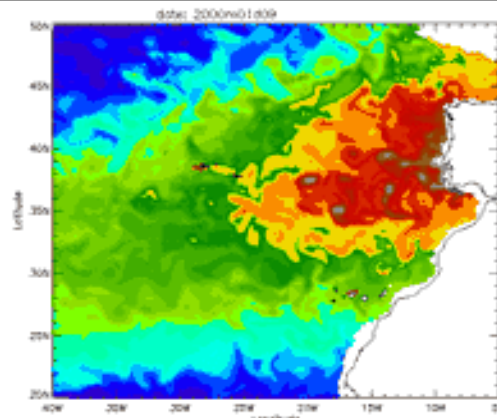


Dès le milieu des années 90, Les pionniers de la prévision océanique ont compris que les satellites altimétriques, indispensables à l'océanographie opérationnelle, ne suffisaient pas pour une modélisation fine des processus qui ont lieu dans l'océan profond. En 2000, commence le déploiement des flotteurs Argo dans le cadre d'un programme international.

Argo vise à déployer et à maintenir un réseau d'environ 3000 flotteurs profilants, repartis sur un maillage de 3° x 3°, mesurant des profils de température et de salinité jusqu'à des profondeurs de 2000m, d'où leur nom de "profileur Argo", ainsi que la vitesse du courant à des profondeurs variables, ces trois paramètres pouvant être assimilés dans les modèles numériques. Ce programme a été initié comme support aux programmes d'océanographie opérationnelle et de prévision climatique saisonnière et interannuelle. Chaque flotteur remonte tous les dix jours à la surface, transmet ses données aux satellites Argos (d'autres systèmes comme Iridium sont à l'étude), avant de replonger à 2000m. Les données sont diffusées gratuitement et sans aucune restriction en temps réel sur le système mondial de transmission (SMT) ainsi que sur Internet. 17 pays plus l'Union Européenne participent au réseau Argo. Le projet Coriolis est la composante française d'Argo ; il comprend l'instrumentation (développement du modèle Provor), le déploiement des instruments et le traitement de données (Coriolis est en particulier un des deux Centres de Données Argo Globaux).

Une étude approfondie menée par l'équipe modélisation de Mercator Océan avait pour but d'évaluer la capacité du Prototype Atlantique Nord Méditerranée (PAM) à simuler ces structures.

Cette expérience s'est faite sans assimilation de données, en faisant tourner le modèle d'océan avec, comme seules données d'entrée, outre la bathymétrie et l'état climatologique de départ (un état moyen de l'océan), les forçages atmosphériques (vent, flux de chaleur, évaporation, précipitation). PAM a une résolution horizontale de 5 à 7 km sur l'Atlantique et la Méditerranée et une résolution verticale comprise entre 6m en surface, 300m au fond et des épaisseurs de couche d'environ 100 m dans l'eau Méditerranéenne (les couches de surface sont plus fines que les couches profondes pour mieux représenter les phénomènes complexes de surface). La simulation a été faite sur 5 années, de 1998 à 2002.

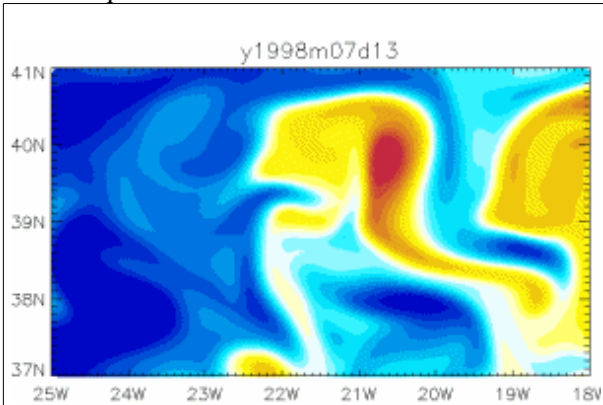


Simulation PAM sur toute l'année 2000: salinité à 870m, Les meddies sont les petits tourbillons à coeur gris. Crédit : Yann Drillet

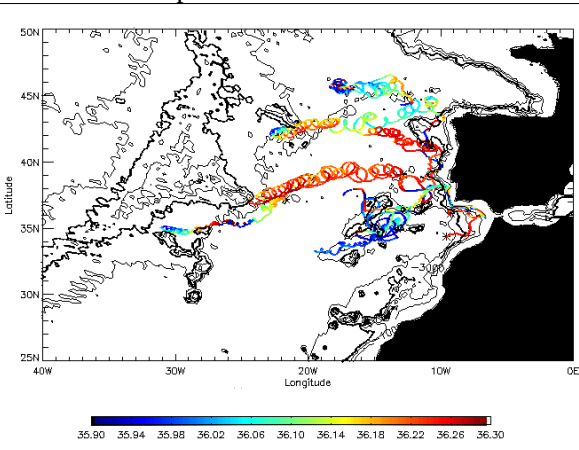
Les résultats révèlent l'aptitude du modèle à simuler les meddies. Cette simulation a permis de mieux comprendre le rôle respectif des zones de formations et d'évaluer les routes privilégiées empruntées par ces structures pendant leur voyage dans l'Atlantique.

Le modèle permet également la simulation des phénomènes d'agrégation/séparation de deux meddies (voir l'animation ci-dessous). Une méthode de suivi des meddies grâce à des calculs de trajectoires lagrangiennes a été mise au point. Elle permet de suivre la trajectoire des tourbillons comme l'illustre la figure ci-dessous. La simulation de 5 ans n'est pas suffisamment longue pour étudier les meddies depuis leur création le long des côtes espagnoles et portugaises. On a cependant pu suivre quelques meddies sur une période de 4 ans et un plus grand nombre sur une période de un an. Les trajectoires simulées sont très réalistes si on les compare à certaines observations qui ont pu être faites pendant des campagnes océanographiques : formation au Cap St Vincent et au Tejo Plateau ou au Cap Finistère, déplacement vers l'ouest, le sud-ouest et le nord. Un meddy crée dès le début de la simulation a pu être suivi pendant 5 ans jusqu'à atteindre la dorsale Atlantique à 30° ouest et 35° nord. A cette position des meddies ont déjà été observés, en particulier au cours de la campagne océanographique Sémaphore. Des simulations plus longues permettront par la suite d'étudier les déplacements extrêmes des meddies, et en particulier leur capacité éventuelle à franchir les monts sous marins qui s'élèvent au milieu de l'Atlantique.

Cette simulation a également permis une nouvelle estimation des quantités de sel transportés à travers l'Atlantique et la contribution des meddies à cette tâche essentielle pour la circulation thermo-haline



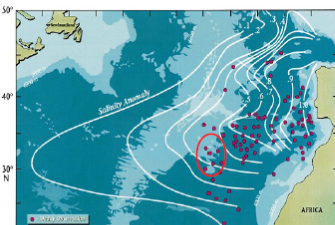
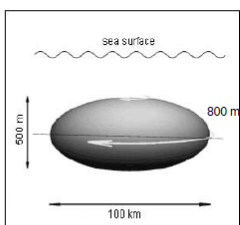
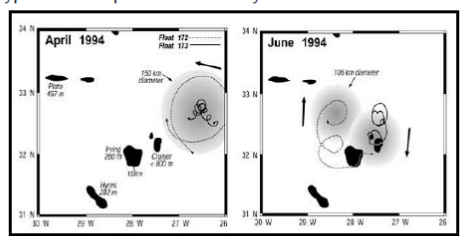
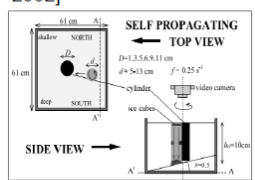
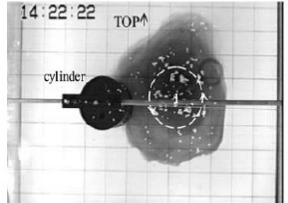
Simulation PAM : salinité à 870 m, entre le 13 juillet et le 30 novembre, un plot tous les 20 jours. Remarquez la séparation du meddy en deux structures distinctes et la ré-agrégation de ces deux structures. Crédit : Yann Drillet



Trajectoires de flotteurs simulés par le modèle. La couleur représente la salinité à la position du flotteur qui évolue sur cet exemple entre 33.9 et 34.3 g/kg d'eau de mer, soit environ 0.5 à 0.6 g/kg de plus que l'eau environnante. Crédit : Yann Drillet et al., 2005

4.4 Exemple : Etude numérique de la collision d'un Meddy avec une montagne sous-marine

Les Meddies (Mediterranean eddies), tourbillons composés d'eau chaude et salée d'origine Méditerranéenne sont des structures hydrologiques proéminentes de l'Atlantique Nord. Lors de leur propagation, les Meddies sont confrontés à de nombreux obstacles topographiques. L'objectif de ce stage est l'étude de la dynamique et des processus intervenant lors de la collision d'un Meddy avec une montagne sous-marine. Des simulations à haute résolution ont été réalisées afin de modéliser cette collision. Une étude préalable, en l'absence de montagne sous-marine, a été effectuée afin de comprendre l'évolution et la structure du Meddy sans perturbation. Sa propagation est affectée principalement par l'effet β et une interaction hétéronique avec une structure cyclonique sous-jacente se mettant en place. Une analyse de sensibilité des paramètres physiques du modèle a été accomplie en considérant différentes caractéristiques de la montagne sous-marine. Dans toutes les simulations, le Meddy survit à la collision et se sépare en deux structures indépendantes : un Meddy principal et un Meddy secondaire. Un changement dans la structure verticale de la vorticité du Meddy principal met en évidence une évolution rapide vers une structure hétéronique. Le Meddy principal continue ensuite à se propager vers le sud-ouest. Dans une des simulations, l'évolution vers une structure hétéronique est tellement importante qu'une structure stable émerge et se propage vers l'est. Des processus d'érosion, d'agrégation et de filamentation sont également analysés.

<p>INTRODUCTION</p> <ul style="list-style-type: none"> Impact de l'eau Méditerranéenne dans l'Atlantique Meddies (<i>Mediterranean Eddies</i>) - tourbillons anticycloniques Dérive sud-ouest + Obstacles topographiques → COLLISION   <p>[Richardson et al., 2000] [http://www.gso.uri.edu]</p>	<p>INTRODUCTION</p> <ul style="list-style-type: none"> Observations bouées lagrangiennes Observation Meddy 26 [Richardson et al., 2000] Hypothèse : Séparation du Meddy en deux Meddies  <ul style="list-style-type: none"> Observations de collisions rares [Cenedese, 2002] Compréhension des processus dynamiques faibles
<p>INTRODUCTION</p> <ul style="list-style-type: none"> Expériences en laboratoire de la collision d'un vortex cyclonique lors de sa collision avec un cylindre [Cenedese, 2002]   <ul style="list-style-type: none"> Approche 2D Tourbillons cycloniques barotrope (anticyclones instables) <p>→ Extrapolation des résultats pour les cyclones à des anticyclones₃₅</p>	<p>INTRODUCTION</p> <div style="border: 1px solid blue; border-radius: 15px; padding: 10px; margin: 10px;"> <p>Objectif : Analyser la dynamique d'un Meddy lors de sa collision avec une montagne sous-marine</p> <p>Méthode : Simulation numérique 3D à haute résolution</p> </div>

Matériels & Méthodes Résultats Discussion Conclusion

Modèle numérique

Roms-tools [http://roms.mpl.ird.fr/] IRD Institut de Recherche pour le Développement

Surface Flux atmo. (Q, E, P) nul
Tension frottement ($\tau_{x,y}$) nul

Fond Tension frottement $f_{b,j}$ linéaire
Coeff. de traînée $C_d = 3.10^{-4}$

Frontières Ouvertes / nudging Conservation volume Vitesse courant (u, v) nulle

Equations primitives 3D → 3 jours ρ, η, T, u, v

Horizontal Grille Arakawa C
Schéma advection avant ordre 2
Coeff. viscosité turb $A_h = 10 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
Coeff. diffusivité turb $K_h^T = 0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

Vertical Coordonnées sigma
Schéma advection centré ordre 4
Coeff. viscosité / diffusivité turb $A_z = K_z^T = 1.10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

Matériels & Méthodes Résultats Discussion Conclusion

Domaine - Grille

Approximation β -plan

Domaine : 800 x 800 km
Grille : 160x160 pts
Résolution = $1/20^\circ$ (~5km)
30 niveaux sigma

La montagne sous-marine

Forme d'une Gaussienne $h_t(r) = H_t e^{-\frac{r^2}{\mu^2}}$

[Richardson et al., 2000]

Matériels & Méthodes Résultats Discussion Conclusion

Conditions initiales : Meddy isolé

Pression $P_{Meddy}(x, y, z) = P_b + e^{-\frac{r^2}{2R_v^2}} e^{-\frac{(z-z_c)^2}{H^2}}$

Equilibre hydrostatique

Densité → Elévation de la surface libre

Fonction linéaire → Température

Equilibre géostrophique → Comp. horizontales de la vitesse en surface

Méthode dynamique → Profil vertical de la vitesse

Matériels & Méthodes Résultats Discussion Conclusion

La vorticité relative

■ Définition : Composante verticale du rotationnel de vitesse $\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$

■ Expression de la tendance d'un fluide à tourner

■ Utilité : Suivi du centre du Meddy (minimum local de vorticité relative)

Structure horizontale et verticale du Meddy

Matériels & Méthodes Résultats Discussion Conclusion

Les simulations

Impact avec Great Meteor

Simulation n°1: Meddy de référence

Simulation n°2: Impact au Centre

Simulation n°3: Impact au Sud

Simulation n°4: Impact au Nord

Simulation n°5: Impact avec Irving au centre

■ Comparaison à l'observation [Richardson et al., 2000]

■ Généralités sur la collision et différences selon la géométrie de l'impact

■ Comparaison avec les expériences en laboratoire de [Cenedese, 2002]

Matériels & Méthodes Résultats Discussion Conclusion

Simulation n°1 - Meddy de référence

■ Déplacement d'un anticyclone vers l'ouest et vers l'équateur :

4 mois de simulation

- Effet β

- Déplacement des particules environnantes

- Effet d'éirement / écrasement

[Cushman-Roisin et al., 1990; Cushman-Roisin et Beekers, 2010]

Matériels & Méthodes Résultats Discussion Conclusion

Simulation n°1 - Meddy de référence

■ Changement de la structure de la vorticité relative du Meddy

■ Formation d'une structure hétéronique [Morel et McWilliams, 2003]
Création de vorticité positive en profondeur → Dipôle penché → Circulation cyclonique se développe en-dessous du Meddy → Interaction hétéronique

Matériels & Méthodes Résultats Discussion Conclusion

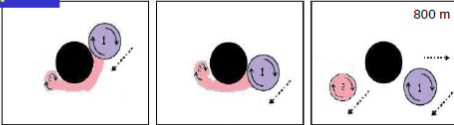
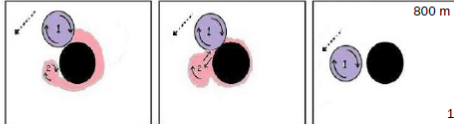
Simulation n°2 - Impact au centre

■ Changement de la structure verticale après la collision très important

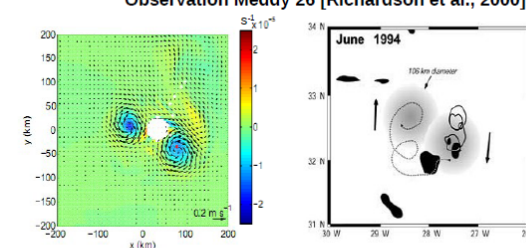
■ Evolution vers une structure hétéronique accélérée

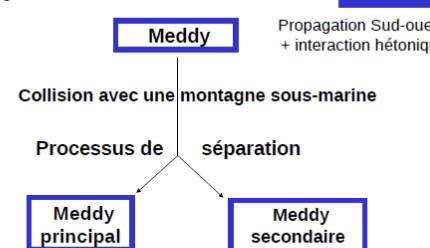
■ Modon = structure hétéronique stable et persistante + Propagation vers l'est

■ Séparation : Meddy principal / Meddy secondaire

Matériels & Méthodes	Résultats	Discussion	Conclusion
La collision			
Simulations n°2-3-5			
	<ul style="list-style-type: none"> Formation d'une langue de vorticité cyclonique qui s'enroule dans le sens horaire Séparation de la structure : Meddy principal (1) – Meddy secondaire (2) Le Meddy principal dérive vers le sud-ouest ou vers l'est 		
Simulation n°4			

Matériels & Méthodes	Résultats	Discussion	Conclusion
Expériences en laboratoire de Cenedese (2002)			
	<ul style="list-style-type: none"> Etude de l'évolution d'un vortex cyclonique lors de sa collision avec un cylindre → Extrapolation des résultats pour les cyclones à des anticyclones 		
Cenedese (2002)	<ul style="list-style-type: none"> Formation d'un streamer dans le sens horaire autour du cylindre Formation d'un nouveau pôle de vorticité en aval du cylindre Séparation pour un impact au Nord et au centre du cylindre 	<ul style="list-style-type: none"> Formation d'une langue de vorticité dans un sens horaire autour de la montagne sous-marine Formation du Meddy secondaire en aval de la montagne sous-marine Séparation pour un impact au Sud et au centre de la montagne sous-marine 	
	<ul style="list-style-type: none"> Mécanisme de formation du nouveau vortex = Tourbillons de l'allée de Von-Karman 		

Matériels & Méthodes	Résultats	Discussion	Conclusion
Simulation n°5 – Impact Irving			
	<p>Observation Meddy 26 [Richardson et al., 2000]</p> 		
	<ul style="list-style-type: none"> Séparation du Meddy Dérive vers le nord du Meddy secondaire - Dérive vers le Sud du Meddy principal 		
Confirmation de l'hypothèse issue de l'observation			

Matériels & Méthodes	Résultats	Discussion	Conclusion
		<p>Propagation Sud-ouest + interaction h�tonique</p>	
	<p>Structure h�tonique accélérée</p>	<p>Allée de Von-Karman</p>	
	<p>Impact au nord → Processus d'agrégation entre le Meddy principal et le Meddy secondaire en aval de la montagne sous-marine</p>		

4.5 Techniques d'identification et de suivi de tourbillons

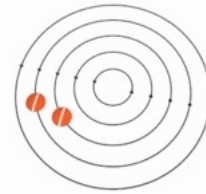
Une définition appropriée d'un tourbillon et la mise en œuvre d'un algorithme pour identifier automatiquement et de suivre les structures de méso-échelle et subméso-échelle sont fondamentales pour en étudier la dynamique à l'aide de grands bases données, tels que celles issue de l'altimétrie satellite, ou les sorties des modèles de circulations. Différentes méthodes ont été proposées, fondées soit sur le plan physique ou les caractéristiques géométriques de la zone d'écoulement.

Les méthodes basées sur les caractéristiques physiques identifient les tourbillons à l'aide des valeurs d'un paramètre spécifié choisis qui dépassent un seuil. Les méthodes basées sur les caractéristiques géométriques du champ d'écoulement identifient les tourbillons en fonction de la forme ou courbure des lignes de courant instantanées. Par conséquent, les algorithmes de détection automatisée peuvent être classés en trois types (Nencioli et al, 2009): 1) basés sur les paramètres physiques; 2) basé sur la géométrie de l'écoulement; et 3) hybride, qui implique à la fois des paramètres physiques et de la géométrie de l'écoulement.

En théorie, la vitesse u de particules (et, par conséquent, le tourbillon) dans un tourbillon peut varier en fonction de la distance r de l'axe de plusieurs façons. Il existe deux cas particuliers importants: tourbillon irrotationnel et tourbillon de corps rigide.

Si la vitesse u de particules est inversement proportionnelle à la distance r de l'axe, puis le ballon d'essai imaginaire ne tourne pas sur lui-même; il maintenir la même orientation tout en se déplaçant dans un cercle autour de l'axe du vortex. Dans ce cas, la vorticité $\vec{\omega}$ est nulle en tout point pas sur cet axe, et l'écoulement est dit irrotationnel.

$$\begin{aligned}\vec{\Omega} &= (0, 0, \alpha r^{-2}), & \vec{r} &= (x, y, 0), \\ \vec{u} &= \vec{\Omega} \times \vec{r} = (-\alpha y r^{-2}, \alpha x r^{-2}, 0), \\ \vec{\omega} &= \nabla \times \vec{u} = 0.\end{aligned}$$



<http://en.wikipedia.org/wiki/Vortex>

En l'absence de forces extérieures, une vortex évolue habituellement assez rapidement en direction de la configuration d'écoulement irrotationnel où les vitesses d'écoulement U est inversement proportionnelle à la distance r . Pour cette raison, les tourbillons irrotationnels sont aussi appelés tourbillons libres (*free vortices*).

Pour un vortex irrotationnel, la circulation est nulle le long de tout contour fermé qui ne renferme pas l'axe du vortex et a une valeur fixe, Γ , pour tout contour qui entoure l'axe une fois. La composante tangentielle de

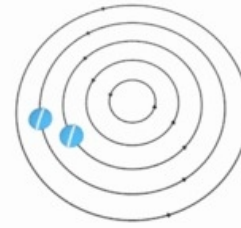
la vitesse des particules est alors $u_\theta = \frac{\Gamma}{(2\pi r)}$.

Toutefois, un vortex irrotationnel n'est pas physiquement réalisable, car cela impliquerait que la vitesse des particules (et donc la force nécessaire pour maintenir les particules dans leurs trajectoires circulaires) augmenteraient sans borne que l'on s'approche de l'axe du vortex. En effet, dans de véritables tourbillons, il y a toujours une région de coeur entourant l'axe où la vitesse des particules cesse d'augmenter puis diminue vers zéro lorsque r tend vers zéro. Dans cette région, l'écoulement n'est plus irrotationnel: la vorticité $\vec{\omega}$ devient non nulle, avec la direction à peu près parallèle à l'axe du vortex. Le tourbillon de Rankine est un modèle qui suppose un flux de corps rigide de rotation où r est inférieure à un r_0 distance fixe, et le flux irrotationnel extérieur que les régions centrales.

Un tourbillon de rotation peut être maintenu indéfiniment dans cet état seulement par l'application d'une force supplémentaire, qui n'est pas générée par le mouvement du fluide lui-même. Par exemple, si un seau d'eau est fait tourné à une vitesse angulaire constante w autour de son axe vertical, l'eau finira par tourner comme dans un corps rigide. Les particules se déplacent alors le long de cercles, avec une vitesse u égale à wr . Dans ce cas, la surface libre de l'eau prendra une forme parabolique. Dans cette situation, le gradient de pression supplémentaire dans l'eau, dirigée vers l'intérieur empêche l'évolution de l'écoulement en corps rigide à celui irrotationnel. Dans ce type d'écoulement pour un fluide de densité constante, la pression dynamique est proportionnelle au carré de la distance r de l'axe. Dans un champ de gravité constant, la surface libre du liquide, si elle est présente, est une paraboïde concave.

Si le fluide tourne comme un corps rigide - autrement dit, si la Ω la vitesse de rotation angulaire est uniforme, de telle sorte que u augmente proportionnellement à la distance r de l'axe - une petite boule portée par l'écoulement serait également tourner autour de son centre, comme si elle faisait partie de ce corps rigide. Dans un tel écoulement, la vorticité est la même partout: sa direction est parallèle à l'axe de rotation, et son amplitude est égale à deux fois la vitesse angulaire Ω uniforme du fluide autour du centre de rotation.

$$\begin{aligned}\vec{\Omega} &= (0, 0, \Omega), & \vec{r} &= (x, y, 0), \\ \vec{u} &= \vec{\Omega} \times \vec{r} = (-\Omega y, \Omega x, 0), \\ \vec{\omega} &= \nabla \times \vec{u} = (0, 0, 2\Omega) = 2\vec{\Omega}.\end{aligned}$$



<http://en.wikipedia.org/wiki/Vortex>

L'étude par McWilliams (1990) représente l'un des premières œuvres dans la détection de tourbillons. L'algorithme a été développé pour mesurer quantitativement les propriétés spécifiques de tourbillons cohérents à partir d'une solution numérique de circulation en deux dimensions. Il est basé sur la notion que la rotation domine dans un vortex et la vorticité relative ζ est le paramètre physique utilisé pour la détection. Les centres des tourbillons sont identifiés par des minima locaux et maxima de ζ et leurs limites sont définies par les points autour du centre où $\frac{\zeta}{\zeta_{center}} < 0.2$. Une série de contraintes est appliquée sur les caractéristiques géométriques des structures détectées, et seules les structures pas trop axisymétriques sont considérées comme représentant d'un vortex. Pour cette raison, cette méthode appartient à la dernière catégorie,

Dans la catégorie des algorithmes de détection basés sur des paramètres physiques, l'un des plus largement utilisés est celui qui fait appel au paramètre d'Okubo-Weiss W (Okubo 1970; Weiss 1991). Ce paramètre est calculé à partir du champ de vitesse horizontale

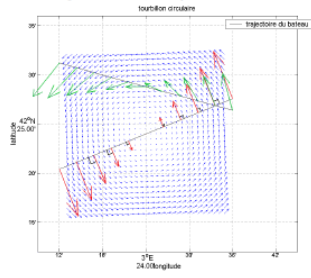
$$W = s_n^2 + s_s^2 - \omega^2 \quad \text{où} \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad s_n = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \quad s_s = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

où s_n et s_s sont la déformation normale et de cisaillement, respectivement, et ω est la composante verticale de la vorticité. Ici, W quantifie l'importance relative de la déformation par rapport à la rotation. Étant donné que le champ de vitesse dans un vortex est dominé par rotation, les tourbillons océaniques sont généralement caractérisés par les valeurs négatives de W . Il est donc possible d'identifier ces fonctions par contours fermés de $W=W_0$, où W_0 est une valeur seuil choisie. Ce procédé a été souvent utilisé pour détecter les tourbillons dans de données d'altimétrie du niveau de la mer (SLA) (e.g. Isern-Fontanet et al 2003; Morrow et al. 2004; Chelton et al. 2007). Toutefois les dérivés de vitesse provoquent du bruit supplémentaire dans les champs de W . Ceci est habituellement réduite en appliquant un algorithme de lissage, qui, cependant, pourraient retirer également de l'information physique. Quelques études ont mis en évidence des limites de cette méthode (Sadarjoen et Post 2000; Chaigneau et al. 2008): une tendance à l'excès de détection de tourbillons (des structures sont identifiées comme tourbillons quand il ne les sont pas) semble persister même après lissage le champ de W ; en outre, lorsque de longues séries chronologiques sont analysés, la valeur de seuil W_0 doit être ajustée en permanence en fonction de la variation des propriétés turbulentes du champ de vitesses.

Une approche dite de l'angle d'enroulement (*winding-angle method*) a été proposée par Sadarjoen et Post (2000); elle appartient à la deuxième catégorie. Il a été développé sous l'hypothèse que les tourbillons peuvent être définis comme des éléments caractérisés par une forme à peu près circulaire ou en spirale autour de leurs noyaux (Robinson, 1991). Comme première étape, les lignes de courant instantanées sont dérivées de l'angle de direction cumulée des segments qui composent une ligne de courant donnée (angle d'enroulement) est calculée pour chaque ligne de courant. Les tourbillons sont identifiés par les lignes de courant avec un angle d'enroulement $|\alpha| \geq 2\pi$ ce qui correspond à une courbe fermée ou en spirale. Cette méthode a été utilisée par Chaigneau et al. (2008) pour analyser l'activité tourbillonnaire dans la partie orientale du Pacifique Sud à partir de données SLA. La comparaison avec les résultats obtenus avec la méthode Okubo-Weiss sur le même jeu de données a montré que la méthode de l'angle d'enroulement a plus de chances de détecter avec succès tourbillons et surtout un excès beaucoup plus faible de l'erreur de détection. Toutefois il y a un prix à payer pour cela en termes d'effort de calcul plus important. Chaigneau et al. (2008) ont trouvé un moyen de contourner ce problème par l'application du procédé que dans les régions de la zone où les tourbillons ont été identifiés par des maxima locaux et les minima de SLA. Pour cette raison, leur méthode peut être classée comme hybrides (troisième catégorie): une grandeur physique (SLA) est utilisée pour identifier les tourbillons, puis les caractéristiques géométriques de la zone d'écoulement (lignes de courant) sont utilisés pour définir les limites des tourbillons.

