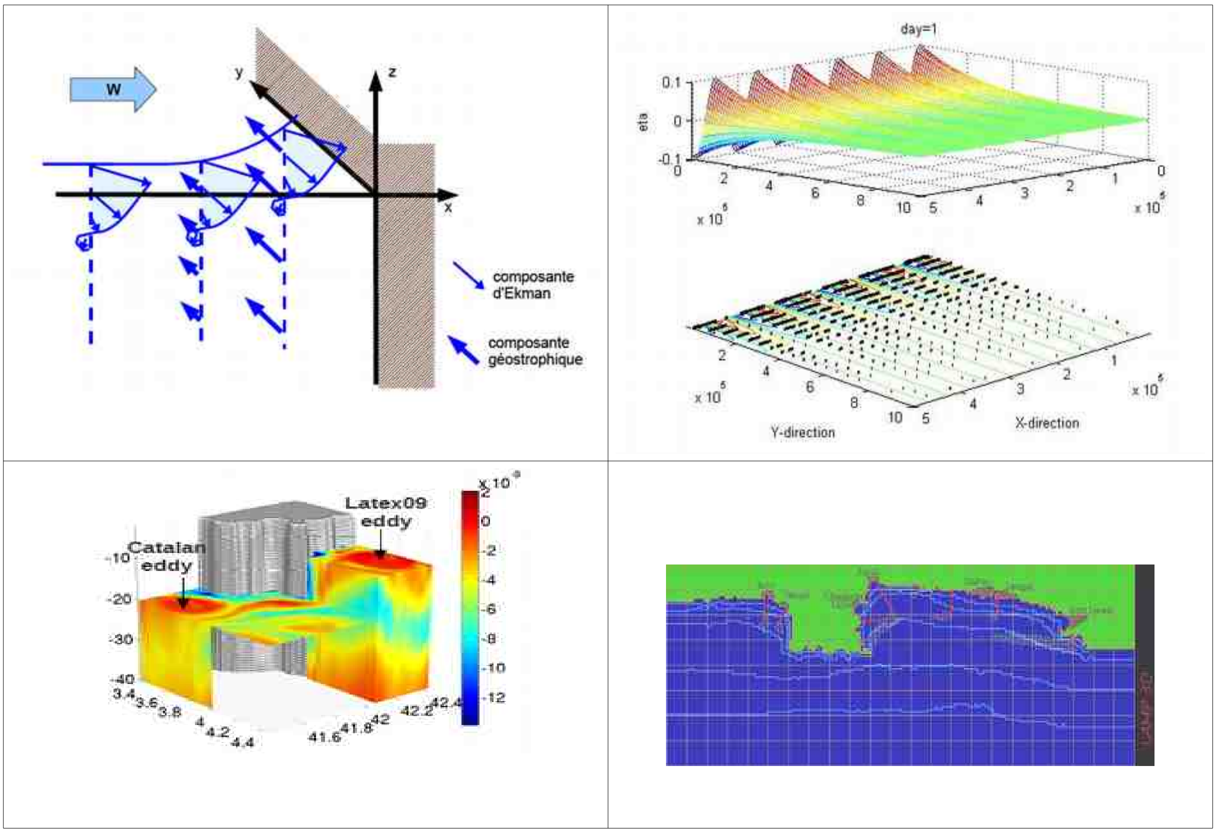
Andrea M. Doglioli

Notes du Cours

Circulation et Dispersion en Eaux Côtières



dernière révision : 7 septembre 2016

Remerciements

Je désir remercie tous mes étudiants et mes collègues pour leur commentaires, questions, corrections et suggestions.
En particulier ces notes bénéficient des contributions de A. Allou, R. Belon, N. Daniault, J.L. Devenon, J. Gatti, Z. Hu, Y . José, M. Kersalé, M. Magaldi, E. Martinez, F. Mattioli, F. Nencioli, A. Petrenko, D. Piga .

Doglioli, A.M. (2014), *Notes du Cours Circulation et Dispersion en Eaux Côtières*, Université d'Aix-Marseille, Marseille, France.
www.mio.univ-amu.fr/~doglioli/Doglioli_NotesCours_CirculationDispersionEauxCotieres.pdf

Cet ouvrage a été réalisé avec le logiciel libre OpenOffice *http://www.openoffice.org*

Table des matières

Bibliographie et Liens utiles

Csanady, G. (1982), *Circulation in the coastal ocean*. D.Reidel Publishing Company, Kluwer Group, Dordrech, Holland .

Daniault, N. (2005), Océanographie Physique pour l'École Navale. Cours en ligne, Université de Bretagne Occidentale, Brest, France .http://stockage.univ-brest.fr/~daniault/oceano_physique.pdf

Tomczak, M. (1998), *Shelf and Coastal Oceanography.* Cours en ligne, Flinders University of South Australia, Adelaide, Australia .*http://www.es.flinders.edu.au/~mattom/ShelfCoast/newstart.html*

Pedloski, J (2003), *Waves in the Ocean and Atmosphere. Introduction to Wave Dynamics.* Springer, USA .

Carton, X. (2001), *Hydrodynamical modeling of oceanic vortices*. Surv. Geophys., 22,179-263.

Berta, M., Ursella, L., Nencioli, F., Doglioli, A.M., Petrenko, A.A., Cosoli, S. (submitted after minor revision). *Surface transport in the Northeastern Adriatic Sea from FSLE analysis of HF radar measurements.* Cont. Shelf Res. see preprint

Bouffard, J., Nencioli, F., Escudier, R., Doglioli, A.M., Petrenko, A.A., Pascual, A.,Poulain, P.-M. (submitted after revision). *Lagrangian analysis of satellite-derived currents: Application to the North Western Mediterranean coastal dynamics.* Adv. Space Res. see preprint

Doglioli, A.M., Nencioli, F., Petrenko, A.A., Fuda, J.-L., Rougier, G., Grima, N. (2013). *A software package and hardware tools for in situ experiments in a Lagrangian reference frame.* J. Atmos. Ocean. Tech., Vol.30, pp.1940-1950, doi: 10.1175/JTECH-D-12-00183.1. see preprint

Kersalé, M., Petrenko, A.A., Doglioli, A.M., Dekeyser, I., Nencioli, F. (2013). *Physical characteristics and dynamics of the coastal Latex09 Eddy derived from in situ data and numerical modeling.* J. Geophys. Res., Vol.118, pp.1-11, doi:10.1029/2012JC008229. see preprint

Campbell, R., Diaz F., Hu, Z.Y., Doglioli, A.M., Petrenko, A.A., Dekeyser, I. (2013). *Nutrients and plankton spatial distributions induced by a coastal eddy in the Gulf of Lion. Insights from a numerical model.* Progr. Oceanogr., Vol.109, pp.47-69, doi : 10.1016/j.pocean.2012.09.005. see preprint

Nencioli, F., d'Ovidio, F., Doglioli, A.M., Petrenko, A.A. (2011). *Surface coastal circulation patterns by in-situ detection of Lagrangian Coherent Structures.* Geophys. Res. Lett., Vol.38, L17604, doi:10.1029/2011GL048815. see preprint

Hu, Z.H., Petrenko, A.A., Doglioli, A.M., Dekeyser, I. (2011). *Numerical study of eddy generation in the western part of the Gulf of Lion.* J. Geophys. Res., Vol.116, C12030, doi:10.1029/2011JC007074. see preprint

Kersalé, M., Doglioli, A.M., Petrenko, A.A. (2011). *Sensitivity study of the generation of mesoscale eddies in a numerical model of Hawaii islands.* Ocean Sci., Vol.7, pp.277-291, doi : 10.5194/os-7-277-2011 . see Open Access paper or see preprint

Hu, Z.H., Petrenko, A.A., Doglioli, A.M., Dekeyser, I. (2011). *Study of a mesoscale anticyclonic eddy in the western part of the Gulf of Lion.* J. Mar. Syst., Vol.88/1, pp.3-11, doi: 10.1016/j.jmarsys.2011.02.008 . see preprint

De Gaetano, P., , Vassallo, P., Bartoli, M., Nizzoli, D., Doglioli, A.M., Magaldi, M.G., Fabiano, M. (2011). *Impact of new measured Mediterranean mineralization rates on the fate of simulated aquaculture wastes.* Aquac. Res., Vol.42, pp.1359-1370, doi: 10.1111/j.1365-2109.2010.02724.x. see preprint

Qiu, Z.F., Doglioli, A.M., He, Y.J., Carlotti, F.(2011). *Lagrangian model of Zooplankton dispersion: numerical schemes comparisons and parameter sensitivity tests.* Chin. J. Oceanol. Limn., Vol. 29/2, pp.438-445, doi: 10.1007/s00343-011-0015-9 . see preprint

Qiu, Z.F., Doglioli, A.M., Hu, Z.Y., Marsaleix, P., Carlotti, F. (2010). *The influence of hydrodynamic processes on zooplankton transport and distributions in the North Western Mediterranean: estimates from a Lagrangian model.* Ecol. Model., Vol.221/23, pp.2816-2827, doi: 10.1016/j.ecolmodel.2010.07.025 . see preprint

Hu, Z.H., Doglioli, A.M., Petrenko, A.A., Marsaleix, P., Dekeyser, I. (2009). *Numerical simulations of eddies in the Gulf of Lion.* Ocean Model., Vol.28/4, pp.203-208, doi: 10.1016/j.ocemod.2009.02.004 . see preprint De Gaetano, P., Doglioli, A.M., Magaldi, M.G., Vassallo, P., Fabiano, M. (2008). *FOAM, a new simple benthic degradative module for the LAMP3D model: an application to a Mediterranean fish farm.* Aquac. Res., Vol.39/11, pp.1229-1242, doi:10.1111/j.1365-2109.2008.01990.x . see preprint

Doglioli, A.M., Blanke, B., Speich, S., Lapeyre, G. (2007). *Tracking coherent structures in a regional ocean model with wavelet analysis: application to Cape Basin Eddies.* J. Geophys. Res., 112, C05043, doi:10.1029/2006JC003952 . see preprint

Doglioli, A.M., Veneziani, M., Blanke, B., Speich, S., Griffa, A. (2006). *A Lagrangian analysis of the Indian-Atlantic interocean exchange in a regional model.* Geophys. Res. Lett., 33, L14611, doi:10.1029/2006GL026498 . see preprint

Vassallo, P., Doglioli, A.M., Rinaldi, F., Beiso, I. (2006). *Determination of physical behaviour of feed pellets in Mediterranean water.* Aquac. Res., Vol.37/2, pp.119-126, doi: 10.1111/j.1365-2109.2005.01403.x . see preprint

Doglioli, A. M., Griffa, A., Magaldi, M.G. (2004). *Numerical study of a coastal current on a steep slope in presence of a cape: The case of the Promontorio di Portofino.* J. Geophys. Res., 109, C12033, doi:10.1029/2004JC002422 . see preprint

Doglioli, A. M., Magaldi, M. G., Vezzulli, L., Tucci, S. (2004). *Development of a numerical model to study the dispersion of wastes coming from a marine fish farm in the Ligurian Sea (Western Mediterranean).* Aquaculture. Vol.231/1-4, pp.215-235, doi:10.1016/j.aquaculture.2003.09.030 . see preprint

Lévy, M. (2008). *The modulation of biological production by oceanic mesoscal turbulence*, Lect. Notes Phys., 744, 219-261, DOI 10.1007/978-3-540-75215-8_9, Transport in Geophysical flow: Ten years after, J. B. Weiss and A. Provenzale (Eds), Springler (pdf)

Signell, R. e Geyer, W. (1991). *Transient eddy formation around headlands*. J. Geophys. Res., 96(C2):2561–2575.

Pizzigalli, C., V. Rupolo, E. Lombardi, and B. Blanke (2007), Seasonal probability dispersion maps in the Mediterranean Sea obtained from the Mediterranean Forecasting System Eulerian velocity fields, *J. Geophys. Res.*, 112, C05012, doi:10.1029/2006JC003870.

Griffa grl2008

Griffa, A. 1996. Applications of stochastic particle models to oceanographic problems, *in* Stochastic Modeling in Physical Oceanography, P. M. R. Adler and B. Rozovskii, eds., Birkha¨user Verlag, 114–140.

Gaspar,Grigoris,Lefevre, 1990, A Simple Eddy Kinetic Energy Model for Simulations of the Oceanic Vertical Mixing' Tests at Station Papa and Long-Term Upper Ocean Study Site, JGR

Monin A S and Ozmidov R V 1981 *Ocean turbulence* (Leningrad:Gidrometeoizdat)

Batchelder, H.P., Edwards, C.A., Powell T.M., 2002. Individualbased models of copepod populations in coastal upwelling regions: implications of physiologically and environmentally influenced diel vertical migration on demographic success and nearshore retention. Progress in Oceanography. 53, 307333

Bennett, J.R., Clites, A.H., 1987. Accuracy of trajectory calculation in a finitedifference circulationmodel. J. comp. Phys. 68(2), 272282.

Darmofal, D.L., Haimes, R., 1996. An analysis of 3D particle path integration algorithms. Journal of computational physics. 123, 182195.

Garcia, R.M., Flores, H.T., 1999. Computer Modeling of Oil Spill Trajectories With a High Accuracy Method. Spill Science and Technology bulletin. 5(5/6), 323330

Oliveira, L.A., Costa V.A.F., Baliga, B.R., 2002. A lagrangianEulerian model of particle dispersion ina turbulent plane mixing layer. International Journal for numerical methods in fluids. 40, 639653.

Parada, C., Van der Lingen C.D., Mullon, C., Penven, P., 2003. Modelling the effect of buoyancy on the transport of anchovy (Engraulis capensis) eggs from spawning to nursery grounds in the southern

Benguela: an IBM approach. Fisheries Oceanography. 12(3), 170184

Tittensor, D.P., Deyoung, B., Tang, C.L., 2003. Modelling the distribution, sustainability and diapause emergence timing of the copepod Calanus finmarchicus in the Labrador Sea. Fisheries Oceanography. 12(4/5), 299316.

Visser, A.W., 1997. Using random walk models to simulate the vertical distribution of particles in a turbulent water column. Marine Ecology Progress Series. 158, 275281.

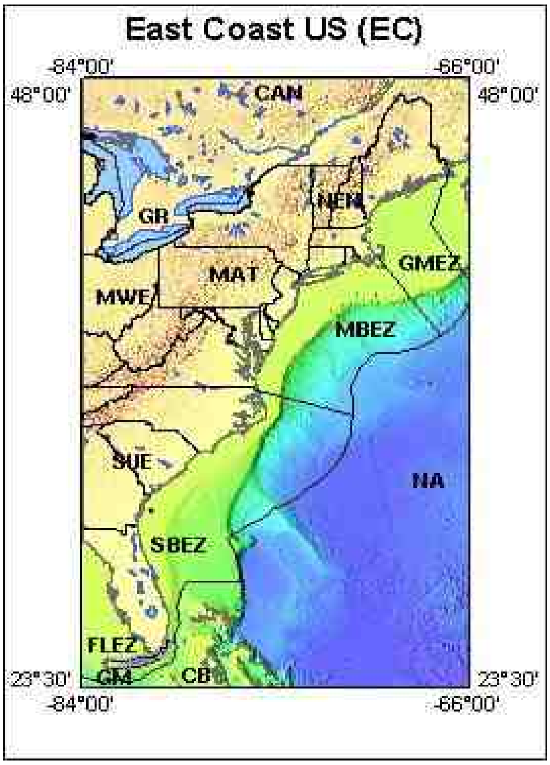
1. Introduction

L'océanographie physique dynamique a pour objet l'étude des mouvements de la mer et son champ d'application va des océans profonds aux estuaires, i.e. partout où l'eau de mer pénètre . De nombreux phénomènes physiques, et théories leur correspondant, sont communs à l'ensemble des situations océaniques mais les eaux côtières diffèrent suffisamment à la fois des océans et des zones estuariennes et lagunaires de sorte qu'elles méritent une attention particulière .
Les trois zones sont bien entendu interconnectées et dépendent les unes des autres . Les marées qui induisent les élévations et les dénivellations d'eau dans les zones côtières sont générées dans l'océan profond . Les vagues qui se brisent sur les plages peuvent avoir reçu leur énergie à des milliers de kilomètres de là . Les eaux fluviales, qui sont souvent à l'origine de l'existence de zones côtières à faible salinité et à haute concentration en sels nutritifs viennent des estuaires .

1.1 Une tentative de définition

Les processus dynamiques dans les mers peu profondes et sur les marges continentales sont très différents de ceux de l'océan profond pour plusieurs raisons . Les échelles horizontales sont beaucoup plus petites et la présence de la côte constituent une forte contrainte . Les profondeurs concernées sont seulement de l'ordre de *centaines de mètres*, donc les effets de la surface, tel que le frottement du vent, le refroidissement ou le réchauffement de la surface, s'étendent sur une large fraction de la colonne d'eau, et quelques fois sur toute sa hauteur, tandis que dans l'océan profond les mêmes phénomènes agissent sur ce qu'on peut définir comme la « peau de l'océan » (Csanady), c'est à dire la petite couche superficielle . En même temps, ces bassins d'eaux peu profondes, ayant sur l'horizontal des dimensions de l'ordre de *centaines de kilomètres*, se comportent aussi d'une façon « océanique », c'est-à-dire que les mouvements sont fortement influencés par la rotation de la Terre .

On peut donc parler d'océan côtier comme celui constitué par les mers de cette taille avec une profondeur de quelques centaines de mètres . Dans cette définition on inclue donc des mers ouvertes avec une marge continentale large et plate (la *East Coast*, i .e . la côte atlantique des Etats Unis) ou avec une marge continentale étroite et raide (la *West Coast*, i .e . la côte pacifique des Etats Unis, ou la côte du Pérou-Chili), des bassins semi-fermés comme le Golfe du Maine ou la mer du Nord et aussi des bassins fermés comme les Grands Lacs de l'Amérique du Nord .