Introduction

Importance dans l'estimation des coordonnées du centre d'un tourbillon
 Lorsque la trajectoire passe par le centre, le point de vitesse nulle correspond aux coordonnées du centre
 Cas idéal
 Les vecteurs sont orthogonaux au transect (composante tangentielle uniquement, pas de radiale)
 Trajectoire aléatoire, décomposition des vecteurs



Calcul du centre grâce à la méthode de Nencioli:

Décomposition des vecteurs
 Méthode tangentielle: meilleure estimation du centre = point où la somme des composantes tangentielles est maximale
 Méthode radiale: meilleure estimation du centre = point où la somme des composantes radiales est minimale

Exemple:

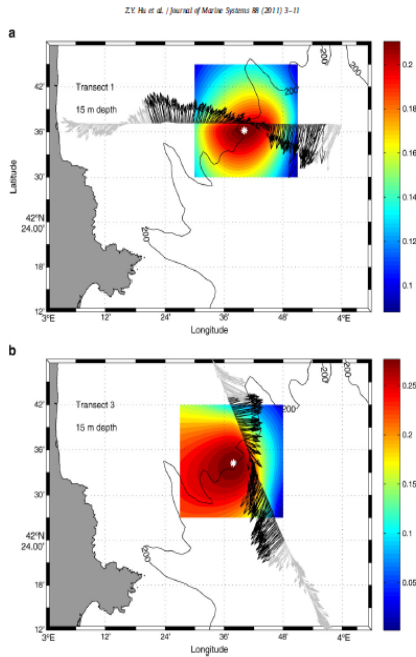
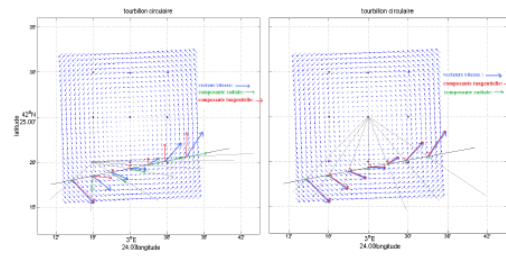


Fig. 4. Estimated center location of anticyclonic eddy (white asterisk) for Transect 1 (left) and Transect 3 (right) at 15 m depth. Tangential components of the black vectors were computed for each point within the grids. For each transect, the center of the eddy was defined as the point for which the mean absolute value of tangential velocity was maximal. The contours in the square areas indicate values of equal mean absolute tangential velocity (ms^{-1}). Isobath at 200 m is plotted with black line.

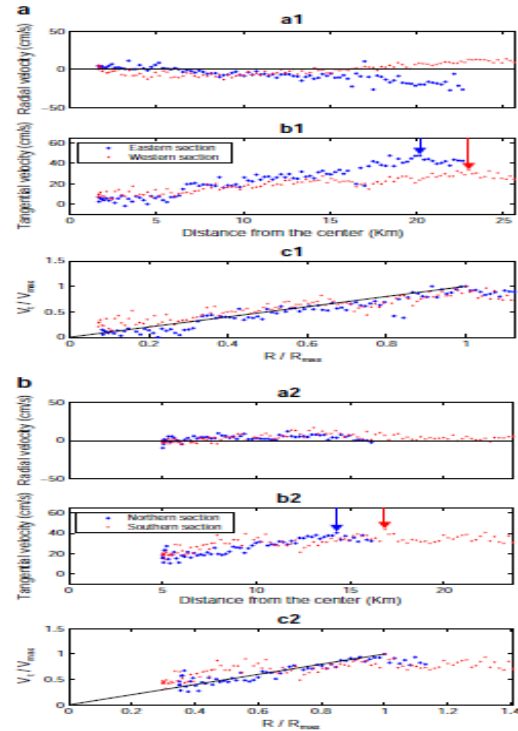


Fig. 5. Distribution of (a) radial and (b) tangential velocities with respect to radial distance from the center; (c) distribution of normalized tangential velocity with respect to normalized radial distance for both Transect 1 (left column) and Transect 3 (right column). Arrows in (b) indicate the locations of maximum velocity magnitude for two sections; the solid lines in (c) indicate values of equal angular velocity (V_{max}/R_{max}).

Ici slides nencioli

4.6 Exemple : suivi des tourbillons dans le Cape Basin et dans le Golfe du Lion


MPO - RSMAS

Study of Cape Basin eddies and Indian-Atlantic interocean exchange in a regional model.

A.M. Doglioli¹,
B. Blanke¹, A. Griffa^{2,3}, G. Lapeyre⁴, S. Speich¹, M. Veneziani^{2,5}

¹Laboratoire de Physique des Océans, UMR 6523 CNRS-IFREMER-UBO, Brest, France.
²RSMAS-MPO, University of Miami, Miami, USA
³ISMAR-CNR, La Spezia, Italia
⁴Laboratoire de Mécanique Dynamique/PSL, Ecole Normale Supérieure, Paris
⁵now at UC Santa Cruz, USA

Miami, 10 July 2006



PROJECT GOALS


- identifying mesoscale eddies with an objective method,
- time-tracking these eddies and
- evaluating their properties and the water mass they transfer.

Wavelets Analysis for Time-tracking Eddies in Regional models
<http://www.ifremer.fr/lpo/adoglioli/WATERS/>

Acknowledgments
 A. M. Doglioli is supported by SHOM, under contract number CA 2003/03/CMO (Contact: Alain Sèpette). This study is also a contribution to InterUp, a project funded by the French Programme national Atmosphère et Océan à Multi-échelles (PATOM).

Study Area

Cape Cauldron: zone of turbulent stirring and mixing in the southeastern Cape Basin [Boebel et al, 2003]



[...] Here at the Agulhas retroflection, "leakage" of water occurs within an array of cyclonic (clockwise) and anticyclonic (anticlockwise) eddies that are injected into the vigorous stirring and mixing environment of the Cape Basin [...].
 Gordon, Nature 2002

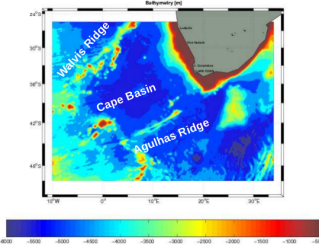
Ocean Model - Configuration

ROMS code
IRD version with ROMSTOOLS [Penven, 2003]

Horizontal resolution: 1/10°

11-year run

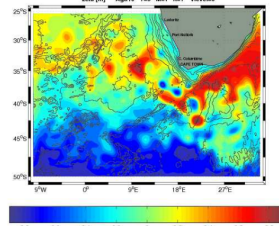
Output : 2-day average



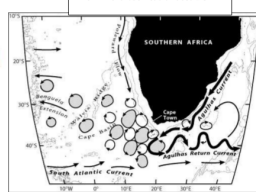
Climatologies		
Open boundaries	Wind forcing	Heat & Fresh water fluxes
OCCAM 1/40	QuikSCAT	COADS 1/20

Ocean Model - Animations

Sea Surface Height



from Richardson et al. 2003, DSRH



Wavelet Analysis – Eddy identification

The wavelet analysis consists in the decomposition of the signal into orthogonal, multiresolution wavepackets, in a manner similar to Fourier decomposition. MATLAB tools using Wavelab library [http://www-stat.stanford.edu/wavelab/]

Signal

→ Fourier Transform

→ Constituent sinusoids of different frequencies

Signal

→ Wavelet Transform

→ Constituent wavelets of different scales and positions

The algorithm we use has four different sub-steps:
 - a best basis is found to minimize a cost function (here the Shannon entropy). This basis changes for each time step considered and it allows to find the best location for the wave packets.
 - the model relative vorticity is decomposed on this basis.
 - the wavelets are sorted as a function of their spectral coefficients. Only a few of them are kept (with a number that depends on the dimension of the basis: usually 9% of the initial set of wavelets). The reconstructed signal is virtually zero where there is no identified pattern.
 - we extract structures so that adjacent points along x and y axes belong to the same pattern.

Following this method, we obtain localized structures in space, which allows us to define eddies.

Wavelet Analysis – Eddy identification

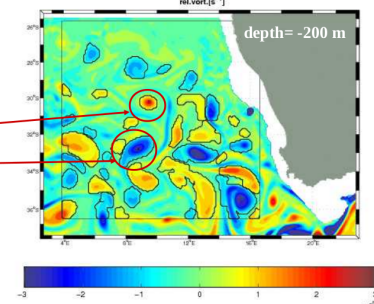
Decomposition of an horizontal slice of relative vorticity

MATLAB tools using Wavelab library [http://www-stat.stanford.edu/wavelab/]

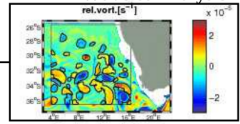
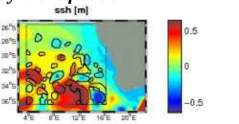
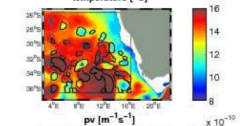
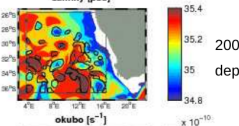
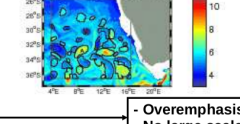
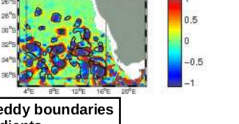
Research Area
256 x 256 [gridcells]

Numbering and Naming
Anticyclone PANORAMIX
Cyclone ASTERIX

Center definition
(ic,jc)=max(|ξ|)



Wavelet Analysis – Eddy identification

200-m depth

- Overemphasis of eddy boundaries
- No large scale gradients

Wavelet Analysis – Time tracking

Forward Tracking: $C_t \in \mathcal{E}_{t-\Delta t}$
Eddy center Set of eddy points

Backward = Forward

Wavelet Analysis – Time tracking

Cyclone Asterix Anticyclone PANORAMIX

Wavelet Analysis – Vertical Tracking

Downward Tracking: $C_z \in \mathcal{E}_{z-\Delta z}$
Eddy center Set of eddy points

Upper limit: 200-m depth
Lower limit: 1000-m depth
Increment: $\Delta z=100$ m

Cyclone Asterix Anticyclone PANORAMIX

Flier1 [1981] criterion
Z where $v_{rot} = v_{trans}$
Wavelets analysis
Bathymetry

$$V = \sum_{k=1}^{iz_L} A_k \cdot \Delta z$$

Wavelet Analysis – 4D tracking

Velocity

$$v \equiv v(t) = \frac{1}{iz_L} \sum_{k=1}^{iz_L} v_k \quad v_{err} = \frac{\sigma_z(u)}{v}$$

Volume

$$V = \sum_{k=1}^{iz_L} A_k \cdot \Delta z \quad V_{err}(t) = \frac{\Delta z \pi (\frac{D}{2})^2}{V} + \frac{4 \Delta x \Delta z \sum_{k=1}^{iz_L} A_k D_k^{-1}}{V}$$

Diameter

$$D = \frac{1}{2 iz_L} \sum_{k=1}^{iz_L} (D_k^{EW} + D_k^{NS}) \quad D_{err} = \frac{\frac{1}{2 iz_L} \sum_{k=1}^{iz_L} |D_k^{EW} - D_k^{NS}|}{D}$$

Wavelet Analysis – 4D tracking

Cyclone ASTERIX Anticyclone PANORAMIX

Wavelet Analysis – 4D tracking

Cyclone ASTERIX Anticyclone PANORAMIX

January-June
Vel = 0.09 [ms⁻¹]
Diam = 121 [km]
Vol = 9.7 10¹² [m³]

	Boebel et al., 2003		Van Ballegooyen et al., 1994	
	Cyclones	Agulhas Rings	Cyclones	Anticyclones
Diameter [km]	120	200	160	190 – 320
Velocity [m/s]	0.036	0.038	0.046	0.04 – 0.09
Volume [10 ¹² m ³]	-	-	-	11.2 - 33.8

January to October
Vel = 0.08 [ms⁻¹]
Diam = 75 [km]
Vol = 3.1 10¹² [m³]

Divergent pathways
(Morrow et al., 2004)

Wavelet Analysis – transport

$Tr = V \cdot \Delta t^{-1}$ $Tr = v \cdot V \cdot D^{-1}$

$$D = \frac{1}{2 iz_L} \sum_{k=1}^{iz_L} (D_k^{EW} + D_k^{NS}) \quad D_{err} = \frac{\frac{1}{2 iz_L} \sum_{k=1}^{iz_L} |D_k^{EW} - D_k^{NS}|}{D}$$

Wavelet Analysis – Transport

$Tr = v \cdot V \cdot D^{-1}$ $Tr_{err} = v_{err} + V_{err} + D_{err}$

Cyclone ASTERIX Anticyclone PANORAMIX

Error % on

<Tr> = 6.6 [Sv] <Tr> = 3.3 [Sv]

Wavelet Analysis

SUMMARY

- the wavelet analysis proved successful in tracking eddies;
- tracked mesoscale eddies present realistic dynamics;
- wavelets diagnostic offer estimates of eddy mass transport.

Reference:
 Doglioli, A.M., Blanke, B., Speich, S., Lapeyre, G. (2006). *Wavelets Analysis for Tracking Eddies in Regional Models. Application to Cape Basin Eddies*. J. Geophys. Res., In revision.

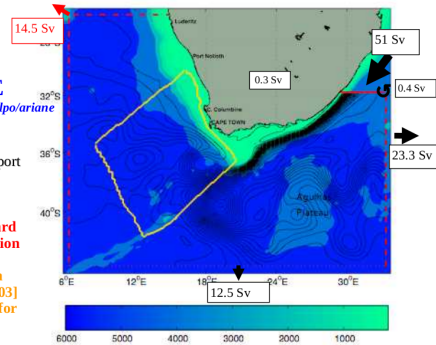
Lagrangian particles – Interocean Exchange

ARIANE
<http://www.univ-brest.fr/lpo/ariane>

Compute total, cross-section transport from them.

Forward/Backward
 7-yr time integration

Cape Cauldron
 [Boebel_et al, 2003]
 6-hour sampling for spin analysis



Lagrangian particles – Spin parameter

$$\Omega = \frac{\langle u'dv' - v'du' \rangle}{2 \Delta t \text{ EKE}}$$

Veneziani et al., 2004. JPO 34, 1884-1906

The eddy field properties in the subsurface northwestern Atlantic are due to the **superposition** of two different regimes: the regime of the **coherent vortices (loopers)** and that of the **background field (non-loopers)**

The observed features can be parameterized through a first-order **LSM Lagrangian Stochastic Model** with **bi-modal distributed spin Ω**

Veneziani et al., 2005a. JMR 63, 753-788

The majority (85%) of looping trajectories are core-loopers, which provide estimates of Ω :
 - very similar to the **vortex core relative vorticity** and
 - whose temporal changes are directly connected to the actual **vortex evolution**.

Only the remaining 15% of loopers sample the vortex edge

Lagrangian particles – Spin parameter

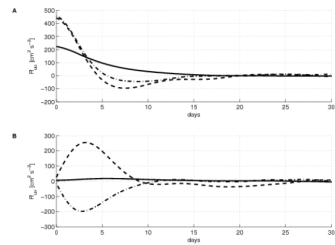
Two 10% random subsets

30-day chunks

Thresholds:

$$\Omega_{\text{surf}} = 0.30 \text{ days}^{-1}$$

$$\Omega_{\text{deep}} = 0.15 \text{ days}^{-1}$$



Lagrangian particles

SUMMARY

- high resolution ocean model reproduces fairly well the vigorous stirring and mixing processes of the study area;
- the Lagrangian particle-following technique provided an estimate of Agulhas leakage of about 14 Sv, which is consistent with observations and previous results from lower resolution models;
- looper regime accounts for about 30% of the estimated interocean exchange, with a remarkable contribution due to cyclones;
- Lagrangian computations coupled with spin analysis revealed promising results, and it would be worth conducting a more complete study

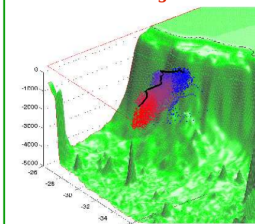
Reference:
 Doglioli, A.M., Veneziani, M., Blanke, B., Speich, S., Griffa, A. (2006). *A Lagrangian analysis of the Indian-Atlantic interocean exchange in a regional model*. Geophys. Res. Lett., In press.

OUTLOOK

Wavelets & Lagrangian particles

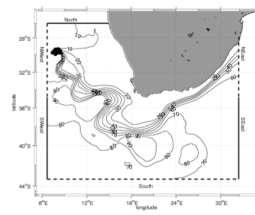
Coherent eddies

Eddy-life
 time integration



Remote Origins

Multiple-years
 backward time integration



5. Advection-diffusion

Fondements

5.1 Théorème de conservation

La loi de conservation d'une quantité générique de densité ψ s'écrit

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \mathbf{u}) = 0,$$

un cas particulier de loi de conservation est l'équation de continuité dans laquelle est la masse volumique à se conserver

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0,$$

Une forme plus générale est la suivante

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \mathbf{u}) = \gamma.$$

dans laquelle on tient en compte aussi la présence éventuelle de puits et/ou sources de ψ , qui sont représentés par le terme γ . Ce terme peut être décomposé en deux autres termes, une contribution non divergente ξ et la divergence d'un certain vecteur $-\chi$

$$\gamma = \xi - \nabla \cdot \chi.$$

pour obtenir

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \mathbf{u}) + \nabla \cdot \chi = \xi,$$

qui est la forme la plus générale pour une équation de conservation.

Théorème de flux-divergence

http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_flux-divergence

En [analyse vectorielle](#), le **théorème de flux-divergence**, appelé aussi **théorème de Green-Ostrogradski** ou de Gauss affirme l'égalité entre l'intégrale de la [divergence](#) d'un [champ vectoriel](#) sur un volume dans \mathbb{R}^3 et le [flux](#) de ce champ à travers la [frontière](#) du volume (qui est une [intégrale de surface](#)).

L'égalité est la suivante :

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

où V est le volume de référence et S la surface qui entoure ce volume

En intégrant maintenant cette équation sur un volume fini de référence et en appliquant le théorème de flux-divergence, on obtient une forme intégrale du théorème de conservation

$$\frac{d}{dt} \int_V \psi \, dV + \oint_S \psi \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} + \oint_S \chi \cdot d\mathbf{S} = \int_V \xi \, dV,$$

Cette formulation nous permet de mettre en évidence que la variation temporelle locale de la propriété ψ dans le volume V (premier terme) est liée à la somme de trois termes ;

- un terme de transport $\psi \mathbf{v}$, lié à l'entraînement de la propriété par le fluide en mouvement ;
- un terme de flux, i.e. des effets des actions de surface, liés à χ qui génère une perte ou une augmentation de quantité dans des volumes finis d'espace, mais, dans le cas que $\chi=0$ sur l'enveloppe du fluide, non pas forcément dans l'espace occupé complètement par le fluide. Il s'agit donc d'un terme de redistribution de la propriété à l'intérieur du fluide ou bien de distribution a cause d'actions qui cherchent d'introduire ou exporter à travers de l'enveloppe .
- un terme de dissipation ou de génération, i.e. effets des actions de volume, liés à ξ qui représente la croissance ou la diminution de ψ dues à des agents distribués dans l'espace, qui pourraient être aussi nuls ou nuls en total, bien que dans la plus grande partie de cas ce terme représente le fait que la propriété ψ n'est pas conservée, et en tout cas n'est jamais conservé localement .

EXEMPLE: estimation du la production nette à l'intérieur d'un tourbillon océanique (projet LATEX)

NB : dans ces cas les coefficients de diffusion sont ceux turbulents (voir ci-dessous) et non pas ceux moléculaires.

Mass budget for a Lagrangian control volume

$$\frac{d}{dt} \int_V \psi dV + \oint_S \psi \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} + \oint_S \chi \cdot d\mathbf{S} = \int_V \xi dV$$

Temporal variation

Advection
(to be neglected)

Boundary exchanges
horiz+vert

Sources & sinks
(null for SF₆)

where $\psi = O_2, C, SF_6$

This method makes possible to close the biogeochemical budgets

Net Community Production $\Delta t=5-6$ days

$$NCP_{O_2} = \Delta O_2 + F_{sea-air} + F_{hor} + F_{ver}$$

$$NCP_{DIC} = \Delta DIC + F_{sea-air} + F_{hor} + F_{ver}$$

& comparaison with incubations

NB :

SF_6 Sulfur hexafluoride

Carbon export

$$C_{exp} = NCP_{DIC} - \Delta POC - \Delta DOC$$

in situ bottle (in situ)

On peut maintenant prendre la prendre la propriété ψ comme

$$\psi = \rho S$$

avec S salinité de l'eau de mer mesurée en part per mille.

En appliquant la loi de la conservation de la masse et la définition de dérivée lagrangienne on a que

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho S \mathbf{u}) &= \rho \frac{\partial S}{\partial t} + S \frac{\partial \rho}{\partial t} + S \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla S = \\ &= \rho \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla S \right) + S \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right) = \rho \frac{dS}{dt}. \end{aligned}$$

L'équation de conservation de la salinité devienne alors

$$\rho \frac{dS}{dt} + \nabla \cdot \boldsymbol{\chi} = \xi$$

En générale on fait l'hypothèse que le flux d'une propriété est proportionnel en module et dirigé en sens opposé au gradient de la propriété, i.e.

$$\boldsymbol{\chi} = -k_s \nabla S$$

avec k_s une constante de proportionnalité. L'équation de conservation devient alors

$$\rho \frac{dS}{dt} = \nabla \cdot (k_s \nabla S) + \xi$$

et puisque on peut aussi considérer la variation spatiale de k_s négligeable,

$$\frac{dS}{dt} = \kappa_s \nabla^2 S + \frac{\xi}{\rho}$$

avec $\kappa_s = \frac{k_s}{\rho}$ coefficient de diffusion moléculaire.

Les processus de diffusion moléculaire ont des échelles temporelles très longues par rapport à celle du mouvements et de la diffusion turbulente et dans la suite on les négligera, mais si le mouvement est absent alors sont les seuls responsables de la redistribution d'une certaine propriété. En absence de sources/puits, la diffusion moléculaire, en accord avec le second principe de la thermodynamique, agit pour réduire les gradients du champs .

Il est utile pour la suite d'étudier le cas de diffusion moléculaire dans un fluide à repos.

Dans ces conditions on a

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \kappa_s \nabla^2 S + \frac{\xi}{\rho}.$$

Si $\xi = 0$ un solution possible est la suivante

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(4\pi\kappa_s t)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4\pi\kappa_s t}},$$

avec $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Cette solution représente une gaussienne tridimensionnel centrée dans l'origine et avec variance $\sigma^2 = 2\kappa_s t$.

À l'état initiale la propriété S est initialement toute concentrée dans un point (l'origine des axes pour simplicité), en suite la concentration de la propriété S , s'étale avec une vitesse $\sqrt{\frac{2\kappa_s}{t}}$. Le rayon de

la région occupée par le fluide augmente avec la racine carrée du temps tandis que la vitesse d'expansion diminue avec la même quantité; en générale pour des valeurs réalistes du coefficient de diffusion, le processus est très très lent .

En mer le coefficient de diffusion du sel κ_s vaut environ $1.5 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Cette valeur nous dit que une « tache » d'eau salée d'un mètre carré s'élargira par diffusion moléculaire d'un demi mètre carré en 10 000 jours (1 jour = 86400 s $\sim 10^5$ s)! Le coefficient de diffusion thermique κ_T vaut environ $1.5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Cela comporte que la diffusion de la chaleur soit environ 100 fois plus rapide que celle du sel, restant toutefois très lente . Le coefficient de viscosité cinématique (i.e. de diffusion moléculaire de la quantité de mouvement) à la température de 20 °C et à une salinité de 39 psu vaut $1.0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

Cette lenteur des processus de transport permet l'utilisation des traceurs pour marquer le champ de mouvement (e.g. une veine de courant) .

En plus cette solution 3D homogène peut être décomposée dans le produit de trois solution unidimensionnelles :

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(4\pi\kappa_s t)^{3/2}} \left(e^{-\frac{x^2}{4\pi\kappa_s t}} \right) \left(e^{-\frac{y^2}{4\pi\kappa_s t}} \right) \left(e^{-\frac{z^2}{4\pi\kappa_s t}} \right)$$

chacune d'entre elles étant la solution de l'équation de diffusion unidimensionnelle

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \kappa_s \frac{\partial^2 S}{\partial x_i^2},$$

in cui $x_i = x, y, z$ per $i = 1, 2, 3$.

La solution trouvée permet de construire des solutions dans le cas où $\xi \neq 0$ à partir d'un certain instant initial ou si on a une concentration initiale S_0 :

$$S(\mathbf{r}, t) = \int_0^t \int_V \mathcal{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \frac{\xi(\mathbf{r}', t')}{\rho} d\mathbf{r}' dt' + \int_V \mathcal{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) S_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'.$$

Donc pour suivre l'évolution de la distribution d'une certaine substance qui diffuse, on peut considérer la distribution présente au début, ou ajoutée dans la suite, comme la somme de plusieurs sources ponctuelles, suivre l'évolution de chacune d'entre elles et enfin sommer tous les différents contribution au champs de concentration . La prévision de la diffusion est donc relativement simple, jusqu'à quand il n'y a pas de mouvement et de la turbulence .

5.2 La turbulence comme un processus stochastiques

La turbulence peut être considérée comme le résultat d'un flux instable, ou bien d'un flux dans lequel les perturbations infinitésimales dues à des mouvement à niveau moléculaire ont tendance à grandir, jusqu'à rejoindre une intensité comparable à celle de l'écoulement de base .

Le passage de stable à instable est aléatoire, la vitesse à laquelle il y a les première phénomènes turbulents est en générale plus haute que la vitesse à laquelle l'écoulement revient à être laminaire .

En plus des vibrations, la rugosité des surfaces solides et d'autres irrégularités peuvent favoriser la transition à l'état turbulent .

Le nombre de Reynolds fournit un seuil pour déterminer le passage de laminaire à turbulent .

Quand un écoulement devient turbulent il n'a pas de sens de vouloir décrire son évolution dans tous ses détails vu que les fluctuations intéressent toutes les échelles spatiales et temporelles et aussi que ces fluctuations n'ont aucune régularité . On utilisera plutôt un approche probabiliste et on se concentre plutôt sur le mouvement moyen .

<p>Moyenne temporelle :</p> $\bar{\xi} = \frac{1}{T} \int_0^T \xi dt$ <p>avec T une période de temps assez longue pour comprendre un numéro assez grand des fluctuations qu'on veut négliger .</p>	<p>Moyenne spatiale :</p> $\bar{\xi} = \frac{1}{V} \int_V \xi dV$ <p>avec V une région de l'espace avec volume V autour du point d'intérêt assez grande pour englober assez des fluctuations spatiales .</p>
---	--

La moyenne d'ensemble $\langle \xi \rangle(\mathbf{r}, t)$ est définie comme la moyenne dans chaque instant de temps et pour chaque point de l'espace entre les valeurs obtenues par la répétition d'un nombre indéfini de fois de la même expérience .

Dans une situation stationnaire, l'hypothèse d'ergodicité considère $\bar{\xi} = \langle \xi \rangle$ pour permettre d'avoir des informations sur les moyennes d'ensemble à partir d'une seule expérience, à travers de moyennes temporelle ou spatiales .

http://fr.wikipedia.org/hypothèse_ergodique

L'hypothèse ergodique, ou hypothèse d'ergodicité, est une hypothèse fondamentale de la physique statistique. Elle fut formulée initialement par Boltzmann en 1871 pour les besoins de sa théorie cinétique des gaz. Elle

s'appliquait alors aux systèmes composés d'un très grand nombre de particules, et affirmait qu'à l'équilibre, la valeur moyenne d'une grandeur calculée de manière statistique est égale à la moyenne d'un très grand nombre de mesures prises dans le temps. La première valeur est celle que permet de calculer la physique statistique, la seconde est proche de ce qu'on peut expérimentalement mesurer. L'hypothèse ergodique est donc fondamentale pour un bon rapprochement entre la théorie et l'expérience.

Un système pour lequel l'hypothèse ergodique est vérifiée sera qualifié de système ergodique. Dans la plupart des cas, il est très difficile de démontrer rigoureusement si un système est ergodique ou non. L'analyse mathématique de ce problème a donné naissance à la théorie ergodique qui précise la nature mathématique de l'hypothèse et donne des résultats sur ses conditions de validité. Mais l'hypothèse ergodique reste souvent une simple hypothèse, jugée vraisemblable a posteriori quand elle permet de faire des prédictions correctes. En ce sens, elle constitue un point faible de la physique statistique.