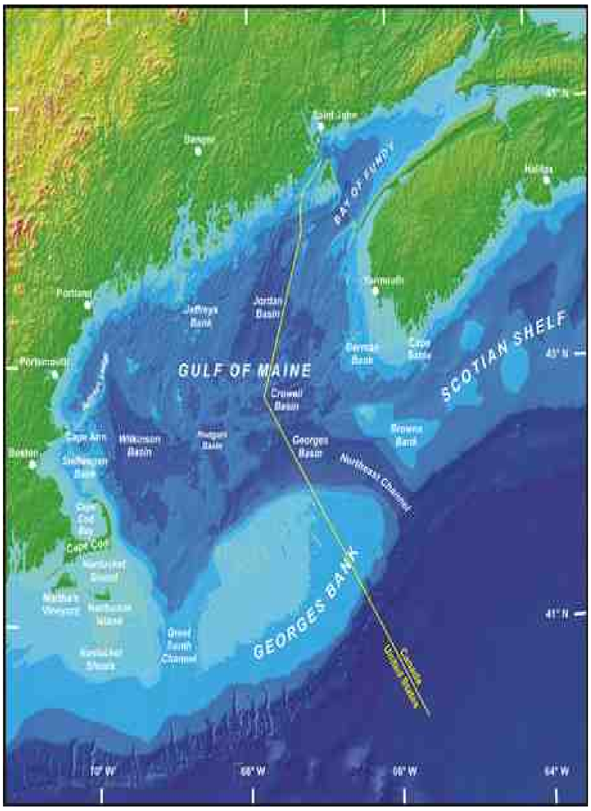


www.usgs.gov

East Coast des Etats Unis

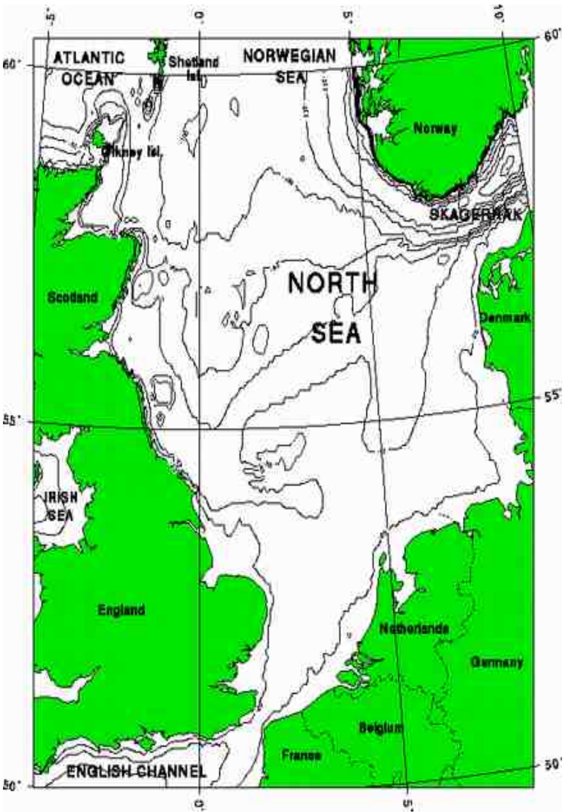
http://en.wikipedia.org/wiki/Peru-Chile_Trench

Côte pacifique de l'Amérique du Sud



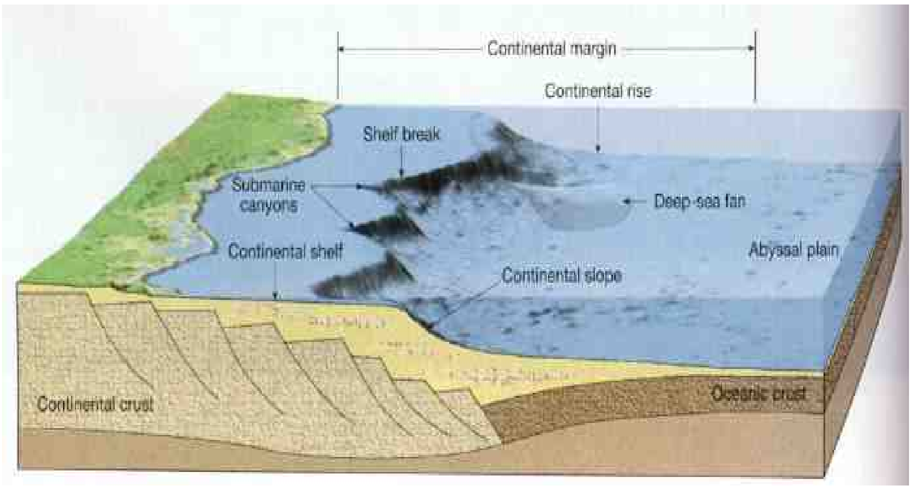
http://en.wikipedia.org/wiki/Gulf_of_Maine

Le bassin semi-fermé du Golfe du Maine



http://stommel.tamu.edu/~baum/paleo/seamaps/north-sea.gif

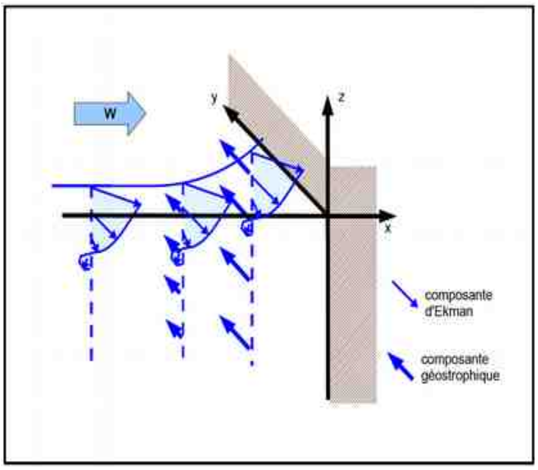
La Mer du Nord



http://faculty.gg.uwyo.edu/heller/Sed%20Strat%20Class/SedStrat%207/SedStrat7.html

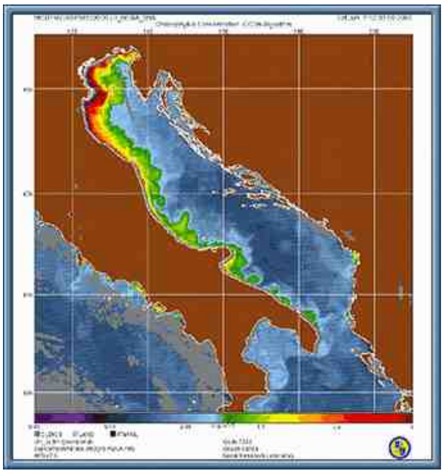
Le terme d'eaux côtières recouvre donc les eaux qui se trouvent sur le plateau continental .
La marge du plateau continental, le talus, est habituellement une zone présentant un fort accroissement de la pente du fond qui passe de 1 : 500 à 1 : 20 .
La première caractéristique propre aux eaux côtières est typiquement leur très faible profondeur, typiquement inférieure à 200 m, en comparaison avec la profondeur moyenne de l'océan profond qui est à peu près de 4000 m .

La présence du fond à une profondeur relativement faible induit une plus grande contrainte sur les mouvements marins que dans le cas d'eaux plus profondes . Dans les zones côtières les courants près du fond sont souvent de grande intensité et le frottement exercé par le fond, qui est généralement négligeable en eaux profondes, joue un rôle significatif dans leur dynamique.
La présence d'une ligne de côte agit comme contrainte latérale sur le mouvement des masses d'eau, tendant à les dévier de sorte que l'écoulement se fasse parallèlement à la côte . Du fait de son rôle d'obstacle pour les eaux qui vont vers elle, la ligne de côte engendre des pentes de surface qui à leur tour modifient les mouvements de l'eau.

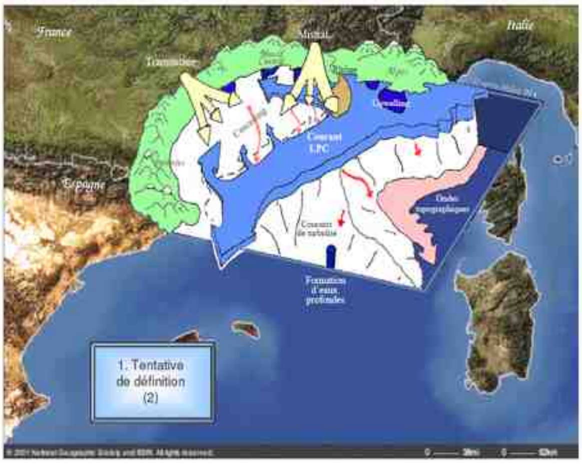


L'apport d'eau douce continentale a pour effet de réduire la salinité, et également la masse volumique, des eaux côtières . En plus, pour un même flux thermique à l'interface Océan-Atmosphère, les eaux peu profondes près de la côte subissent des plus grandes variations en température que les eaux plus profondes . Comme résultat de ces effets, les eaux côtières sont généralement des régions présentant de forts gradients horizontaux en salinité et température et par conséquence en masse volumique, donc souvent associées à des modifications de la circulation.

Les caractéristiques précédentes des eaux côtières ont quelques conséquences physiques importantes.
Tout d'abord les marées et les courants de marée sont considérablement modifiés si on les compare avec leurs propriétés en eau profonde . Leur amplitude est généralement accrue, parfois d'un facteur très grand lorsqu'il y a résonance entre la période de la marée et la période naturelle d'oscillation d'une masse d'eau côtière . Par ailleurs, les courants de marée sont plus intenses sur le plateau continental de sorte que le frottement du fond a une plus grande influence sur eux.



http://iop.apl.washington.edu
A MODIS ocean color image (provided by NRL-Stennis Space Center) from 7 June 2003.



http://poc.obs-mip.fr/auclair/index.htm
Caractéristiques de la circulation et des forçages dans le Golfe du Lion

Les ondes de surface sont omniprésentes dans les océans, mais quand elles transitent dans des eaux moins profondes la proximité du fond induit des changements considérables et éventuellement les fait déferler de sorte qu'elles dissipent la majeur partie de leur énergie avant d'arriver au rivage . Cette libération d'énergie provoque les mouvements d'une grande quantité de sédiments dans certaines zones et exerce des forces considérables sur les structures naturelles ou celles construites par l'homme.

Les courants de dérive dus au vent sont également fortement affectés par la présence de la ligne côtière et par la proximité du fond . Dans certaines zones cela donne naissance à des houles de tempête, tandis que dans d'autres cas d'autres effets sont engendrés tels que l'apparition de remontées/descentes d'eaux (*upwelling/downwelling*) et de jets côtiers.

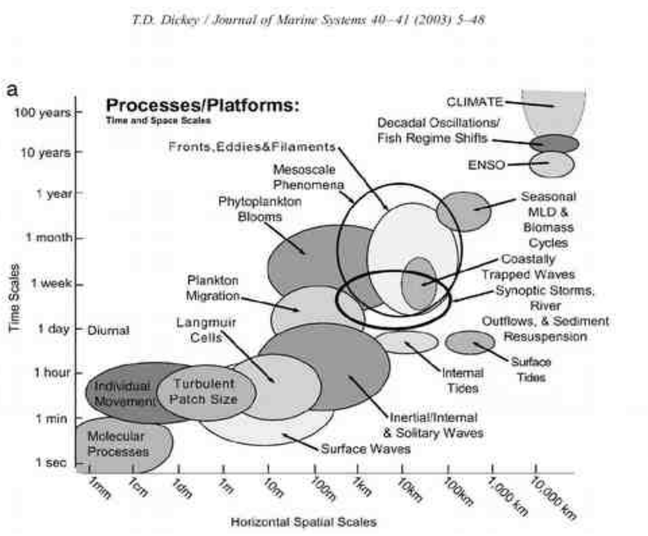
À cause de l'existence de forts gradients horizontaux de masse volumique, les courants de densité sont plus souvent caractéristiques de la zone côtière . Ils ont quelques similitudes avec ceux de la circulation estuarienne, mais il faut toujours se rappeler que les effets de Coriolis sont significatifs en zone côtière.

Dans certains cas, des courants océaniques importants s'écoulent le long du talus continental, présentant des variations en intensité, des méandres, des tourbillons qui peuvent avoir une forte influence sur la dynamique des eaux côtières .

1.2 Échelles temporelles et spatiales

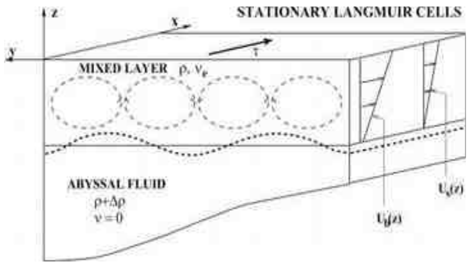
Les processus physiques ont une forte variabilité spatio-temporelle et, même dans l'océan hauturier, peuvent avoir lieu en même temps au même endroit. Ceci nous amène à utiliser le terme d'« imbrication » des processus. Des essais ont été faits pour tenter d'organiser, éventuellement en la simplifiant, la perception de tous les phénomènes en présence. S'inspirant de graphes pionniers de Stommel (1963), Dickey (1991) avait illustré l'imbrication des processus physiques et biologiques dans l'océan avec un graphique espace-temps, souvent réutilisé par la suite par la communauté océanographique. Ci-dessous est reproduite une nouvelle version (Dickey, 2003) :

Sur ce graphique, il est efficacement montré comment les processus ont tendance à être localisés selon la diagonale ascendante : plus les échelles temporelles d'un processus sont courtes ou longues, plus ce processus a tendance à se produire sur des échelle spatiales respectivement petites ou grandes. Il faut aussi noter que, malgré les simplifications effectuées, il y a beaucoup d'ovales qui se superposent.



NB :
MLD = *Mixing Layer Depth*; ENSO=*El Niño Southern Oscillation*

Exemple 1 : la circulation de Langmuir



http://www.ceps.unh.edu/news/releases04/chini304.htm http://sealevel2.jpl.nasa.gov/jr_oceanographer/oceanographer-dgiacomo.html

Initialement décrite par Irving Langmuir en 1938, cette circulation est entraînée par le vent et se compose de spirales horizontales de courant (Langmuir Cells). Ces spirales adjacentes tournent en sens inverse les unes par rapport aux autres et ainsi créent des allées où tout ce qui flotte à la surface y si accumule. La circulation de Langmuir est importante car elle agit comme un gigantesque mixeur dans la couche supérieure de l'océan, i.e. À l'interface entre l'atmosphère et l'océan profond. Cette couche contrôle l'échange de chaleur et des gaz comme le CO_2, un des principaux gas à effet serre. Dans la photo ci-dessous on voit bien des nappes en couleur pâle qui correspondent aux zones de convergence crées par la circulation de Langmuir.

Exemple 2 : Ondes piegées par la topographie
Zamudio et al., (2002) on étudié les forts vents en surface générés par l'ouragan Juliette, qui ont créée une aspiration d'Ekman qui a soulevé la thermocline de ~25 m, abaissé la SSH de ~20 cm et abaissé le SST ~5° C .

ZAMUDIO ET AL.: HURRICANE JULIETTE AND COASTAL WAVES 56 - 3

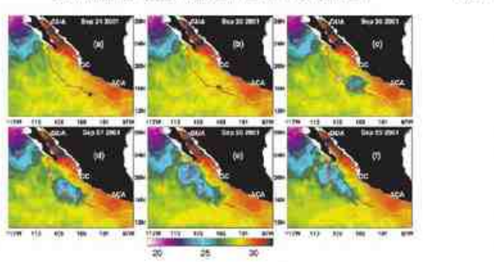


Plate 2. Sea surface temperature snapshots (color contours in °C) for six different dates in September 2001 as determined from operational NLOM. Juliette's center is indicated with a black or white star in all the panels. Juliette's path is represented with yellow, red and green lines for tropical storm, hurricane and tropical depression, respectively.

En outre, les vents de Juliette ont déclanché un très fort mélange océanique entraînant une augmentation spectaculaire de la couche de mélange, qui est passée de ~10 m à ~80 m. Sur la côte, les vents vers le pôle de Juliette a conduit un transport d'Ekman vers la côte et généré une forte convergence côtière . La convergence a diminué le thermocline ~40 m et a soulevé la SSH de 28 cm, en générant une onde barocline piégée entre Acapulco et Cabo Corrientes, qui est clairement reconnaissable dans les résultats du modèle et les mesures du niveau de la mer.

La méso-échelle et la sous-méso-échelle

Comme expliqué par Levy (2008), la (sous)-méso-échelle océanique présente des similitudes avec la turbulence 2D . Elle est caractérisée par la présence de recirculations en interaction, en général dénommé tourbillons (analogue aux systèmes météorologiques dans l'atmosphère cyclones/anticyclones) . Les échelles sont fortement corrélés avec le 1er rayon de déformation de Rossby (voir ci-dessous), suggérant que l'instabilité barocline est la principale source de méso-échelle . Ce fait est également cohérent avec les niveaux élevés de l'énergie méso-échelle que l'on trouve le long des courants de bord à mi-latitudes, et le long des fronts . Alors que les minima se trouvent à l'intérieur des gyres .
La turbulence océanique est aussi caractérisée par la présence de filaments allongés . L'action à grande échelle de ces filaments est complexe . Certains mouvements à (sous)-méso-échelle génèrent de la diffusion turbulente . D'autres agissent comme des barrières dynamiques et ils inhibent localement la diffusion et renforcent la cohérence des tourbillons [Pasquero et al ., 2007 ; Martin et al ., 2011] . Réciproquement, les structures de (sous)-méso-échelle sont guidés par la rotation et la déformation des tourbillons . L'activité de (sous)-méso-échelle a une forte variabilité spatiale, liée à la variabilité des champs de déformation et de rotation, et les travaux par Hua et al . [98] et Lapeyre et al . [99, 01] fournissent des moyens de séparer l'écoulement dans des régions peu dispersive dominée par la rotation et d'autres très dispersives dominées par l'étirement .

Outre ces caractéristiques-2D, de la turbulence océanique se caractérise également par sa structure verticale .
À l'échelle de bassin, la distribution de la production primaire est fortement liée au pompage d'Ekman et les régime classiques entre concentration de chlorophylle et épaisseur de la couche de mélange sont présent (e.g. Lévy et al, 2008) .

226 M. Lévy

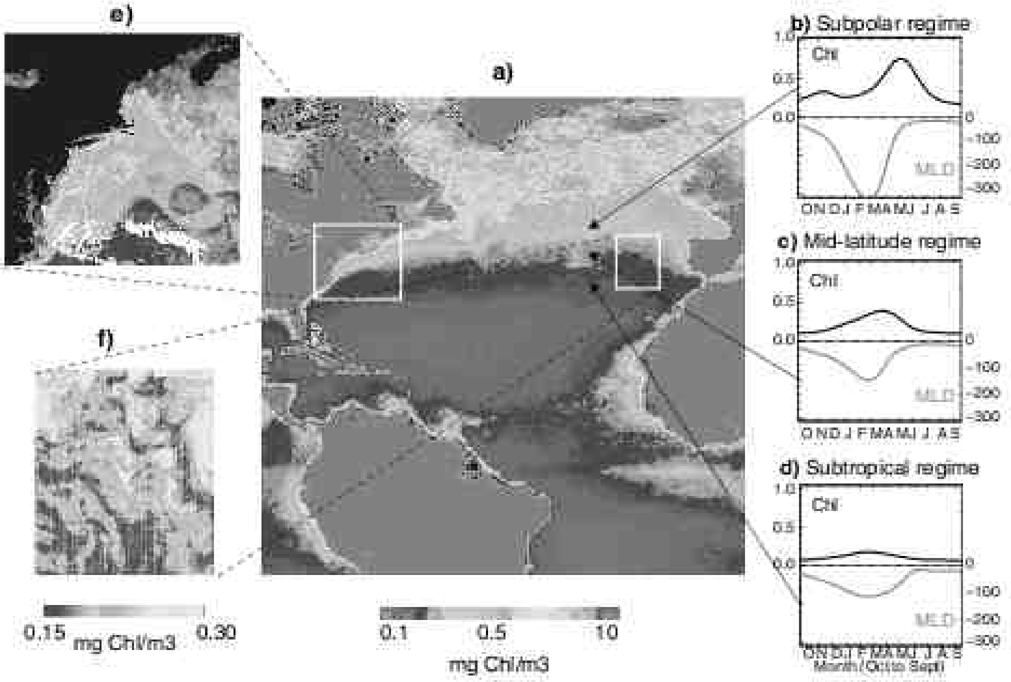
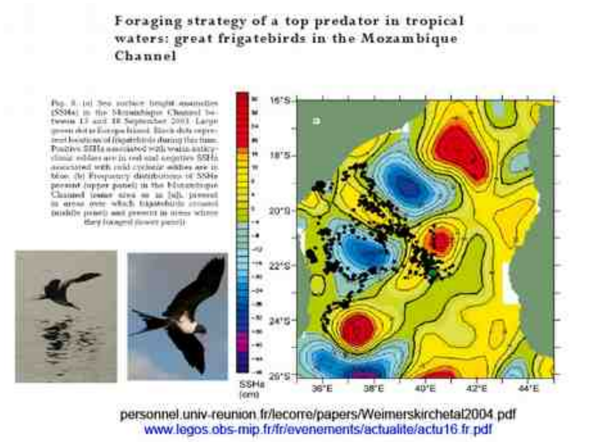


Fig. 2. (**a**) Climatology of sea-surface chlorophyll from space (Classic CZCS scene, from NASA Web site). (**b**)–(**d**) Typical seasonal cyclings of sea-surface chlorophyll versus mixed-layer depth in the northeast Atlantic [67]. The *grey line* shows the seasonal cycle of the mixed-layer depth, and the *black line* the seasonal cycle of the surface chlorophyll concentration. (**e**) and (**f**) High-resolution snapshot of sea-surface chlorophyll from space (**e**: classic CZCS scene, NASA Web site; **f**: Lehahn, personal communication). Locations of the cyclings and of the high-resolution images are indicated on the climatological map

Avec le développement des capteurs tractés et l'apparition de la mesure satellite de la couleur de l'océan, les scientifiques ont commencé à observer un forte variabilité aux niveau de la méso- et sub-mésoéchelle .

À méso-échelle, les tourbillons ont souvent des structures verticales du premier mode barocline avec les cyclones caractérisés par une remontée des isopycnes et les anticyclones par une descente . Ces phénomènes ont une grande influences sur la biologie et en particulier sur la distribution du phytoplancton .

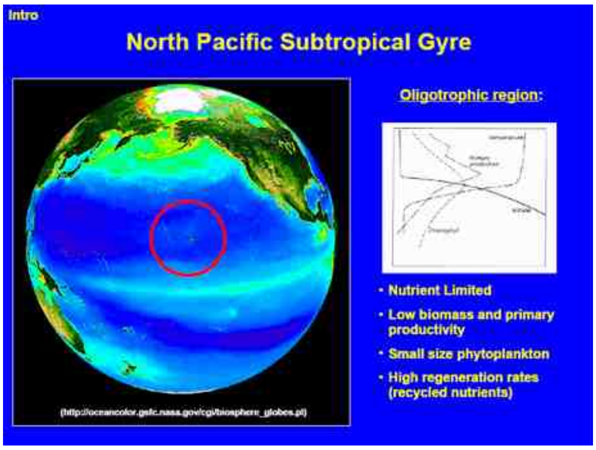
Exemple : les frégates et les tourbillons du canal du Monzambique

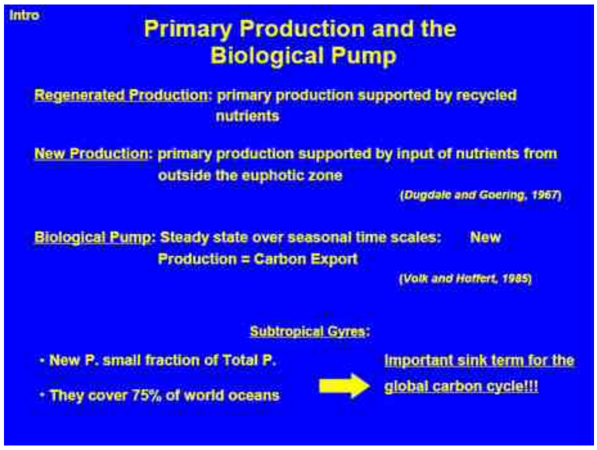


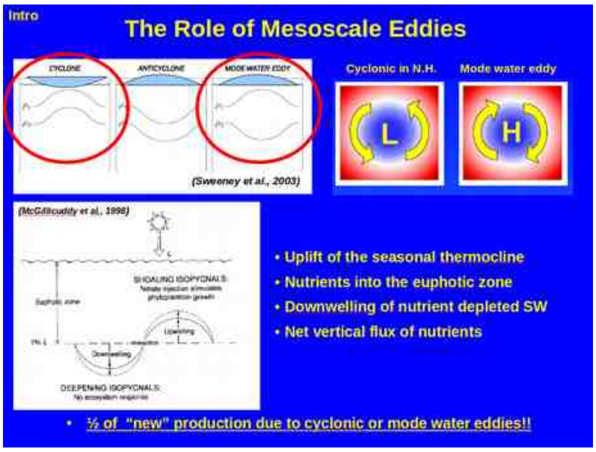
On a observé que des prédateurs supérieurs marins tels que les frégates, suivent les structures cohérentes de l'océan superficiel pour se nourrir .

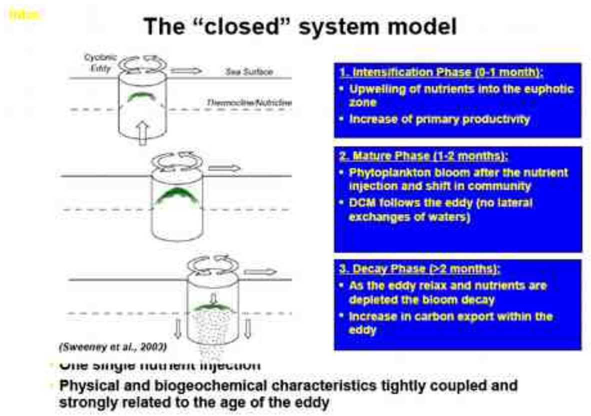
http://www.legos.obs-mip.fr/fr/evenements/actualite/actu16.fr.pdf

Exemple : les tourbillons « passoire » d'Hawaii (Nencioli et al. 2008)



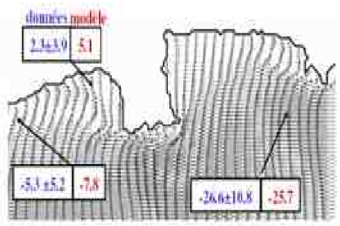


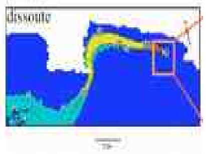




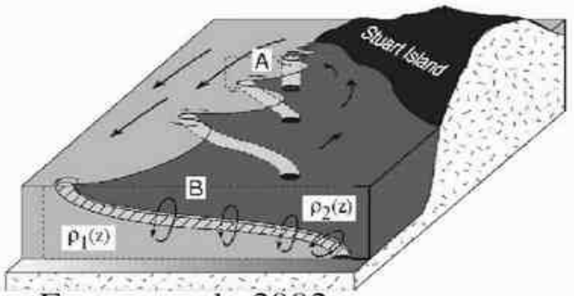
NB : mode water—A term for water of exceptionally uniform properties over an extensive depth range, caused in most instances by convection. Mode waters represent regions of water mass formation; they are not necessarily water masses in their own right but contribute significant volumes of water to other water masses. Because they represent regions of deep sinking of surface water, mode water formation regions are atmospheric heat sources.

Example : les effets des tourbillons en aval des capes sur la redistribution des solutés





Doglioli et al. 2004



Farmer et al., 2002

Les rayons de Rossby

Le rayon de déformation barotrope ou externe est le rapport entre la vitesse de propagation des ondes de gravité en eaux peu profonde et le paramètre de Coriolis :

$$\delta_R = \frac{\sqrt{gh}}{f}$$

avec h profondeur de l'océan. Il représente l'échelle spatiale typique à laquelle pour une onde de gravité barotrope les effets de la rotation terrestre deviennent importants, autant que ceux de la gravité .

$$\delta'_R = \frac{\sqrt{g' D}}{f} \quad \text{avec} \quad g' = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} g \quad \text{gravité réduite}$$

est le premier rayon de déformation barocline ou interne ; il concerne une onde de gravité qui se propage dans la première couche de un océan stratifié, où $\rho_2 > \rho_1$ et plus profond .

Le rayon de déformation externe de Rossby est de l'ordre de 2000 km à mi-latitude sur des fonds de 4000 m (pour des ondes longues de célérité c ~200 m/s), tandis qu'il ne sera plus que de 300 km pour des profondeurs de 100m (c de l'ordre de 30 m/s). Quant au rayon interne de Rossby, il passera de 10-30 km en hauturier à quelques kilomètres (5-7 km) en milieu côtier.

Ce rayon interne de Rossby est l'échelle spatiale naturelle à laquelle s'ajustent les processus physiques avec frontières, tels que les fronts et les courants de pente. On peut donc définir comme phénomène de méso-échelle ceux qui se développent sur des échelles spatiales du même ordre de grandeur du δ'_R local.

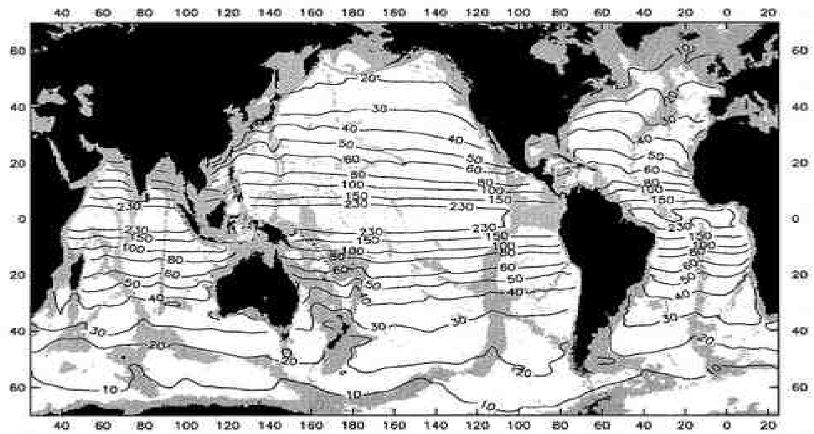


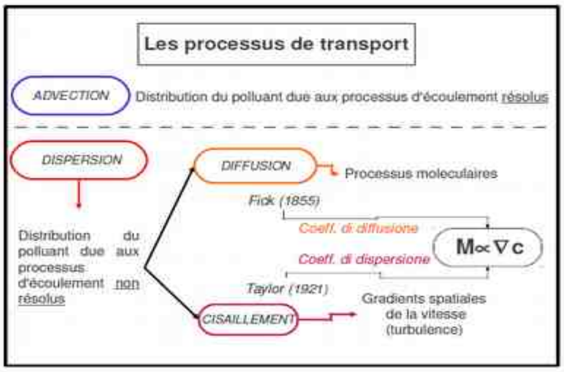
FIG. 6. Global contour map of the 1° × 1° first baroclinic Rossby radius of deformation λ_1 in kilometres computed by Eq. (2.3) from the first baroclinic gravity-wave phase speed shown in Fig. 2. Water depths shallower than 3500 m are shaded.

Cartographie du 1[er] rayon de Rossby dans l'océan mondiale. D'après Chelton et al. (1998).

1.3 Les processus d'advection et de dispersion

Le terme dispersion indique le processus qui fait que une certaine substance, immergée dans un fluide se distribue à son intérieur . L'advection est le transport par action des courants déterministes (moyens dans le sens de Reynolds), tandis que la dispersion dépend de processus aléatoires (diffusion) et aussi du cisaillement du courant .

Fick (1855) et Taylor (1921) ont paramétré les flux de masse des solutés du aux mouvement moléculaires et turbulents, en assument que ces flux soient proportionnels aux gradients de concentration . Les constantes de proportionnalité ont été appelées coefficients de diffusion moléculaire et turbulente .



En suite Taylor a étendu cette approximation aussi au flux du aux effets combinés de la diffusion et du cisaillement, en introduisant les coefficients de dispersion .

Approches Eulérienne et Lagrangienne

Joseph Louis, comte de Lagrange (en italien Giuseppe Lodovico Lagrangia), né à Turin le 25 janvier 1736 et mort à Paris le 10 avril 1813, est un mathématicien, mécanicien et astronome. Né en Italie, mais de famille française par son père, il passa 30 ans dans le Piémont, puis 21 ans à Berlin et le restant de ses jours à Paris.

Nommé très jeune professeur à l'école d'artillerie de Turin en 1755, il y fonde en 1758 l'Académie de Turin qui publie ses premiers travaux. Il est admis à l'Académie de Berlin par Euler, à qui il succède comme président. Transféré à Paris, où il avait fait publier sa Mécanique analytique (1787), peu avant la Révolution française, il doit à son génie d'échapper aux mesures de répression contre les étrangers. Des arrêtés spéciaux du Comité de salut public lui permettent de continuer d'exercer ses fonctions. Devenu associé étranger de l'Académie des sciences en 1772, il est directeur de l'Académie en 1788 et membre de la section de mathématiques en 1795.

Il est nommé sénateur au Sénat conservateur le 4 nivôse an VIII (25 décembre 1799). Avec Monge et Laplace, il fait partie des savants nommés à siéger dans cette assemblée.

http://fr.wikipedia.org/wiki/Joseph-Louis_Lagrange

Surtout connu pour avoir introduit la méthode analytique en géométrie, il n'en a pas moins étudié toutes les branches des mathématiques et a laissé d'importants travaux tant en géométrie qu'en trigonométrie et en mécanique.
Il est inhumé au Panthéon de Paris.

Leonhard Paul Euler, né le 15 avril 1707 à Bâle et mort le 18 septembre 1783 à Saint-Pétersbourg, est un mathématicien et physicien suisse, qui passa la plus grande partie de sa vie en Russie et en Allemagne.

Euler fit d'importantes découvertes dans des domaines aussi variés que le calcul infinitésimal et la théorie des graphes. Il introduisit également une grande partie de la terminologie et de la notation des mathématiques modernes, en particulier pour l'analyse mathématique, comme pour la notion d'une fonction mathématique. Il est également connu pour ses travaux en mécanique, en dynamique des fluides, en optique et en astronomie.

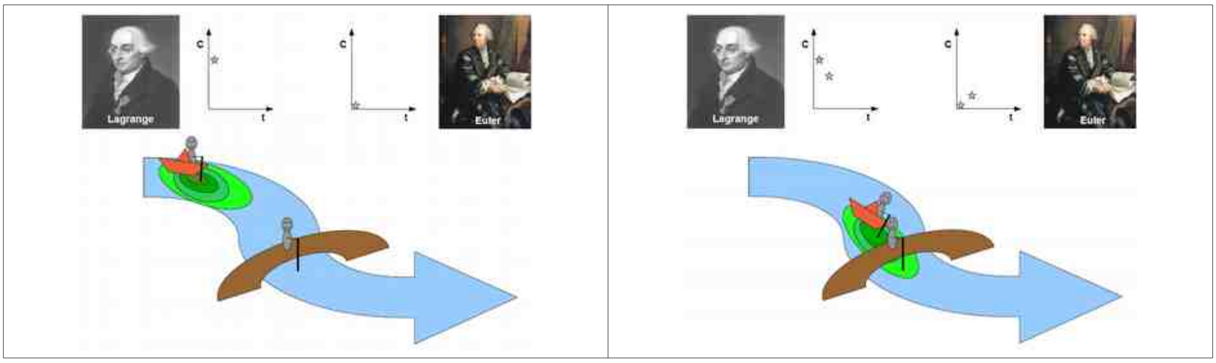
Euler est considéré comme un éminent mathématicien du XVIIIe siècle et l'un des plus grands de tous les temps. Il est aussi l'un des plus prolifiques, et une déclaration attribuée à Pierre-Simon Laplace exprime l'influence d'Euler sur les mathématiques : « Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous ».

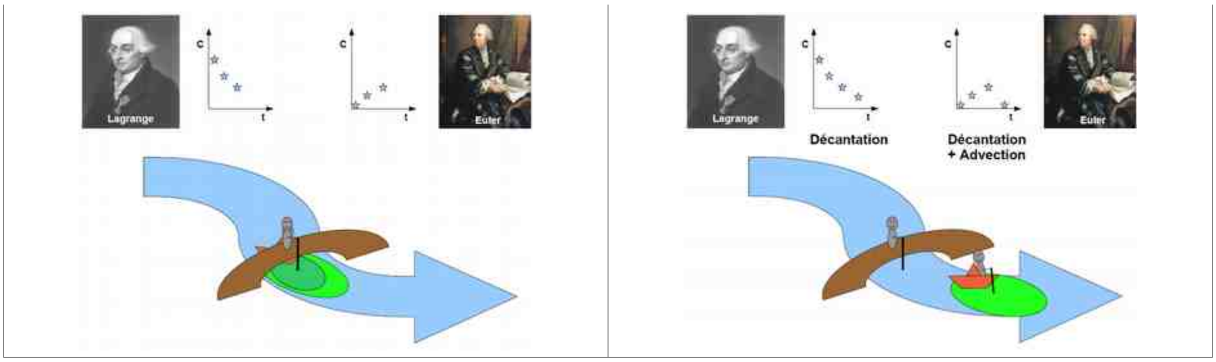
http://fr.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler

Définition de dérivée Lagrangienne (ou particulaire) :

$$\frac{DC}{Dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla C = \frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial C}{\partial x} + v\frac{\partial C}{\partial y} + w\frac{\partial C}{\partial z}$$

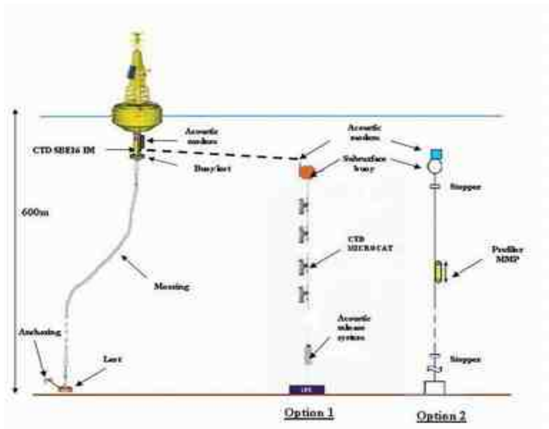
Schéma de comparaison entre approche Lagrangienne et Eulérienne dans la mesure de la concentration d'un traceur non conservatif.





Exemples de mesures Eulériennes et Lagrangiennes.

A) La plateforme automatisée autonome MOLA http://observation.obs-banyuls.fr/spip.php?article106



Il s'agit d'une plate-forme de type bouée (MOBILIS modèle Jet) d'un diamètre de 3m et de 5.5m de hauteur environ. Une structure de type pyramidale y est intégrée pour supporter toutes les mesures externes (une station météorologique et un GPS), la signalisation, l'alimentation (panneaux solaires et batteries), le cerveau central électronique et les systèmes de communication. Une CTD SBE16+ sera placée en dessous des flotteurs sur le mat central pour les données de salinité, température de surface, fluorescence et turbidité, ainsi qu'une optode à oxygène et un capteur de GTD.

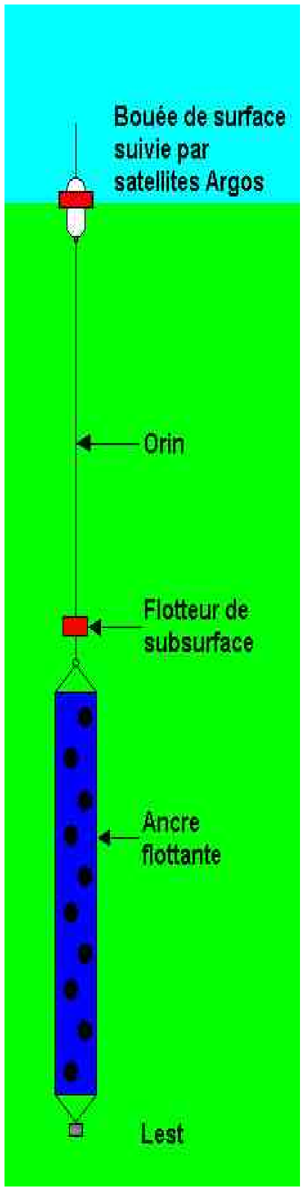
Pour simplifier les opérations de relevé et de maintenance sur les capteurs, une seconde ligne de mouillage sera déployée à proximité de la plateforme mère qui comportera l'ensemble de capteurs suivants : CTD, turbidité, fluorescence, O2d et courantomètre ADCP (*Acoustic Doppler Currentmeter Profiler*). Cette seconde ligne sera munie d'un largeur acoustique pour la récupération et la maintenance et d'un système de modem acoustique pour dialoguer avec la plateforme mère. Le but de cette seconde ligne de mouillage étant de réaliser des profils sur la colonne d'eau. A terme, un autre objectif est de compléter ce dispositif par un observatoire du milieu profond au même endroit et de se servir de la plateforme MOLA comme un champ d'investigation et d'intégration de capteurs biologiques.

B) Les bouées dérivantes

Ce système est un mouillage dérivant constitué d'une bouée de surface reliée à une ancre flottante par un câble (orin, câblot). Il doit suivre avec le plus de précision possible la masse d'eau dans laquelle l'ancre flottante est immergée. Cet ensemble est couramment appelé *surdrift* pour *surface drifter*.

La bouée est de faible dimension afin d'offrir une traînée minimum et une faible prise au vent. Elle est positionnée par satellites Argos ou par GPS. Dans ce dernier cas, les positions sont stockées pendant plusieurs jours dans une mémoire interne à la bouée et elles sont ensuite transmises par le système Argos, Imersat ou autre. L'avantage de cette méthode est de diminuer le coût d'utilisation des satellites tout en obtenant plus souvent et à des périodes régulières des positions plus précises.

Texte et figures tirés de http://www.univ-brest.fr/lpo/instrumentation/16.htm



L'orin est de faible section, il ne fait que quelques millimètres de diamètre afin d'avoir une traînée parasite minimum. Comme il doit être suffisamment résistant il est généralement en Aramide (fibre très résistante). Il maintient l'ancre flottante à une immersion constante qui peut être de quelques dizaines de mètres à un millier de mètres.
L'ancre flottante doit offrir un maximum de traînée puisqu'elle doit suivre la masse d'eau à étudier. Sa traînée doit être au moins 30 fois plus grande que les autres éléments du mouillage. Les formes d'ancres les plus diverses sont utilisées mais les plus courantes sont cylindriques (*Holey sock*) ou en "diamant" (*Tristar*). Ces dernières sont constituées de 3 panneaux carrés en tissus montés à 90° les un des autres en se croisant suivant leurs diagonales. La forme des panneaux est maintenus par un système de tiges.
Un lest est fixé à la base de l'ancre flottante afin de maintenir l'ensemble vertical.