L'hypothèse d'ergodicité intervient également en traitement du signal, où elle consiste à admettre que l'évolution d'un signal aléatoire au cours du temps apporte la même information qu'un ensemble de réalisations. Elle est importante dans l'étude des chaînes de Markov, les processus stationnaires et pour l'apprentissage numérique.

Dans l'étude de la turbulence, on aussi considère que cet hypothèse soit valable .

5.3 Approche Eulerienne et Lagrangienne dans la résolution de l'équation de conservation d'un soluté en cas d'écoulement turbulent

Comme vu dans l'introduction, la relation entre dérivé totale par rapport au temps dans un système de référence Lagrangien et les dérivées partielles par rapport au temps et à l'espace dans un système Eulerien est

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$$

L'approche mathématique au problème de l'advection-dispersion peut donc être de deux types :

- schéma Eulerien : on assume un système de référence fixe ; les bilans de quantité de mouvement, d'énergie, de masse dépendent des fluxes du fluide qui traversent le paroi d'un volume V qui est fixe par rapport aux axes de référence . Dans un tel système on intègre les équations d'advection-diffusion .

- schéma Lagrangien : le fluide est interprété comme un ensemble de particules et à chaque particule sont attribuées des caractéristiques propres, comme une certaine concentration de polluant et un comportement aléatoire dans la dynamique ; dans tel schéma on utilise le concept de trajectoire comme le chemin d'une particule imaginaire ; le long des trajectoire sont simulée les transformations que les particules subissent en fonction des conditions ambiantes .

Approche Eulérien

Ce type d'approche est basé sur la résolution de la loi de conservation de la masse de chaque particule d'une certaine espèce (polluant, plancton, sel, etc.) à la quelle est associé une certaine concentration $c(x,y,z,t)$. L'équation de conservation peut s'écrire :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) c = \kappa_s \nabla^2 c + \frac{\xi}{\rho},$$

et on assume que la vitesse \mathbf{v} peut être représenté comme la somme d'une composante moyenne et d'une composante fluctuante (décomposition de Reynolds) :

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'$$

Tandis que $\bar{\mathbf{v}}$ représente la portion de l'écoulement qui peut être décrite avec des mesure expérimentales ou calculé avec de modèles hydrodynamiques, \mathbf{v}' est une variable stochastique qui contient les informations sur la diffusion turbulente et dont la moyenne temporelle est nulle par définition $\overline{\mathbf{v}'} = 0$. De la même façon pour la concentration on écrit

$$c = \bar{c} + c' \quad \text{avec} \quad \overline{c'} = 0$$

Dans les mouvements turbulents en mer on a la superposition de plusieurs échelles temporelles avec une amplitude variable avec continuité et on ne peut donc pas fixer d'une façon univoque intervalle

temporel T . Il dépendra d'une choix arbitraire sur ce qu'on veut considérer mouvement moyen ou pas .

Une fois fixé T selon le problème en examen, on pourra formuler l'hypothèse que il est possible de décomposer le mouvement dans deux composantes :

- le mouvement moyen, lentement variable ;
- le mouvement turbulent, rapidement variable .

Enfin l'hypothèse ergodique comporte que

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \bar{\mathbf{v}} \quad \langle \mathbf{v}' \rangle = \overline{\mathbf{v}'} = 0 \quad \langle c \rangle = \bar{c} \quad \langle c' \rangle = \overline{c'} = 0$$

On remplaçant dans l'équation de conservation on obtient :

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \frac{\partial c'}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') \cdot \nabla (\bar{c} + c') = \kappa_c (\nabla^2 \bar{c} + \nabla^2 c') + \frac{\xi}{\rho}$$

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \frac{\partial c'}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{c} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla c' + \mathbf{v}' \cdot \nabla \bar{c} + \mathbf{v}' \cdot \nabla c' = \kappa_c (\nabla^2 \bar{c} + \nabla^2 c') + \frac{\xi}{\rho}$$

on moyennant toute l'équation et en appliquant les définitions ci-dessous

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{c} + \overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla c'} = \kappa_c (\nabla^2 \bar{c}) + \left\langle \frac{\xi}{\rho} \right\rangle$$

on voit apparaître un "nouveau" terme, qui peut être re-écrit dans la façon suivante

$$\overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla c'} = \overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla c'} + \overline{c' \nabla \cdot \mathbf{v}'} = \nabla \cdot \overline{c' \mathbf{v}'}$$

étant que le terme $\overline{c' \nabla \cdot \mathbf{v}'} = 0$ vu que si on applique la décomposition des vitesse à l'équation de continuité pour un fluide incompressible

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad , \quad \nabla \cdot (\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') = \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} + \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0 \quad \text{avec} \quad \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = \overline{\nabla \cdot \mathbf{v}} = 0 \quad \text{et donc} \quad \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0$$

Le terme $\overline{c' \mathbf{v}'} = \langle c' \mathbf{v}' \rangle$ représente la diffusion turbulente ; la théorie K (ou fermeture newtonienne) suggère de prendre

$$\langle c' \mathbf{v}' \rangle = -\mathbf{K} \nabla \langle c \rangle$$

avec K tenseur diagonale de diffusion turbulente, dont les éléments sont estimés à partir de mesures expérimentales ou modèles : pour ce qui concerne les écoulements océaniques on distingue entre phénomènes horizontaux et phénomènes verticaux et donc

$$\langle c' u' \rangle = -K_H \frac{\partial c}{\partial x} \quad \langle c' v' \rangle = -K_H \frac{\partial c}{\partial y} \quad \langle c' w' \rangle = -K_V \frac{\partial c}{\partial z}$$

ou K_H, K_V sont les coefficients de diffusion turbulente .

Vu que l'ordre de grandeur de ces coefficients est en générale de plusieurs ordres de grandeurs plus grand de celui des coefficients de diffusion moléculaire, le terme relative à ces dernières termes peut être négligé .

La principale différence entre coefficients de diffusion turbulente et moléculaire est que les premiers ne sont pas une caractéristique du fluide mais de l'écoulement ; souvent ils sont déterminés à posteriori pour satisfaire les données expérimentales . Les coefficients de diffusion sont du même ordre de ceux de viscosité turbulente, qui est d'ailleurs la diffusion de la quantité de mouvement .

En considérant par exemple des polluants qui ne se dégradent pas ($\langle \xi / \rho \rangle = \xi / \rho$), l'équation 3.5 devient

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{c} = K_H (\nabla_H^2 \bar{c}) + K_V \left(\frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial z^2} \right) + \left\langle \frac{\xi}{\rho} \right\rangle$$

Les symboles qui indiquent la moyenne temporelle sont négligés, et le même est fait dans la littérature, mais il faut jamais oublier le raisonnement (e.g. décomposition de Reynolds) et les approximations (e.g. fluide incompressible) et les hypothèses (e.g. ergodicité) qui mènent à la formulation des équations de conservation d'un soluté où apparaissent les coefficients de mélange turbulent.

Des solutions de type $\langle c(\mathbf{r}, t) \rangle$ pour cette équation peuvent être trouvées analytiquement avec des opportunes hypothèses de simplification (e.g. stationnarité) ou numériquement, avec différentes méthodes (différences finies, éléments finis, spectrale).

Approche Lagrangien

L'approche Lagrangien est basée sur l'équation de la dispersion d'un certain soluté caractérisé par la concentration $c(x, y, z, t)$:

$$\langle c(\mathbf{r}, t) \rangle = \int_{-\infty}^t \int_V P(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0) \xi(\mathbf{r}_0, t_0) d\mathbf{r}_0 dt_0$$

dans laquelle $P(\mathbf{r}, t | \mathbf{r}_0, t_0)$ est la densité de probabilité de transition qui établit la probabilité que une particule qui se trouve en \mathbf{r}_0 au moment t_0 puisse se retrouver en \mathbf{r} à l'instant t . Comme dans le cas eulérien, cette équation peut être intégrée analytiquement, en assumant pour P une certaine distribution de probabilité (souvent on utilise une gaussienne et on parle de modèles gaussiens) et des simplifications opportunes, ou bien avec une intégration numérique.

7.4 Modèles numériques à particules lagrangiennes

La dispersion peut être simulée avec des modèles à particules lagrangiennes dans deux façons :

- modèles à une seule particule : le mouvement de chaque particule est indépendant de celui des autres ;
- modèles à deux (ou plus) particules : reproduisent la dispersion relative entre les particules.

Dans les modèles à une seule particule, les particules bougent à chaque pas de temps avec une vitesse \mathbf{v}_e équivalente à la vitesse réelle \mathbf{v} . Si \mathbf{v} définit le déplacement d'une particule dans un intervalle de temps $\Delta t = t_2 - t_1$ selon la relation

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t) dt,$$

la vitesse équivalente est définie comme :

$$\mathbf{v}_e = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t) dt.$$

Une estimation de \mathbf{v}_e est faite en utilisant les mesures ou les modèles eulériens de \mathbf{v} en définissant

$$\mathbf{v}_e = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}',$$

où

- $\bar{\mathbf{v}}$ représente la partie déterministe du transport, basée sur les mesures eulériennes de courant ou fournie par un modèle hydrodynamique ;
- \mathbf{v}' représente la vitesse de diffusion, i.e. une perturbation numérique artificielle qui est liée à l'intensité de la turbulence et aux caractéristiques des plus petits tourbillons qui ne sont pas considérés dans le champ moyen.

Pour estimer \mathbf{v}' il y a deux possibilités :

- dans le calcul déterministe on utilise une relation obtenue en partant de l'équation de la théorie K

de la diffusion appliquée dans une maille de grille :

$$\mathbf{v}' = -\frac{\mathcal{K}}{c} \nabla c,$$

ou c est la concentration calculée à partir du nombre de particules dans la maille ;

- dans le calcul statistique il y a par contre une évaluation stochastique de \mathbf{v}' en utilisant des méthodes appelées de type Monte Carlo .

Tiré de http://fr.wikipedia.org/wiki/Méthode_de_Monte-Carlo

On appelle méthode de Monte-Carlo toute méthode visant à calculer une valeur numérique, et utilisant des procédés aléatoires, c'est-à-dire des techniques probabilistes. Le nom de ces méthodes, qui fait allusion aux [jeux de hasard](#) pratiqués à [Monte-Carlo](#), a été inventé en 1947 par [Nicholas Metropolis](#)[1], et publié pour la première fois en 1949 dans un article co-écrit avec [Stanislas Ulam](#)[2].

Les méthodes de Monte-Carlo sont particulièrement utilisées pour calculer des intégrales en dimensions plus grandes que 1 (en particulier, pour calculer des surfaces, des volumes, etc.).

La méthode de simulation de Monte-Carlo permet aussi d'introduire une approche statistique du risque dans une décision financière. Elle consiste à isoler un certain nombre de variables-clés du projet telles que le chiffre d'affaires ou la marge... et à leur affecter une distribution de probabilités. Pour chacun de ces facteurs, on effectue un grand nombre de tirages aléatoires dans les distributions de probabilité déterminées précédemment, afin de déterminer la probabilité d'occurrence de chacun des résultats.

Le véritable développement des méthodes de Monte-Carlo s'est effectué, sous l'impulsion de [John von Neumann](#) et [Stanislas Ulam](#) notamment, lors de la [Seconde Guerre mondiale](#) et des recherches sur la fabrication de la [bombe atomique](#). Notamment, ils ont utilisé ces méthodes probabilistes pour résoudre des équations aux dérivées partielles dans le cadre de la [Monte-Carlo N-Particle transport](#).

En [statistiques](#), étant donné un échantillon aléatoire (Y_i, X_i) , $i = 1, \dots, n$ un modèle de régression simple suppose la [relation affine](#) suivante entre Y_i et X_i :

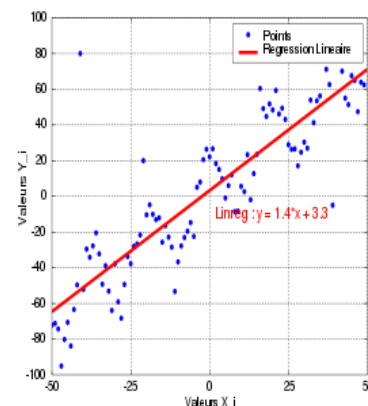
$$Y_i = aX_i + b, \quad i = 1, \dots, n$$

La **régression linéaire** consiste à déterminer une estimation des valeurs a et b et à quantifier la validité de cette relation grâce au **coefficient de corrélation linéaire**. La généralisation à p variables explicatives de ce modèle est donnée par

$$Y_i = a_0 + a_1X_{i1} + a_2X_{i2} + \dots + a_pX_{ip}$$

et s'appelle la [régression linéaire multiple](#).

Tiré de http://fr.wikipedia.org/wiki/Régression_linéaire



Ce deuxième type d'approche est plus flexible et le plus utilisé dans plusieurs domaines .

La distribution de la vitesse des particules qui se dispersent dans un fluide en écoulement turbulent peut être décrite en utilisant les modèles auto-régressifs.

Un processus auto-régressif est un modèle de [régression](#) pour [séries temporelles](#) dans lequel la série n'est expliquée par d'autres variables que par ses valeurs passées.

Le modèle auto-régressifs sont donc des modèles discrètes dans lesquels la valeur de la vitesse à un instant donné est un combinaison linéaire de ses valeurs dans le passé plus un terme aléatoire à l'instant donné .

Un modèle auto-régressif d'ordre p est indiquée avec la sigle $AR(p)$ et dans le cas de notre vitesse

$$\mathbf{v}'_n = \alpha_1 \mathbf{v}'_{n-1} + \alpha_2 \mathbf{v}'_{n-2} + \dots + \alpha_p \mathbf{v}'_{n-p} + \nu$$

avec \mathbf{v} une vitesse stochastique aléatoire .

Modèles auto-régressifs d'ordre zéro ou « random walk »

Dans ce type de modèles on fait l'hypothèse que le mouvement brownien peut être décrit par un modèle auto-régressif d'ordre zéro $AR(0)$ en se disant que la composante stochastique de la vitesse de la particule est purement aléatoire à chaque instant, étant le résultat de collisions aléatoires avec les molécules du fluide, i.e. :

$$\mathbf{v}'_n = \mathbf{v}$$

En utilisant l'analogie entre diffusion moléculaire et diffusion turbulente pour les particules immergées dans fluide en écoulement turbulent, on considère les déplacements dus aux tourbillons comme purement aléatoires . Un modèle numérique qui utilise cette approximation, calcule les déplacements d'une particule dans la façon suivante :

$$\mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_n = \bar{\mathbf{v}}_n \Delta t + \boldsymbol{\mu}_n$$

où $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{v} \Delta t$. À chaque composante de $\boldsymbol{\mu} = (\mu_x, \mu_y, \mu_z)$ on assigne une valeur tirée au sort en respectant une fonction de densité de probabilité choisie .

Modèles auto-régressifs du premier ordre

Un modèle auto-régressif du premier ordre, AR (1), s'applique si on considère les particules de polluant assez petites pour que les molécules qui sont autour produisent des variations aléatoires de leur vitesse, mais aussi assez grandes pour que avertissent le frottement avec les molécules du liquide qui provoque une réduction de leur vitesse.

L'équation du mouvement prend la forme de l'équation stochastique de Langevin

$$\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = -\beta \mathbf{v}' + \mathbf{v}$$

Dans cette équation l'accélération de la particule est séparée en deux termes qui décrivent différemment l'interaction entre chaque particule et le reste du fluide:

$\beta \mathbf{v}'$ décrit le comportement du fluide comme un milieu continu, macroscopique, qui exerce sur la particule une force de frottement proportionnelle à sa vitesse;

\mathbf{v} est un terme représentant le forçage stochastique dû aux collisions, qui décrit donc le comportement du fluide comme un ensemble de variations aléatoires en raison de l'accélération stochastique de la particule.

Le déplacement d'une particule immergée dans un fluide en mouvement avec une vitesse $\bar{\mathbf{v}}$ sera alors donné par la somme de la vitesse de l'écoulement du fluide et de la composante aléatoire décrite par l'équation stochastique de Langevin . Il faudra donc résoudre numériquement le système :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_n &= [\bar{\mathbf{v}}_n + \mathbf{v}'_n] \Delta t \\ \mathbf{v}'_n - \mathbf{v}'_{n-1} &= -\beta [\mathbf{v}'_{n-1} + \mathbf{v}_n] \Delta t \end{aligned}$$

La deuxième équation devient

$$\mathbf{v}'_n - \mathbf{v}'_{n-1} = (1 - \beta \Delta t) \mathbf{v}'_{n-1} + \mathbf{v}_n \Delta t = \Phi \mathbf{v}'_{n-1} + \mathbf{v}_n \Delta t$$

Étant la série $\{\mathbf{v}_n\}$ purement aléatoire et stationnaire et avec moyenne nulle, la moyenne d'ensemble

$$\langle \mathbf{v}'_n \rangle = \Phi \langle \mathbf{v}'_{n-1} \rangle$$

et à l'état stationnaire on aura $\langle \mathbf{v}'_n \rangle = 0$.

La covariance sera

$$\langle \mathbf{v}'_n \mathbf{v}'_{n-1} \rangle = \Phi \langle \mathbf{v}'^2_{n-1} \rangle$$

étant donné que le terme $\langle \mathbf{v}_n \mathbf{v}'_n \rangle = 0$, puisque \mathbf{v} est indépendant de \mathbf{v}' .

À l'état stationnaire, en appelant la covariance $C_o = \langle \mathbf{v}'^2_n \rangle$ la formule précédente peut être écrite dans la forme

$$C_1 = \Phi C_o$$

et plus en générale

$$C_k = \Phi C_{k-1} \text{ ou bien } C_k = \Phi^k C_o$$

On peut définir un coefficient de corrélation

$$\rho_k = \frac{C_o}{C_k} = \Phi^k$$

qui, puisque $|\Phi| < 1$, aura l'évolution montrée en figure ci-contre

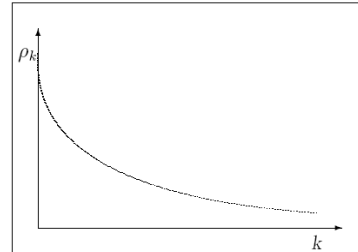


Figura 3.4: Andamento del coefficiente di correlazione.

La variance de $\{\mathbf{v}'_n\}$ est liée à celle de $\{\mathbf{v}_n\}$ par la relation suivante dans laquelle $2\Phi \langle \mathbf{v}_n \mathbf{v}'_{n-1} \rangle = 0$

$$\langle \mathbf{v}'^2_n \rangle = \Phi^2 \langle \mathbf{v}'^2_{n-1} \rangle + \langle \mathbf{v}^2_n \rangle \text{ ou bien } \langle \mathbf{v}'^2_n \rangle = \frac{1}{1-\Phi^2} \langle \mathbf{v}^2_n \rangle$$

La série $\{\mathbf{v}'_n\}$ peut donc être calculé par itération :

$$\begin{aligned} v'_1 &= \Phi v'_o + v_1 \\ v'_2 &= \Phi^2 v'_o + \Phi v_1 + v_2 \\ &\dots \\ v'_n &= \Phi^n v'_o + \sum_{i=0}^{n-1} \Phi^i v_{n-i} \end{aligned}$$

mais puisque Φ^n décroît rapidement, v_n perd rapidement mémoire de son état initial. Asymptotiquement (en régime stationnaire) on aura

$$v'_n \approx \sum_{i=0}^{\infty} \Phi^i v_{n-i}$$

La série $\{\mathbf{v}'_n\}$ tend donc à être une moyenne mobile pesée exponentiellement sur l'histoire passée de $\{\mathbf{v}_n\}$.

7.5 Implémentation d'un modèle « random walk » et d'un modèle d'advection-diffusion

Pour le moment on considère vitesse moyenne nulle, en se mettant vraiment dans les conditions comparable à la diffusion d'une goutte d'encre dans un verre d'eau.

On aura alors que notre modèle est simplement

$$\mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_n = \boldsymbol{\mu}$$

Il faut maintenant calculer $\boldsymbol{\mu}$.

De vrais nombres aléatoires peuvent être produits avec du matériel qui tire parti de certaines propriétés physiques stochastiques (e.g. bruit d'une résistance), mais cela serait peu pratique pour un code numérique. Alors on utilise des générateur de nombres pseudo-aléatoires, *pseudorandom number generator* (PRNG) en anglais, qui est un algorithme qui génère une séquence de nombres présentant certaines propriétés du hasard. Par exemple, les nombres sont supposés être approximativement indépendants les uns des autres, et il est potentiellement difficile de repérer des groupes de nombres qui suivent une certaine règle (comportements de groupe). Cependant, il faut pas

oublier que les sorties d'un tel générateur ne sont pas entièrement aléatoires ; elles s'approchent seulement des propriétés idéales des sources complètement aléatoires. [John von Neumann](#) insista sur ce fait avec la remarque suivante : « Quiconque considère des méthodes arithmétiques pour produire des nombres aléatoires est, bien sûr, en train de commettre un péché ». Une analyse mathématique rigoureuse est nécessaire pour déterminer le degré d'aléa d'un générateur pseudo-aléatoire.

Les méthodes pseudo-aléatoires sont souvent employées sur des ordinateurs, dans diverses tâches comme la [méthode de Monte-Carlo](#), la simulation ou les applications [cryptographiques](#).

La plupart des algorithmes pseudo-aléatoires essaient de produire des sorties qui sont uniformément distribuées, typiquement avec distribution de probabilité uniforme entre les valeurs 0 et 1, tandis que pour la diffusion dans un liquide on a plutôt nécessité de avoir une densité de probabilité gaussienne.

Afin d'obtenir un tirage gaussien, d'espérance et d'écart type paramétrable, une manipulation du tirage uniforme est à effectuée :

Une variable r possède une distribution de probabilité uniforme, entre 0 et 1. On définit une variable $r' = r - 1/2$, qui aura alors une distribution de probabilité uniforme entre $-1/2$ et $1/2$, une moyenne $\langle r' \rangle = 0$ et une variance :

$$\sigma^2 = \int_{-1/2}^{+1/2} r'^2 \cdot dr = \left[\frac{r'^3}{3} \right]_{-1/2}^{+1/2} = 1/12$$

Considérons maintenant la variable R définie tel que

$$R = \sum_{i=1}^n r'_i$$

$$\langle R \rangle = \sum_{i=1}^n \langle r'_i \rangle$$

On a donc

$$\sigma_R^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_{r'_i}^2$$

En sommant des nombres r' tirés uniformément entre $-1/2$ et $+1/2$, on change la distribution de probabilité : une suite de n variable aléatoire indépendante (comme R) tend pour $n \rightarrow \infty$ à une distribution gaussienne $G(\langle R \rangle, \sigma^2)$. Lorsque n est grand, R a effectivement plus de chance d'être égale à 0 qu'à $1/2$ (où il faudra n tirages de r' égal à $1/2$!).

Si nous prenons $n=12$, nous avons $\langle R \rangle = 0$ et $\sigma_R^2 = 1$, nous tombons sur le théorème centrale limite.

$$g = \left[\sum_{i=1}^{12} r'_i \right] \cdot \sigma$$

Nous pouvons calculer maintenant le nombre g tel que

Le nombre g est alors un nombre tiré d'une distribution de probabilité gaussienne approximativement avec une moyenne nulle et un écart type σ , comme le montre la figure 1.

```

devst=10;
imax=1000;

for j=1:imax
    g=0;
    for i=1:12
        r=rand(1);
        g=g+(r-0.5);
    end
    gg(j)=g.*devst;
end

edges=[-100:1:100];
N=histc(gg,edges);
bar(edges,N./imax,'histc')

var=devst^2;
y=1/sqrt(2*pi*var).*exp(-edges.^2/(2*var));

line(edges,y,'color','r')
    
```

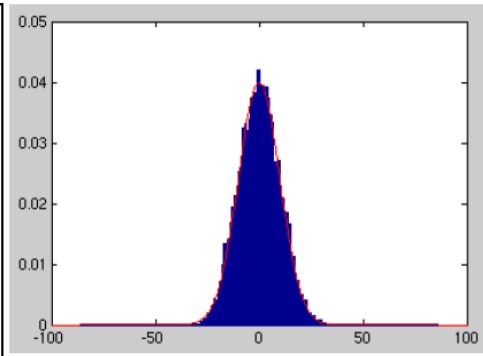


Figure 1 : Comparaison de l'histogramme de gg (en bleu) avec y une gaussienne théorique (en rouge)

Marche aléatoire à deux dimensions d'espace

Afin de simplifier la modélisation du mouvement brownien, nous considérerons tout le long de notre étude un espace à deux dimensions spatiale seulement. Considérons le cas d'une seule particule isolée pour l'instant. Cette particule décrit une marche aléatoire quand chaque pas est de direction aléatoire et de longueur aléatoire. Par exemple si l'on note (xi, yi) les coordonnées du point après i pas, alors le (i+1) ème pas est tel que :

$$x(i+1)=x(i)+depx$$

$$y(i+1)=y(i)+depy$$

où depx et depy sont des variables aléatoires tirées de la distribution gaussienne énoncée auparavant, centrée en 0 et d'écart type 1 (devst dans le code). Le chemin parcouru par la particule est une marche aléatoire à pas indépendants que l'on peut visualiser sur la figure suivante

```

figure(1);hold on;
devst=1;
x(1)=0;
y(1)=0;
itmax=300;

for it=2:itmax
    g=0;
    for j=1:12
        r=rand(1);
        g=g+(r-0.5);
    end
    depx=g.*devst;
    g=0;
    for j=1:12
        r=rand(1);
        g=g+(r-0.5);
    end
    depy=g.*devst;

    x(it)=x(it-1)+depx;
    y(it)=y(it-1)+depy;
end

line(x,y)
hold off;
    
```

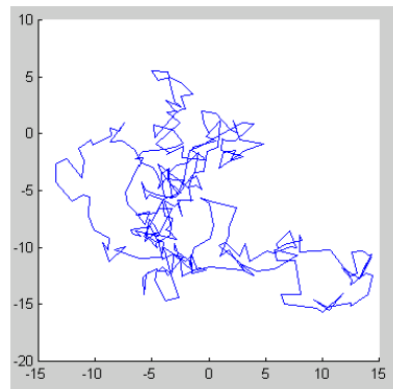


Figure 2 : Marche aléatoire d'une particule dans un espace à 2 dimensions

Il suffit d'implémenter une boucle supplémentaire afin de modéliser le mouvement de plusieurs particules indépendantes (ipmax représente le nombre de particules).

```

figure(1);hold on;
ipmax=10;

for ip=1:ipmax
    --
    script précédent
    --

    line(x,y,'color',[ip/ipmax 0 1-ip/ipmax])

    text(20,30-ip*4,num2str(ip),
        'color',[ip/ipmax 0 1-ip/ipmax])
end

axis([-40 40 -40 40])

hold off;
    
```

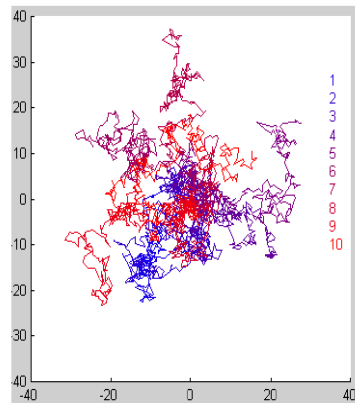


Figure 3 : Marche aléatoire de 10 particules indépendantes

Calcul de la concentration spatiale

On a obtenu le tracé de plusieurs particules, au cours du temps. Nous souhaitons cependant axer notre étude sur le phénomène de diffusion. Pour ce faire, il est utile d'imaginer un petit domaine, de forme arbitraire, entourant un espace où les particules peuvent diffuser. Nous avons choisis ici un carrée, de côté 100 unités arbitraires (la matrice CONC dans le code). Nous voulons donc afficher la concentration dans l'espace à chaque instant it. Pour cela, il faut d'abord inverser la boucle temporelle (it dans le code) avec la boucle sur les particules (ip dans le code). Ensuite nous centrons initialement toutes les particules en (50,50) (pour it=1) et nous les faisons bouger (d'un déplacement depx et depy).

```

devat=1;ipmax=4;itmax=10;
xold(1:ipmax)=50;
yold(1:ipmax)=50;

for it=1:itmax
    CONC=zeros(100,100);

    for ip=1:ipmax
        q=0;
        for i=1:12
            r=rand(1);
            g=q+(r-0.5);
            and
            depx=g.*devat;

            q=0;
            for i=1:12
                r=rand(1);
                g=q+(r-0.5);
                and
                depy=g.*devat;

            xnew(ip)=xold(ip)+depx;
            ynew(ip)=yold(ip)+depy;

            if xnew(ip)<1 | xnew(ip)>100 | ynew(ip)<1 |
            ynew(ip)>100

                xnew(ip)=xold(ip);
                ynew(ip)=yold(ip);
            end

            ii=fix(xnew(ip));
            jj=fix(ynew(ip));
            CONC(jj,ii)=CONC(jj,ii)+1;

            xmem(ip)=xnew(ip);
            ymem(ip)=ynew(ip);

            xold(ip)=xnew(ip);
            yold(ip)=ynew(ip);

        end %pour ip

        figure(1);hold on;
        grid;
        contour(CONC)

        plot(xmem,ymem,'k+')
        waitforbuttonpress
        clf;

    end %pour it

```

A chaque instant it, on compte combien il y a de particules dans chaque maille de grilles (CONC dans le code).

On remarque sur la figure un léger décalage des iso lignes de concentration, par rapport aux positions réelles des particules (croix noire). Ceci parce que l'on rapporte toutes les particules d'une maille de grille (de i à i+1, et de j à j+1) à un point de coordonnée (i,j). Mais avec un très grand nombre de particule, ceci n'a plus d'importance

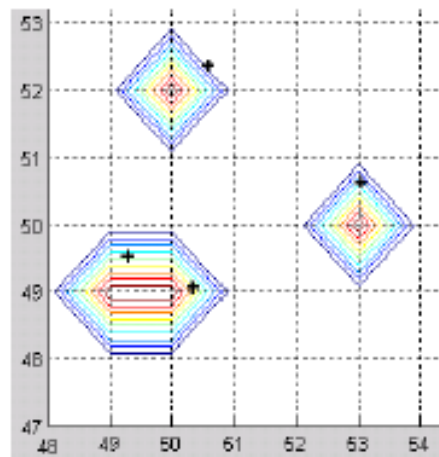


Figure 4 : Calcul de la concentration dans notre espace à l'instant it=1

Il ne nous reste maintenant plus qu'à augmenter le nombre de particules représentant la goutte d'encre.

La figure 5 montre 9 étapes de la diffusion d'une goutte d'encre au cours du temps. La goutte d'encre est d'abord centrée en (50,50), puis diffuse dans la boîte.

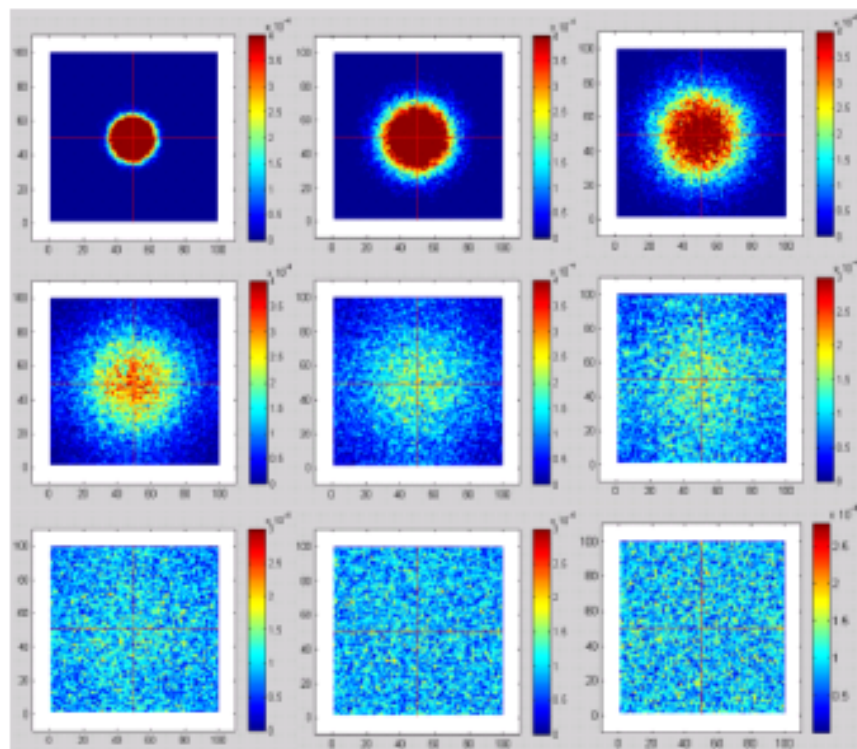


Figure 5 : Diffusion d'une goutte d'encre dans de l'eau

En suivant la concentration le long de l'axe horizontal et vertical (croix rouge sur la figure 5), et en la comparant avec la gaussienne théorique, on obtient la figure 6.

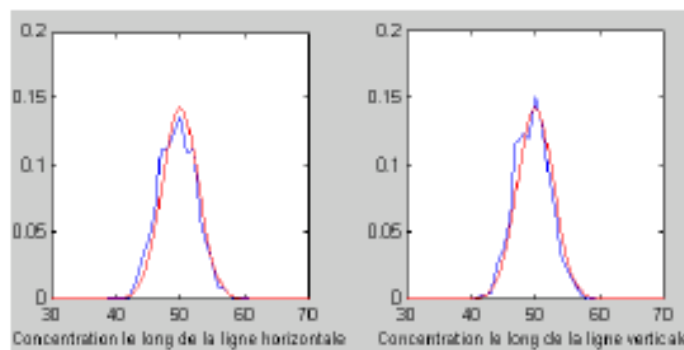


Figure 6 : Concentration (courbe en bleu) le long d'un axe horizontal (à gauche) et vertical (à droite) comparée à la gaussienne théorique (en rouge) à l'instant $t=300$

La figure 2 nous montre la marche aléatoire d'une particule brownienne. Bien que toutes les directions soient équivalentes, la marche aléatoire ne révèle aucune isotropie. En fait la marche aléatoire n'est que statistiquement isotrope ; c'est-à-dire que l'isotropie ne se révèle que sur un grand nombre de marches. C'est ce que nous dévoile la figure 5 qui nous montre l'évolution d'une goutte d'encre plongée dans un fluide. Nous constatons aisément que cette goutte d'encre diffuse au cours du temps, c'est-à-dire qu'elle se répand, se propage, jusqu'à obtenir un espace idéologiquement homogène. Nous constatons maintenant que l'étalement ne suit pas une direction particulière mais toutes les directions de l'espace. L'isotropie se révèle macroscopiquement car il s'agit d'une propriété statistique. Nous pouvons constater également sur la figure 5 que l'étalement de la goutte d'encre diminue au cours du temps. Effectivement, l'équation de diffusion proposé par A. Fick est :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = k_s \cdot \nabla^2 S + \xi$$

Avec k_s coefficient de diffusion, ∇^2 opérateur Laplacien, ξ la source et le puit.

Lorsqu'il n'y a pas de source ni de puit, $\xi=0$, une solution possible de l'équation de diffusion est :

$$K(x,t) = \frac{1}{(4 \cdot \pi \cdot k_s \cdot t)^{1/2}} \exp^{-r^2 / (4 \cdot k_s \cdot t)} \quad (1)$$

Où $r^2=x^2$ (pour un espace à 1 dimensions)

Cette solution représente une gaussienne tridimensionnelle de variance

$$\sigma^2 = 2 \cdot k_s \cdot t$$

L'écart-type σ est proportionnel à la racine carrée du temps, fonction dont la croissance est très forte avant de devenir quasi nulle. Au cours du temps, l'écart type va augmenter rapidement, c'est ce qui va faire diffuser notre goutte d'encre. L'écart-type augmente de moins en moins rapidement d'où une diffusion de plus en plus lente. En remplaçant le terme $2 \cdot k_s \cdot t$ par σ^2 dans l'équation 1, nous obtenons une gaussienne de formule :

$$f_x = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{2 \cdot \sigma^2}\right) \quad (2)$$

Les courbes de la figure 6 permettent de comparer la densité des particules le long de l'axe horizontal et vertical de la boîte avec la distribution théorique que l'on souhaite observée, à partir de l'équation gaussienne (2) (en prenant $r^2=(x-50)^2$ pour centrer la gaussienne en 50).

Maintenant on se focalise sur la partie d'advection.

L'équation qu'il faut résoudre numériquement pour un modèle lagrangien à 1 seule particule est

$$\frac{dX}{dt} = V_a(X, t) + V_d(X, t)$$

avec X position de la particule, Va vitesse d'advection et Vd vitesse stochastique liée à la turbulence.

En considérant maintenant $V = V_a + V_d$ et en mettant l'équation en forme intégrale on a

$$X(t^{n+1}) = X(t^n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} V(X, t) dt \quad (1)$$

plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour résoudre cette équation.

Here Δt is the time step with $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ and n is the time index such that $t^n = n \Delta t$

Méthode d'Euler

Cette méthode est largement utilisée car très simple à coder. En générale on écrit le schéma numérique dans la forme

$$X^{n+1} = X^n + V(X^n, t^{n+1}) \Delta t$$

Un avantage de cette méthode est que on a besoin d'un seul champs de vitesse (la vitesse a un instant donné), i.e. $V(X, t^{n+1})$.

En pratique pour une particule qui se trouve dans une certaine position il faut interpoler le champ de vitesse des quatre points de grille qui l'entourent.

Une méthode est celle de effectuer une moyenne pesée par rapport à la distance entre la particule et les points de grille.

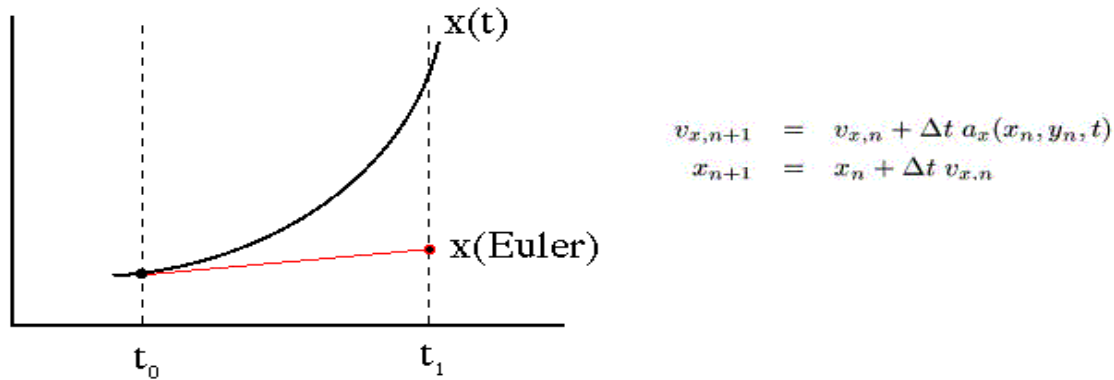
Les coefficients, ou poids (*weight*), sont proportionnels à l'inverse de la distance et peuvent être calculés avec la formule suivante

$$v_{det} = w_1 v_{i,j}^{mike} + w_2 v_{i+1,j}^{mike} + w_3 v_{i+1,j+1}^{mike} + w_4 v_{i,j+1}^{mike},$$

I pesi w_k ($k = 1, 2, 3, 4$), inversamente proporzionali alla distanza d_k dai corrispondenti punti di griglia, vengono calcolati mediante la formula numerica

$$w_k = \frac{d_1 d_2 d_3 d_4}{d_k (d_1 d_2 d_3 + d_1 d_3 d_4 + d_1 d_2 d_4 + d_2 d_3 d_4)} \quad \text{con } k = 1, 2, 3, 4.$$

Le défaut principal de la méthode d'Euler est sa faible précision (ordre 1) qui fait que les trajectoires peuvent s'écarter rapidement de la solution exacte si le pas de temps n'est pas assez petit.



<http://rainman.astro.uiuc.edu/ddr/ddr-galaxy/parameters.html>

La methode de Runge-Kutta

Les méthodes de Runge-Kutta sont des méthodes d'analyse numérique d'approximation de solutions d'équations différentielles. Elles ont été nommées ainsi en l'honneur des mathématiciens Carl Runge et Martin Wilhelm Kutta lesquels élaborèrent la méthode en 1901.

Ces méthodes reposent sur le principe de l'itération, c'est-à-dire qu'une première estimation de la solution est utilisée pour calculer une seconde estimation, plus précise, et ainsi de suite.

Selon le nombre d'itérations on parle d'ordre différent. La méthode de Runge-Kutta d'ordre 1 (RK1) est équivalente à la méthode d'Euler.

La méthode de Runge-Kutta classique d'ordre quatre est un cas particulier d'usage très fréquent. Dénomé RK4, il peut être écrit de la façon suivante :

$$X^{n+1} = X^n + \frac{1}{6} (a + 2b + 2c + d)$$

avec

$$a = \Delta t \left[V(X^n, t^n) \right]$$

$$b = \Delta t \left[V \left(X^n + \frac{1}{2} a, t^n + \frac{\Delta t}{2} \right) \right]$$

$$c = \Delta t \left[V \left(X^n + \frac{1}{2} b, t^n + \frac{\Delta t}{2} \right) \right]$$

$$d = \Delta t \left[V(X^n + c, t^{n+1}) \right]$$

L'idée est que la valeur suivante (X_{n+1}) est approchée par la somme de la valeur actuelle (X_n) et du produit de la taille de l'intervalle Δt par la pente estimée (i.e. la vitesse, qui est la dérivée de la position). La pente est obtenue par une moyenne pondérée de différentes pentes :

a est le déplacement basé sur la pente au début de l'intervalle ;

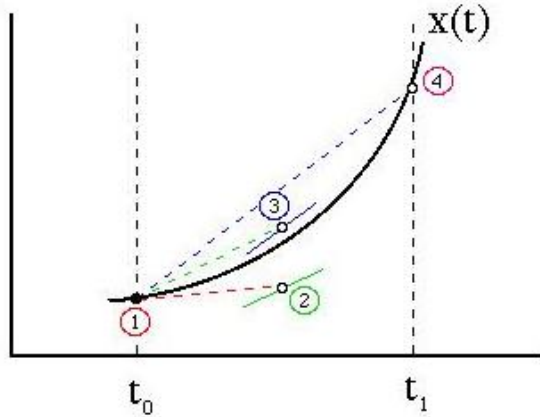
b est le déplacement basé sur la pente au milieu de l'intervalle de temps et au point au milieu du déplacement a calculé par le biais de la méthode d'Euler ;

c est de nouveau le déplacement basé sur la pente au milieu de l'intervalle de temps, mais au point obtenu cette fois en utilisant le déplacement b ;

d est le déplacement à la fin de l'intervalle basé sur la pente au milieu de l'intervalle de temps et au point au milieu du déplacement c .

Dans la moyenne des quatre pentes, un poids plus grand est donné aux pentes au point milieu.

$$\text{pente} = (a + 2b + 2c + d)/6.$$



$$\begin{aligned}
 dx1 &= \Delta t v_{x,n} \\
 dv_{x1} &= \Delta t a_x(x_n, y_n, t) \\
 dx2 &= \Delta t (v_{x,n} + \frac{dv_{x1}}{2}) \\
 dv_{x2} &= \Delta t a_x(x_n + \frac{dx1}{2}, y_n + \frac{dy1}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}) \\
 dx3 &= \Delta t (v_{x,n} + \frac{dv_{x2}}{2}) \\
 dv_{x3} &= \Delta t a_x(x_n + \frac{dx2}{2}, y_n + \frac{dy2}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}) \\
 dx4 &= \Delta t (v_{x,n} + dv_{x3}) \\
 dv_{x4} &= \Delta t a_x(x_n + dx3, y_n + dy3, t + \Delta t) \\
 x_{n+1} &= y_n + \frac{dx1}{6} + \frac{dx2}{3} + \frac{dx3}{3} + \frac{dx4}{6} \\
 v_{x,n+1} &= v_{x,n} + \frac{dv_{x1}}{6} + \frac{dv_{x2}}{3} + \frac{dv_{x3}}{3} + \frac{dv_{x4}}{4}
 \end{aligned}$$

<http://rainman.astro.uiuc.edu/ddr/ddr-galaxy/parameters.html>

La méthode RK4 est une méthode d'ordre 4, ce qui signifie que l'erreur commise à chaque étape est de l'ordre de h⁵, alors que l'erreur totale accumulée est de l'ordre de h⁴.

Le problème est que cette méthode nécessite des vitesses au temps intermédiaires entre 2 pas temporels. Alors il faut ne pas seulement interpoler sur l'horizontale mais aussi dans le temps. L'interpolation dans le temps doit aussi assurer la même précision que celle de la méthode d'intégration. Alors une interpolation du 4eme ordre est

$$V^{\frac{n+1}{2}}(X) = \frac{5}{16} V^{n+1}(X) + \frac{5}{16} V^n(X) - \frac{5}{16} V^{n-1}(X) + \frac{1}{16} V^{n-2}(X)$$

Du point de vu informatique cela implique que il faut garder aussi en mémoire plus d'information, pratiquement tout les quatre champs de vitesses pour la durée de la simulation, parce que on peut pas savoir a priori où ira la particule, et donc avoir plus de mémoire vive.

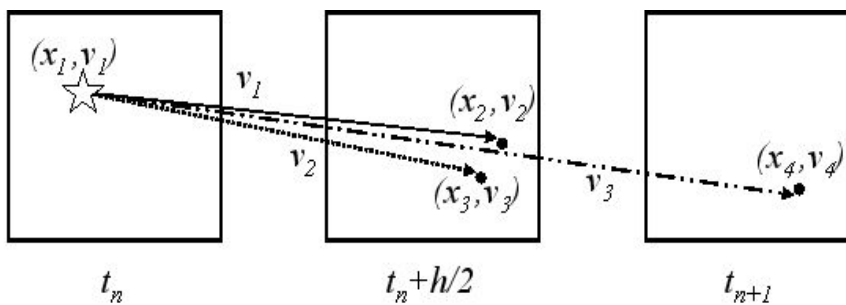


figure de M.Berta

La méthode de Adams-Bashford-Multon (ABM)

Cette méthode est basée sur 2 étapes : une partie prédictive (Adams-Bashford method) et une partie corrective (Adams-Multon method).

La partie prédictive s'obtient en faisant une interpolation polynomiale de la variable V(X,t) à travers les points Xn, Xn-1, Xn-2 et Xn-3 et après en intégrant l'équation (1) entre Xn et Xn+1

$$\tilde{X}^{n+1} = X^n + \frac{\Delta t}{24} (55V^n - 59V^{n-1} + 37V^{n-2} - 9V^{n-3}) \tag{6}$$

La partie corrective s'obtient en faisant une interpolation polynomiale de la variable V(X,t) à travers les points ~Xn+1 (que on vient de calculer), Xn, Xn-1 et Xn-2 et en intégrant l'eq(1) entre Xn et Xn+1

$$X^{n+1} = X^n + \frac{\Delta t}{24} (9\tilde{V}^{n+1} + 19V^n - 5V^{n-1} + V^{n-2}) \quad (7)$$

where $\tilde{V}^{n+1} = V(\tilde{X}^{n+1}, t^{n+1})$.

La méthode ABM est du 4 ordre et son erreur est donc du 5 ordre.

Avec l'expansion en série de Taylor on peut déduire les erreurs sur la partie prédictive

$$X(t^{n+1}) - \tilde{X}^{n+1} \approx \frac{251}{720} X^{(5)n} (\Delta t)^5 \quad (8)$$

et sur la partie correctrice

$$X(t^{n+1}) - X^{n+1} \approx -\frac{19}{720} X^{(5)n} (\Delta t)^5 \quad (9)$$

avec $X(t^{n+1})$ à indiquer le vrai valeur

En mettant ensemble les eq 8 et 9

$$X(t^{n+1}) = \frac{251}{270} X^{n+1} + \frac{19}{720} \tilde{X}^{n+1} \quad (10)$$

Combine Eq. (6), (7) and (10), we can finally derive the advanced ABM scheme.

$$X^{n+1} = \frac{1}{270} \left[19\tilde{X}^{n+1} + 251 \left[X^n + \frac{\Delta t}{24} (9\tilde{V}^{n+1} + 19V^n - 5V^{n-1} + V^{n-2}) \right] \right] \quad (11)$$

Here \tilde{X}^{n+1} is computed using Eq. (6). Special attention should be concerned that the scheme is not self starting. Therefore the RK method is needed to initiate the scheme, i.e. the locations in the first four time step are computed using the RK method.

One velocity field $V(X, t^{n+1})$, the previous particle position X^n and four previous particle velocities ($V(X^n, t^n)$, $V(X^{n-1}, t^{n-1})$, $V(X^{n-2}, t^{n-2})$ and $V(X^{n-3}, t^{n-3})$) are needed to calculate the new particle position. In a 3D flow field, the total internal memory usage for the advanced ABM scheme is as (memory $\leq N_x + 15N_p$ words).

In general, the storage for the field information is much greater than the number of particles. Therefore, on memory considerations alone, the Euler scheme and the advanced ABM scheme are much less required than the RK scheme.

During one timestep particle integration, the Euler scheme only need to evaluate one new function, however, the RK scheme involves four velocity evaluations, and the advanced ABM scheme adds one velocity evaluation. Therefore, on numerical computation considerations alone, the Euler scheme is the most efficient scheme. And the advanced ABM scheme is efficiently faster than the RK scheme.

5.6 Modélisation couplée physique/biogéochimie

Les modèles à particules lagrangiennes couplés avec des modes de circulation sont très efficaces dans les études sur le rôle des différents processus physiques et leur interactions dans le transport sur une large gamme d'échelles. En effet, la technique Lagrangienne permet d'ajouter relativement facilement différents processus. A partir de la simple advection, on peut ajouter linéairement la diffusion sous maille et le comportement biologique selon différents degrés de complexité.

Comme souligné par Miller_07 dans un papier de révision sur les applications des modèles IBM

Individual Based Models à des étude sur le recrutement des poisson ces modèles snt souvent défini comme *coupled physical–biological models*, mais, mis à part quelque cas (e.g. Hinckley96, Mullon03, Guizen06), le couplage des simulation numérique est typiquement en mode *offline* pour des raison de cout computationnel.

In this scheme, runs of the hydrodynamic model are completed and output is stored at set intervals. Then the IBM uses stored velocity data to move and track individual eggs and larvae throughout the model domain.

Adopting this approach it becomes crucial to provide subgrid-scale resolution of fluid flows. Indeed the horizontal and vertical spatial resolution of the hydrodynamic models are several orders of magnitude larger than the length scales of larvae.

Early models used a simple scheme that updates the position of tracked particles based on spatially interpolated model velocities with small random components.

As the field has developed, the particle tracking algorithms have become more sophisticated, with increasing attention being paid to the statistical aspects of the subgrid-scale motion. The stochasticity at subgrid scales creates an ensemble of trajectories for each starting location depending on the small-scale features of the flow critical for eggs and larva.

Then, individual particle movements are tracked offline with Lagrangian Statistical Models (LSM), assuming that the evolution of particle velocity and position in non-homogeneous, non-stationary turbulence can be represented as a Markovian process (e.g. Griffa 1996).

Generally a zero order Markovian process is adopted, also if recently some authors choose higher order (e.g. Paris et al. 07), to take into account the rotation of trajectories driven by submesoscale coherent vortices .

The Lagrangian single-particle tracking algorithms for a zero order Markovian process, are based on the following equation:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u} + \vec{u}' + \vec{u}_{larva} \quad (1)$$

where $\vec{x} \equiv (x, y, z)$ is the 3D location, t is the time, $\vec{u} \equiv \vec{u}(\vec{x}, t)$ is the flow velocity at the resolved scale, $\vec{u}' \equiv \vec{u}'(\vec{x}, t)$ is the subgrid-scale fluctuating turbulent component of the velocity field and $\vec{u}_{larva} \equiv \vec{u}_{larva}(\vec{x}, t)$ is the individual larva's velocity.

In the following we present a review of several papers to compare the different approaches to solve (1), as schematically presented in Table 4.1

Markovian process order

> 0 <i>Paris07</i>	= 0 other all
-----------------------	------------------

U from ADCP data & linear interpolation

<i>Heat94</i>

U from eulerian model

Horizontal interpolation linear <i>Miller98 finite elements</i> <i>Cianelli07</i>	Vertical interpolation linear <i>Lett07 SIGMA</i> <i>Cianelli07</i>	Temporal interpolation	
		None <i>Speirs06</i> <i>Lett07</i> <i>Cianelli07</i> <i>Paris07</i>	linear <i>Miller98</i> <i>Lett08</i>

U' horizontal

nodiffusion <i>Lett07</i> <i>Allain03</i> <i>Cianelli07</i>	white noise <i>Speirs06</i>	randow walk <i>Guizen06 gaussianeulerian</i> <i>s proportionale eulerian</i> TKE <i>Lett08, Peliz07</i> <i>disstrate+unresolvescale</i>
--	--------------------------------	--

U' vertical

nodiffusion <i>Lett07</i> <i>Allain03</i> <i>Cianelli07</i>	randow walk <i>Guizen06 from</i> <i>a gaussian with sigma</i> <i>proportional to</i> <i>eulerian TKE</i>	no-naif random walk <i>Peliz07</i> <i>Lett08 following</i> <i>Visser07 con cubic</i> <i>spline interp of diffusivity</i>	inertial eddies??? <i>Heat94</i>
--	--	--	-------------------------------------

ULARVA

<i>ontogenic changes+sensitivity to the light+interindividual variability (Guizen)</i>
--

schemes

Euler <i>Guizen06</i> <i>Lett07</i> <i>Lett08</i>	Adams-Bashford-Multon <i>Carr06</i> <i>Lett07</i> <i>Peliz07</i>	RungeKutta <i>Lett08</i>
--	---	-----------------------------

coupling with thermohydrodynamics

<i>Lett07, Lett08, Hinckley96, Mullon03</i>

AGRIF

<i>Peliz07</i>

The deterministic resolved-scale velocity $\vec{u} \equiv \vec{u}(\vec{x}, t)$ is generally provided by an Eulerian model also if some authors obtained it directly from in situ data (Heat et al., 94). In both case, an interpolation of these data is necessary to obtain a value in each particle position from gridded data at each Lagrangian timestep.

Regarding horizontal interpolation, generally a linear one is done.

For example, Miller (98) interpolated from a finite triangular elements grid, while more frequently is performed an interpolation from a orthogonal curvilinear grid such as the one of ROMS model (e.g. Carr et al., Lett et al.) or SYMPHONIE model (Cianelli et al.). Moreover, Peliz et al (04) adapted AGRIF package (<http://www-lmc.imag.fr/MOISE/AGRIF/>) to manage the communication of floats

through the different nested model domains.

In the vertical an interpolation is necessary too, in particular from terrain-following coordinate Eulerian models. Again a linear interpolation is generally adopted (e.g. Lett07, Cianelli07) .

In temporal dimension, some author proposed a linear interpolation when the time interval of the Lagrangian module is shorter than Eulerian model one (Miller98) but frequently the interpolation is not performed (Speirs, Lett, Cianelli, Paris) .

In this case, as pointed out by Guizen, the Lagrangian-model integration timestep is constrained by 2 factors.

Table 4.1

First, it depends on Stokes number, i.e. the ratio of the particle to fluid response times.

Second, fluctuating velocities should be updated every time a larva encounters a new eddy. This particle-eddy interaction time can be defined as the minimum between the eddy life time and the eddy transit time through a cell. The authors estimate that the particle-eddy interaction time is the transit time of fast moving surface waves through a cell, i.e. close to the barotropic mode timestep of the 3D eulerian model. Then, theoretically the integration timestep for Eq. (1) should be lower than this particle-eddy interaction time. At the same time, several studies in physical oceanography suggest methods to evaluate error and sensitivity to time sampling for off line lagrangian particles, using for example [Finite Liapunov Exponents](#) ({{:Judicone_etal_OceanModel02_SensitivityNumericalTracerTrajectories.pdf}) or the ensemble-averaged position deviations from a reference case ({{:Valdivieso_Blanke_OceanModel04_lagrangianmethodsClimatologyTrajectoryError.pdf}).

In practice, Guizen06 integrated Eq.(1) over the baroclinic timestep, considering that however i) the circulation flow velocity and the larva's own velocity vary slowly and ii) the turbulent velocities provided by the Eulerian model are averaged over the baroclinic timestep.

The subgrid-scale fluctuating turbulent component of the velocity field $\vec{u}' \equiv \vec{u}'(\vec{x}, t)$ is sometime completely neglected in zooplankton studies and Lagrangian particles treated as purely passive particles (Lett07, Allain03, Cianelli07). Other authors simulate the horizontal subgrid turbulence as a white noise (Speirs06). In Guizen06 the turbulent velocity both in horizontal and vertical is obtained by randomly sampling a Gaussian distribution with standard deviation $\sqrt{2k/3}$ where k is the Turbulent Kinetic Energy provided by the eulerian model (in this specific case by the Gaspar et al, 1990, turbulence closure submodel).