446 / David L. Mackas, William R. Crawford and Pearn P. Niiler

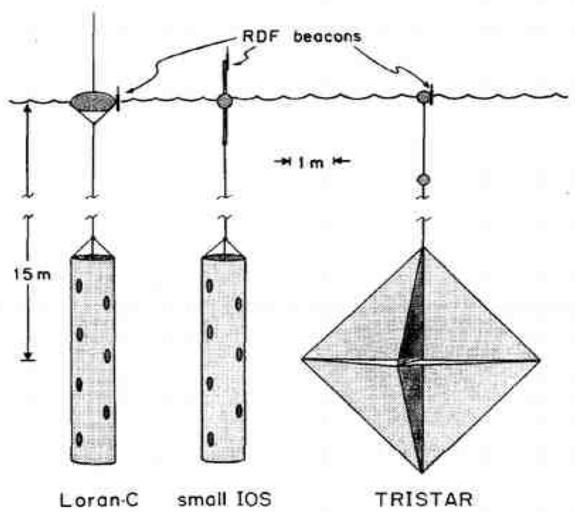


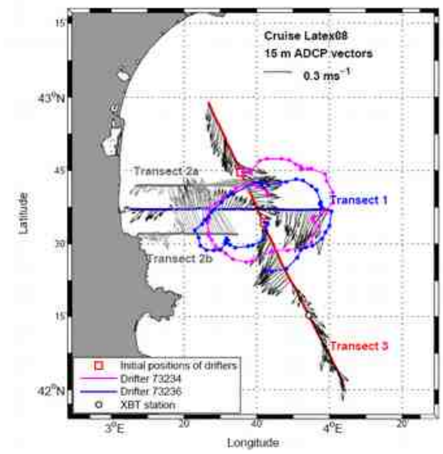
Fig. 1 Relative size of float and drogue elements for the three drifter designs compared in this study. All drogues were centred at 15-m depth. Float : drogue frontal area ratios ranged from about 10 : 1 for the Loran drifter to about 50 : 1 for the TRISTAR and the IOS small drifter. The TRISTAR uses two flotation spheres, with most of the buoyancy provided by the deeper float, allowing the tether to the surface (ARGOS transmitter) float to be slack much of the time and thus transmit less surface wave energy to the drogue.

Superposition des vecteurs de vitesse du courant mesurés par l'ADCP monté dessous la coque du bateau du CNRS Tethys II et les trajectoires de deux bouée dérivantes.

Mesures effectuée pendant la campagne LATEX 2008 :

les vecteurs sont dessinés tout les 4 minutes sur trois transepts: Transept 1 (Sept. 1), Transept 2a et 2b (Sept. 3), Transept 3 (Sept. 5);

les lignes des trajectoires sont pointillés tous les heures (Sept. 5 – 11).

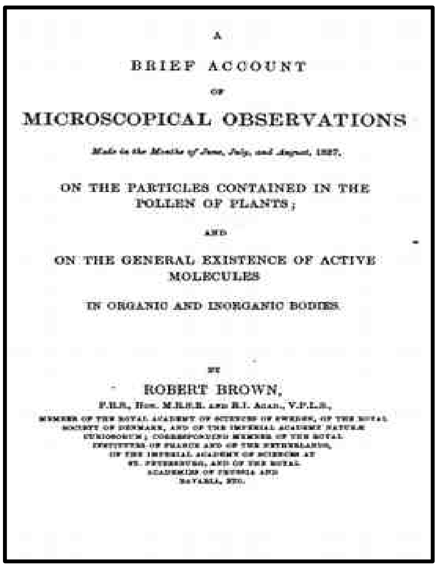


Tirée de Hu et al., 2009

La diffusion et le mouvement Brownien

Avec le terme diffusion on veux indiquer le processus qui se passe quand une substance immergée dans un liquide se distribue dans tout le milieu. Le même processus arrive aussi a l'intérieur du fluide même pour les propriétés tel que la densité ou la salinité, si la distribution n'es pas uniforme . En générale dans ces processus se redistribue d'un point à l'autre de l'espace de la matière, de l'énergie cinetique et de la quantité de mouvement : ces trois processuss ont beaucoup de similituted et sont très interconnecté entre eux . La diffusion est reconductible au mouvement Brownien, du nom de Robert Brown qui décrit ce phénomène pour la première fois au début du 19ème siècle.

Robert Brown, né le 21 décembre 1773 à Montrose (Angus) et mort le 10 juin 1858 à Londres, est un botaniste écossais.
Sa notoriété est liée à une découverte qui ne concerne pas vraiment la botanique : le mouvement brownien. Cela est du en particulie au fait qu'i a été l'un des premiers à utiliser couramment un microscope dans son métier. Ainsi, en 1827, il observe le pollen du *Clarkia pulchella* et constate au microscope la présence de très petites particules bougeant dans tous les sens. Il renouvelle cette observation chez d'autres plantes, croyant dans un premier temps en la manifestation d'un « fluide vital ». L'observation du même phénomène sur des particules inorganiques le fait changer d'avis.



A
BRIEF ACCOUNT
OF
MICROSCOPICAL OBSERVATIONS
Made in the Months of June, July, and August, 1827,
ON THE PARTICLES CONTAINED IN THE POLLEN OF PLANTS;
AND
ON THE GENERAL EXISTENCE OF ACTIVE MOLECULES
IN ORGANIC AND INORGANIC BODIES.
BY
ROBERT BROWN,
F.R.S., Hon. M.R.S.E. and R.I. Acad., V.P.L.S.,
MEMBER OF THE ROYAL ACADEMY OF SCIENCES OF SWEDEN, OF THE ROYAL SOCIETY OF DENMARK, AND OF THE IMPERIAL ACADEMY NATURÆ CURIOSORUM; CORRESPONDING MEMBER OF THE ROYAL INSTITUTES OF FRANCE AND OF THE NETHERLANDS, OF THE IMPERIAL ACADEMY OF SCIENCES AT ST. PETERSBURG, AND OF THE ROYAL ACADEMIES OF PRUSSIA AND BAVARIA, ETC.

http://books.google.com/books?id=_KwUAAAAYAAJ

Il publie ses résultats en 1828 dans un opuscule reconnaissant qu'il avait été précédé par d'autres savants dans la constatation de ces mouvements erratiques. L'explication de ceux-ci ne sera donné que bien plus tard par la théorique atomiste.
En observant des grains de pollens au microscope, il remarqua de très petites particules agitées d'un mouvement irrégulier, dans le fluide situé à l'intérieur des grains. Il attribua alors ce phénomène au domaine de la biologie. Plus tard il observa au microscope une goutte d'eau emprisonnée dans un morceau de quartz, n'ayant ainsi jamais pu être contaminé par des grains de pollens ou de spores. Il constata de nouveau que de petites particules étaient animées d'un mouvement chaotique et incessant. Il revint alors sur ses conclusions précédentes, et attribua ce mouvement, à juste titre, de nature physique et non biologique, sans pouvoir l'expliquer.

Plus tard, Albert Einstein considéra alors que le mouvement des grains de pollen pouvait se ramener à une marche au hasard : soumis aux chocs incessants des molécules d'eau, une grosse particule produit de petits déplacements de direction aléatoire (toutes équiprobables) et de longueur aléatoire. Einstein montre que la mesure de certaines propriétés de particules en mouvement brownien permet de déterminer plusieurs constantes physiques importantes, comme la masse des atomes, ou encore le nombre d'Avogadro. Beaucoup de mathématiciens se sont ensuite intéressés à ce phénomène.
Aujourd'hui, le mouvement brownien se retrouve partout : il fournit la base de la compréhension de tous les phénomènes diffusifs présents dans les systèmes chimiques et biologiques, mais aussi en économie. En 1900, Louis Bachelier avait développé une théorie des fluctuations boursières à partir d'une approche de marche aléatoire. Ces approches ont été reprises et enrichies dans les années 1970 et le mouvement brownien occupe désormais une place centrale dans les mathématiques financières.

Le modèle de la marche au hasard (représentant le mouvement brownien) peut expliquer le processus de diffusion. La diffusion est régie par deux types de diffusion distincte : 1) l'Auto-Diffusion : régie uniquement par le mouvement d'une espèce sous le seul effet du mouvement brownien; 2) s'y superpose, la diffusion due à une force (électrostatique, chimique, physique) ou encore due à un gradient de température et/ou de concentration.
Un simple modèle à particules Lagrangiennes permet par exemple de modéliser l'évolution spatiale et temporelle d'une goutte d'encre dans un verre d'eau et d'en observer son Auto-Diffusion. Cela permet aussi de réfléchir sur comment le désordre microscopique génère un ordre macroscopique.

Yellow food coloring diffusing *through water. The glass on the left contains hot water, while the glass on the right contains cold water. The food coloring was added to the cold water slightly before the coloring was added to the hot water, yet after a few seconds it has diffused more thoroughly through the hot water. The frames are roughly 1 second apart (so the animation is roughly 2x real-time).*

en:User:CTho *made this. It is available (along with the source images) at* http://ctho.ath.cx/pics/new/2006-09-24/ *- It has been released into the public domain.* [1]

http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Diffusion.gif

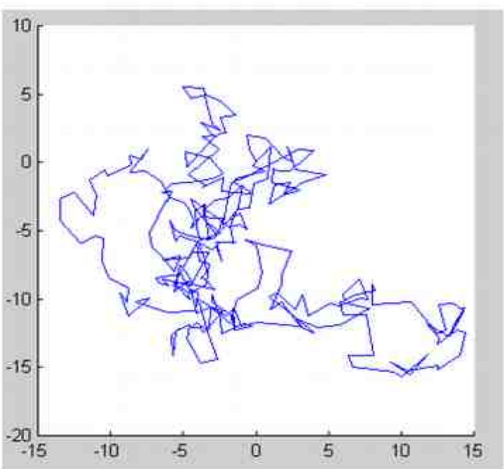


Figure 2 : *Marche aléatoire d'une particule dans un espace à 2 dimensions*

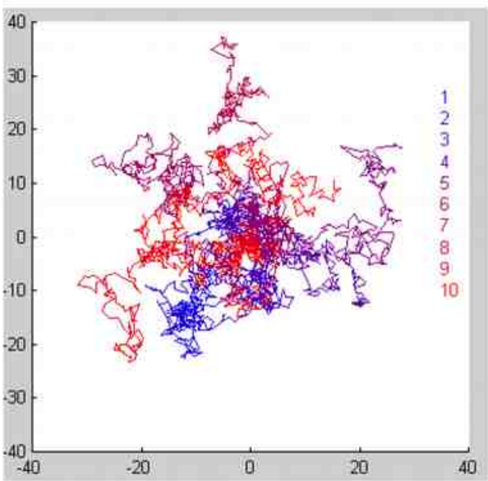


Figure 3 : *Marche aléatoire de 10 particules indépendantes*

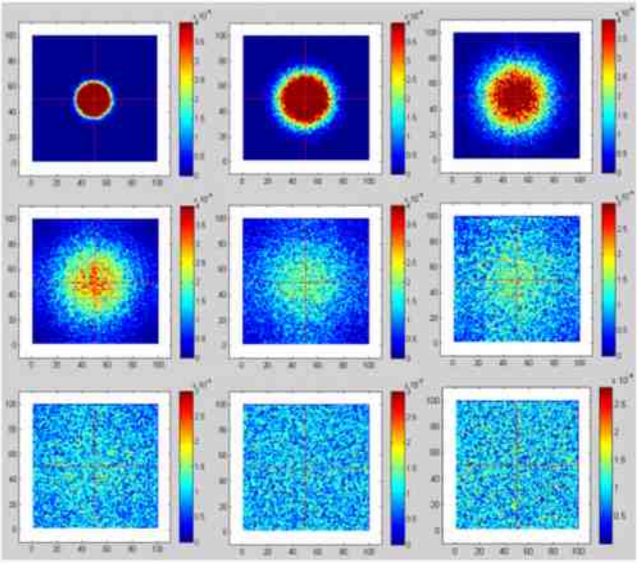
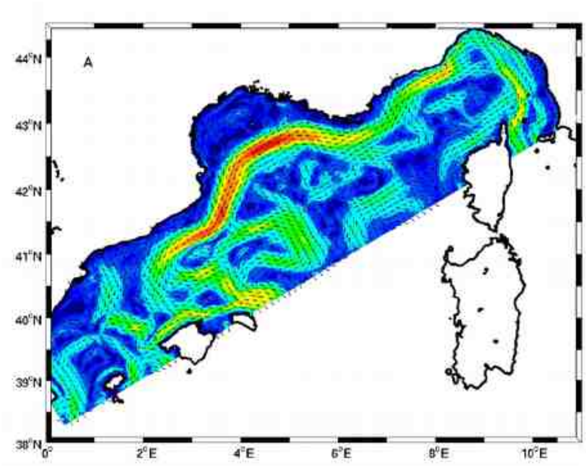


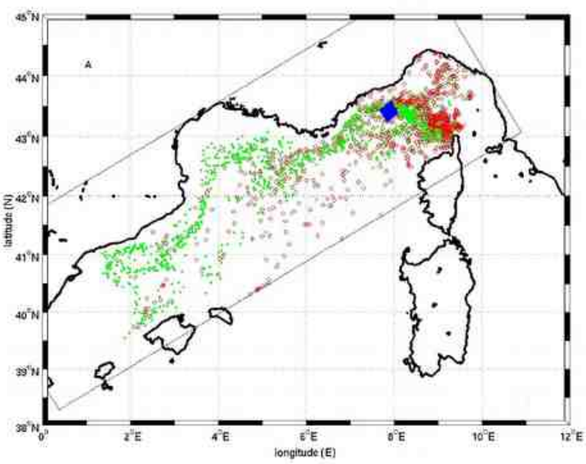
Figure 5 : *Diffusion d'une goutte d'encre dans de l'eau*

Simulation numérique avec un modèle à particules Lagrangiennes de la diffusion d'une goutte d'encre dans un verre d'eau .

Exemples de modèles Eulérien et Lagrangien

Sortie d'un modèle de circulation Eulérien et d'une simulation Lagrangienne conjointe (Qiu et al. 2011).





1.4 Rôle de l'océan côtier et son importance économique

L'océan côtier malgré la faiblesse des surfaces et volumes concernés (8% et 0,05% de l'océan global, respectivement) est actuellement le siège d'enjeux cruciaux . Ce milieu est le trait d'union entre le continent, marqué par une importante présence humaine et ses activités (40% de la population mondiale vit à moins de 100 km des côtes), et l'océan du large qui est le principal régulateur thermique et biogéochimique de la planète . Le domaine côtier rassemble donc des préoccupations fondamentales propres à la gestion environnementale mais également au fonctionnement du système biosphère-géosphère .

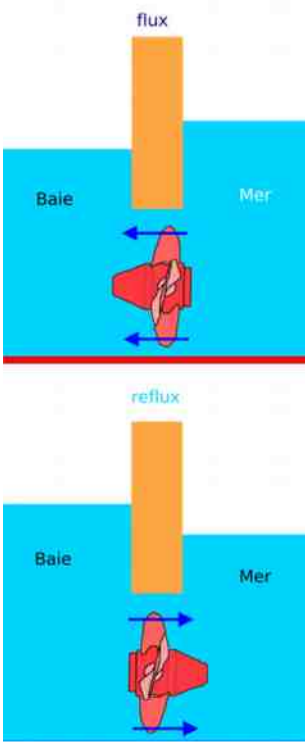
L'océan côtier est en général caractérisé par une forte productivité biologique en raison d'un enrichissement en sels nutritifs lié aux activités anthropiques ou bien aux apports naturels des fleuves . Ainsi les zones côtières pourraient contribuer pour une part importante à la séquestration de carbone dans les couches profondes de l'Océan . 18 à 33% de la production primaire globale, 80% de l'enfouissement global de matière organique et 90% de la minéralisation globale dans les sédiments marins auraient lieu dans cette zone . Ces estimations délivrées à la conférence de Dahlem en 1991, soulignent l'importance potentielle de la zone côtière dans le bilan global de carbone mais demandent encore aujourd'hui à être précisées . En effet, depuis cette conférence un certain nombre de programmes internationaux (e.g. LOICZ - *Land-Ocean Interactions in the Coastal Zone* http://www.loicz.org/ , ELOISE-*European Land Ocean Interactions Studies* http://www2.nilu.no/eloise/) et nationaux (e.g. PNEC-Programme National Environnement Côtier http://www.insu.cnrs.fr/a334,pnec.html , MOOSE-*Mediterranean Ocean Observing System on Environment* , http://www.obs-vlfr.fr/moose/ , http://www.enea.it/eventi/eventi2008/SummerSchool170708/Mantoura.pdf) ont été ou sont consacrés à l'étude de cette zone afin de savoir, entre autre, quel est le statut des zones côtières comme source ou puits de carbone dans l'océan global . Les synthèses des travaux mis en œuvre dans ces programmes, montrent que cette question n'admet pas une réponse unique du fait de la variété des systèmes côtiers et la complexité des processus mis en jeu . L'origine et le devenir de la matière organique, son utilisation par le réseau trophique, son piégeage par enfouissement ou exportation vers le large sont autant de questions dont les réponses en terme quantitatifs demeurent encore aujourd'hui incertaines.

Les eaux côtières ont également un rôle important du point de vue économique . Les installations portuaires sont situées à la côte, donc soumises à l'action des courants côtiers, des marées, des houles et des vagues . Pour les rejoindre les bateaux doivent naviguer dans les eaux côtières pour entrer et sortir des ports . La majorité des pêches au niveau mondial se fait sur le plateau continental et les mers adjacentes et les conditions physiques jouent souvent un rôle majeur dans leur productivité . De plus il y a aussi un développement de fermes aquicoles qui, évidemment, s'installent près de la côte .
Dans la même zone il y a aussi les exploitations des minéraux solides, de pétrole et de gaz et les infrastructures qui vont avec (plateforme, oléoduc et gazoduc), sans compter toutes les lignes de communications .

Plus récemment on a assisté à la mise en place dans les eaux peu profondes des premiers générateurs éoliens, qui dans ces zones peuvent mieux exploiter l'énergie du vent avant qu'elle soit dissipée sur le continent . Toujours dans le domaine des énergies renouvelables, la première utilisation de l'énergie marémotrice remonte aux années 1120, avec la construction de moulins à marées. La première usine marémotrice au monde à été construite en France dans l'estuaire de la Rance; connectée au réseau depuis 1967, elle produit environ 500 Gwh/an .

Visiter le site :	*Visiter le site :*
www.energy-market-research.info/ pour des cartes de structures énergétiques dans la Mer du Nord: oléoduc, gazoduc, plates-formes, raffineries, terminales pétroliers	*http://www.atlantic-cable.com/Article/1869French/BrightMap1.jpg* pour le détail de la Carte des Câbles Télégraphiques Transatlantiques en 1897 publiée par le Bureau International du Télégraphe de Berne. La nouvelle Écosse a représenté entre 1890 et 1950 un noeud très important pour les télécommunications.

Parc éolien offshore (Danemark) . Figure tirée de http://fr.wikipedia.org/wiki/Parc_éolien

 Principe d'une usine marémotrice	 Maquette de la coupe du barrage de la Rance Figures tirées de http://fr.wikipedia.org/wiki/Énergie_marémotrice

Enfin, il ne faut pas oublier l'importance de l'industrie du tourisme balnéaire .

Tous ces intérêts sont aussi souvent en contraste entre eux et une connaissance approfondie de cet écosystème est nécessaire pour résoudre les controverses .

2. Fondements

2.1 Équation de continuité

Dans la mécanique des fluides classique l'équation de continuité est généralement écrite dans la forme Eulérienne

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0$$

avec ρ masse volumique, t temps et u_i vitesse du fluide le long des trois axes x_i (avec $i=1,2,3$ et application de la règle de l'addition, voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Convention_de_sommation_d'Einstein). L'équation exprime l'idée que la densité locale change seulement s'il y a une convergence ou une divergence du flux de masse (ρu_i).