A more sophisticated model is developed by Peliz04, and successively adopted by Lett08, as regarding the horizontal diffusion. Indeed, horizontal diffusion is based on a random component introduced to the horizontal velocity vector using

$$|\vec{u}'| = \delta \sqrt{2 K_h / \Delta t}$$

where $\delta \in [-1, 1]$ is a real uniform random number and K_h is the imposed explicit Lagrangian horizontal diffusion of the form $K_h = \epsilon^{1/3} l^{4/3}$ where l is the unresolved subgrid scale (taken as the cell size) and $\epsilon = 10^{-9} \text{ m}^2 \text{ s}^{-3}$ is the turbulent dissipation rate (e.g., Monin and Ozmidov, 1981).

In the vertical Peliz04 compute the random fluctuation associated with unresolved vertical turbulent fluxes:

$$w' = \delta \sqrt{\frac{2K}{1/3 \Delta t} + \frac{dK}{dz}}$$

where K is the vertical heat turbulent diffusivity taken from the KPP (Large et al., 1991) turbulent closure submodel. According to Ross and Sharples (2004) a correct implementation of this equation

requires a timestep constraint $\Delta t \ll \min \left(1 / \left| \frac{d^2 K}{dz^2} \right| \right)$. This implies that the Lagrangian model has

to be implemented in a sub-timestep relative to the main baroclinic model timestep.

In the vertical Lett08 implemented a so-called “no-naive” random walk (Visser97) where with respect to classical random walk model a correction term to make the random walk consistent with the physical description of non-uniform diffusivity.

$$z_{n+1} = z_n + K'(z_n) \delta t + R \{ 2r^{-1} K [z_n + 1/2 K'(z_n) \delta t] \delta t \}^{1/2}$$

where $K' = \delta K / \delta z$ represent the gradient of diffusivity.

Concerning the individual larva's velocity $\vec{u}_{larva} \equiv \vec{u}_{larva}(\vec{x}, t)$, the reader is referred to the previous paragraph?????

In order to solve numerically eq.1, several numerical schemes are used. The three widely used schemes are the Euler method (Parada et al, Guizien et al., 2006; Lett et al., 2007), the Runge-Kutta (RK) method (Batchelder et al., 2002; Oliveira et al., 2002; Tittensor et al., 2003) and the Adams-Bashfold-Moulton (ABM) method (Peliz et al., 2007; Carr et al., 2008; Qiu et al., 2008).

An advantage of the Euler scheme is that only one velocity field is needed to calculate the particle velocity at the new particle position, assuring a saving of computer memory.

$$x^{n+1} = x^n + \vec{V}(x^n, t^n) \Delta t \quad (3)$$

The main drawback of this method is that it is only first order accurate and therefore particle trajectories may diverge from the real ones as the time advances unless the timestep is very small

(Bennett and Clites, 1987).

The Runge-Kutta scheme is based on iterative method of estimation of solutions. Generally the order 4 scheme is adopted which requires more calculations but it has a fourth order accuracy.

$$X^{n+1} = X^n + \frac{\Delta t}{6} (a + 2b + 2c + d) \quad (4)$$

where

$$\begin{aligned} a &= \vec{V}(X^n, t^n) \\ b &= \vec{V}\left(X^n + \frac{\Delta t}{2} a, t^n + \frac{\Delta t}{2}\right) \\ c &= \vec{V}\left(X^n + \frac{\Delta t}{2} b, t^n + \frac{\Delta t}{2}\right) \\ d &= \vec{V}(X^n + c \Delta t, t^{n+1}) \end{aligned}$$

The advanced ABM method is a predictor-corrector method, combining the Adams-Bashford method (the predictor step) and the advanced Adams-Moulton method (the corrector step).

$$\tilde{X}^{n+1} = X^n + \frac{\Delta t}{24} (55\vec{V}^n - 59\vec{V}^{n-1} + 37\vec{V}^{n-2} - 9\vec{V}^{n-3}) \quad (6)$$

$$X^{n+1} = \frac{1}{270} \left\{ 19\tilde{X}^{n+1} + 251 \left[X^n + \frac{\Delta t}{24} (9\vec{V}^{n+1} + 19\vec{V}^n - 5\vec{V}^{n-1} + \vec{V}^{n-2}) \right] \right\} \quad (7)$$

where $\vec{V}^{n+1} = \vec{V}(\tilde{X}^{n+1}, t^{n+1})$.

Different numerical schemes have different impacts on the accuracy, efficiency and memory requirements of the particle integration. Indeed Darmofal and Haines (1996) found that multistage schemes required at least three times more internal data storage than multistep schemes of equal order and for timesteps within the stability bounds, multistage schemes were generally more accurate. Garcia et al. (1999) have also compared the Euler method and the RK method by using simple numerical experiments.

Finally, in more advanced IBM where larval behavior depends on thermodynamics, coupling between Lagrangian and Eulerian model is also activated for temperature and salinity fields, with generally trilinear interpolation in the particle position (Lett07, Lett08, Hinckley96, Mullon03).

REFERENCES

Miller_etal_FishOceanogr98_CouplingIBMCirculationModelGeorgesBank.pdf
 Heath_etal_FishOceanogr98_DispersalLarvalJapaneseSardine.pdf
 Guizen_etal_MarEcolProgSer06_DispersalOweniaWinddrivenCurrents.pdf
 Speirs_etal_MarEcolProgSer06_OceanScaleModellingCalanus.pdf
 Lett_etal_MarEcolProgSer07_AssessmentBarrierIchthyoPlanktonBenguela.pdf
 Lett_etal_EnvironModellSoftw08_Ichthyop.pdf

Peliz_etal_JMarineSyst07_CrabLarvaeDispersalWesternIberianShelf.pdf
Hinckley_etal96_DevelopmentSpatiallyExplicitIBM.pdf
Mullon_etal_FishOceanogr03_FromParticlesToIndividualsAnchovy.pdf
Carr_Capet_et_al_FishOc06_VerticalMigrationZooplanktonTransportRecruitmentCoupledBehavioral
PhysicalModel.pdf
Allain_etal_FishOceanogr03_AnchovyBiscayLagrangianSimulations.pdf
Paris_etal_MarEcolProgSer07_SurfingSpinningDivingPopulationConnectivity.pdf
Iudicone_etal_OceanModel02_SensitivityNumericalTracerTrajectories.pdf
Valdivieso_Blanke_OceanModel04_lagrangianmethodsClimatologyTrajectoryError.pdf.

5.7 Exemple : dispersion de copepodes et des meduse en Méditerranée Nord Occidentale

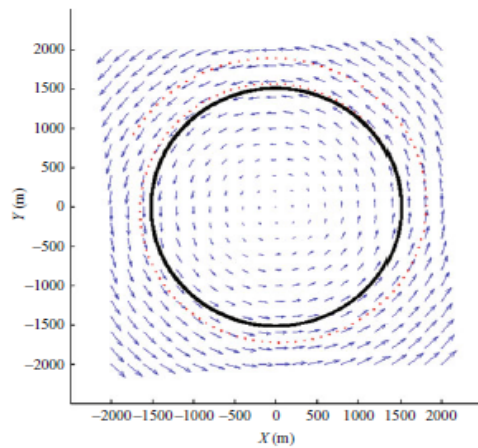


Fig.1 Circular flow field given by Eq.8 for $(\alpha=0, b=0.001)$ and the trajectories of the 1000 particles starting in a 10 m diameter circular cluster centered at the point (1 500, 0)

The simulations with $dt=60$ s of the Euler method and the advanced Adams-Bashfold-Moulton scheme are marked in red and black, respectively

We performed a convergence test where all 1 000 particles were tracked for 5 h using the three schemes, with different time steps. The errors were computed using Eq.10 and are presented in Fig.3. The RK scheme and the advanced ABM scheme can attain very high precision. For example the errors were $3.6E-06$ and $5.0E-05$ with $dt=100$ s, respectively. Note that to reach an error of 0.025,

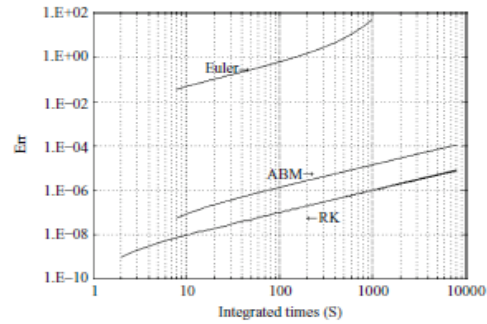


Fig.2 Error evaluations for the Euler method, the Runge-Kutta scheme and the advanced Adams-Bashfold-Moulton scheme simulated with the time step $dt=60$ s

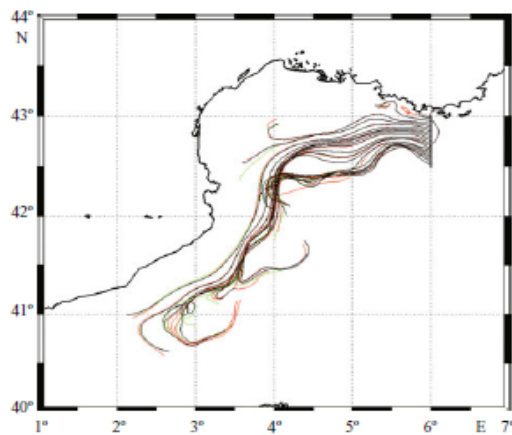


Fig.4 Trajectories of the 21 particles tracked 15 days with three different time steps

The initial locations are marked in black circulations and lines in black, green and red represent the trajectories of particles simulated with time steps $dt=60$ s, $dt=300$ s and $dt=900$ s, respectively

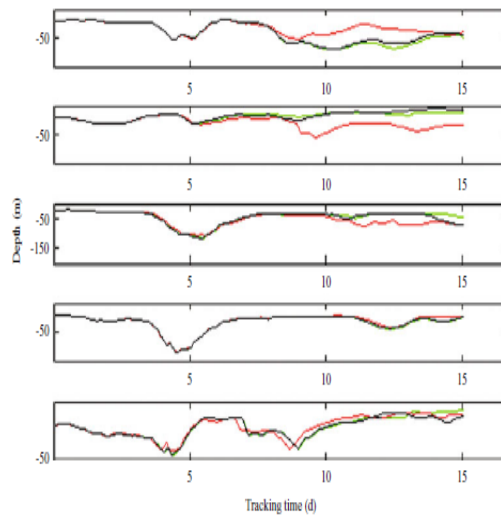
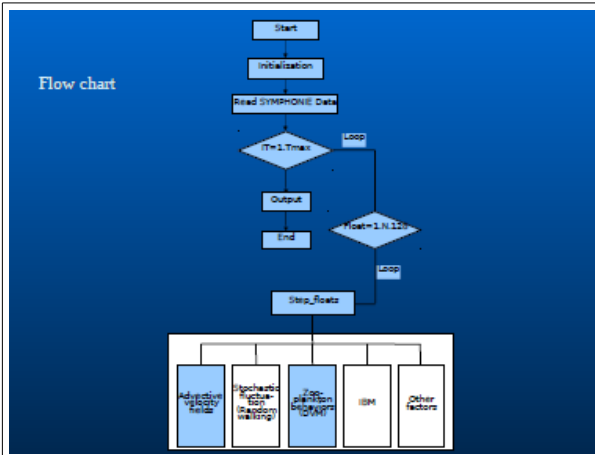


Fig.5 Depth variations of the 5 particles (of total 21) simulated with three different time steps

The lines in black, green and red represent the depth variations of the particles simulated with time steps $dt=60$ s, $dt=300$ s and $dt=900$ s, respectively



Lagrangian Model

We use a Lagrangian particle-tracking code based on the ROMS Offline Floats (ROFF, introduced in details by Carr et al. 2007)

- an advanced fourth-order accurate Adams-Bashford-Moulton predictor-corrector scheme is used for the tracking algorithm

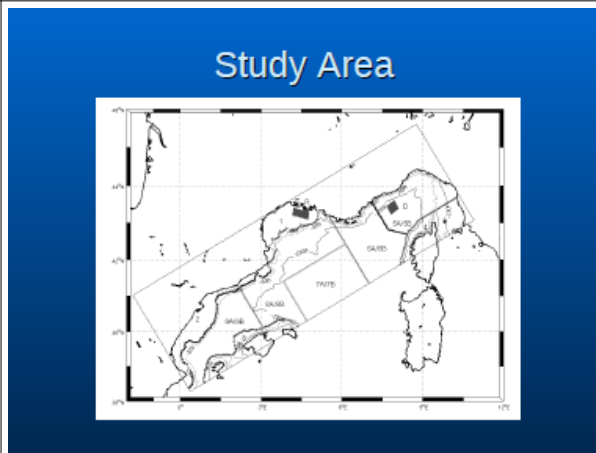
$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}(\vec{x}, t)$$

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{u}_{sym} + \vec{u}_{DVM}$$

- \vec{u}_{sym} are linearly interpolated from the velocity values of the 8 nearest grid cells, which are daily averaged simulations of the SYMPHONIE model, provided every 24 hours.

DVM scheme

- if upper than -50m on 06:00, swim down with the velocity 50 m/h from 06:00 to 08:00
- otherwise the zooplankton transport processes are only determined by the velocity fields of the model circulation
- from 18:00 to 20:00, swim up from deeper depth to near-surface depth with the velocity 50 m/h.



Model Approach

- Time step: 300s
- SYMPHONIE data: spatial resolution of 3KM
- Starting time: March 1 ~ August 31,2001, every 3 days
- Simulating time: 40 days
- Particles release information:
 - Location: R(Rhone river plume), D(Dyfamed station)
 - Number: 200 particles each location
 - Depth: -5m and -20m (R) -5m and -100m(D)
- Zooplankton behaviour: passive drift and with DVM

Particles release at D

- After being transported for 40 days, the particles could launch almost anywhere in the NWMS.
- With the influence of the vertical variability of the currents, the final distributions are different with the particles released at different depths.

Blue square: release locations
 Red circles: final positions of particles released at -5m
 Green points: final positions of particles released at -100m.

- Strong seasonal patterns appear in the final distributions of the particles, which dues to the seasonal variability of the circulations, especially the North Current.
- Very few particles can enter into the GoL. The North Current is a barrier for particles entering the continental shelf in the GoL from the offshore seas.

Particles release at R

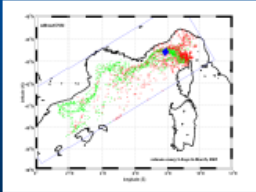
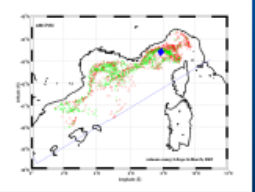
- Final distributions are separated into two parts: one remains in the GoL and the other goes out to scatter in the path of the North Current and in the Catalan Sea.

	1	2	3	
March	24	3	5	
Avril	47	1	1	

- After 40 days, 1/4~1/2 particles remain in the GoL. The GoL could be considered as a retention area for the zooplankton transport and distributions.
- Weak seasonal patterns appear in the final distributions of the particles. No one particle enters into the Ligurian Sea during the simulations.

With DVM

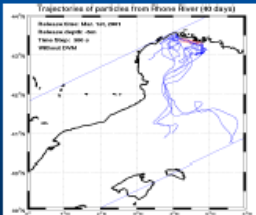
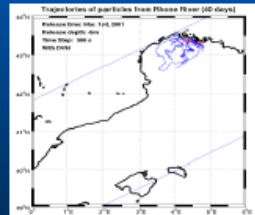
- Final distributions of the particles released at D are mainly similar as the particles simulated without DVM, however more concentrated at the path of the main currents

without DVM
with DVM

DVM discuss

In an upwelling region, there are often offshore currents at the surface and onshore currents at deeper depths. Consequently DVM reduces the transport of the particles away from the region, compared to the particles transport passively at the surface.

without DVM
with DVM

Conclusion

- A Lagrangian module has been developed to simulate the transport and distributions of zooplankton individuals coupling with SYMPHONIE
- Strong seasonal patterns appear in the distributions of the individuals released at DYFAMED sampling station. Individuals could be spread all over the NWMS basin after 40 days but different patterns occurs following the season, the depth of release of the individuals, and the capacity of DVM or not.

- An offshore-shelf transport only occur in April to June. In the other months, the North Current can be properly considered as a barrier for particles entering into the GoL from the offshore sea.
- At the end of the 40 days, passive individuals released in the plume of the Rhone River are spread on the GoL shelf or in the Catalan sea. Following the season between a quarter to a half of the initial released individuals stay in the Gulf. Simple DVM behavior does not increase the retention on the shelf.

Next Step

- Random Walk Scheme
- Nest codes
- Individual Based Model
- ...

LOPB Jérôme Bouffard (LOPB-MIO, Marseille) Séminaire M2 **cnrs**

Partie 1: Préambule

Apport de l'altimétrie pour l'observation de surface de la dynamique méso-échelle et sub méso-échelle régionale

2

Définitions

Méso-échelle: échelle caractéristique des processus hydrodynamiques contrôlés par la *quasi-géostrophie* (eg Gill, 1982).

Tourbillon méso-échelle (campagne LATEX 2008, **crédit: LOPB-MIO**)
Equilibre rotation/stratification - Premier rayon interne de Rossby (10-100 km, *Chelton et al., 1998*)

Sub-méso-échelle: échelles < méso-échelle (~1-10 km)

Filaments **sub-méso-échelles** (campagne ELISA, **crédit: LOPB-MIO**)

Dans cette exposé: « (sub)méso-échelle » = méso-échelle + sub-méso-échelle

Enjeux scientifiques et sociétaux

Au niveau global

- La (sub)méso-échelle influe sur le système climatique terrestre et les budgets de productivité primaire (*Loy, 2008*)
- Essentiel des études dans l'océan ouvert à partir de simulations numériques (*Klein et al., 2008*)

Aux échelles régionales et côtières ?

- Peu d'études pourtant 95% des enjeux socio-économiques localisés dans les régions côtières (*Cohern et al., 1997*)
- Moitié des côtes méditerranéennes **urbanisées** d'ici 2025 (*Bergametti et Vaudin, 2008*).
- Scénario en Méditerranée (*GIEC, 2007*): **Oligotrophisation** de l'océan ouvert et **Eutrophisation** en zone côtière

Etudier les facteurs physiques qui contrôlent les réponses des écosystèmes côtiers

Questions ouvertes

Quelles sont les échelles de variabilité temporelle de l'activité (sub)méso-échelle côtière ?

Quel est son rôle dans le mélange des masses d'eaux et de matières aux interfaces côte-large ?

Quelle théorie décrit le mieux les processus (sub)méso-échelles en zone côtière?

Défi
Observer à long terme la circulation régionale

Moyen
S'appuyer sur des observations multi-sources complémentaires

Approches classiques et limitations

- **Modélisation régionale + in-situ** (*Hu et al., 2009; 2011; Alou et al., 2010*)
- **Campagnes en Mer** (LOPB/MIO: LATEX, IMEDA: SINOCOP ...)
- « Cible les processus » mais périodes courtes et/ou région limitée
- Courants verticaux inaccessibles
- **Les mouillages permanents - marégraphes - radars HF** (observatoires marins MOOSE - radar ECCOP du LSEET/MIO, SOCIB)
Séries temporelles longues mais couverture spatiale restreinte

Capter un spectre large de variabilité océanique
→ Augmenter l'échantillonnage → Recours aux observations satellites

Principe général de l'altimétrie satellite

■ Mesure de la topographie de surface des océan

Corrections environnementales

- Troposphérique sèche
- Troposphérique humide
- Ionosphérique

Corrections de biais d'état de mer

- Biais électromagnétique
- Biais d'obliquité

Topographie dynamique absolue:
 $h_d = SSH / E - corrections - Géolde / E$

Principe général de l'altimétrie satellite

■ Vocabulaire

-Topographie dynamique absolue (1):
 $h_d = SSH / E - corrections - Géolde / E$
Mesures altimétriques

-Anomalie de hauteur de Mer (2):
 $SLA = SSH / E - cor - moy(SSM) / E + cor$
Mesures altimétriques

-Anomalie de hauteur de Mer (3):
 $hd = SLA + MDT / E$
Mesures altimétriques

Comment ? Sat. qui mesurent la gravité (GOCE, GRACE)
Problème: Erreur

Comment ? Répétitivité du sat. Alti.
Problème: pas hauteur relative

Comment ? Cf. Rio et al. 2007

D'où $hd = SLA + MDT / E$
hd - Zeta (modeles numériques, cf *Greatbatch et al., 1994; Bouffard et al., 2008*)
hd - Hauteur Dynamique (niveau ref ou courant = 0) (cf *Pascual et al., 2003, Ruiz et al., 2008*)

Principe général de l'altimétrie satellite

Principe simplifié de l'altimétrie

Traces altimétriques et marégraphes

L'altimétrie satellite adaptée pour l'étude de la dynamique hauturière (El Nino, La Nina, Gulf Stream ...)

... mais inadaptée pour les études aux échelles régionales et côtières

Principe général de l'altimétrie satellite

- **Altimétrie côtière de nouvelle génération**
- Nouvelles méthodologies développées afin d'améliorer les **mesures côtières** (Vignudelli et al., 2005; Bouffard, 2007; Roblou et al., 2011; Cipolini et al., 2010)
- Leur exploitation scientifique a permis de caractériser des structures fine (R~20km) jusque là inaccessible (courant ouest Corse: Bouffard et al., 2008b; CN: Bouffard, 2007; Birol et al., 2010; Bouffard et al., 2011)
- L'utilisation conjointe avec la modélisation et les mesures in-situ a permis de mieux appréhender l'origine, les mécanismes et les structures verticales associées (Bouffard et al., 2008a; Hermann et al., 2009; Bouffard et al., 2012)

14

Principe général de l'altimétrie satellite

- **Altimétrie côtière de nouvelle génération**
- Amélioration des données
 - CLASSIQUE
 - AMELIORE
- XTRACK (CTOH); PISTACH (CLS-CNES); COASTALT (ESA)
 - Améliorations / AVISO
 - plus de données
- Caractérisation de courants côtiers
 - Aux échelles (sub)saisonnnières, saisonnières
 - Courantomètres virtuels
 - Vignudelli et al (2005); Bouffard et al. (2008b), Birol et al (2010); Durand et al (2009)
 - et inter-annuelles
 - Durand et al (2009) Le Henaff et al (2010)

15

Principe général de l'altimétrie satellite

- De la mesure de hd au calcul du courant...
- The slope of the sea surface relative to the geoid ($\partial z / \partial x$) is directly related to surface geostrophic currents. The two components (u_s, v_s) of the surface geostrophic current

$$u_s = -\frac{g}{f} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad v_s = \frac{g}{f} \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$
 where g is gravity, f is the Coriolis parameter, and ζ is the height of the sea surface above a level surface.
- Across-track currents
 - SST + across-track currents
 - From Birol et al., 2010

Principe général de l'altimétrie satellite

Très bien ...

...MAIS ...

...Données le long des traces difficilement exploitables pour étudier la turbulence mésoéchelle

Nécessité de générer des champs 2D à haute résolution partir de l'Interpolation Optimale multi-satellite

Principe général de l'altimétrie satellite

- Qu'est ce que l'Interpolation Optimale

Champs de courants 2D pouvant être utilisés pour étudier le mélange et le transport lagrangien de particules (cf. présentation de Francesco)

LOPB

Partie 2: Une application

On the influence of coastal mesoscale dynamics on the jellyfish trajectories and distributions

JELLYWATCH project
Modelling of jellyfish transport and stranding in the NWMed

Main characteristics of *Pelagia Noctiluca*

- Sparse information on the Jellyfish repartition and the associated forcing (Temperature ? Currents ? Wind ? Food ? Predators ?)
- Numerous all along the year, in the NW-MED (Morand et al., 1992)
- At the surface during the night | migration at depth during the day (Dial vertical motion (DVM): down to 400 m, Gorsley personal communication)

Main issues

- What are the impacts of mesoscale and coastal dynamics on the jellyfish trajectories/distribution ?
- In which way coastal-altimetry could be a powerful tool ?

Strategy and data used

- **Strategy** : Using altimetry to simulate the advection of Jellyfish at the surface and at depth
- **Motivation** : altimetry provides almost synoptic currents that should allow a long-term monitoring of Jellyfish transport

⚠ Limitation in coastal zone

- Sub-sampling of coastal dynamics
- Significant error

Develop / use alti. products dedicated to coastal zone*

* Dassargat et al, 2011, Escudier et al 2011 ...

⚠ NO subsurface information

- Dial vertical motion of jellyfish !!!!
- Rely SSH to sub-surface geostrophic currents**

Use of statistics from a realistic regional model

Pascual et al 2003 (Vertical EQE de mesure in situ + SSH altimétrique)

23

Strategy and data used

- The symphonie model (POC-SIROCO, Toulouse) and study area characteristics

Current intensity at 20m (in m/s)

Model: SYMPHONIE (GoL config., Hu et al., 2009)

- Boussinesq model
- One way Nesting: 3km -> 1km
- Period 2001-2010

Study area :NWMed

- Northern Current (NC): seasonal variability (Gostan, 1967)
- Intense mesoscale variability: eddies, meanders (Mittor, 1991)
- NC intrusion over the GoL continental shelf (Goi et al., 2006)
- Winter deep water formation characterized by a high interannual variability (Martens and Schott, 1998; Hamman, 2008)

Current (mb) at 50 m

Strategy and data used

- Altimetry: products used

CLASSIQUE (AVISO + MDT Rio)

AMELIORE (HR + MDT Dob)

- 2 kinds of (M)SLA: From regional AVISO and Higher Resolution (HR) product (correlation scales: 5 days/30km) from IMEDEA (Escudier et al., 2011)
- Validations with *in-situ* measurements from the LATEX08 experiment *

* Influence of subsurface coupled physics - biogeochemistry on cross-shelf exchanges: <http://www.com-ocv-mer.fr/LOB/LOB4/TEX>

Strategy and data used

- Methodology

- Build daily Dynamic Height (DH) from T,S of SYMPHONIE model (period 2001-2010)
- Compute a database of daily vertical EOF from the model DH
- Create an EOF climatology from 10 years of simulation
- If 1st mode highly dominant, reconstruct DH at a given depth by projecting altimetric ADT with the EOF climatology of the model

Advection with geostrophic currents by considering Jellyfish as passive particules with dial vertical migations

Is the 1st EOFmode highly dominant ?
Is the climatology representative of daily EOF ?

Reconstruction of sub-surface currents

- What is an EOF ?

Décomposition d'un champs Phi en somme de N mode propre *i* (~ diagonalisation de matrice)

$$DH(p) = \sum_{i=1}^N A_i(x, y) EOF_i(p)$$

Profil vertical fonction de la profondeur p

Amplitude (independante de p)

Si Mode 1 dominant: variance(Mode1) >> variance(Modei)

$$\Phi_{x,y}(p) = A_1(x, y) EOF_1(p)$$

$$DH(p) = A1(x,y) EOF1(p)$$

Reconstruction of sub-surface currents

- Create an EOF climatology from 10 years of simulation

Weights of mode 1 / month

Climatology vertical EOF (mode 1)

1st mode : 70 % < weights < 84 %

Representativity of the climatology 8% < error < 14 %

Reconstruction of sub-surface currents

- Create an climatology of EOF from 10 years of simulation:
 - If the first mode is highly dominant (as noted in Pascual et al., 2003) :

$$DH(t, 250m) = DH(t, 0m) \cdot EOF1(t, 250m) / EOF1(t, 0m)$$

DH rebuilt at 250 m

Altimetric ADT (AVISO and HR products)

EOF Climatology (from SYMPHONIE)

Geostrophic current at 250m

Are model and altimetric currents sufficiently consistents ?

Validations / comparisons

- Altimetry vs SYMPHONIE model currents (April - october 2008)
 - At the surface (m/s):

MEAN

STD

Good agreement between model and altimetry (NC intensity/position ...)

Validations / comparisons

- Altimetry vs LATEX08 drifters comparisons (U & V components)

Method

- Altimetry: current space/time interpolation at 3 drifter locations
- Drifters: current calculated by finite differences (5 days filtered)
- Eikman current removed

Comparisons (with HR Dob)

- Drifter 1 and 2: Good agreement for both (U,V) (absolute mean difference < mean absolute, correlations > 0.5)
- Drifter 3: Strong Disagreement (lag between the coastal structures)
- Statistics slightly better with AVISO than with the HR product

What about the trajectories ?

Validations / comparisons

- Altimetry vs LATEX08 drifters comparisons (lagrangian)

Method

- Virtual particles launched around the LATEX drifters initial positions.
- Particles advected 47 days using RK4 and surface altimetric currents

Results (with HR-Dobricic)

- The particles follow the main temperature fronts
- Very good agreement between the drifters 1 and 2 and the advected particles
- No particle follows the drifter 3 which is advected by a coastal eddy (cf. Hu et al., 2009)

Particles advection from altimetry (HR (M)SLA + MDT Dob) and drifters trajectories

Validations / comparisons

- Altimetry vs LATEX08 drifters comparisons (lagrangian)
- Sensitivity to altimetric product used

« AMELIORE » allows a better agreement with drifter 2
No product allows advection by the coastal eddy (observed with drifters3) Why?

Validations / comparisons

- Altimetry vs LATEX08 drifters comparisons (lagrangian)
- Particles advection with a 10 day delay

In that case, altimetric currents capture the coastal Eddy (2 coastal tracks intercept the structure) → Importance of track availability

Jellyfish trajectories (preliminary results)

- Simple 40 day forward advection with altimetric surface currents
- Virtual Jellyfish launched each month from 3 different locations

- North GoL: Most of the particles remain on the GoL
- West/East GoL: Advection southern by the NC in direction of the Balearic Sea.

Jellyfish trajectories (preliminary results)

- 40 day forward advection by taking into account the DVM
- Virtual Jellyfish launched each month from 3 different locations

- North GoL: Much more particles advected to the south (3 times more)
- West/East GoL: Differences, but patterns also depending on the NC dynamics

Jellyfish trajectories (preliminary results)

- Statistics: differences due to DVM and altimetric products used
- % of particles shored (/ total particles launched) over 4 areas

Spatial repartition

- Much more particles over the GoL (~50%...)
- Significant differences (e.g. West GoL > 10%)

Influence of the DVM

Also significant (e.g. AVISO RIO)

Conclusions and perspectives

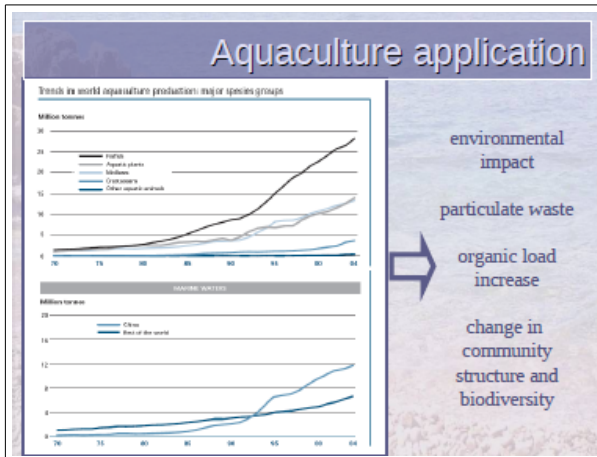
- Conclusions
 - Lagrangian approach is a powerful tool to evaluate coastal altimetry
 - Our simple approach to simulate jellyfish trajectories shows:
 - The influence of the NC (results in agreement with Qiu et al., 2008)
 - The importance of the DVM
- Perspectives (on-going work)
 - The landfall of Jellyfish needs to be validated with independent data (observations of life guard: number of bite per season etc...)
 - The effect of the wind has to be considered
 - Complexity in the Jellyfish behavior by coupling coastal altimetric current with an ecological model (LAGOO, Qiu et al., 2008)
 - Study the interannual variability of jellyfish distribution and better understand its potential relation with climatological indexes

5.8 Exemple : dispersion des rejets d'une ferme aquicole

A new numerical benthic degradative module FOAM (Finite Organic Accumulation Module) has been coupled with the advection-dispersion model POM-LAMP3D in order to improve the prediction of the potential impact of marine fish farms. Moreover real historic current-meter data are employed to force the hydrodynamic and dispersion simulations and recent measurements of settling velocity values specifically targeting Mediterranean fish species are considered.

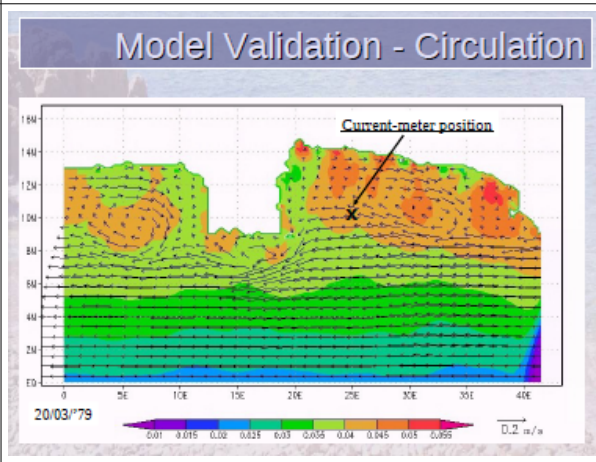
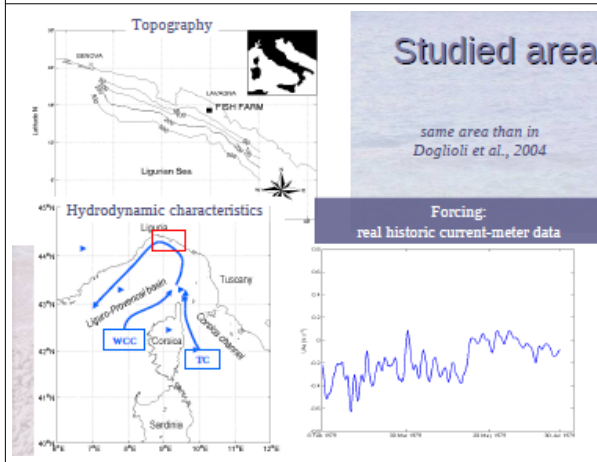
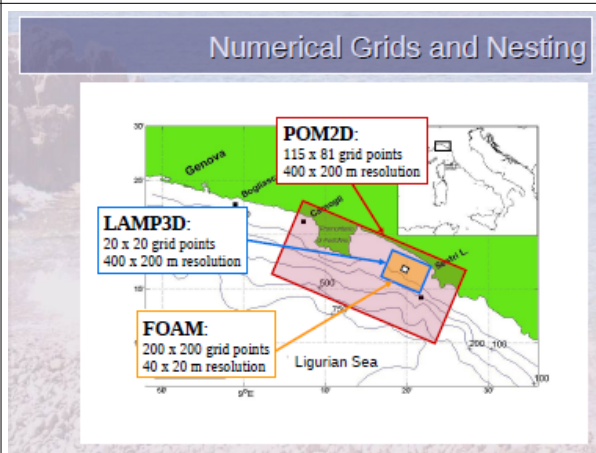
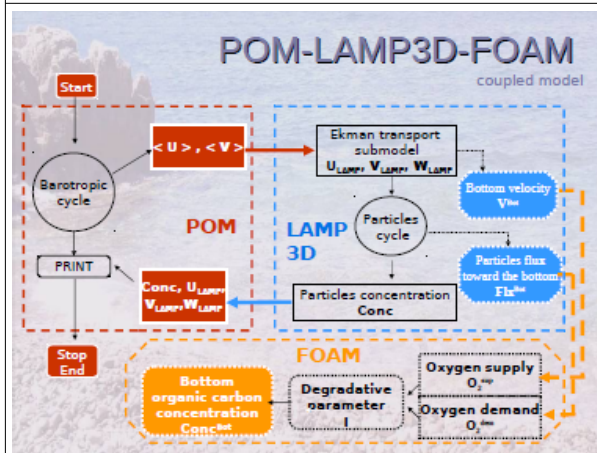
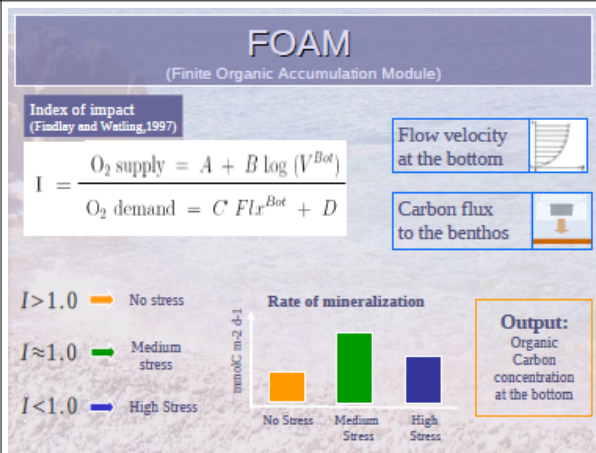
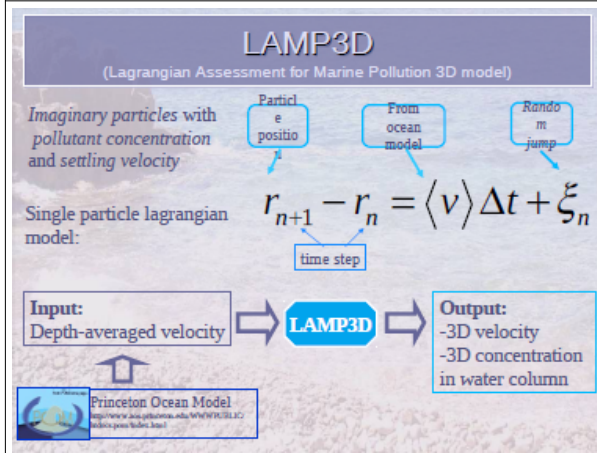
FOAM uses the output of the other functional units of the modeling framework to calculate the organic load on the seabed. It considers the natural capability of the seafloor in absorbing part of the organic load. Different remineralization rates reflect the sediment stress levels and are used to compute the organic carbon concentration remaining on the seabed after degradation. Two sampling campaigns have been performed in a typical Mediterranean fish farm in the warm and cold season in 2006 in order to measure the benthic response to the organic load and the mineralization rates in the Mediterranean conditions. Organic degradation for both uneaten feed and faeces is evaluated by changing release modality (continuous and periodical) and by varying the settling velocities. The results show that in the Mediterranean conditions, the benthic response to the organic enrichment of the bottom depends on water temperature.

We find that the introduced modeling framework successfully improves capability predictions. It can therefore represent an important tool in decision making processes, for planning and monitoring purposes.



MAIN QUESTION:
potential impact on surrounding environment

METHOD:
implementation of advection-dispersion model POM-LAMP3D and add a new coupled benthic module FOAM.
evaluation and assess the environmental impact from marine fish farm



Model Validation - Circulation

Current measurements

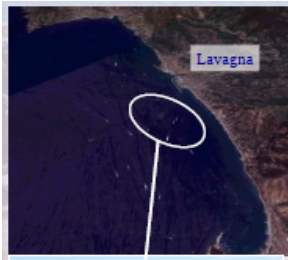
Winter average (std)	Spring average (std)	Summer average (std)	Autumn average (std)	Annual average (std)
0.066 (0.057)	0.076 (0.065)	0.063 (0.052)	0.070 (0.062)	0.069 (0.057)

Model output

	Winter average (std)	Spring average (std)	Summer average (std)	Autumn average (std)	Overall average (std)
1st cycle	0.076 (0.061)	0.103 (0.084)	-	-	0.088 (0.047)
5th cycle	0.059 (0.034)	0.082 (0.066)	-	-	0.057 (0.034)
3th - 5th cycles	0.064 (0.042)	0.078 (0.050)	-	-	0.061 (0.034)

↓
neglect the first 2 cycles to reduce the sensitivity to initial conditions



AQUA fish farm



Lavagna

Productive target:
200 ton year⁻¹

Reared species:
Sparus aurata and *Dicentrarchus labrax*

Wastes Particles

620000 Numerical particle released

	Uneaten feed	Faecal matter
	Feed conversion factor = 1.3 kg pellet/kg fish % of feed supplied = 5%	Faecal production = 1.9 g/kg fish
C	% in feed = 45% 1 particles = 308.6 mmol C	% organic carbon = 28% 1 particles = 5.8 mmol C
N	% in feed = 6.6% 1 particles = 167.8 mmol N	% particulated = 22% 1 particles = 66.4 mmol N

Settling velocity

uneaten feed and faeces values specifically targeting Mediterranean fish

Vassallo et al, 2006 Food pellets		Magill et al, 2006 Faecal pellets	
Diameter (mm)	V _{sed} (m s ⁻¹)	Fish species size (g)	V _{sed} (m s ⁻¹)
3	0.087	<i>S. Aurata</i> [380]	0.004
3.5	0.118	<i>S. Aurata</i> [60]	0.005
4.5	0.103	<i>D. Labrax</i> [280]	0.006
5	0.144	<i>D. Labrax</i> [80]	0.007
6	0.088		

Model Set Up

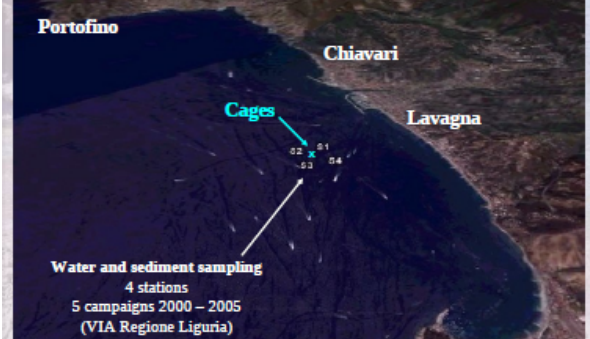
Different scenarios

- waste typology { feed, faeces
- settling velocity { slowly sinking, quickly sinking
- release conditions { continuous, periodical

Indicators

- Impacted area extension
- Barycenter positions
- I parameter
- Organic Carbon concentration

Model Validation - Dispersion



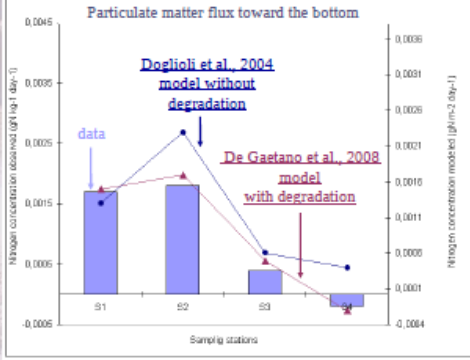
Portofino, **Chiavari**, **Lavagna**

Cages

Water and sediment sampling
4 stations
5 campaigns 2000 – 2005
(VIA Regione Liguria)

Model Validation - Dispersion

Particulate matter flux toward the bottom



Left Y-axis: Nitrogen concentration observed (µM kg⁻¹ day⁻¹)

Right Y-axis: Nitrogen concentration modeled (µM kg⁻¹ day⁻¹)

X-axis: Sampling stations (S1, S2, S3, S4)

Legend:
 - data (blue bars)
 - Doglioli et al., 2004 model without degradation (blue line)
 - De Gasiano et al., 2008 model with degradation (red line)

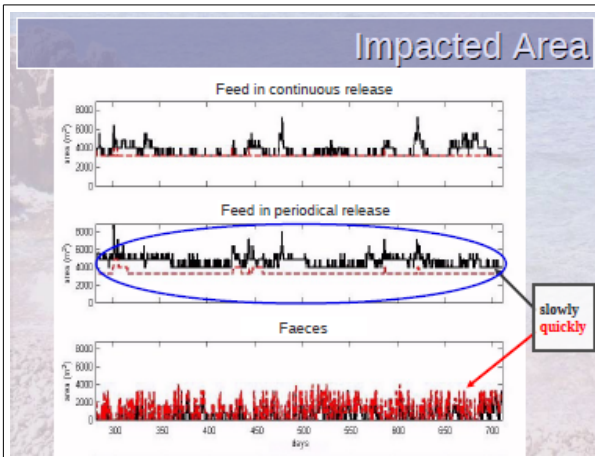
Impacted Area

Impacted Area
sum of the grid meshed areas where particles are still present after the degradation.

$$Area = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M \phi(Conc_{i,j}^{Bot}) \Delta x_i \Delta y_j$$

$$\phi(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi > 0 \\ 0 & \text{if } \xi = 0 \end{cases}$$

M = mesh number in x direction
 N = mesh number in y direction
 Δx = mesh grid length in x direction (m)
 Δy = mesh grid length in y direction (m)
 Conc^{Bot} = organic carbon concentration remaining of the bottom after degradation



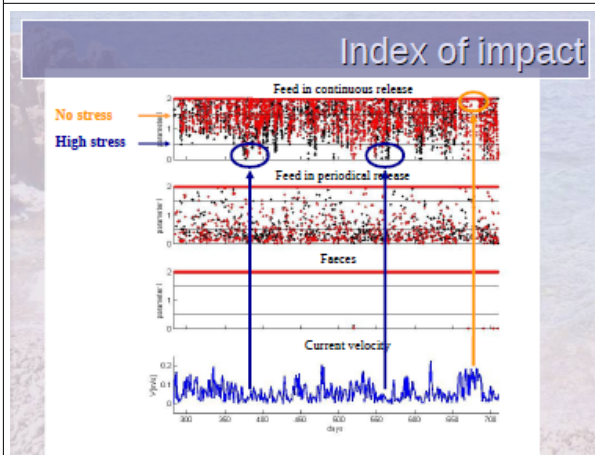
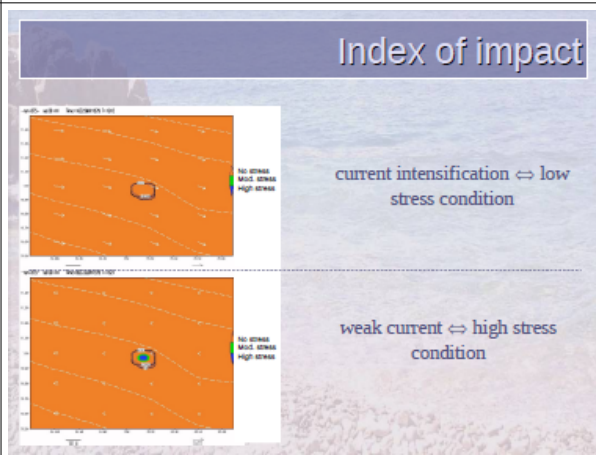
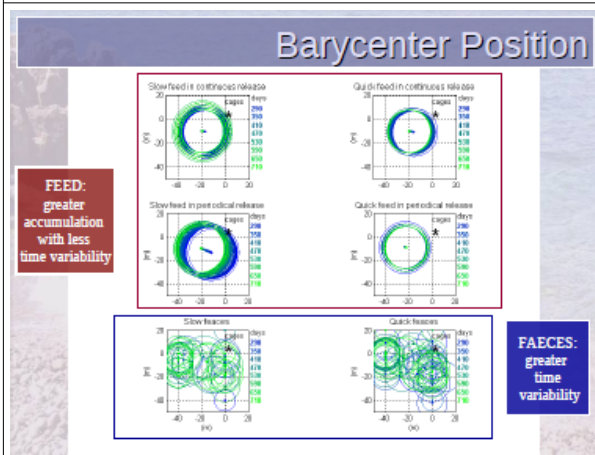
Barycenter Position

*Barycenter position:
position weighted by particles number left in each cell*

$$x_b = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M i \cdot n_{i,j}^{left}}{n_{Tot}^{left}}$$

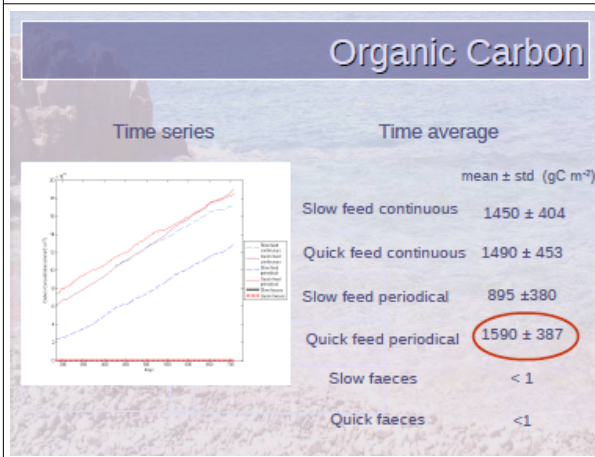
$$y_b = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M j \cdot n_{i,j}^{left}}{n_{Tot}^{left}}$$

M = number of meshes in x direction
 N = number of meshes in y direction
 $n_{i,j}^{left}$ = particle number left on the bottom in mesh i,j
 n_{Tot}^{left} = total number of particles left on the bottom after degradation



Index of impact

	Occurrence		
	No stress I > 1.5	Medium Stress I = 1	High Stress I < 0.5
Feed periodical released	87 %	4 %	9 %
Feed continuous released	71 %	27 %	2 %
faeces	98 %	1 %	1 %



Summary

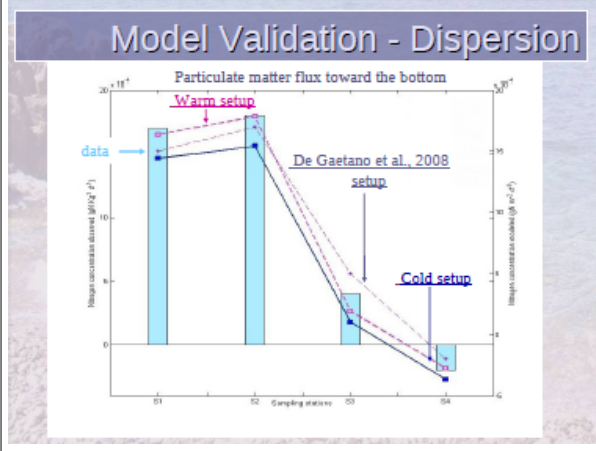
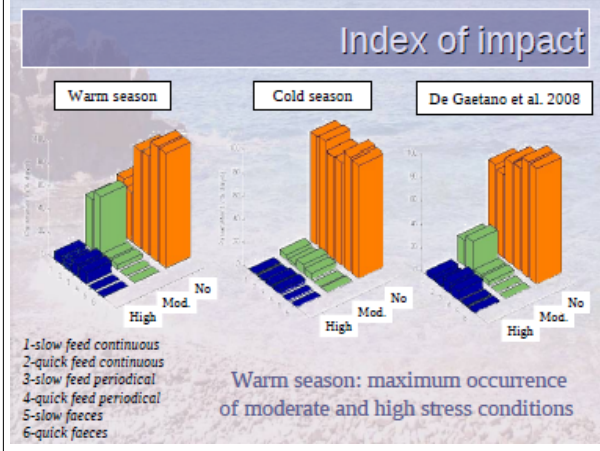
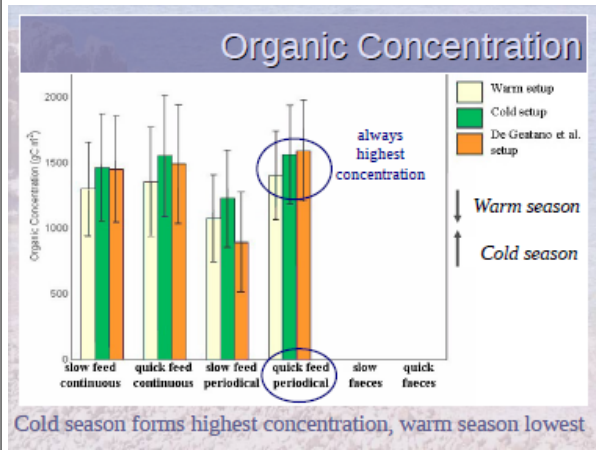
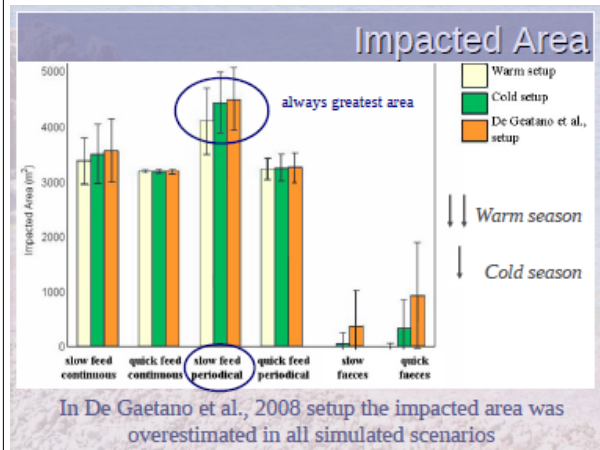
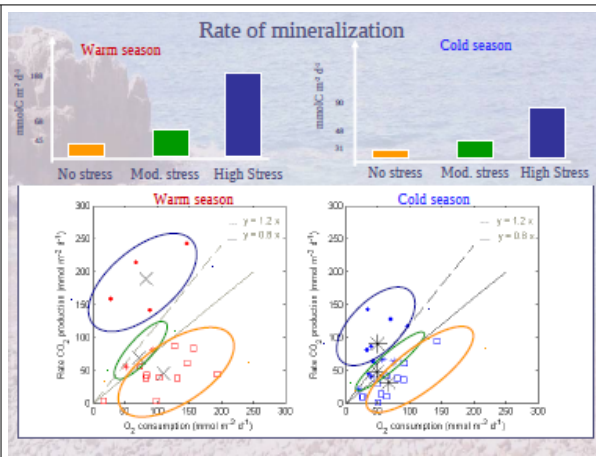
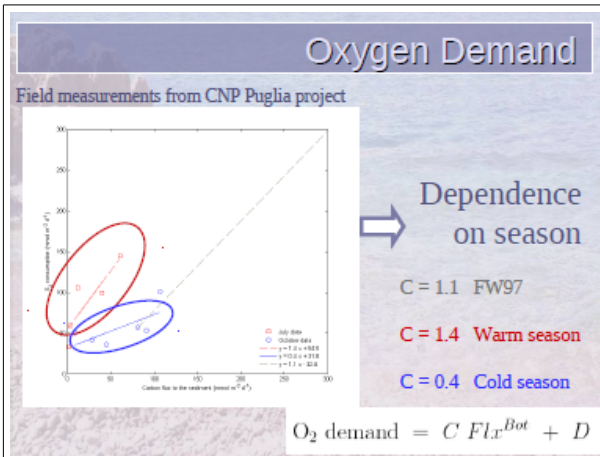
Aquaculture Research

FOAM, a new simple benthic degradative module for the LAMP3D model: an application to a Mediterranean fish farm

Unreated feed primary cause of impact

Periodical release worst condition of sediment stress and carbon concentration

Open question: Mineralization rates in Mediterranean conditions improve modelling reliability ?



Conclusion and Outlook

A new calibration of FOAM based on experimentally measured Mediterranean mineralization rates in cold and warm seasons

Patricia De Gaetano¹, Paolo Vassallo¹, Marco Bartoli¹, Donatella Nizzoli², Andrea M. Doglioli³, Marcello G. Manzoli⁴, Mauro Fabiano⁵

¹ IORIS, Dipartimento di Pesca, Università di Genova, Genova, Italy
² DIPPEDES, Dipartimento per lo Studio del Territorio e delle sue Risorse, Università di Genova, Genova, Italy
³ DSA, Dipartimento di Scienze Ambientali, Università di Pavia, Pavia, Italy
⁴ Laboratorio di Oceanografia, Dipartimento di Scienze e Tecnologie, Università di Genova, Genova, Italy
⁵ Division of Microbiology and Physical Oceanography (DMPO), Memorial School of Marine and Atmospheric Sciences (RSMAS), University of Miami, FL, USA

Benthic metabolism depends on season

Results depend on simulated season:
 warm setup maximum impact while minimum area and concentration

Better prediction capability

OUTLOOKS:

- sampling campaign for benthic metabolism dependence on water temperature
- improve reliability of hydrodynamic model

5.9 Exemple : étude lagrangien de la connectivité en mer Méditerranée

Contexte & Objectif

Étude du réseau des AMP

« Effet réserve » & Connectivité

Dispersion du plankton

Régionalisation de la Mer Méditerranée à partir de la Chl de la surface

Quelles sont les régions interconnectées dans la Mer Méditerranée?