Une autre forme de l'équation est

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{1.1}$$

avec

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial \rho}{\partial t}+u_i\frac{\partial \rho}{\partial x_i}$$

dérivé totale de la masse volumique, i.e. la vitesse de changement de la densité en suivant la particule.

Si on veut appliquer cette équation à l'océan côtier, on s'aperçoit que l'eau de mer n'est pas une substance très simple! D'abord on ajoute des changements en masse volumique dus à la diffusion du sel. En eau douce on peut simplifier en considérant que les causes principales des variations de masse volumique sont le refroidissement et le réchauffement du fluide et que ces effets sont pris en compte dans l'équation (1.1) si on considère que u_i comprend aussi les expansions et les contraction thermiques, mais cela n'est pas possible en eau de mer. Toutefois, dans la gamme des valeurs réalistes des variations de flux de chaleur et de sel, la température et la salinité varient très lentement.

La masse volumique et la « densité »

La masse volumique est le paramètre fondamental pour l'étude dynamique des océans. Des faibles variations horizontales de masse volumique (générées par exemple par des différences de rayonnement solaire) peuvent produire des courants importants.

En toute rigueur, densité = (masse 1 m^3 d'eau de mer)/(masse 1 m^3 d'eau distillée à 4°C) [pas d'unité].

En océanographie, traditionnellement on lui donne une autre définition : pour des raisons pratiques on nomme « densité » la masse volumique [kg m^{-3}] – 1000 et on utilise le symbole σ . .

La masse volumique ρ de l'eau de mer dépend de la salinité S, de la température T et de la pression p. La relation entre ces termes est l'équation d'état de l'eau de mer. Cette relation empirique est le résultat de nombreuses études en laboratoire. La première équation établie en 1902 par Knundsen et Ekman a été ensuite remplacée par "l'Equation d'Etat Internationale (1980)" :

IES80 : équation d'état de l'eau de mer
(International Equation of State of Seawater)

$$\rho(S,t,p) = \rho(S,t,0) \big/ \left[1 - p/K(S,t,p)\right]$$

avec

$$\begin{aligned}\rho(S,t,0) = {} & 999.842594 + 6.793952 \times 10^{-2} t - 9.095290 \times 10^{-3} t^2 + 1.001685 \times 10^{-4} t^3 - 1.120083 \times 10^{-6} t^4 \\ & + 6.536332 \times 10^{-9} t^5 + 8.24493 \times 10^{-1} S - 4.0899 \times 10^{-3} tS + 7.6438 \times 10^{-5} t^2 S - 8.2467 \times 10^{-7} t^3 S \\ & + 5.3875 \times 10^{-9} t^4 S - 5.72466 \times 10^{-3} S^{3/2} + 1.0227 \times 10^{-4} t S^{3/2} - 1.6546 \times 10^{-6} t^2 S^{3/2} \\ & + 4.8314 \times 10^{-4} S^2\end{aligned}$$

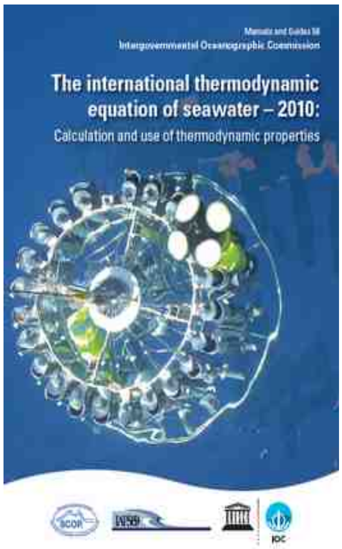
et

$$\begin{aligned}K(S,t,p) = {} & 19652.21 + 148.4206 t - 2.327105 t^2 + 1.360447 \times 10^{-2} t^3 - 5.155288 \times 10^{-5} t^4 + 3.239908 p \\ & + 1.43713 \times 10^{-3} tp + 1.16092 \times 10^{-4} t^2 p - 5.77905 \times 10^{-7} t^3 p + 8.50935 \times 10^{-5} \times p^2 \\ & - 6.12293 \times 10^{-6} tp^2 + 5.2787 \times 10^{-8} t^2 p^2 + 54.6746 S - 0.603459 tS + 1.09987 \times 10^{-2} t^2 S \\ & - 6.1670 \times 10^{-5} t^3 S + 7.944 \times 10^{-2} S^{3/2} + 1.6483 \times 10^{-2} t S^{3/2} - 5.3009 \times 10^{-4} t^2 S^{3/2} + 2.2838 \times 10^{-3} pS \\ & - 1.0981 \times 10^{-5} tpS - 1.6078 \times 10^{-6} \times t^2 pS + 1.91075 \times 10^{-4} p S^{3/2} - 9.9348 \times 10^{-7} p^2 S \\ & + 2.0816 \times 10^{-8} t p^2 S + 9.1697 \times 10^{-10} t^2 p^2 S\end{aligned}$$

http://lecalve.univ-tln.fr/oceano/ies80/index.html

Des formules plus fine et récentes sont aussi présentes dans la littérature (Anati, 1999; Feistel 2003, 2005) , ainsi que des formulations prenant en compte la variabilité géographique liée à la forme du géoïde (pour le concept de « *neutral density* » voir McDougall, 1987).

En juin 2009, la Commission Intergouvernementale Océanographique (IOC, "*Intergovernmental Oceanographic Commission*"), avec l'appui du Comité Scientifique de Recherche Océanographique (SCOR, "*Scientific Commitee Oceanic Research*") et de l'Association Internationale Des Sciences Physiques de l'Océan (IAPSO, "*International Association of the Physical Sciences of the Oceans*"), a adopté l'Équation Thermodynamique de l'eau de mer 2010 (TEOS-10, "*Thermodynamic Equation of Seawater – 2010*") comme définition officielle des propriétés de l'eau de mer et de la glace en science de l'océan.
Il est d'ors et déjà fortement conseillé aux océanographes d'utiliser les algorithmes et variables définis par TEOS-10 pour rapporter leurs résultats.



Les différences fondamentales de TEOS-10 par rapport à EOS-80 sont :
(1) l'utilisation de la Salinité Absolue (Absolute Salinity SA) pour décrire la salinité de l'eau de mer; la Salinité Absolue prend en considération la variabilité spatiale de la composition de l'eau de mer. En pleine mer, l'usage de cette nouvelle salinité a un effet non trivial sur le gradient horizontal de masse volumique, et ainsi sur les vitesses calculées via l'équation du "vent thermique".
(2) l'utilisation de la Température Conservative (Conservative Temperature Q) pour remplacer l'utilisation de la température potentielle q. Ces deux températures sont des grandeurs déterminées à partir d'une expérience de pensée (à savoir, grandeurs ramenées à la pression de surface de manière adiabatique et isohaline). La Température Conservative présente l'avantage de mieux représenter la capacité calorifique de l'eau de mer, avec une précision supérieure par deux ordres de grandeur à celle de la température potentielle.
(3) Les propriétés de l'eau de mer définies par TEOS-10 découlent toutes mathématiquement d'une fonction de Gibbs (notamment par différenciation) et sont ainsi compatibles les unes avec les autres (contrairement à l'approche EOS-80 désormais obsolète, dans laquelle différents polynômes définissaient chaque variable thermodynamique et n'étaient pas mutuellement compatibles).
Pour permettre à tout océanographe d'utiliser le nouveau formalisme TEOS-10, deux logiciels sont disponibles :

(i) La ‘toolbox’ océanographique Gibbs SeaWater (GSW) (pour MATLAB et FORTRAN) et,
(ii) Sea-Ice-Air (SIA) (Fortran et Visual Basic).
Ces deux logiciels sont libres d’accès depuis le site Internet suivant : http://www.TEOS-10.org .

Dans le cadre du cours, on peut toutefois, apporter des simplifications.
On définie comme densité potentielle (« *potential density* ») la densité d'une particule qui a été déplacée adiabatiquement à une pression de référence, par exemple à la surface. Dans les eaux côtières les variations de pression sont petites, une dizaine d'atmosphères, et cela corresponds en pratique à négliger la contribution de la pression et adopter la relation plus simple

$$\rho=\rho(T,S)$$

Les effets de la température

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dT}\frac{dT}{dt} \tag{1.1.1}$$

En eaux peu profondes les variations de T sont principalement dues au réchauffement/refroidissement de la surface, ce qui est quantifiée par le flux de chaleur (*heat flux*) q_s c'est-à-dire la chaleur transférée pour unité de surface et unité de temps [W m^{-2} = J s^{-1} m^{-2} ou kcal s^{-1} m^{-2}] . Le champ de température est décrit par une loi de conservation avec une structure similaire à celle de (1.1) :

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(u_i T) = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{q_i}{\rho c_p}\right)$$

où c_p est la chaleur spécifique et q_i sont les composantes du flux de chaleur comprenant la chaleur radiative . Le flux de chaleur à la surface est une condition aux limites

$$q_S = q_3(x_3=0)$$

Par exemple, dans une journée de beau temps en été quand le soleil est au zénith on a un flux de chaleur de 400 W m^{-2} = 400 J s^{-1} m^{-2} = 100 cal m^{-2} s^{-1}, si on suppose que l'énergie est complètement absorbée dans le premier mètre d'eau et qu'il n'y a pas de perte de chaleur par advection/diffusion et si la chaleur spécifique est de 4000 J kg^{-1} K^{-1} on calcule une variation de température de

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{q_S}{\rho c_p}\right) = \frac{4\cdot 10^2 J s^{-1} m^{-2}}{1 m \ \ 10^3 kg m^{-3} \ \ 4\cdot 10^3 J kg^{-1} K^{-1}} = O(10^{-4} K s^{-1})$$

i.e. la température varie de 1 dégrée toutes les $3h = 12400 s \simeq 10^4 s$.
Le coefficient de dilatation thermique vaut

$$\alpha=\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dT}\simeq 10^{-4} K^{-1}$$

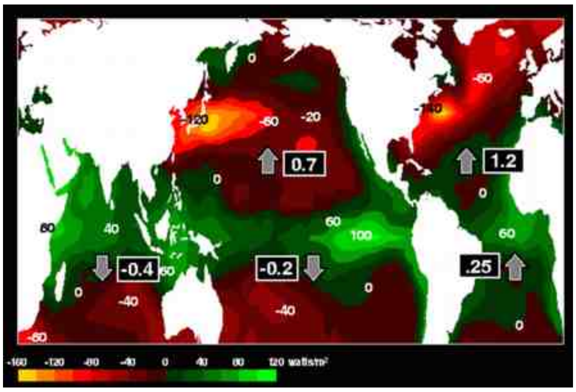
En substituant dans (1.1.1) on obtient donc

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=10^{-8} s^{-1}$$

c'est à dire que dans un jour entier (10^5 s) il y a une variation qui serait d'une partie sur mille!!!

Si en plus on considère que pour faire ce calcul on s'est mis dans des conditions de maximum de radiation on voit bien que cet effet est négligeable.
Il faut se rappeler que si en mer on observe des variations plus fortes, elles sont dues au mélange turbulent et à l'advection .

La figure ci-contre montre le flux de chaleur (W m^{-2}) à la surface de l'océan global . Les valeurs positives indiquent que la chaleur pénètre dans l'océan. Les flèches indiquent le transport méridien. Ces valeurs montrent qu'en réalité le flux de chaleur est bien plus petit que notre estimation .



http://sam.ucsd.edu/sio210/lect_3/lecture_3.html

Hsiung, 1985, *Estimates of global oceanic meridional heat transport*. J. Phys. Oceanogr., 15, 1405-1413.

Les effets de la salinité

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dS}\frac{dS}{dt} \tag{1.1.2}$$

Les variations de salinité en eaux côtières sont principalement dues aux apports d'eau douce des rivières, bien que des fois et dans des endroits précis, les pluies locales et la fonte des glaciers peuvent jouer un rôle important.
Comme pour la température on a une loi de conservation

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(u_i S) = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{s_i}{\rho}\right) + \frac{E-P}{\rho}$$

ou la salinité S est un rapport entre masses et s_i est le flux de sel en kg m^{-2} s^{-1} qui encore une fois comprend les flux turbulents de Reynolds $\rho < u_i' S' >$ (voir ci-dessous) . E et P sont respectivement l'évaporation et la précipitation.
Si on considère l'advection négligeable et l'évaporation E compensée par la précipitation P (ces deux grandeurs sont très difficiles à mesurer en mer et on a encore aujourd'hui une très grande incertitude sur leur valeurs réelles), les deux seconds termes à droite et à gauche disparaissent.
En ce qui concerne le gradient du flux de sel, généralement on dit qu'il est proportionnel au gradient de salinité (en termes simples, le sel bouge d'où il y en a beaucoup vers où il y en a peu) et que la constante de proportionnalité est un coefficient de diffusion :

$$s_i = D_S \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho S)$$

En prenant encore une fois une situation extrême: 2 couches de 1 m d'épaisseur, l'une avec une salinité de 25 pour mille et l'autre 35 pour mille (une différence de 10 est un cas vraiment extrême!) et en sachant que la diffusivité moléculaire de la salinité est toute petite $D_S=10^{-9}$ m^2 s^{-1}, on a

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left[\frac{D_S}{\rho}\frac{\partial(\rho S)}{\partial x_3}\right] = \frac{1}{1m}\frac{10^{-9}m^2s^{-1}}{10^3kgm^{-3}}\frac{10^3kgm^{-3}10}{1m} = 10^{-8}s^{-1}$$

Le coefficient de contraction saline vaut

$$\beta = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dS} \simeq 0.8$$

En conclusion, en remplaçant dans la (1.1.2)

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = 8\cdot 10^{-1}10^{-8} \simeq 10^{-8}s^{-1}$$

Encore une fois on a des effets très petits comme pour la température. En plus, dans le cas de la salinité il faut aussi tenir compte du fait que la turbulence est aussi entravée par la stabilité des couches.

Alors dans l'équation (1.1) le premier terme est de l'ordre de grandeur de 10^{-8} .

Si maintenant on regarde le terme d'advection on trouve par contre que les vitesses du courant sont comprises entre le 0.1 et le 1.0 m s^{-1} et que les mouvements, comme dit précédemment, sont sur des échelles horizontales de 100 km = 10^5 m. On a donc le second terme de l'équation (1.1) de l'ordre de grandeur entre 10^{-7} et 10^{-5}.

Cela dit, dans beaucoup de situations en océanographie côtière on peut simplifier l'équation (1.1) dans la forme:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{1.2}$$

Cette équation est aussi la forme standard de l'équation de continuité pour un fluide incompressible. Physiquement cette équation nous dit que, une fois un volume de contrôle fixé, le volume d'eau entrant doit compenser le volume d'eau sortant.

2.2 Équations de la quantité de mouvement

En approche Eulérienne la seconde loi de Newton (ou principe fondamental de la dynamique de translation) s'écrit

$$\frac{d(\rho u_i)}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} + \rho b_i \tag{1.3}$$

Dans la partie gauche il y a le taux de changement de la quantité de mouvement par unité de volume en suivant une particule de fluide tandis que dans la partie droite il y a la somme des forces de surface et de volume.

Les forces de surface sont les gradients de pression hydrostatique p et la divergence du tenseur des contraintes τ_{ij} .

Les forces de volume $\rho\, b_i$ ont plusieurs origines (gravité, Coriolis), mais toutes sont caractérisées par le fait qu'elles soient proportionnelles à la masse de la particule.

Le premier index dans τ_{ij} est utilisé pour définir la direction de cisaillement (parallèle à x_i) tandis que le second index définit le plan de cette action (perpendiculaire à x_i). L'axe x_3 indique la verticale. Donc, τ_{13} et τ_{23} sont les contraintes de cisaillement sur les plans horizontaux, tandis que τ_{12} et τ_{21} sont celles sur les frontières latérales.

Entre les différentes composantes du tenseur des contraintes, les contraintes de cisaillement sur les plans horizontaux sont particulièrement importantes dans les eaux peu profondes, parce que ce sont elles qui transmettent le forçage du vent aux couches de surface et le frottement aux couches de fond.

En utilisant l'équation de continuité pour un fluide incompressible (1.2) on peut réécrire la dérivée totale à droite dans (1.3) de la façon suivante

$$\frac{d\,(\rho u_i)}{d\,t} = \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) \tag{1.4}$$

Le deuxième terme sur la droite est la divergence du flux de la quantité de mouvement entrainée par l'écoulement même. Il représente la redistribution de la quantité de mouvement dans l'espace, dont heureusement les effets sont importants seulement dans une partie limitée du champ d'écoulement. En effet ce terme non linéaire dans les composantes de la vitesse est la source de beaucoup de complexités mathématiques (voir paragraphe « Le tenseur de Reynolds »)!

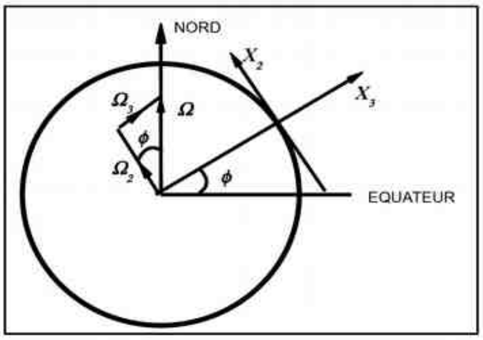
Les forces de volume

Les composantes de la vitesse u_i sont mesurées dans un système de référence en rotation tel que la Terre, donc les forces de volume incluent la force centrifuge et celle de Coriolis associées à la rotation de la Terre. Généralement la force centrifuge est contenue dans le terme de la force de gravité et les forces de volume sont écrites dans la forme suivante

$$\begin{gathered} b_i = 2\epsilon_{ijk} u_j \Omega_k + g_i \\ g_i = -g\,\delta_{i3} \end{gathered} \tag{1.5}$$

avec Ω_k qui représente les composantes de la vitesse angulaire de la Terre dans le système de coordonnées locales et g l'accélération gravitationnelle locale.
Entre les autres forces de volume il y a l'attraction gravitationnelle de la Lune et du Soleil, qui sont importantes surtout dans l'océan profond, tandis qu'en océanographie côtière on étudie les effets de la propagation de la marée en eaux peu profondes plus que les mécanismes de sa génération.

Le système de coordonnées locales horizontales (x_1,x_2) et verticale (x_3) à la latitude ϕ et les composantes du vecteur vitesse angulaire de la Terre.



L'intensité du vecteur vitesse angulaire de la Terre Ω est 2π radiant en 24 h, donc
$\Omega = 0.7292\ 10^{-4}\ s^{-1}$.

En substituant (1.4) et (1.5) dans la (1.3) on obtient

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - g\,\rho\,\delta_{i3} + 2\rho\,\epsilon_{ijk}\,u_j\,\Omega_k + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \tag{1.6}$$

Dans cette forme les équations du mouvement sont plus ou moins impossibles à traiter analytiquement . Pour arriver à des modèles appropriés pour des écoulements simples dans l'océan côtier il faut encore faire des idéalisations et des simplifications .

2.3 L'approximation de mouvements quasi-horizontaux

En océanographie côtière le rapport entre la vitesse verticale et les vitesses horizontales est petit. Cela est en partie du au petit rapport d'échelle entre profondeur et largeur de l'océan côtier, qui est de l'ordre de 10^{-3} et par simple contrainte géométrique on peut s'attendre que les mouvements à l'échelle de bassin aient le même rapport pour les vitesses. En plus, la présence fréquente de stratification empêche les mouvements verticaux.
Alors étant que $|u_3| << |u_1|$, $|u_2|$ les composantes du terme de l'accélération de Coriolis dans les équations du mouvementent deviennent

1ère eq. $\quad 2(u_2 \Omega_3 - u_3 \Omega_2) \cong 2 u_2 \Omega_3$
2ème eq. $\quad 2(u_3 \Omega_1 - u_1 \Omega_3) \cong - 2 u_1 \Omega_3$

la géométrie du système nous donne

$$\Omega_3 = \Omega \sin\phi$$

avec ϕ = latitude. On peut alors introduire le paramètre de Coriolis

$$f = 2 \Omega \sin\phi = 1.458\ 10^{-4} \sin\phi \qquad [s^{-1}]$$

On aura donc
dans la 1ère eq. $\quad f u_2$
et dans la 2ème eq. $\quad -f u_1$

Aux moyennes latitudes autour de 41 dégrées, la valeur approximative de f est $10^{-4}\,s^{-1}$
Généralement on prend f positive et on fait référence à l'hémisphère nord.