Régionalisation basée sur la circulation

Méthodologie

Champ Eulérien

Module lagrangien

Diagnostic de connectivité

Classification Hiérarchique

Régionalisation

Méthodologie

Champ Eulérien

MERCATOR

Courants

Données journalières

4 ans de données de champ de vitesse

Méthodologie

Module lagrangien

ARIANE

Advection horizontale à la surface

Pas de vitesse verticale

Temps d'advection 1 an

Méthodologie

Diagnostic de connectivité

Matrice de connectivité

$$C(i, j) = \frac{N_{t,q} \cdot x(t) = i \ \& \ x(t + t_{adv}) = j}{N_{tot}}$$

Mitarai et al. 2003

Méthodologie

Diagnostic de connectivité

Temps de connexion moyen

$$MCT(i, j) = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^n T_n(i, j)$$

Mitarai et al. 2003

Méthodologie

Diagnostic de connectivité

Distance océanographique

$$DO(i, j) = \text{sym}(\min(MCT(i, j), MCT(j, i)))$$

Alberto et al. 2011

Méthodologie

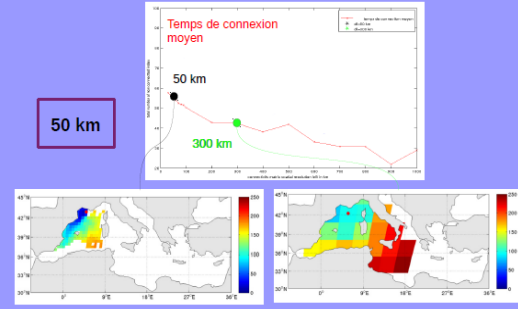
Influence du nombre de particules

l	Nmax	lâchers/ mois	augmentat ion p.r. l-1
a	25.646	1	-
b	51.292	2	100
c	76.938	3	50
d	102.584	4	33
e	128.230	5	25
f	153.876	6	17
g	179.522	7	14
h	205.168	8	12
i	230.814	9	11

Lâcher 9 particules par mois

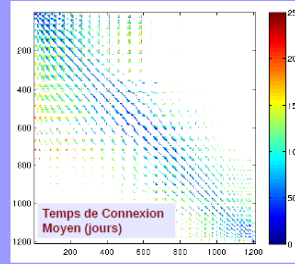
Méthodologie

Influence de la résolution de la grille de connectivité



Méthodologie

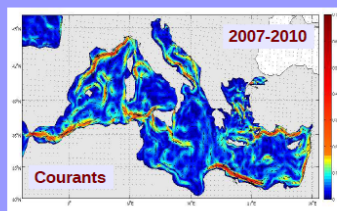
N=8.309.304 dl=50 km



Classification Hiérarchique

Méthodologie

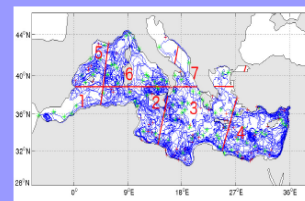
Champ Eulérien MERCATOR



Données journalières
4 ans de données de champ de vitesse

Méthodologie

Module lagrangien ARIANE

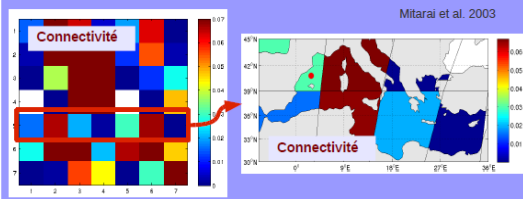


Advection horizontale à la surface
Pas de vitesse verticale
Temps d'advection 1 an

Méthodologie

Diagnostic de connectivité
Matrice de connectivité

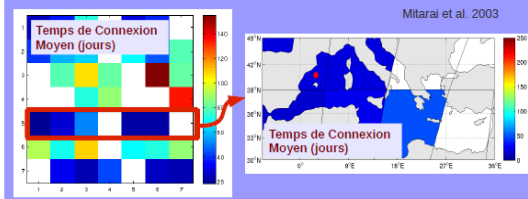
$$C(i, j) = \frac{N t.q. \mathbf{x}(t) = i \ \& \ \mathbf{x}(t + t_{adv}) = j}{N_{rot}}$$



Méthodologie

Diagnostic de connectivité
Temps de connexion moyen

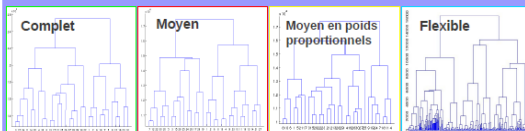
$$MCT(i, j) = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^{t=N} T_n(i, j)$$



Méthodologie

Classification hiérarchique et critères d'agrégations

$$D(m, g) = \alpha_x D(k, g) + \beta_y D(l, g) + \gamma D(k, l) + \gamma |D(k, g) - D(l, g)|$$



$D(m, g) = \max(\text{dist}(x_k, x_l))$

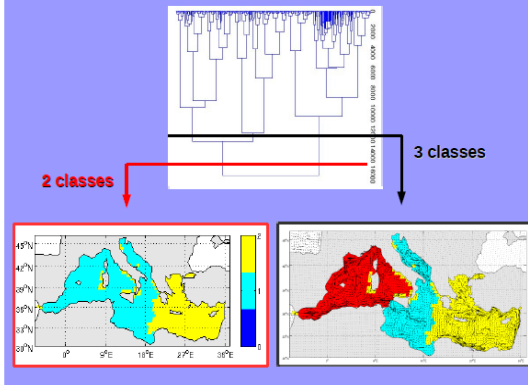
$D(m, g) = \frac{1}{w_m * w_g} \sum_{x_k \in m} \sum_{x_l \in g} \text{dist}(x_k, x_l)$

$D(m, g) = \frac{D(k, g) + D(l, g)}{2}$

$D(m, g) = 0,625 D(k, g) + 0,625 D(l, g) - 0,25 D(k, l)$

Lance & Williams 1967

Résultats



Résultats

22 classes

Circulation de surface (eau atlantique)

2007-2010

Berline et al. In prep.

Perspectives

Analyse avec les graphes

Andrello et al. 2013

Focus plus petites-échelles

Étude de la variabilité saisonnière

Introduire du comportement : taux de mortalité, durée de la phase planctonique, migration verticale

Comparaison avec d'autres méthodes lagrangiennes, données de campagne, études de génétique des populations

Méthodologie

Classification hiérarchique et critères d'agrégations

$$D(m, g) = \alpha_k D(k, g) + \beta_l D(l, g) + \gamma D(k, l) + \gamma |D(k, g) - D(l, g)|$$

Complet

$$D(m, g) = \max(\text{dist}(x_k, x_l))$$

Moyen

$$D(m, g) = \frac{1}{W_m * W_g} \sum_{i=1}^l \text{dist}(x_k, x_l)$$

Moyen en poids proportionnels

$$D(m, g) = \frac{D(k, g) + D(l, g)}{2}$$

Flexible

$$D(m, g) = 0,625 D(k, g) + 0,625 D(l, g) - 0,25 D(k, l)$$

Lance & Williams 1967

Résultats

2 classes

3 classes

5.10 Structures lagrangiennes cohérentes et exposants de Lyapunov

Traduction de http://en.wikipedia.org/wiki/Lyapunov_exponent

En math, l'exposant de Lyapunov ou (exposant caractéristique de Lyapunov) d'un système dynamique est une quantité qui caractérise le taux de séparation dans le temps de deux trajectoires.

Si $\delta Z \equiv \delta Z(t)$ représente la distance entre ces trajectoires, son évolution temporelle sera de type exponentiel,

$$|\delta Z(t)| = e^{\lambda t} |\delta Z_0(t)| \quad \text{avec} \quad \delta Z_0 = \delta Z(t=0)$$

et λ est l'exposant de Lyapunov.

Cela est typiquement étudié dans l'espace des phases, mais on peut aussi penser aux trajectoires de 2 particules d'eau dans l'océan en mouvement turbulent, qui est un système dynamique.

L'espace des phases est un espace abstrait dont les coordonnées sont les variables dynamiques, les degré de liberté ou les paramètres du système étudié.

Un système dynamique est un système [classique](#) qui évolue au cours du temps de façon à la fois :

[causale](#), c'est-à-dire que son avenir ne dépend que de phénomènes du passé ou du présent ;

[déterministe](#), c'est-à-dire qu'à une « condition initiale » donnée à l'instant « présent » va correspondre à chaque instant ultérieur un et un seul état « futur » possible.

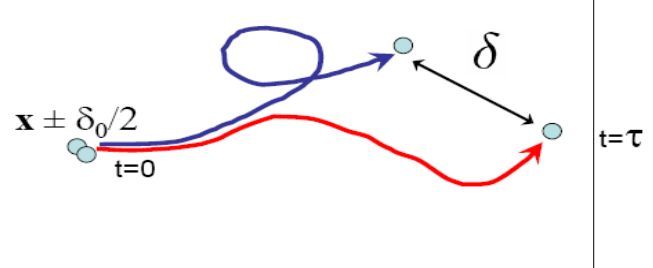
On exclut donc ici conventionnellement les systèmes « [bruités](#) » intrinsèquement [stochastiques](#), qui relèvent de la [théorie des probabilités](#).

Ex. pendule <http://www.mcasco.com/pend1.html>

Le taux de séparation peut être différent pour des orientations différentes du vecteur séparation initiale. Alors il y a un spectre entier d'exposants de Lyapunov, dont le nombre sera égale au nombre n de dimensions de l'entier spectre de λ_n . Généralement on fait référence au plus grand des λ_n ,

the **Maximal Lyapunov exponent (MLE)**, parce qu'il fournit une information sur la predicibilité du système dynamique étudié.

En particulier un $MLE > 0$ suggère que le système soit chaotique. Il faut noter que n'importe quel vecteur de séparation initiale contiendra une quelque composante dans la direction du MLE, mais à cause de la croissance exponentielle seulement le MLE sera important tandis que dans le temps les effets des autres plus petits sera vite oublié.



Définition du MLE

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\delta Z(t)|}{|\delta Z_0|} \quad \text{ou bien} \quad \lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) \quad \text{Lyapunov exponent}$$

avec

$$\lambda(t) = \lim_{\|\delta(O)\| \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta(t)\|}{\|\delta(O)\|} \quad \text{Finite-time Lyapunov exponent}$$

tandis que

$$\lambda(\delta_0, \delta_f) \equiv \frac{1}{\tau} \log \frac{\delta_f}{\delta_0} \quad \text{Finite-size Lyapunov exponent FSLE}$$

All the quantities are also functions of the initial position and time: $\lambda(\mathbf{x}, t, \delta_0, \delta_f)$

Les FSLE sont inversement proportionnels au temps nécessaire à 2 traceurs de rejoindre une certaine séparation.

$\lambda(\mathbf{x}, t, \delta_0, \delta_f)$, the FSLE at position \mathbf{x} and time t , is computed from the time τ it takes for a trajectory starting at time t at a distance δ_0 from \mathbf{x} to reach a separation δ_f from the reference trajectory that started at \mathbf{x} :



$$\lambda(\mathbf{x}, t, \delta_0, \delta_f) \equiv \frac{1}{\tau} \log \frac{\delta_f}{\delta_0}. \quad (1)$$

5.10 Exemple : observation in situ d'un point hyperbolique dans le Golfe du Lion (LATEX10)

Lagrangian Coherent Structures and transport analysis in the oceans: theory and applications


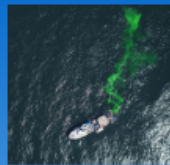

F. Nencioli ¹, F. d'Ovidio ², A.M. Doglioli ¹ and A.A. Petrenko ¹

(1) Aix-Marseille Université, CNRS, IRD, LOPB-UJMR 6535, Laboratoire d'Océanographie Physique et Biogéochimique, OSU/Centre d'Océanologie de Marseille, France
(2) Laboratoire d'Océanographie et du Climat: Expérimentation et Approches Numériques, IPSL, Paris, France

Student Seminar
November 15, 2011, Marseille

1. Intro **Transport in fluids**

- Complex due to chaotic and turbulent nature of flow field
- Structures and patterns are present
- Mathematical methods to detect those patterns:
 - Finite Size Lyapunov Exponents (FSLE)
 - Lagrangian Coherent Structures (LCS)
- Developed for the analysis of DYNAMICAL SYSTEMS

2. Math Basic Definitions

Dynamical System

Mathematical concept consisting of

- 1) Space state (space where system can evolve)
- 2) Time (during which the system evolves)
- 3) Evolution Rule (which describes the temporal evolution of the system in the space state)

2. Math Basic Definitions

Evolution Rule

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

with $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ State vector

Map/Flow

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(x) dt$$

Velocity field

Trajectory (Temporal ordered collection of successive states)

2. Math Basic Definitions

- Trajectories in system space highly influenced by spatial distribution of **FIXED or EQUILIBRIUM POINTS** $\rightarrow x^e$

Characteristics:

- 1) Constant position in time $\rightarrow x(t) = x^e$
- 2) Vector field is 0 $\rightarrow \frac{dx^e}{dt} = f(x^e) = 0$

- Classified depending on **LYAPUNOV STABILITY** :
- Fixed point is a **STABLE EQUILIBRIUM** point if trajectories of any point around it remains close to it with time (**UNSTABLE** if the contrary)

Further characterization:

- **ASYMPTOTIC** stable
- **EXPONENTIALLY** stable

2. Math Basic Definitions

- To define type of equilibrium point **STABILITY ANALYSIS**

System Linearization :

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \rightarrow \frac{d(x^e + \xi)}{dt} = f(x^e + \xi)$$

$$\frac{dx^e}{dt} + \frac{d\xi}{dt} = f(x^e) + J(x^e)\xi + \mathcal{O}(|\xi|^2)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = J(x^e)\xi$$

Jacobian matrix

$$J(x^e) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{x=x^e} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=x^e}$$

2. Math Basic Definitions

- To define type of equilibrium point **STABILITY ANALYSIS**

System Linearization :

$$\frac{d\xi}{dt} = J(x^e)\xi$$

Solution to ODE

$$\xi(t) = \xi(0) \exp^{Jt}$$

Eigenvalues of J can tell if the fixed point is stable or not

$$\det[J(x^e) - \lambda I] = 0$$

- Real or imaginary
- Positive or negative

2. Math Basic Definitions

- Types of equilibrium points

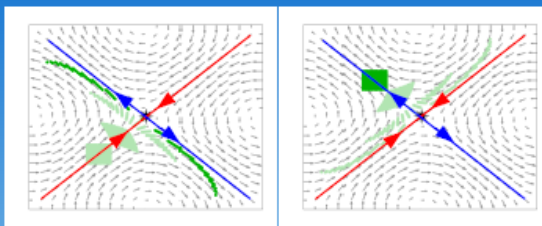
Diagram illustrating stability regions for different equilibrium points based on eigenvalues:

- unstable node** (real positive eigenvalues)
- unstable focus** (complex eigenvalues, positive real part)
- saddle** (real eigenvalues, different signs)
- stable focus** (complex eigenvalues, negative real part)
- stable node** (real negative eigenvalues)

Key bifurcations shown: saddle-node bifurcation, Andronov-Hopf bifurcation.

2. Math Basic Definitions


- Particle dispersion around an hyperbolic point
- Manifolds separate distinct regions of the flow!!!



- Particles move along and spread across converging direction: **STABLE MANIFOLD**
- Particles align along diverging direction (transport barrier) **UNSTABLE MANIFOLD**

3. LCS Finite Size Lyapunov Exponents

- Theory for manifold analysis developed by Alexandr Lyapunov (June 6 1857 – November 3 1918)

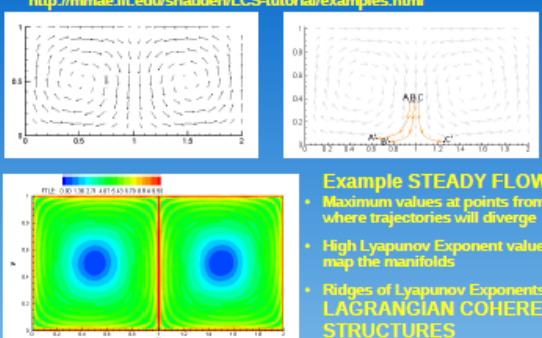


- Lyapunov exponents introduced at the end of 1800
- Based on the rate of separation of initially close trajectories
- Assumes infinite temporal evolution and permanent equilibrium points

- Problem of applications with measured data:
 - 1) Temporally finite time series
 - 2) Time varying velocity field
 - 3) Only transient Hyperbolic points and Manifolds
- Finite Size/Time Lyapunov Exponent techniques developed in the late '80s to apply Lyapunov analysis to measured (temporally finite) velocity fields.

3. LCS Finite Size Lyapunov Exponents

- Based on local relative dispersion of initially near trajectories (integrate information of evolving velocity field)
- <http://mmae.iit.edu/shadden/LCS-tutorial/examples.html>

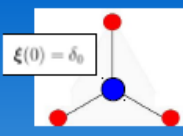


Example STEADY FLOW:

- Maximum values at points from where trajectories will diverge
- High Lyapunov Exponent values map the manifolds
- Ridges of Lyapunov Exponents are **LAGRANGIAN COHERENT STRUCTURES**

3. LCS Finite Size Lyapunov Exponents

- At each grid point deployed an array of four floats



- Advected in time (forward or backward) with a Runge-Kutta 4th order (linear spatial and temporal interpolation)
- Recorded the time (tau) at which one of the distances becomes larger than a fixed spatial threshold (fixed size)

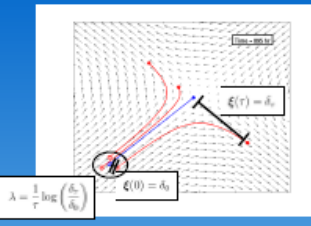
$$\xi(\tau) = \delta_\tau$$

- Lyapunov exponent is the inverse of that time

$$\xi(t) = \xi(0) \exp^{\lambda t} \implies \delta_\tau = \delta_0 \exp^{\lambda \tau} \implies \lambda = \frac{1}{\tau} \log \left(\frac{\delta_\tau}{\delta_0} \right)$$

- Quantify separation of trajectories due to presence of hyperbolic point (exponential separation)

3. LCS Finite Size Lyapunov Exponents

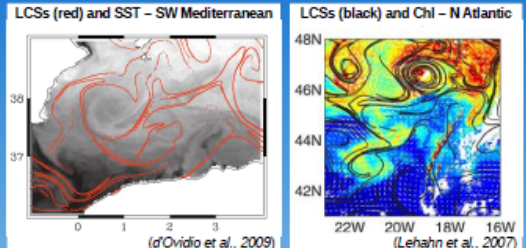


- Grid resolution and separation distance (initial and final) all affect FSLE
- They must be accurately defined depending on the application

- **FSLE Values:**
 - The closer to the hyperbolic point the stronger the FSLE
 - The more intense the divergence/convergence at the hyperbolic point the stronger the FSLE
- **IMPORTANT CONDITIONS:**
 - Hyperbolic point must be persistent during integration
 - Its translation must be slower than local advection

4. Apps Open ocean LCSs

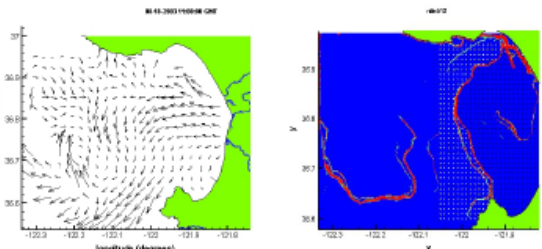
- **Open ocean:** LCSs from altimetry velocity fields using Lyapunov Exponents
- Detected structures compared to advected tracers



- Accuracy still relatively untested in coastal areas

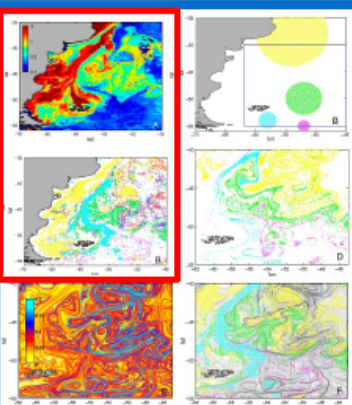
4. Apps Coastal ocean LCSs

- **Coastal ocean:** LCSs from HF Radar velocities (Monterey Bay, CA)



<http://mmae.iit.edu/shadden/LCS-tutorial/oceancurrents.html>

4. Apps Biological impact of LCSs



- Creation of ecological niches
- Structuring of phytoplankton communities

(d'Ovidio et al., 2010)

4. Apps Biological impact of LCSs

- Influences on marine top-predator (e.g. Frigates in Mozambique)

<http://www.migratoryconnectivityproject.org/tracking/satellite>

(Kai et al., 2009)

Real-time in-situ tracking of Lagrangian coherent structures in a coastal region

F. Nencioli ¹, F. d'Ovidio ², A.M. Doglioli ¹ and A.A. Petrenko ¹

(1) Aix-Marseille Université, CNRS, IRD, LOPB-UMR 8535, Laboratoire d'Océanographie Physique et Biogéochimique, OSU Centre d'Océanologie de Marseille, France
 (2) Laboratoire d'Océanographie et du Climat: Expérimentation et Approches Numériques, IPSL, Paris, France

CEM D'Océanologie de Marseille LOPB

EGU General Assembly 2011
 April 8, 2011, Vienna

1. Intro The Gulf of Lion

- Altimetry LCSs compared to *in-situ* LCSs in the Gulf of Lion (GoL)

- Large continental shelf
- Three main forcings:
 - Mistral & Tramontane
 - Delta of Rhone river
 - Northern Current
- NC dynamical barrier to cross-shelf exchanges
- (Sub)mesoscale anticyclones in the western part

Lagrangian Transport Experiment
 Latex10, September 1-24, 2010

Transport and biogeochemistry in the western part of the GoL.

3 of 13

2. Methods Altimetry LCSs

- Altimetry LCSs from AVISO velocities using Finite-size Lyapunov exponents analysis (FSLE; d'Ovidio et al., 2004)
- Geostrophic surface velocity fields derived from SSH
- 1/8 degree, daily

4 of 13

2. Methods In-situ LCSs

Latex10 Adaptive Sampling Strategy for detection of *in-situ* LCSs:

- Position of large scale LCSs estimated from altimetry derived FSLE
- In-situ* deployment of drifters
- Mapping of *in-situ* velocities (hull mounted ADCP)

Deployment of 3 drifter arrays:

- Lyap01 (September 12)
- Lyap02 (September 18)
- Lyap03 (September 21)

5 of 13

3. Results Lyap01 – Sept 12 - 14

September 12, 2010

- Altimetry geostrophic velocity vectors
- Attractive (blue) & Repulsive (red) LCSs
- Initial position of drifter array

September 12-14, 2010

- Drifter trajectories
- In-situ* LCSs
- 15m ADCP velocity vectors

- Repelling LCS on the continental shelf not detected
- Confirmed by ADCP velocities

6 of 13

3. Results Lyap02 – Sept 18 - 20

September 18, 2010

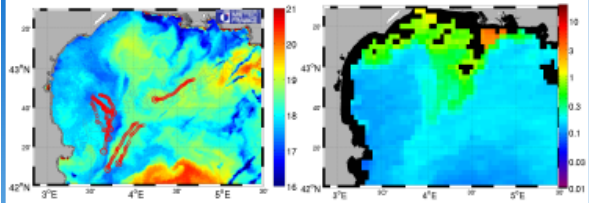
- Altimetry geostrophic velocity vectors
- Attractive (blue) & Repulsive (red) LCSs
- Initial position of drifter array

September 18-20, 2010

- Drifter trajectories
- In-situ* LCSs
- 15m ADCP velocity vectors

- Satellite structures similar to Sept. 12
- Accurate identification of LCSs and hyperbolic point

7 of 13

	<p>3. Results LCSs and satellite imagery <small>CENTRE D'Océanologie DE MARSEILLE</small></p> <p>September 14, 2010</p> <ul style="list-style-type: none"> • AVHRR SST field • Lyap01 drifter trajectories  <ul style="list-style-type: none"> • In-situ LCSs associated with a front (NC and coastal waters) • They identify coastal corridor along which water exit the GoL. • Importance of those structures to study cross-shelf exchanges • Importance of those exchanges for biogeochemistry <p style="text-align: right;"><small>10 of 13</small></p>
<p>4. Concl. Conclusions <small>CENTRE D'Océanologie DE MARSEILLE</small></p> <ul style="list-style-type: none"> • Adaptive sampling strategy allowed to detect and track <i>in-situ</i> LCSs for two weeks • Translational speed of hyperbolic point satisfies assumption for FSLE analysis • LCSs identified a corridor along which coastal waters left the continental shelf of the GoL • Altimetry LCSs showed some limitations in the coastal region • Corrections are required to improve coastal transport analysis from altimetry velocity fields <p style="text-align: right;"><small>11 of 13</small></p>	<p>4. Concl. Future Work <small>CENTRE D'Océanologie DE MARSEILLE</small></p> <ul style="list-style-type: none"> • Quantification of transport • Improve satellite velocity field: <ul style="list-style-type: none"> • Different processing schemes for raw data • Add ageostrophic components (Ekman, MIO...) • HF Radar velocities • Numerical models: <ul style="list-style-type: none"> • Extend transport analysis to the whole GoL • Test corrections • Analysis of previous Latex datasets • Further Lyap experiments (???) <p style="text-align: center;">Final goal Method for estimate & predict coastal transport/exchanges (pollutants, oil spill, larval/jellyfish transport, fisheries)</p> <p style="text-align: right;"><small>12 of 13</small></p>

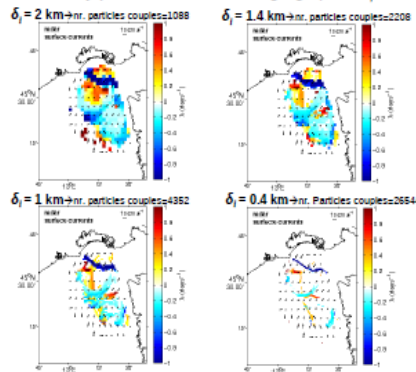
5.11 Exemple : etude des FSLE dans le Golfe de Trieste par mesure radar

<h4>Typical Wind events</h4> <p>BORA</p> <ul style="list-style-type: none"> Siberian katabatic wind (analogous mechanism of Mistral in GoL) blows from E-NE cold, dry and gusty 5 preferential entrances over the Adriatic <p>SIROCCO</p> <ul style="list-style-type: none"> Saharian wind pulled northward by low-pressure cell over Mediterranean Sea blows from S-SE warm, wet and steady 	<h4>Adriatic Sea mean surface circulation</h4> <p>Adriatic cyclonic pattern: WAC / EAC system</p> <p>Mean current field (from radar meas, Aug07-Aug08)</p> <ul style="list-style-type: none"> northward flow along Istria westward jet along Italy
<h4>Effects of wind on circulation</h4> <p>BORA DRIVES</p> <ul style="list-style-type: none"> upwelling along eastern coast (U) double gyre surface circulation as wind ceases, rapid return mean circulation <p>SIROCCO DRIVES</p> <ul style="list-style-type: none"> sea level rise along northern coast possible WAC reversal (North Adri) as wind ceases, basin-wide barotropic seiches 	<p>BORA drives</p> <ul style="list-style-type: none"> intensification of westward jet along Italy (northern Bora corridor) downwind currents and divergence in front of the Istrian peninsula <p>SIROCCO drives</p> <ul style="list-style-type: none"> intensification of northward flow along Istria westward veering along Italian coast
<h4>AIM AND STRATEGY OVERVIEW</h4> <p>Identification of surface transport patterns in the North Adriatic with Bora and Sirocco winds.</p> <p>combine</p> <p>DATA: High Frequency radar currents measurements</p> <p>METHOD: Finite-Size Lyapunov Exponent (FSLE) technique</p> <p>high resolution information + tracking sub-mesoscale dynamics</p> <p>Investigation:</p> <ul style="list-style-type: none"> Applicability of FSLE on highly variable current field, with small domain Transport structures development under specific wind conditions Implication of spatial organization of transport observed 	<h4>Lagrangian methods</h4> <p>single trajectory prediction</p> <p>transport patterns detection</p> <p>Lyapunov Exponent (LE)</p> <p>quantifies relative dispersion between close trajectories</p> <p>transport information integrated over time</p> <p>applied in oceanography to identify attractive and repulsive Lagrangian Coherent Structures (LCSs)</p>
<h4>Finite Size LE (FSLE)</h4> <p>Definition: $\lambda(x, \delta_i, \tau, \delta_f) = \frac{1}{\tau} \ln \frac{\delta_f}{\delta_i}$</p> <p>small $\tau \rightarrow$ fast separation \rightarrow large λ</p> <p>Application: particles move with $u(t, x)$</p> <p>VELOCITY GRID</p> <p>FSLE GRID (resolution = initial distance of particles)</p> <p>Num part = f (current field area / FSLE pixel resolution)</p> <p>For each FSLE grid node \rightarrow maximum λ of the 4 nearest couples</p>	<h4>From FSLE to LCS</h4> <p>LCS time scale evolution is very different from temporal variability of the flow field</p> <p>Integration of particles forward in time</p> <p>look for divergence of particles</p> <p>$\lambda_+ = \frac{1}{\tau} \ln \frac{\delta_f}{\delta_i}$</p> <p>positive FSLE: identify repulsive LCS or barriers to transport</p> <p>Integration of particles backward in time</p> <p>look for convergence of particles</p> <p>$\lambda_- = -\frac{1}{\tau} \ln \frac{\delta_f}{\delta_i}$</p> <p>negative FSLE: identify attractive LCS or direction of transport</p>

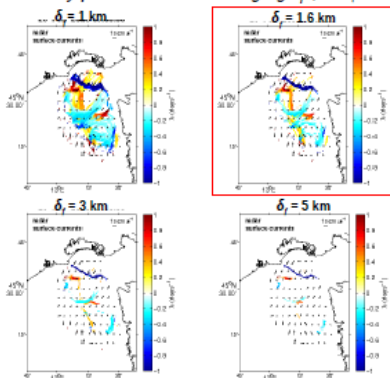
Algorithm and settings

- Trajectories evolution $\rightarrow \frac{dx}{dt} = u(t, x) \rightarrow$ Integration in time: 4th order Runge-Kutta
Interpolation in space: bilinear (4)
- Choice of δ_x and δ_y \rightarrow Depends on currents features, length scale of structures and details requirements in structures identification.
- Independent runs \rightarrow Forward FSLE (looking for divergence)
Backward FSLE (looking for convergence)
- Graphical superposition of forward and backward FSLE

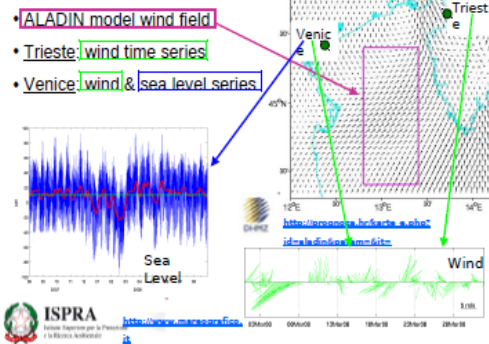
Sensitivity parameters test changing δ_x (with $\delta_y = 3$ km)



Sensitivity parameters test changing δ_y (with $\delta_x = 0.4$ km)



Meteo-mareographic dataset



Wind episodes selection

CRITERIA :

- INTENSITY \rightarrow
- DIRECTION \rightarrow



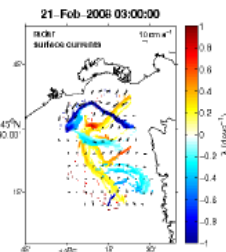
	ALADIN MODEL	TRIESTE STATION	VENICE STATION
CALM WIND		Persistence ≥ 7 days Speed < 3 m/s	
BORA		Persistence ≥ 3 days Speed ≥ 5 m/s	
SIROCCO		Persistence ≥ 2 days Speed ≥ 5 m/s	Low pass filtered Sea Level > 20 cm

- Trieste: ideal for Bora identification
- Venice: ideal for Sirocco identification

FSLE during calm wind (case 1)

17-Feb-2008 29-Feb-2008

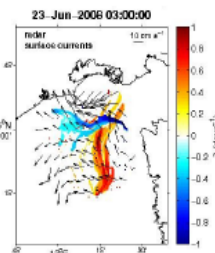
- Current field rich in transport structures
- Evolution of transport structures slower than currents variability
- Attractive transport line detached from the Italian coast



FSLE during calm wind (case 2)

17-Jun-2008 30-Jun-2008

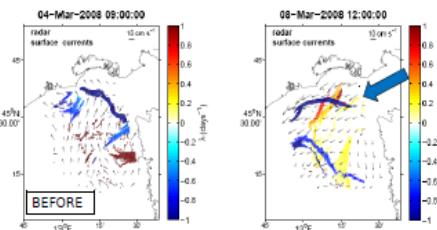
- Current field rich in transport structures
- Evolution of transport structures slower than currents variability
- Attractive transport line detached from the Italian coast



FSLE during Bora (case 1)

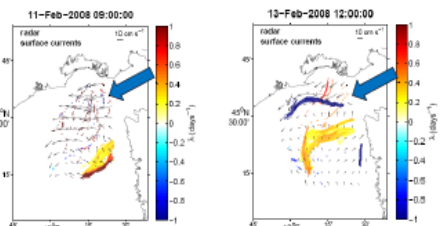
04-Mar-2008 08-Mar-2008

- Bora drives significant spatial variability in surface currents
- new structures develop and pre-existent ones change spatial configuration
- transport structures configuration evolves slower than the current field



FSLE during Bora (case 2)

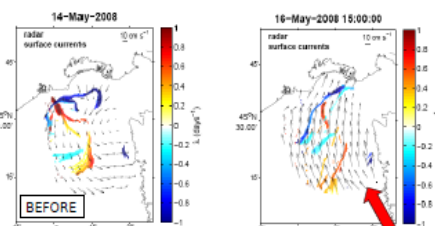
06-Feb-2008 13-Feb-2008



- Reduced coverage does not allow to identify attractive LCS at the beginning
- Development of repulsive LCS in front of the Istrian coast and northward propagation
- At the end of the event appearance of attractive structure

FSLE during Sirocco (case 1)

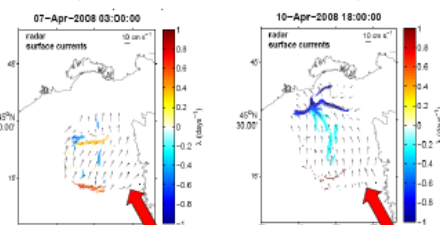
16-May-2008 19-May-2008



- Sirocco drives coherent surface velocities
- lines of transport align perpendicularly to dominant wind direction
- local transport reversed from "mean condition": particles

FSLE during Sirocco (case 2)

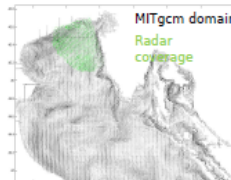
09-Apr-2008 11-Apr-2008



- At the beginning reduced radar coverage to identify any structures
- At the end of the event, the transport line along Italy comes out

Model: MITgcm*

* General Circulation Model



- Simulates physical variables (velocity, temperature and salinity)
- non hydrostatic
- finite volume
- free surface
- 1/64 ° spatial res., 1h temporal res.
- Z-levels (surface - 40m depth)
- forced by ALADIN wind field (also used for wind events identification)

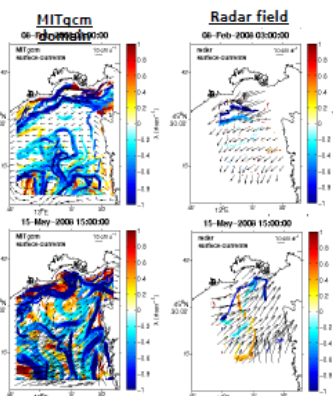
FSLE evaluation:

- Particles: same radar launch grid, but evolution all over MITgcm domain
- $\delta_x = 0.4$ km, $\delta_y = 1.6$ km (same radar parameters)
- Maximum evolution time (forward and backward): 6 days

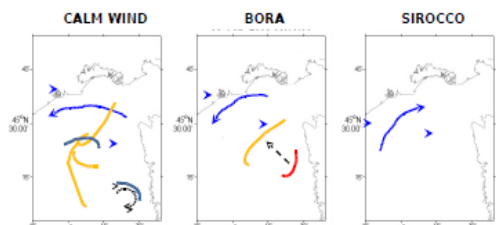
<http://mitgcm.org> MITgcm

SIMILARITIES AND DIFFERENCES
Model currents forced by ALADIN wind (more homogeneous and less intense than actual wind)
Long-lived structures

Model domain wider
↓
Particles have higher chance to satisfy the final distance criteria
↓
Tangle of structures



SUMMING-UP...



- High variability (spatial and temporal) of the velocity field affects structures configuration and persistence
- Line of transport along the Italian coast: different meandering and detachment from coastline according to wind conditions
- Greater variability of transport structures in the southern part of the domain, due to close orographic influence on winds.

COMMENTS

- The "optimum scenario" for FSLE application would be:
 - extended flow field (size >> length scale of the structures to be identified)
 - evolution of flow field slower than advective time scale (frozen field Hp)
- In oceanography FSLE is usually applied over current fields derived from satellite altimetry or model output:
 - Size of the domain larger than radar coverage
 - Slower variability of the velocity field with respect to radar measurements
- One of the first FSLE application on HF radar current field: (see also Mass et al. 2010 for application on VHF radars)
 - High resolution, but small domain
 - Transport structures evolve faster than their translational velocity

Through an accurate setting of initial and final separation between

PERSPECTIVES...

- Application of FSLE method both on modeled and radar currents: combination of the surface dynamics information from model and radar field
- FSLE transport analysis on deeper layers of modeled currents can give important information on water column dynamics.
- FSLE method in association with advection of clusters of drifters (at the surface and deeper deployments) to compare trajectories with the transport structures identified from radar and model.

Programmes matlab (VERSIONS ANCIENNES, pour 2018, voir repertoire sur web)

```

%% programme qui montre que le nombre sont PSUEDO-aléatoires
%% et non pas vraiment aléatoires

clear;close;
disp('PROGRAM TEST_RANDOM')
disp('*** without reset ***')

s = rand('state');
u1 = rand(10,1);
%rand('state',s);
u2 = rand(10,1); % contains exactly the same values as u1
[u1';u2']

disp('*** with reset ***')

%Save the current state, generate 10 values, reset the state, and repeat the sequence.
s = rand('state');
u1 = rand(10,1);
rand('state',s);
u2 = rand(10,1); % contains exactly the same values as u1
[u1';u2']

```

```

%% programme qui extrait des nombre pseudo-aléatoires
%% 1) entre 0 et 1 avec pdf uniforme
%% 2) entre -inf et +inf avec pdf gaussienne à moyenne nulle

```

```

disp('PROGRAM HISTOGRAMS')
clear;close all;

imax=10000;

for i=1:imax
    r(i)=rand(1);
end

figure(1)
subplot(2,1,1)
intedge=0.1;
edges=[0:intedge:1];
N=histc(r,edges);
bar(edges,N./imax*100,'histc')
y(1:size(edges'))=intedge;
line(edges,y*100,'color','r')
ylabel('%')

pause(2)

devst=10;
for i=1:imax
    g=0;
    for ig=1:12
        r=rand(1);
        g=g+(r-0.5);
    end
    gg(i)=g.*devst;
end

subplot(2,1,2)
intedge=0.25;
edges=[-100:intedge:100];
N=histc(gg,edges);
bar(edges,N./imax*100,'histc')
var=devst^2;
y=1/sqrt(2*pi*var).*exp(-(edges).^2/(2*var));
line(edges,y.*intedge*100,'color','r')
ylabel('%')

```

```

%% programme qui exarit des nombre pseudo-aléatoires
%% 1) entre 0 et 1 avec pdf uniforme
%% 2) entre -inf et +inf avec pdf gaussienne à moyenne nulle

```

```

disp('PROGRAM HISTOGRAMS')
clear;close all;

imax=10000;

for i=1:imax
    r(i)=rand(1);
end

figure(1)
subplot(2,1,1)
intedge=0.1;
edges=[0:intedge:1];
N=histc(r,edges);
bar(edges,N./imax*100,'histc')
y(1:size(edges'))=intedge;
line(edges,y*100,'color','r')
ylabel('%')

pause(2)

devst=10;
for i=1:imax
    g=0;
    for ig=1:12
        r=rand(1);
        g=g+(r-0.5);
    end
    gg(i)=g.*devst;
end

subplot(2,1,2)
intedge=0.25;
edges=[-100:intedge:100];
N=histc(gg,edges);
bar(edges,N./imax*100,'histc')
var=devst^2;
y=1/sqrt(2*pi*var).*exp(-(edges).^2/(2*var));
line(edges,y.*intedge*100,'color','r')
ylabel('%')

```

```

%% programme pour la marche aléatoire de plusieurs particules
clear;close;

```

```

disp('PROGRAM RANDOM_WALK_NPART');

ipmax=10;%nombre de particules
itmax=100;%[s]
devst=1;%[m]

figure(1);hold on;
axis([-50 50 -50 50])
text(-1,-1,'*', 'color','red','fontsize',20)
grid on;
xlabel('distance en direction x [m]');
ylabel('distance en direction y [m]');

for ip=1:ipmax

x(1)=0;
y(1)=0;

for it=2:itmax
    %extraction déplacement en direction x
    g=0;
    for ig=1:12
        r=rand(1);
        g=g+(r-0.5);
    end
end

```

```

end
depx=g.*devst;
%extraction déplacement en direction y
g=0;
for ig=1:12
    r=rand(1);
    g=g+(r-0.5);
end
depy=g.*devst;
%assegnation nouvelle position
x(it)=x(it-1)+depx;
y(it)=y(it-1)+depy;

end%for it

line(x,y,'color',[ip/ipmax 0 1-ip/ipmax])
text(51,51-ip*4,num2str(ip),'color',[ip/ipmax 0 1-ip/ipmax])
end%for ip
hold off;

```

%% programme qui calcule la concentration de particule par maille de grille

```

clear;close all;
Xsource=5; %position en x initiale des particules
Ysource=5; %position en y initiale des particules
ipmax=5; %nbre de particules
itmax=100; %nbre de pas de temps en jour
imax=10; %taille de la matrice CONC en m (boite où sont enfermée les particules)
jmax=10; %taille de la matrice CONC en m
deltatime=50; %pas de temps (pour calculer et tracer CONC)
k=1.5*10^(-7); %coeff diffusion [m²/s]
xold(1:ipmax)=Xsource; %initial position
yold(1:ipmax)=Ysource;

scrsz = get(0,'ScreenSize');
figure('Position',[1 scrsz(4) scrsz(3) scrsz(4)]);

for it=1:itmax
    devst=sqrt(2*k*3600*24); %ecart type (en m)
    %condition initiale de concentration nulle
    CONC=zeros(10,10);
    for ip=1:ipmax
        %extraction déplacement en direction x
        g=0;
        for ig=1:12
            r=rand(1);
            g=g+(r-0.5);
        end
        depx=g.*devst;
        %extraction déplacement en direction y
        g=0;
        for ig=1:12
            r=rand(1);
            g=g+(r-0.5);
        end
        depy=g.*devst;
        %assegnation nouvelle position
        xnew(ip)=xold(ip)+depx;
        ynew(ip)=yold(ip)+depy;
        %condition à la frontière: frontière fermée
        if(xnew(ip)<1 | xnew(ip)>100 | ynew(ip)<1 | ynew(ip)>100)
            xnew(ip)=xold(ip);
            ynew(ip)=yold(ip);
        end%if
        %calcul de la concentration
        ii=fix(xnew(ip));
        jj=fix(ynew(ip));
        CONC(jj,ii)=CONC(jj,ii)+1;
        %sauvegarde de la position des particules pour comparaison
        xmem(ip)=xnew(ip);
        ymem(ip)=ynew(ip);
        xold(ip)=xnew(ip);
        yold(ip)=ynew(ip);
    end%for ip

```

```

subplot(1,2,1);hold on;
title(['it=',num2str(it)]);
pcolor(CONC);
colorbar;
plot(xmem,ymem,'k+');
axis([1 10 1 10])
axis square
xlabel('mesh index in x-direction');
ylabel('mesh index in y-direction');

subplot(1,2,2);hold on;
axis([0 10 0 10])
plot(xmem,ymem,'k+')
contour(CONC)
colorbar
axis([1 10 1 10])
axis square
xlabel('mesh index in x-direction');
ylabel('mesh index in y-direction');
title([' CLICK ON THE FIGURE TO CONTINUE']);
waitforbuttonpress
hold off; clf;
end %pour it

```

```

%% programme pour la diffusion d'une goutte d'encre dans un verre
%% contribution G.Ginoux

```

```

clear all;close all;scrsz = get(0,'ScreenSize');

disp('PROGRAM DIFFUSION')

Xsource=50; %position en x initiale des particules
Ysource=50; %position en y initiale des particules
ipmax=10000; %nombre de particules
itmax=1000; %nombre de pas de temps en jour
imax=100; %taille de la matrice CONC en m (boite où sont enfermées les particules)
jmax=100; %taille de la matrice CONC en m
deltatime=50; %pas de temps (pour calculer et tracer CONC)
k=10.5*10^(-7); %m²/s
devst=sqrt(2*k*3600*24); %ecart type (en m)
xold(1:ipmax)=Xsource; %initial position
yold(1:ipmax)=Ysource;

for it=1:itmax
    it
    for ip=1:ipmax
        g=0;
        for i=1:12
            r=rand;
            g=g+(r-0.5);
        end
        depx=g*devst;
        h=0;
        for i=1:12
            r=rand;
            h=h+(r-0.5);
        end
        depy=h*devst;
        X(ip)=xold(ip)+depx;
        Y(ip)=yold(ip)+depy;
        % condition à la frontière
        if X(ip)<1 | X(ip)>100 | Y(ip)<1 | Y(ip)>100
            %frontière fermée
            X(ip)=xold(ip);
            Y(ip)=yold(ip);
        end
        xold(ip)=X(ip);
        yold(ip)=Y(ip);
    end %pour ip

    %Afin de n'afficher la figure que tous les 'deltatimes' pas de temps
    if rem(it,deltatime)==0
        CONC=zeros(jmax,imax);
        devst
        for ip=1:ipmax
            %Calcule le nombre de particules dans chaque maille

```



```

    ii=fix(X(ip));
    jj=fix(Y(ip));
    CONC(jj,ii)=CONC(jj,ii)+1;
end

close all
figure('Position',[1 scrsz(4)/2 scrsz(3)/2 scrsz(4)/2]);
hold on;
contourf(CONC(:,:)./ipmax,[0:1:20]./ipmax);shading flat;
axis([-10 imax+10 -10 jmax+10])
box on;
colorbar;
title('concentration specifique de particules par maille de grille');
axis([1 100 1 100])
axis square
xlabel('mesh index in x-direction');
ylabel('mesh index in y-direction');

% Croix rouge (centée en 50,50)
cf= repmat(50,1,100);
cs=1:100;
plot(cf,cs,'r-')
plot(cs,cf,'r-')

CONCf1=CONC(50,:)/sum(CONC(50,:));
CONCf2=CONC(:,50)/sum(CONC(:,50));
xx=[1:0.1:100];
moy=50;
yy=1/sqrt(2*pi*devst^2*it).*exp(-1/2*((xx-moy)./(devst.*sqrt(it)).^(2));

figure('Position',[scrsz(3)/2 scrsz(4)/2 scrsz(3)/2 scrsz(4)/2]);
subplot(1,2,1), plot(CONCf1); axis([40 60 0 0.3]); hold off;
%Superposition de la gaussienne
line(xx,yy,'color','r')
xlabel('Concentration le long de la ligne horizontale');
subplot(1,2,2), plot(CONCf2); axis([40 60 0 0.3]); hold off;
%Superposition de la gaussienne
line(xx,yy,'color','r')
xlabel('Concentration le long de la ligne verticale');
hold off;
title([' CLICK ON THE FIGURE TO CONTINUE']);
waitforbuttonpress;

end %pour if

end %pour it

```

```

%% programme pour la advection diffusion d'une goutte d'encre
%% dans un champs de vitesse uniforme

```

```

clear all;close all;
figure(1)
disp('PROGRAM ADVECTION-DIFFUSION')

Xsource=50; %position en x initiale des particules
Ysource=50; %position en y initiale des particules
ipmax=10000; %nombre de particules
itmax=1000; %nombre de pas de temps en jour
imax=100; %taille de la matrice CONC en m (boite où sont enfermées les particules)
jmax=100; %taille de la matrice CONC en m
deltatime=50; %pas de temps (pour calculer et tracer CONC)
k=10.5*10^(-7); %m^2/s
devst=sqrt(2*k*3600*24); %ecart type (en m)
xold(1:ipmax)=Xsource; %initial position
yold(1:ipmax)=Ysource;
U=0.1;%[m/s]
V=0;%[m/s]
deltaT=1;%[s]

for it=1:itmax
    it
    for ip=1:ipmax
        g=0;
        for i=1:12
            r=rand;
            g=g+(r-0.5);
        end
    end
end

```

```

depx=g*devst;
h=0;
for i=1:12
    r=rand;
    h=h+(r-0.5);
end
depy=h*devst;
X(ip)=xold(ip)+depx+U*deltaT;
Y(ip)=yold(ip)+depy+V*deltaT;
% condition à la frontière
if X(ip)<1 | X(ip)>100 | Y(ip)<1 | Y(ip)>100
    %frontière fermée
    X(ip)=xold(ip);
    Y(ip)=yold(ip);
end
xold(ip)=X(ip);
yold(ip)=Y(ip);
end %pour ip

% Afin de n'afficher la figure que tous les 'deltatimes' pas de temps
if rem(it,deltatime)==0
    CONC=zeros(jmax,imax);
    devst
    for ip=1:ipmax
        %Calcule le nombre de particules dans chaque maille
        ii=fix(X(ip));
        jj=fix(Y(ip));
        CONC(jj,ii)=CONC(jj,ii)+1;
    end
    figure(1);hold on;
    contourf(CONC(:, :)./ipmax,[0:1:20]./ipmax);shading flat;
    axis([-10 imax+10 -10 jmax+10])
    box on;
    colorbar;
    title('concentration spécifique de particules par maille de grille');
    % Croix rouge (centée en 50,50)
    cf= repmat(50,1,100);
    cs=1:100;
    plot(cf,cs,'r-')
    plot(cs,cf,'r-')
    pause(1)
    hold off; clf reset
end %pour if

end %pour it

```

```

%% programme pour la advection diffusion avec un source de particules
%% dans un champs de vitesse uniforme
clear all;close all;
figure(1)
disp('PROGRAM ADVECTION-DIFFUSION CONTINUOUS RELEASE')

Xsource=50; %position en x initiale des particules
Ysource=50; %position en y initiale des particules
ipmax=5000000; %nbre de particules
iprelease=100;
itmax=ipmax/iprelease; %nbre de pas de temps en jour
imax=100; %taille de la matrice CONC en m (boite où sont enfermée les particules)
jmax=100; %taille de la matrice CONC en m
deltatime=50; %pas de temps (pour calculer et tracer CONC)
k=1.5*10^(-7); %m²/s
devst=sqrt(2*k*3600*24); %ecart type (en m)
U=0.1;%[m/s]
V=0;%[m/s]
deltaT=1;%[s]
activity(1:ipmax)=0;

for it=1:itmax
    it
    activity(it:it+9)=1;
    xold(it:it+iprelease-1)=Xsource;
    yold(it:it+iprelease-1)=Ysource;
    for ip=1:ipmax
        if activity(ip)==1;
            g=0;
            for i=1:12
                r=rand;

```

```

    g=g+(r-0.5);
end
depx=g*devst;
h=0;
for i=1:12
    r=rand;
    h=h+(r-0.5);
end
depy=h*devst;
X(ip)=xold(ip)+depx+U*deltaT;
Y(ip)=yold(ip)+depy+V*deltaT;
% condition à la frontiere
if X(ip)<1 | X(ip)>100 | Y(ip)<1 | Y(ip)>100
    %frontière fermée
    X(ip)=xold(ip);
    Y(ip)=yold(ip);
    %e particules sortantes (non plus actives)
    activity(ip)=0;
end
xold(ip)=X(ip);
yold(ip)=Y(ip);
    end%if activity(ip)=1;

end %pour ip

%Afin de n'afficher la figure que tous les 'deltatimes' pas de temps
if rem(it,deltatime)==0
    CONC=zeros(jmax,imax);
    devst
    for ip=1:ipmax
        if activity(ip)==1;
            %Calcule le nombre de particules dans chaque maille
            ii=fix(X(ip));
            jj=fix(Y(ip));
            CONC(jj,ii)=CONC(jj,ii)+1;
            end%if activity(ip)=1;
    end
    figure(1);hold on;
    contourf(CONC(:,:)./ipmax,[0:1:20]./ipmax);shading flat;
    axis([1 imax 1 jmax])
    box on;
    colorbar;
    title('concentration specifique de particules par maille de grille');
    % Croix rouge (centée en 50,50)
    cf= repmat(50,1,100);
    cs=1:100;
    plot(cf,cs,'r-')
    plot(cs,cf,'r-')
    pause(1)
    hold off; clf reset
    end %pour if

end %pour it

```

***Textes d'examens
des années précédentes***

Année Universitaire 2018-2019
Session unique

OPB306 – Approche Lagrangienne : fondements

Durée : 2 heures

Documents : non autorisés

Calculatrice : autorisée

Les réponses doivent être les plus concises et précises possible.

Partie A. Doglioli

- 1) Quelle est la différence entre approche Eulerienne et Lagrangienne ?
- 2) Comment se forment les tourbillons en aval de capes ?
- 3) Expliquer le bilan cyclo-géostrophique .
- 4) Décrire et expliquer les différentes techniques d'identification et de suivi de tourbillons océaniques .

Année Universitaire 2018-2019
Session unique

OPB309 – Approche Lagrangienne : stratégies d'échantillonnage

Durée : 2 heures

Documents : non autorisés

Calculatrice : autorisée

Les réponses doivent être les plus concises et précises possible.

Partie A. Doglioli

- 1) Expliquer les différents termes de l'équation de conservation en forme intégrale d'une propriété générique ψ

$$\frac{d}{dt} \int_V \psi dV + \oint_S \psi \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} + \oint_S \chi \cdot d\mathbf{S} = \int_V \xi dV.$$

- 2) Qu'est-ce que un modèle « *random walk* »?

***** ATTENTION ! rédiger les réponses sur des feuilles séparées *****

Partie A. Petrenko

- 3) Décrire une oscillation d'inertie (OI) en milieu bicouche avec un forçage du vent orthogonal à la côte. Quelle est la définition (et l'unité) de la fréquence d'inertie par rapport à la latitude ? Calculer fréquence d'inertie et période des OIs (en heure) à deux latitudes: 20° et 60°; commenter.

Indiquer deux techniques d'analyse de données pour détecter ces OIs.

***** ATTENTION ! rédiger les réponses sur des feuilles séparées *****

Partie F. d'Ovidio

- 4) Quelles sont les échelles typiques (spatiales et temporelles) de la mésoéchelle et de la submésoéchelle? Comment la dynamique d'un tourbillon peut être couplée à la dynamique du phytoplancton? (un ou deux mécanismes à choix). Comment un peut envisager de mécanismes de couplage entre les mésoéchelle et submésoéchelle et la chaîne trophique pélagique?

Année Universitaire 2019-2020
Session unique

OPB306 – Approche Lagrangienne : fondements

Durée : 2 heures

Documents : non autorisés

Calculatrice : autorisée

Les réponses doivent être les plus concises et précises possible.

Partie A. Doglioli

- 1) Expliquer le phénomène du décollement de la couche limite en présence d'un cap ?
- 2) Pourquoi les anticyclones de mésoéchelle ont tendance à dériver vers l'équateur ?
- 3) Quelle est la différence entre tourbillon irrotationnel et tourbillon de corps rigide..

Partie A. Petrneko

- 4) Donner les formules de l'équation Omega et du vecteur Q, en expliquant brièvement à quoi correspondent les termes. Quelles sont les hypothèses effectuées pour le raisonnement aboutissant à la mise en place de cette équation ?

Année Universitaire 2019-2020
Session unique

OPB309 – Approche Lagrangienne : stratégies d'échantillonnage

Durée : 2 heures

Documents : non autorisés

Calculatrice : autorisée

Les réponses doivent être les plus concises et précises possible.

Partie A. Doglioli

- 1) Expliquer le fonctionnement d'un code pour le calcul des FSLE Finite Size Lyapunov Exponents
- 2) Qu'est-ce que un modèle à particules numériques?

***** ATTENTION ! rédiger les réponses sur des feuilles séparées *****

Partie A. Petrenko

- 3) Décrire une oscillation d'inertie (OI) en milieu bicouche. Indiquer trois techniques d'analyse de données pour détecter ces OIs.

***** ATTENTION ! rédiger les réponses sur des feuilles séparées *****

Partie F. d'Ovidio

- 4) Donner des exemples d'utilisation de l'altimétrie satellitaire pour des études de mésoéchelle en océanographie. Discuter brièvement les limitations de l'altimétrie.