2.4 L'approximation hydrostatique et l'approximation de Boussinesq

L'équation (1.6) s'applique séparément dans les trois dimensions, mais pour un grand ensemble de mouvements la force de gravité est fortement prévalent sur la verticale.
Si on prend l'équation de la quantité de mouvement pour la composante verticale on a

$$\frac{du_3}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx_3} - g + 2(u_1\Omega_2 - u_2\Omega_1) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{3j}}{\partial x_j} \tag{1.7}$$

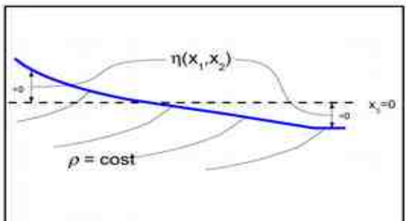
L'accélération gravitationnelle g est presque de $10\ m\ s^{-2}$; pour ce qui concerne les mouvements horizontaux on a déjà vu que dans l'océan côtier leur ordre de grandeur est entre le 0.1 et le $1.0\ m\ s^{-1}$, ainsi l'accélération de Coriolis est de l'ordre de 10^{-5} - $10^{-4}\ m\ s^{-2}$. Les valeurs maximales des gradients des tensions de Reynolds sont de quelques $0.1\ N\ m^{-2}$ (0.1 Pa) = $0.1\ kg\ m\ s^{-2}$ sur une couche de 10 m, donc le dernier terme est de l'ordre de grandeur de $10^{-5}\ m\ s^{-2}$. Les vitesses verticales typiques de l'océan côtier sont au maximum de $10^{-2}\ m\ s^{-1}$ et les échelles de temps au minimum de 10^{3} s, par conséquence les accélérations verticales sont de l'ordre de $10^{-5}\ m\ s^{-2}$. Par conséquence on a des mouvements presque horizontaux dans lesquels le seul terme qui balance la prépondérante accélération de gravité est le gradient de pression :

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = \rho g \tag{1.8}$$

étant donné que ce bilan est le même que celui d'un fluide au repos, on l'appelle approximation hydrostatique.
Toutefois il faut penser que si le fluide était vraiment au repos, cet équilibre nous dis que la position de la surface libre de la mer doit être $x_3 = 0$, par contre dans un fluide en mouvement la surface libre peut avoir une certaine inclinaison par rapport à l'horizontal. Généralement on utilise une fonction $\eta = \eta(x,y)$ pour indiquer la position de la surface libre de la mer (surélévation ou, en anglais, *sea surface height, ssh*). Des valeurs négatives de η indiquent que la surface libre est au dessous du niveau moyen de référence, les valeurs positives indiquent que η est au dessus.

Si on intègre l'éq.(1.8) entre un certain niveau x3 et la surface on obtient

$$p = p_a + \int_{x_3}^{\eta} \rho g \, dx_3 \qquad (1.9)$$



Surélévation de la surface libre de la mer

où p_a est la pression atmosphérique.
Les équations du mouvement horizontales (1.6 avec $i=1,2$) contiennent les gradients de pression qui peuvent être calculés à partir de l'approximation hydrostatique (1.9) de la façon suivante :

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial p_a}{\partial x_i} + \rho_{surf}\, g \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \int_{x_3}^{\eta} g \frac{\partial \rho}{\partial x_i} dx_3 \qquad (i=1,2) \qquad (1.10)$$

Cette équation nous dit que le gradient de pression dans la colonne d'eau est le résultat de la somme de trois termes: le gradient de la pression atmosphérique, celui de la surélévation de la surface libre et du gradient du champs de densité interne.
Le gradient de pression atmosphérique constitue un forçage externe pour les mouvements dans les eaux peu profondes, mais si on le compare avec le forçage du vent ce terme peut généralement être négligé.
Le deuxième terme est l'accélération de gravité due à l'inclinaison de la surface libre, comme si les particules d'eau qui se trouvent à la surface roulent le long de la pente.
Le troisième terme exprime les effets de flottabilité (en anglais *buoyancy*) liés aux différences de masse volumique le long des surfaces horizontales (ou mieux de geopotentiel). Dans les conditions typiques de la circulation côtière ce dernier terme peut être reformulé pour une plus grande simplicité.

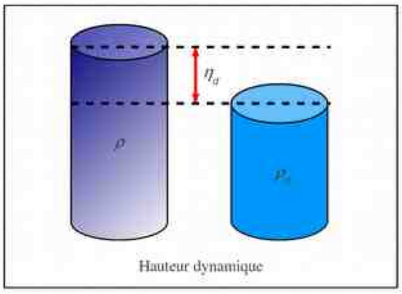
Les différences verticales en masse volumique dans les eaux côtières sont de l'ordre de un sur mille, donc dans (1.10) une densité de référence ρ_o peut substituer ρ_{surf} sans faire des erreurs trop grandes. Par contre les échelles horizontales de la variation en masse volumique ($\partial\rho/\partial x_i$) ne sont pas négligeables . Boussinesq a suggéré alors d'écrire la masse volumique comme

$$\rho = \rho_0 (1+\epsilon) \qquad \text{avec} \quad \epsilon = O(10^{-3}) \qquad (1.11)$$

et de retenir dans le terme de flottabilité (*buoyancy*) seulement les quantités qui ont cet ordre de grandeur.
Laissant tomber le terme de la pression atmosphérique, on peut récrire la (1.10)

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x_i} = g \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \int_{x_3}^{0} g \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} dx_3 = g \frac{\partial}{\partial x_i}[\eta - \eta_d(x_3)] \qquad (i=1,2) \qquad (1.12)$$

La quantité η_d est la différence de hauteur entre une colonne d'eau de densité ρ_0 et une à la « vrai » densité $\rho(x_3)$. En résumé, l'approximation de Boussinesq permet de remplacer la densité exacte par sa valeur de référence ρ_0 partout sauf dans le terme d'accélération de la pesanteur. Dans les termes de pression il ne reste plus que la part due à ϵ qui est appelée hauteur dynamique, car c'est le principal moteur de l'écoulement.
Souvent comme densité de référence on prend la densité la plus grande ainsi ϵ est toujours négative et la hauteur dynamique est nulle ou positive



Si le gradient de pression $-\partial p/\partial x_i$ disparaît à un certain niveau suffisament profond $x_3 = -h$, l'équation (1.12) devient

$$\eta = \eta_d(-h) \tag{1.13}$$

ayant négligé la constante d'intégration, i.e. en faisant une choix astucieux du niveau zéro de la surface libre. Dans ce cas la topographie du niveau de la mer peut être déterminée directement par la distribution de la densité (Sverdrup, 1942). Dans les eaux peu profondes toutefois il est rarement raisonnable de faire l'hypothèse que les gradients de pression deviennent nuls à un niveau suffisamment profond, donc le calcul (1.13) peut être fait seulement quand la profondeur totale *H* est beaucoup plus grande que la profondeur de référence *h*. Cela empêche pratiquement toute simplification dans les eaux côtières qui sont généralement des zones avec de très forts gradients de densité et sont dynamiquement très actives.
Toutefois, avec un choix attentif du niveau de référence *h* on peu regarder h_d comme une contribution à la hauteur dynamique de quelque chose qui est relative à la distribution de la densité et sur laquelle il y a une distribution de $h - h_d(-h)$ qui n'est pas nécessairement lié avec la distribution interne de la densité.
Les vitesses typiques dans l'océan côtier sont de l'ordre de 0.1 m s^{-1} avec des échelle de temps de quelques jours (ex. tempête) i.e. 10^5 s . Cela correspond à une accélération moyenne de 10^{-6} m s^{-2}. Une inclinaison de la surface libre de 10^{-7} (1 cm sur 100 km) va créer la même accélération, donc elle est importante dans le bilan de la quantité de mouvement.
Une anomalie de densité ϵ d'une partie sur 1000 constante sur une couche superficielle profonde de 30 m, donne une contribution de 3 cm à la hauteur dynamique relative à une profondeur de 30 m. Sur l'échelle typique des 100 km un gradient créé par la densité de 10^{-7} est observé s'il y a une couche légère de surface qui est profonde de 30 m dans un point et de 20 m 100 km plus loin. Les différences de densité de cet ordre de grandeur (et plus) sont presque toujours présentes dans l'océan côtier, donc on peut dire que tous les processus physiques qui contrôlent le champ de densité peuvent affecter les bilans horizontaux de quantité de mouvement de façon considérable.

Le tenseur des contraintes de Reynolds

L'écoulement dans les eaux côtières est généralement turbulent, surtout dans les couches de surface et de fond et les échelles de temps de ces mouvements sont typiquement plus grandes que les échelles typiques des fluctuations turbulentes. Dans ces circonstances il est possible d'utiliser l'approche de Reynolds et penser les équations de la continuité et du mouvement comme relatives à un écoulement moyen convenablement défini.
Donc, toutes les quantités turbulentes qui interviennent dans les équations sont supposées être la somme d'une composante moyenne et d'une composante fluctuante

$$u_i = \overline{u}_i + u_i'$$
$$p = \overline{p} + p'$$

Les moyennes temporelles étant de u_i', p' nulles par hypothèse, dans les équations de continuité et du mouvement moyennées tous les termes qui contiennent des fluctuations disparaissent, sauf les termes contenant la moyenne du produit $\rho\overline{u_i' u_j'}$. La divergence de ces termes joue un rôle dans les équations du mouvement qui est très similaire à celui des termes visqueux ainsi ces termes sont généralement mis dans la partie droite de l'équation du mouvement et combinés avec les termes visqueux moyennés :

$$\tau_{ij} = \overline{\tau_{ij}} - \rho\overline{u_i' u_j'}$$

La contribution de la viscosité moléculaire est toute petite par rapport à celle de la viscosité turbulente (mis à part quelques cas exceptionnels) donc, par la suite, on considérera toujours que les contraintes turbulentes de Reynolds sont toujours incluses dans les termes visqueux et que l'équation (1.3) est toujours appliquée à l'écoulement moyen, bien que d'un point de vue pratique on ne mettra plus sur toutes les quantités les barres symbolisant l'opération de moyenne .

RAPPEL (voir Cours OPCB217)

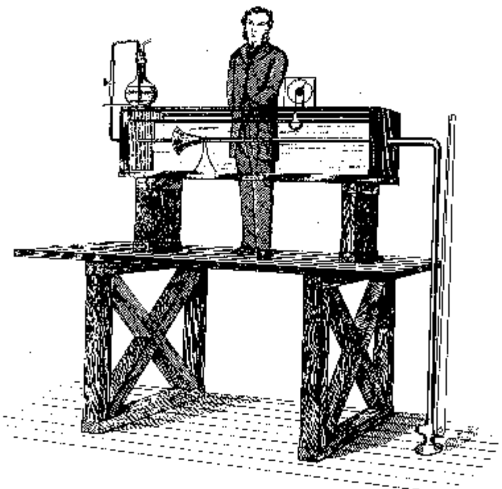


Fig. 9.1. Sketch of Reynolds's dye experiment, taken from his 1883 paper

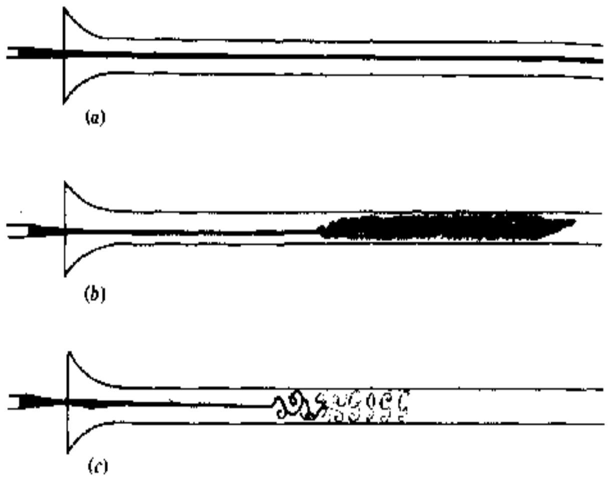


Fig. 9.2. Reynolds's drawings of the flow in his dye experiment.

His results were as follows:
1. At low velocities the streak of dye extended in a straight line along the tube.

2. If the water in the tank was not at rest, the streak would shift about the tube.

3. As the velocity increased, at some point in the tube, the color band would all at once mix up with the surrounding waters. When viewing the tube with an electric spark, this mixed fluid actually looked like a bunch of coherent eddies.

http://www.marine.maine.edu/~eboss/classes/SMS_491_2003/Week_5.htm

Les équations de l'écoulement moyen (Reynolds)

Pour un écoulement turbulent, plutôt que de rechercher la vitesse instantanée, que nous donnent les équations de Navier-Stokes vues précédemment, on cherche une vitesse lissée dans le temps, c'est à dire moyennée sur une période de temps dépendant du phénomène étudié.
Dans le même temps, pour chacune des variables (composantes de la vitesse et pression) on fait la décomposition suivante $u = \bar{u} + u'$, où $\bar{u}$ est la moyenne et u' la variabilité autour de *u*, telle que $\overline{u'} = 0$:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u\, dt \qquad \overline{u'} = \frac{1}{T} \int_0^T u'\, dt = 0$$

Cette technique a été mise au point par Osborne Reynolds (http://en.wikipedia.org/wiki/Osborne_Reynolds). Établissons pour exemple la moyenne du produit de deux composantes indépendantes *u* et *v* :

$$\overline{uv} = \frac{1}{T} \int_0^T u\, v\ \ dt = \frac{1}{T} \int_0^T \bar{u}\, \bar{v}\, dt + \frac{1}{T} \int_0^T \bar{u}\, v'\, dt + \frac{1}{T} \int_0^T u'\, \bar{v}\, dt + \frac{1}{T} \int_0^T u'\, v'\, dt$$

ainsi

$$\overline{uv} = \bar{u}\, \bar{v} + \bar{u}\, \overline{v'} + \overline{u'}\, \bar{v} + \overline{u'\, v'}$$

mais puisque $\overline{u'} = \overline{v'} = 0$

$$\overline{uv} = \bar{u}\, \bar{v} + \overline{u'\, v'}$$

T représente un laps de temps suffisamment long pour que les valeurs moyennes soient indépendantes du temps. On a pour *v, w, p* ... des définitions analogues. Si $\overline{u'} = 0$ il faut noter que les fluctuations elles-mêmes peuvent être du même ordre de grandeur que *u* . De plus les fluctuations superposées au vecteur vitesse moyen sont tridimensionnelles, c'est à dire u', v', w' sont toujours présentes même si l'écoulement est mono ou bidimensionnel.

On peut montrer que tous les termes linéaires des équations de Navier-Stokes gardent, pour l'écoulement moyen, la même forme que pour l'écoulement instantané, par contre les termes d'advection (à démontrer en exercice) deviennent :

$$\overline{\vec{V}.\nabla u} = \overline{\vec{V}}.\nabla \overline{u} + \underbrace{\overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y}} + \overline{w' \frac{\partial u'}{\partial z}}}_{\text{termes turbulents}}$$

Les équations de Reynolds différent donc de celles de Navier-Stokes par l'apparition des termes « turbulents ». En anglais elles sont aussi appelées *RANS equations (Reynolds-averaged Navier-Stokes équations).*

Tension de Reynolds et viscosité turbulente

On démontre que l'équation de continuité pour un fluide incompressible

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

satisfait pour l'écoulement moyen (à faire en exercice) à la forme:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0$$

D'après les définitions de $\bar{u}$ et u' nous obtenons:

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial u}{\partial x} dt = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{T} \int_0^T u\, dt \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{T} \int_0^T (\bar{u} + u')\, dt \right] = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$$

on en déduit par soustraction $(u' = u - \bar{u})$ que

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

On peut donc écrire les termes turbulents de la façon suivante, sans en changer la valeur (selon *Ox*):

$$\overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y}} + \overline{w' \frac{\partial u'}{\partial z}} + \overline{u' \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right)} = \frac{\partial \overline{u' u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u' v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u' w'}}{\partial z}$$

et l'équation de Reynolds pour la composante *u* s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}+u\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+v\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}+w\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_o}\frac{\partial \bar{P}}{\partial x}+f v+\nu\left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}\right]-\frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x}-\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}-\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}$$

Les trois derniers termes sont appelés termes de tensions de Reynolds.
J.V. Boussinesq (1842 – 1929) proposa de relier ensuite ces tensions de Reynolds aux composantes du gradient des vitesses moyennes de la façon suivante :

$$\overline{u'u'}=-A_x\frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \qquad \overline{u'v'}=-A_y\frac{\partial u}{\partial y} \quad ; \qquad \overline{u'w'}=-A_z\frac{\partial u}{\partial z} \quad ;$$

où les coefficients *A* sont appelés coefficients d'échange turbulent (*Austauch* = échange en allemand) ou *eddy viscosity* en anglais.
Si on néglige les variations spatiales de ces coefficients les termes turbulents prennent une forme identique aux termes de frottement moléculaires, e.g. pour la composante *x*:

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho_o}\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + f\bar{v} + \nu\left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}\right] + A\left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}\right]$$

et vu que ces derniers sont beaucoup plus petits (en océan, 10^{-5} à 10^{-6} en verticale, 10^{-10} à 10^{-12} sur l'horizontale) ils seront par la suite être négligés.
Il faut par contre faire attention dans les simplifications, parce que, contrairement à ν , les *A* ne sont pas des propriétés du fluide, mais de l'écoulement. Ils varient de place en place et dépendent de l'échelle de « lissage » choisie . En océanographie généralement, on fait une distinction entre coefficients horizontaux $A_x=A_y=A_h$ et coefficient verticale A_z .

2.5 Frottement à la surface et au fond

Tandis que les composantes diagonales du tenseur des contraintes de Reynolds représentent une petite correction de la pression hydrostatique, les composantes $\tau_{xy}=\tau_{yx}=\overline{u'v'}$ représentent le flux de quantité de mouvement turbulent dont la divergence est très importante dans les deux premières équations de la quantité de mouvement (équations des composantes horizontales) . Dans la pratique la valeur de τ_{xy} est rarement plus grande que 1 Pa et son échelle de variation spatiale est rarement moins que 10 km. Donc, le terme de sa divergence

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x},\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \approx O(10^{-7})\,\mathrm{m\,s^{-2}} < \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z},\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \qquad (\text{voir ci}-\text{dessous})$$

Bien que la divergence verticale soit plus importante, la différence n'est pas assez grande pour éliminer complètement τ_{xy} et τ_{yx} , toutefois Csanady (82) souligne que il est difficile de démontrer que les effets de frottement latérale aient un rôle vraiment significatif dans des problèmes de circulation générale dans l'océan côtier .
Par contre, les tensions de Reynolds dans les plans horizontaux $\tau_{xz}=\overline{u'w'}$ *et* $\tau_{yz}=\overline{v'w'}$ sont très importantes en eaux peu profondes. Le frottement du vent est le principal forçage de l'écoulement et il est transmis des couches superficielles à celle de fond par ces termes-là . De même, le frottement au fond représente un processus clé sur la circulation côtière .
Si on indique avec $\vec{F}=(F_x,F_y)$ $(z=0)$ les composantes du frottement dû au vent, la continuité du frottement à l'interface air-mer impose

$$\tau_{xz}=F_x \qquad \tau_{yz}=F_y \tag{1.22}$$

L'experience de Nikuradse, 1932

The Darcy-Weisbach *friction factor, f,* is a function of the same variables as wall shear stress (Equation 2.16). Again using dimensional analysis, a functional relationship for the friction factor can be developed:

$$f = F\left(\frac{VD\rho}{\mu}, \frac{\varepsilon}{D}\right) = F\left(Re, \frac{\varepsilon}{D}\right) \quad (2.18)$$

where Re = Reynolds number

The Darcy-Weisbach friction factor is dependent on the velocity, density, and viscosity of the fluid; the size of the pipe in which the fluid is flowing; and the internal roughness of the pipe. The fluid velocity, density, viscosity, and pipe size are expressed in terms of the Reynolds number. The internal roughness is expressed in terms of a variable called the *relative roughness,* which is the internal pipe roughness (ε) divided by the pipe diameter (D).

In the early 1930s, the German researcher Nikuradse performed an experiment that would become fundamental in head loss determination (Nikuradse, 1932). He glued uniformly sized sand grains to the insides of three pipes of different sizes. His experiments showed that the curve of *f* versus *Re* is smooth for the same values of ε/D. Partly because of Nikuradse's sand grain experiments, the quantity ε is called the *equivalent sand grain roughness* of the pipe. Table 2.2 provides values of ε for various materials.

http://www.haestad.com/library/books/awdm/online/wwhelp/wwhimpl/js/html/wwhelp.htm

Généralement le frottement dû au vent s'exerce le long de la direction du vent et son intensité peut être calculée avec une loi quadratique.

$$\vec{F} = \frac{\rho_a}{\rho_w} C_{10} \vec{W} \left|\vec{W}\right| \quad (1.23)$$

avec $\vec{W} \equiv (W_x, W_y)$ intensité du vent, ρ_a / ρ_w rapport entre la masse volumique de l'air et celle de l'eau et C_{10} un coefficient de trainée qui par convention est référé à la vitesse du vent à 10 m au-dessus du niveau de la mer .

La valeur de C_{10} peut être estimée avec des mesures de terrain et par exemple Csanady (1982) propose :

$$C_{10} = 1.6 \times 10^{-3,} \qquad (W \leq 7 \; m\, s^{-1})$$
$$C_{10} = 2.5 \times 10^{-3,} \qquad (W \geq 10 \; m\, s^{-1})$$

avec un lissage entre les deux valeurs pour des vitesses du vent comprises entre 7 et 10 m s^{-1} . La raison de la variation de C_{10} avec la vitesse du vent est due au fait que avec une augmentation de la vitesse du vent, la surface de la mer devient de plus en plus irrégulière (rugueuse) avec la formation de vagues et leur éventuel déferlement.

Ces valeurs de C_{10} correspondent à celles pour une rugosité de Nikuradse (voir encadré) de 1.4 cm pour les vents faibles qui créent des ondes capillaires et 10 cm pour les vents forts qui créent des vagues écrêtées d'écume.

Pour une valeur typique de vitesse du vent de 7 m s^{-1} l'équation (1.23) donne $F = 10^{-4}$ m^2 s^{-2} où bien $\tau = 0.1$ Pa.

Une autre raison de l'importance des termes $\tau_{xz} = \overline{u' w'}$ *et* $\tau_{yz} = \overline{v' w'}$ est qu'ils sont aussi responsables de la transmission du frottement au fond. L'inclinaison du fond en zone côtière est de l'ordre de grandeur de 10^{-2}-10^{-3} donc pratiquement horizontale (NB: sur des distances de l'ordre des kilomètres les irrégularités du fond peuvent être considérées comme de la « rugosité »).

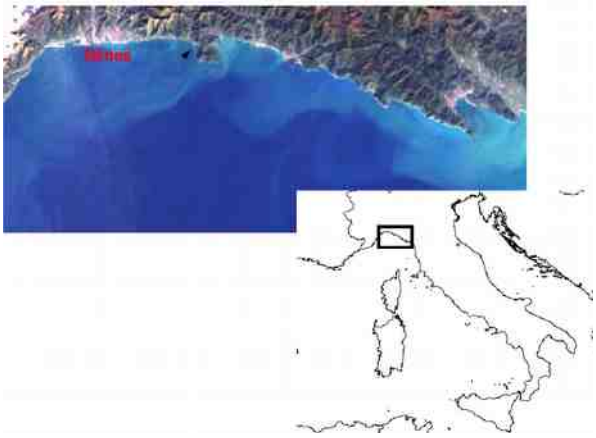
Si on indique avec $\vec{B} = (B_x, B_y)$ $(z = -H)$ les composantes du frottement au fond, on peut écrire, d'une façon similaire à (1.22),

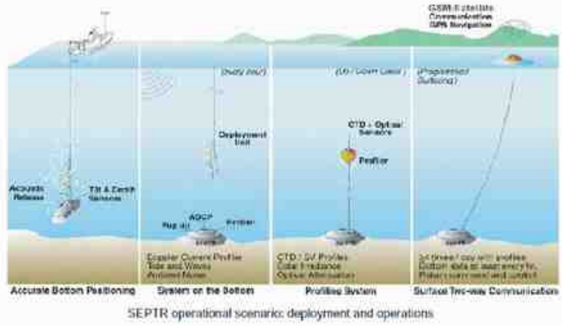
$$\tau_{xz} = B_x \qquad \tau_{yz} = B_y \tag{1.25}$$

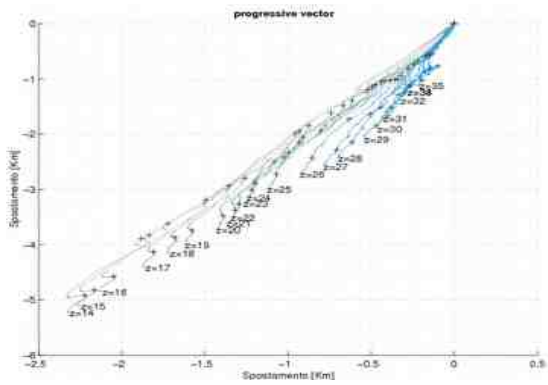
et le frottement au fond peut être traité avec une loi quadratique similaire à (1.23)

$$\vec{B} = C_d \vec{U}_1 \left|\vec{U}_1\right| \tag{1.26}$$

ou C_d est un coefficient de traînée et $\vec{U}_1 \equiv (U_1, V_1)$ est la vitesse du courant à une certaine hauteur du fond, qui généralement est de 1 m.
L'estimation expérimentale à partir de données en mer n'est pas facile à obtenir et dans beaucoup de cas on fixe une valeur $C_d = 2 \cdot 10^{-3}$.
Toutefois cette valeur montre que l'intensité typique du frottement au fond correspondant à une vitesse sur le fond de 0.2 m s^{-1} est au peu près la même que celle d'un vent modéré, tandis que pour un courant de 1 m s^{-1} on a des valeurs équivalentes au vent d'un ouragan. Donc le terme de divergence $\partial \tau_{(x,y)z} / \partial z$ du frottement au fond est par conséquence important comme celui du vent.







Exemple de mesure de vitesse de fond avec *SEPTR (Shallow water Environmental Profiles in Trawl-safe Real-time configuration*)

2.6 La viscosité turbulente

Le frottement sur le fond et à la surface ne se distribuent pas uniformément dans une colonne d'eau de 100 m. Typiquement il y a deux mécanismes qui s'opposent à une distribution uniforme : la rotation et la stratification .
Dans un fluide visqueux et homogène en rotation, le frottement sur une surface de frontière non parallèle à l'axe de rotation génère des couches de profondeur limités dans lesquelles le frottement est réduit à zéro (Ekman 1905). La profondeur de la couche d'Ekman visqueuse est de l'ordre de

$$\sqrt{2\frac{\nu}{f}}$$

avec ν viscosité cinématique. En dehors de la couche d'Ekman l'écoulement reste pratiquement sans frottement. Quand la couche d'Ekman est turbulente, comme pratiquement toujours en eaux côtières, les tensions de Reynolds restent de la même façon confinées dans une couche de profondeur limitée, de sorte que dans ce cas la turbulence agisse comme la viscosité. Toutefois, l'épaisseur de la couche limite turbulente est indépendante des propriétés du fluide et elle est de l'ordre de

$$0.1\frac{u_*}{f} \quad \text{où} \quad u_* = \left(\frac{\tau}{\rho}\right)^{1/2} \quad \text{est une vitesse de frottement, avec } \tau \text{ intensité de la tension à la frontière}$$

Pour un valeur typique de stress $t = 0.1$ Pa, u* = 1 cm s^{-1}, l'épaisseur de la couche d'Ekman est de l'ordre de 10 m aux moyennes latitudes, tandis que pour un ouragan où on a des tensions de 3 Pa ou plus, les couches d'Ekman de fond et de surface peuvent se rejoindre et occuper un entière colonne d'eau de 100 m.
La stratification due au réchauffement de la surface ou à l'apport d'eau douce réduit l'épaisseur des couches de surface et de fond, bien que faiblement, sûrement pas d'un ordre de grandeur. Les couches de fond et de surface restent bien mélangées par l'action de la turbulence et alors toute la variation de densité est confinée à l'intérieur de la colonne d'eau entre les deux couches. Au dessous et au dessus des couches peuvent se former des zones de très forte variation de densité. Bien que des tensions de Reynolds peuvent être générées par le mouvement de type ondulatoire, elle sont plus faibles (environ de 2 ordres de grandeur) que les tensions générées par le frottement au fond et à la surface. On peut avoir des exceptions aux interfaces en correspondance avec des fortes variations de densité à l'intérieur du fluide, où les vitesse peuvent changer brusquement.
Afin de rendre les équations du mouvement traitables, il est nécessaire de paramétrer les tensions de Reynolds à l'intérieur du fluide τ_{13}, τ_{23} en termes de vitesses. Avec un peu d'attention et de connaissance de cause, on peut exprimer les tensions comme proportionnelles aux gradients de la vitesse

$$\tau_{xz} = K_z\frac{\partial u}{\partial z}, \tau_{yz} = K_z\frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{où} \quad K_z \text{ est la viscosité turbulente} \tag{1.27}$$

Quand on utilise cette relation il faut toujours se rappeler que la viscosité turbulente K_z n'est pas une propriété du fluide, mais de l'écoulement. A priori il n'est donc pas raisonnable d'utiliser une seule valeur sur toute la colonne d'eau et non plus pour toute une couche limite. En effet, dans une couche limite de 1 m, K_z varie très rapidement avec la profondeur sur le fond et sous la surface et même en proximité des interfaces. En générale, le vecteur vitesse change rapidement à travers ces surfaces, mais pas la tension de Reynolds . Si on s'intéresse à des écoulements avec une distribution de la vitesse dans la couche limite on peut utiliser la loi logarithmique . En océanographie côtière l'étude des couches limites est très compliquée et leur connaissance est restée longtemps très limitée . Des instruments modernes de mesure permettent maintenant de commencer une étude *in situ* plus approfondie (voir figures des expériences avec le *SEPTR*) .

En dehors des couches limites, mais dans une région d'écoulement avec un cisaillement turbulent homogène, la viscosité turbulente peut être considérée comme constante et proportionnelle à la vitesse et à une longueur d'échelle de l'écoulement. Dans les régions influencées par les stress de surface et de fond on peut avoir une relation de proportionnalité avec la vitesse de friction et la profondeur de la couche mélangée :

$$K_z = \frac{u_* h}{Re} \quad \text{où} \quad Re \quad \text{nombre de Reynolds turbulent.} \tag{1.28}$$

Des mesures sur le terrain suggèrent des valeurs de *Re* entre 12 et 20.

À l'intérieur d'une colonne d'eau stratifiée progressivement, donc sans interfaces de brusque variation de densité, il n'y a pas d'observations qui peuvent aider à spécifier *K*. Une estimation de l'ordre de grandeur est $K=1$ cm^2 s^{-1} = 10^{-4} m^2 s^{-1}, c'est à dire deux ordres de grandeur plus petit que la valeur typique pour une couche limite bien mélangée en appliquant la (1.28).
Aux interfaces de brusque variation de densité il est mieux d'utiliser un loi quadratique du type (1.23) et (1.26). Alors, si on indique les composantes des contraintes avec $\vec{I} = (I_x, I_y) \quad (z = -h_I)$, on peut écrire

$$I_i = C_s \vec{U}_I \left|\vec{U}_I\right| \tag{1.29}$$

où C_s est un coefficient de frottement approprié pour ce type d'interface et $\vec{U}_I$ répresent les différences des vitesses à travers l'interface. Une valeur obtenue en laboratoire pour le coefficient est $C_s = 0.5 \times 10^{-3}$ mais il est très difficile de vérifier si cette valeur est réaliste en mer.

En résumé, il est possible d'utiliser l'équation (1.27) avec *K=constante* dans une couche homogène et utiliser les équations (1.23), (1.26) et (1.29) au frontières (voir schéma ci-contre) .

Bien évidemment dans ce cas la procédure pour calculer les contraintes et la distribution de la vitesse devient très complexe, avec l'application des lois quadratiques et le *scaling* de la viscosité turbulente avec les tensions aux frontières .

$$\tau_{(x,y)z} = \vec{F} = \frac{\rho_a}{\rho_w} C_{10} \vec{W} \left|\vec{W}\right| \quad (1.23)$$

$$\tau_{(x,y)z} = \rho K_z \frac{\partial (u,v)}{\partial z} \quad \text{avec} \quad K_z = \frac{u_* h}{Re} \quad \text{ou} \quad K_z = 10^{-4} \quad (1.27)$$

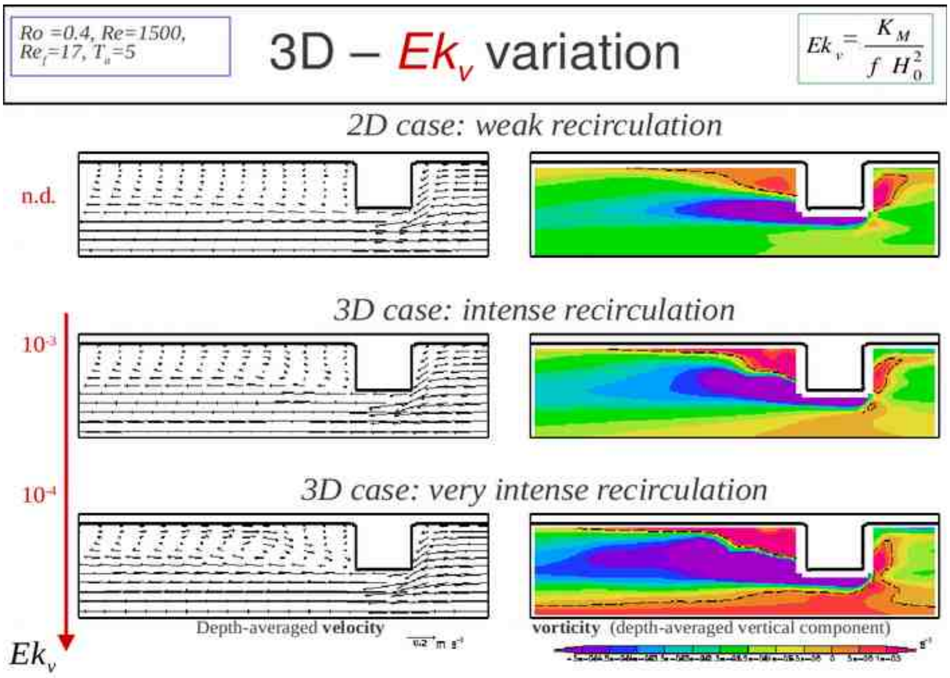
$$\tau_{(x,y)z} = I_i = C_s \vec{U}_I \left|\vec{U}_I\right| \quad (1.29)$$

$$\tau_{(x,y)z} = \rho K_z \frac{\partial (u,v)}{\partial z} \quad \text{avec} \quad K_z = \frac{u_* h}{Re} \quad \text{ou} \quad K_z = 10^{-4} \quad (1.27)$$

$$\tau_{(x,y)z} = \vec{B} = C_d \vec{U}_1 \left|\vec{U}_1\right| \quad (1.26)$$

Tandis qu'il est fréquemment possible de simplifier la relation paramétrique entre les contraintes aux frontières et à l'intérieur du fluide et la vitesse sans faire de grosses erreurs, il faut noter que négliger la présence des couches de fond et de surface n'est pas réaliste dans le calcul de la distribution interne de la vitesse. Si par exemple, pour un fluide visqueux on impose aux frontières solides une condition de *no-slip* et à l'intérieur on fait l'hypothèse de viscosité turbulente constante, on observera entre le profile calculé et celui mesuré la même différence qu'il y a entre la distribution de Poiseuille pour un écoulement laminaire et le profile de vitesse turbulent dans un tuyau.

Profils de vitesse dans un tuyau; (a) laminaire de Poiseuille (b) turbulent



Exemple d'étude de sensibilité de la circulation au coefficient de viscosité turbulente verticale (exprimé par le nombre d'Ekman vertical) avec un modèle numérique

2.8 Linéarisation des équations

Quand la relation (1.27) est introduite dans les équations horizontales de la quantité de mouvement, ces dernières assument la forme des équations de Navier-Stokes, qui dans leur forme non-linéaire sont notamment intraitables. Elles peuvent être simplifiées en négligeant les tensions intérieurs qu'on suppose être distribuées d'une façon simplifiée, ou en négligeant les termes d'advection de la quantité de mouvement, un passage dit « linéarisation ».
Généralement on suppose que l'advection de la quantité du mouvement dans des problèmes géophysiques peut être négligée quand le rapport entre les termes non linéaires et la force de Coriolis (i.e. le nombre de Rossby) est petit:

$$\frac{u\dfrac{\partial u}{\partial x}}{f\,v} \simeq \frac{U}{f\,L} = Ro \ll 1 \tag{1.30}$$

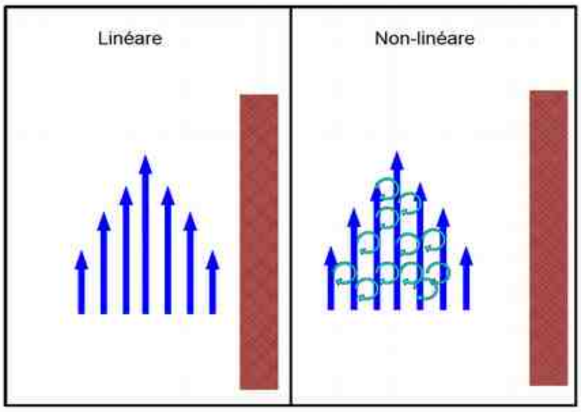
où U et L sont les échelles appropriées pour la vitesse et la longueur respectivement. Ce critère se concentre sur le bilan de la quantité de mouvement à travers de l'écoulement .
Par contre si on veut faire un bilan le long de l'écoulement, vu qu'il n'y a pas de terme de Coriolis la comparaison est faite entre les termes non-linéaires et les termes de frottement du vent ou au fond. Les termes non-linéaires sont alors négligeables quand

$$\frac{u\dfrac{\partial v}{\partial x}}{\dfrac{u_*^2}{h}} \simeq \frac{U^2}{u_*^2}\cdot\frac{h}{L} \ll 1 \tag{1.31}$$

ou h est la profondeur de la couche sur laquelle la tension ρu_*^2 est distribuée.
En eaux côtières ni le critère (1.30) ni le critère (1.31) sont en générale satisfaits, vu que Ro est de l'ordre de 1 et de même pour le (1.31). L'advection de la quantité de mouvement est alors potentiellement importante. Toutefois, si on examine attentivement quels sont les effets précis de l'advection de la quantité de mouvement, on trouve que ces effets sont des modifications assez

compréhensibles et prévisibles des structures (*patterns*) créees et gouvernées par les termes linéaires (Coriolis, accélérations locales, frottement du vent et au fond). La raison de ce comportement est que les termes non-linéaires ont la forme d'une divergence, et donc ils disparaissent en proximité des frontières. Leur rôle est alors de transférer la quantité de mouvement d'une part à l'autre du bassin, sans modifier l'input de quantité de mouvement.

Par exemple, on prend le cas d'un jet côtier, i.e. un courant intense et plutôt étroit le long de la côte, généré par le vent. Selon le bilan des termes linéaires il reste en proximité de la côte, mais si on considère aussi les termes non-linéaires, on voit dans certains cas que l'advection de la quantité de mouvement déplace ce courant vers le large, mais sans modifier significativement les caractéristiques de base du courant, comme l'échelle horizontale ou la vitesse maximale.



Cet effet est clairement important et il faut le comprendre, mais il est également vrai qu'avec la théorie linéaire on peut déjà comprendre beaucoup de choses comme les échelles spatiales et temporelles, les fréquences d'oscillations et les nombre d'ondes des composantes ondulatoires du mouvement.

En résumé, l'utilisation d'une théorie linéaire a pour but de fournir de modèles théoriques assez simples pour mettre en évidence les relations physiques importantes dans des problèmes autrement trop compliqués.

Les principales limitations de la théorie linéaire sont surtout dans les fluides stratifiés avec des grands déplacements des particules fluides sur la verticale et l'horizontale, comme ceux générés par le vent ou par d'autres forçages dans une étroite bande côtière. Les effets de ces déplacements ne sont pas seulement inclus dans les termes de transport de la quantité de mouvement mais aussi dans les variations de premier ordre de la distribution de la pression provoquées par la distorsion du champs de densité. Comme déjà vu, les particules tendent à conserver leur température ou salinité pour des périodes d'environ un jour, alors un déplacement vertical rapide donne une surélévation similaire a un changement rapide de la hauteur dynamique η_d (1.12). Étant données que ces surélévations se produisent dans une bande côtière étroite, cela va créer des gradients de pression importants. Toutefois la théorie linéaire qui assume des petits déplacements sur la verticale, peut être encore utile pour comprendre seulement la phase initiale de ces mouvements.

2.8 Les équations en eaux peu profondes

Considérons maintenant un fluide avec une densité homogène constante et fixons la hauteur dynamique η_d=0 dans le calcul des gradients de pression. La théorie linéaire avec quelques simplification supplémentaire peut avoir une application immédiate pour les eaux côtières. En plus le comportement d'une mer stratifiée, peut être étudié comme la somme du comportement lié à un fluide homogène et celui lié à la stratification. Ou bien dans certaines circonstances la dynamique d'un fluide stratifié peut être décrite par un ensemble d'équations égal à celui qui gouverne un fluide stratifié.

En abandonnant la notation avec suffixes et en utilisant les coordonnées (x,y,z) et les composantes de la vitesse (u,v,w), les équations linéarisées de la quantité de mouvement pour un fluide homogène deviennent :

$$\frac{\partial u}{\partial t}-f\,v=-g\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}A_z\frac{\partial u}{\partial z}$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}+f\,u=-g\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}A_z\frac{\partial v}{\partial z}$$

(1.32)

Au bilan de la quantité de mouvement il faut ajouter l'équation de continuité et les relations cinématiques qui définissent la surface libre et le fond :

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial w}{\partial z}$$
$$w=\frac{\partial\eta}{\partial t},\qquad (z=0)$$
$$-w=u\frac{dH}{dx}+v\frac{dH}{dy},\qquad (z=-H)$$

(1.32a)

avec *H(x,y)* profondeur totale de la colonne d'eau en *(x,y)* .
Les conditions à la surface et sur le fond sont

$$F_x=A_z\frac{\partial u}{\partial z},\qquad F_y=A_z\frac{\partial v}{\partial z},\qquad (z=0)$$
$$B_x=A_z\frac{\partial u}{\partial z},\qquad B_y=A_z\frac{\partial v}{\partial z},\qquad (z=-H)$$

(1.33)

Tandis que les termes de frottement du vent (*Fx,Fy*) représente un des forçages extérieurs, les termes de frottement au fond peuvent être écrits avec la loi quadratique

$$B_x=C_d\,u\,(u^2+v^2)^{1/2},\qquad B_y=C_d\,v\,(u^2+v^2)^{1/2}\qquad (z=-H)$$

Les vitesses à $z = -H$ sont physiquement les vitesses au-dessus de la couche de fond, mais souvent dans les calculs sont considérées comme les vitesses extrapolées avec viscosité turbulente constante à l'intérieur du fluide et le coefficient de traînée doit être adapté à cette vitesse.
L'ensemble des équations précédentes peut décrire assez bien la dynamique d'un fluide dans l'océan côtier bien mélangé et est connue comme équations en eaux peu profondes, (e.p.p.), ou *shallow water équations*, ou encore équations de Saint-Venant.

Problème local et problème global

Quand on applique les équations ci-dessus, le problème de prévoir la réponse d'un océan côtier soumis à un certain forçage peut être opportunément séparé en problème local et global.
Une fois qu'une approximation appropriée a été choisie pour A_z, les équations (1.32) et (1.33) peuvent être résolues pour *u(z), v(z)* avec les gradients de surélévation η qui seront utilisés comme *input* extérieurs (forçage). La distribution de la vitesse viens alors d'un calcul « local » en chaque *(x.y)* pour un gradient de pression donné.
Il reste en suite à calculer la distribution de la pression, ou bien de la surélévation, à l'échelle du bassin, i.e. « globalement » . Cela peut être fait d'une façon appropriée avec les équation intégrées sur la verticale ou équations du transport. L'intégration sur la verticale implique qu'on définisse à partir des composantes de la vitesse les transports horizontaux

$$U=\int_{-H}^{0}u\,dz,\qquad V=\int_{-H}^{0}v\,dz$$

(1.34)

on obtient

$$\frac{\partial U}{\partial t} - f\,V = -gH\frac{\partial \eta}{\partial x} + F_x - B_x$$
$$\frac{\partial V}{\partial t} + f\,U = -gH\frac{\partial \eta}{\partial y} + F_y - B_y$$
$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial t}$$

(1.35)

Dans les équations (1.34) et (1.35) le petites variations de la surélévation $\eta(x.y)$ ont été négligées par rapport à la profondeur $H(x,y)$. Le frottement à la surface (F_x,F_y) est pris comme un input externe. Le frottement au fond peut être calculé à partir des vitesses issues de la solution du problème local.
Les équations ci-dessus, dites équations du transport, constituent un ensemble fermé de trois équations pour les trois inconnues U, V, η et la solution est dite globale.
En générale la solution du problème global est difficile, mais on peut pour simplifier négliger le frottement au fond ou bien l'exprimer en terme de transport

$$B_x = C_d U\,(U^2+V^2)^{1/2}, \qquad B_y = C_d V\,(U^2+V^2)^{1/2}$$

en obtenant des solutions pour un bon nombre de problèmes intéressants.
Pour résoudre les équations du transport il est nécessaire de définir des conditions à la côte et aux frontières ouvertes. À la côte on peut imposer que le transport normal est nul (condition dite « *coastal constraint* ») tandis qu'aux frontières ouvertes le transport normal et la surélévation sont continus.
Malheureusement pas mal de problèmes surgissent quand une frontière ouverte est située entre l'océan côtier et l'océan profond et une solution simultanée des deux régions n'est pas toujours possible.

2.9 Modèles simples

Dans l'évolution de la compréhension des mouvements atmosphériques et océaniques une poignée de modèles de base ont joué un rôle important et ils peuvent aider à mieux comprendre le comportement complexe de l'océan côtier. Ci-dessous on étudie trois modèles élémentaires basés sur les équations en eaux peux profondes et qui illustrent des solutions pour le problème locale et global.

Bilan géostrophique
Si on considère le cas dans lequel i) le frottement dû au vent et celui au fond soient négligeables, ii) le fluide homogène et iii) le mouvement stationnaire, toutes les dérivées dans les équations du transport disparaissent. Ce cas est clairement peu réaliste, mais on peut penser à un courant d'abord généré par une quelque raison, en suite s'affaiblit très lentement.
Sans perdre de généralité, l'axe y peut être aligné dans la direction du transport, ainsi $U = 0$.
Alors les équations du transport deviennent :

$$-f\,V = -gH\frac{\partial \eta}{\partial x}$$
$$0 = -gH\frac{\partial \eta}{\partial y}$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

(1.42)

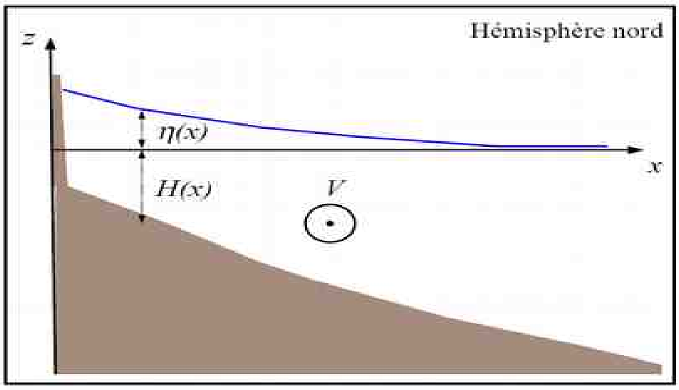
La première et la troisième équations sont adéquates seulement si $\partial(H/f)/\partial y = 0$, donc si l'on considère un transport le long des isobathes tandis que la surélévation varie en direction perpendiculaire à la côte.
Le bilan des forces n'est pas triviale que dans la direction perpendiculaire à la côte, où la force de Coriolis est compensée par le gradient de pression.

Avec surélévation nulle et sans frottement au fond, la solution du problème local est simplement

$$v = \frac{V}{H} = \frac{g}{f}\frac{\partial \eta}{\partial x} \qquad \forall\, z \text{ et } y$$

avec g ~= 10 m s^{-2}, $f = 10^{-4}$ s^{-1} on a qu'un gradient de 10^{-5} (1 cm sur 1 km) donne une vitesse géostrophique de 1 m s^{-1}.

Ce type d'écoulement satisfait la condition « *coastal constraint* » pour chaque x et il est donc valable avec un ligne de côte parallèle à l'axe y . Il peut être considéré comme un écoulement côtier élémentaire.



Oscillations d'inertie

Si on considère un écoulement assez loin des côtes on peut considérer que, n'ayant pas de contraintes à la côte la surélévation reste nulle, $\eta = 0$ partout dans le modèle. En faisant l'hypothèse que le frottement au fond et du vent soient négligeables et que le mouvement aie été généré par une quelque action précédente. Alors les équations du transport deviennent

$$\begin{aligned} &\frac{\partial U}{\partial t} - f\,V = 0 \\ &\frac{\partial V}{\partial t} + f\,U = 0 \\ &\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \end{aligned} \tag{1.44}$$

Ce système, qui représente un bilan entre l'accélération locale et la force de Coriolis, a pour solution

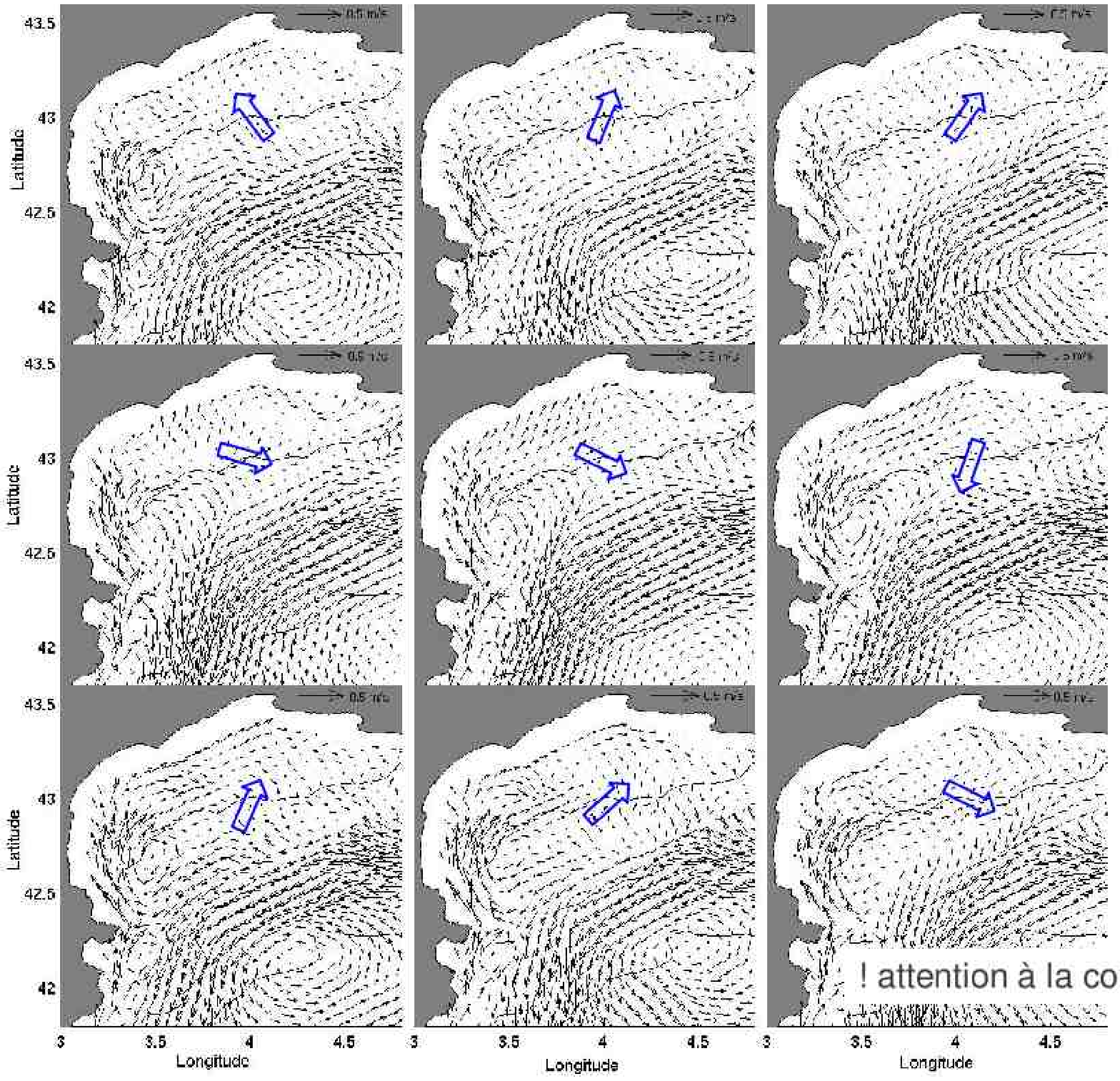
$$U = U_o \cos f\,t \qquad V = -U_o \sin f\,t$$

où $U_o = const$ et on choisit de positionner les axes d'une façon opportune ainsi $V = 0$ pour $t = 0$. Les vitesses internes sont simplement

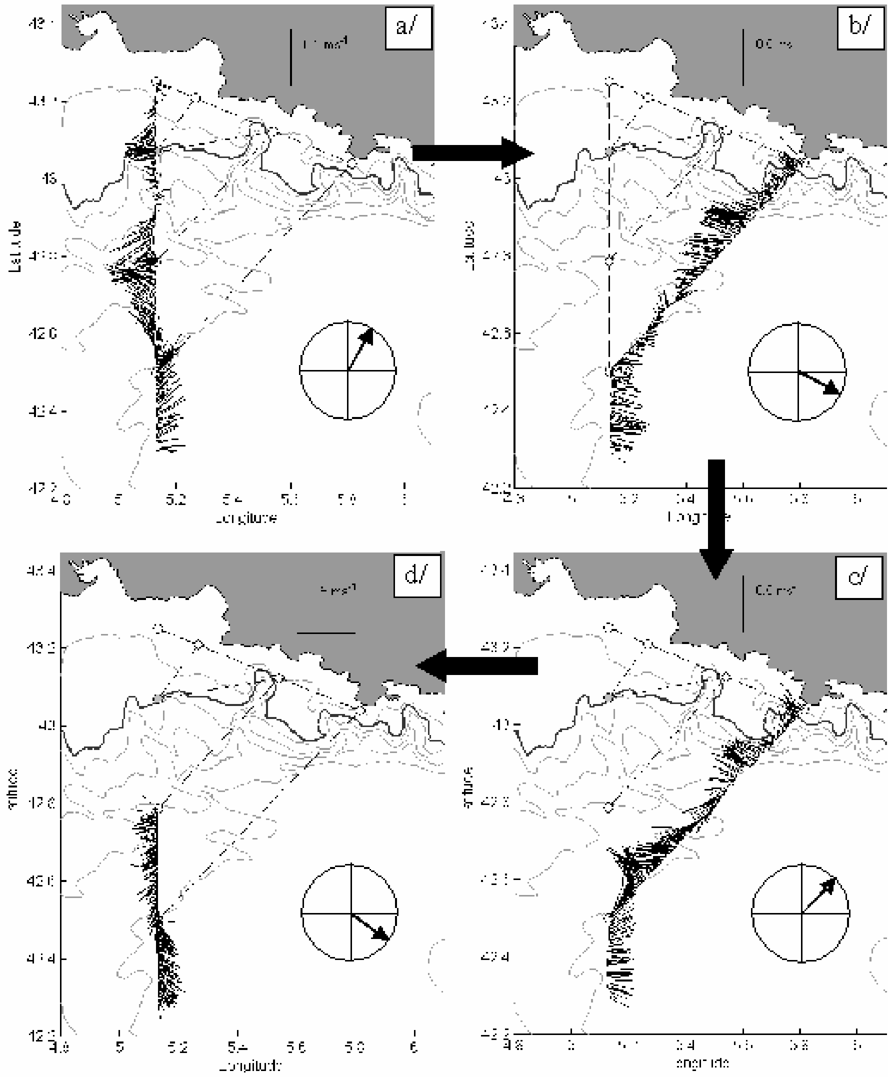
$$\begin{aligned} u &= \frac{U}{H} = u_o \cos f\,t\,, \\ v &= \frac{V}{H} = -u_o \sin ft \end{aligned}$$

Le mouvement est périodique avec une période $T = 2\pi/f$ qui est typiquement de 17 h aux moyennes latitudes. L'entière masse d'eau oscille en phase et les particules parcourent des trajectoires circulaires avec un rayon de u_o/f . Alors pour un $u_o = 1\ m\ s^{-1}$, vu que $f = 10^{-4}\ s^{-1}$ on obtient un rayon de 10 km.

Ce type de mouvement, dit oscillations d'inertie, n'est pas consistent avec la présence de la côte et apparemment il semble pas réaliste pour l'océan côtier, mais le bilan des forces représenté par le système (1.44) est observé souvent dans des zones caractérisées par la présence de forts coups de vent tel que le Golf du Lion .



Simulation de la circulation dans le Golfe du Lion pendant la campagne Moogli-2 (Juin 1998) effectuée avec le modèle Symphonie. Le flèches représentent l'évolution temporelle de la vitesse à 32 m de profondeur toutes les 3 heures. Au centre du golfe on peut observer une oscillation d'inertie. (C. Dufau et A. Petrenko)



Courants mesurés par l'ADCP de coque à 16 m dans l'ordre chronologique (indiqué par les flèches pleines noires) sur les trajets a/ 1-66b, b/ 66-6a et 6-7a, c/ 7-6a et 6-66a, d/ 66-4a. L'orientation des courants à la station 6 est représentée sur le cercle trigonométrique en bas à droite de chaque figure.

Station 6	Date et heure	Direction des courants	$\Delta t = t_i - t_{i-1}$ en heure	$\Delta\theta_{obs} = \theta_i - \theta_{i-1}$ en degré	$\Delta\theta_{calc} = \theta_i - \theta_{i-1}$ en degré
sur 1-66b	13 juin à 20h13	35°	XXXXXX	XXXXXX	XXXXXXX
sur 66-6a / 6-7a	14 juin à 00h47	124°	4,57h	89°	94°
sur 7-6a / 6-66a	14 juin 15h15	49°	14,47h	285°	298°
sur 66-4a	14 juin 18h59	128°	3,73h	79°	77°

Tableau III.XX : pour chaque trajet de la campagne GOLTS juin 2002, au passage à la station 6, le tableau donne : la date du passage, la direction des courants mesurés, le laps de temps écoulé et la différence d'orientation des courants mesurés entre deux passages et la rotation que doit effectuer une oscillation d'inertie pendant le laps de temps mesuré.

(figure et tableau fournies par J.Gatti) .

Dérive d'Ekman

En considérant encore un écoulement loin des frontières, on suppose $h = 0$ partout. Si on considère que le mouvement soit forcé par un frottement du vent *rF* en direction de l'axe *y* et on fait l'hypothèse d'un écoulement stationnaire. On suppose aussi que la masse d'eau est assez profonde pour que le frottement au fond soit négligeable (on reverra cet hypothèse *a posteriori*).
Les équation du transport (1.35) deviennent

$$-fV=0$$
$$+fU=F_y$$
$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=0$$

qui sont satisfaites par la solution

$$U=\frac{F_y}{f}$$
$$V=0$$

On a donc un transport sur la droite (dans l'hémisphère Nord, où f est positive) avec une intensité de F/f . Pour des valeurs typiques de $F = 10^{-4}$ m^2 s^{-2}, $f = 10^{-4}$ s^{-1} on obtient $U = 1$ m^2 s^{-1} (équivalent à une vitesse du courant de 0.1 m s^{-1} sur une profondeur de 10 m). Ce transport est connu comme transport d'Ekman et le mouvement qui entame ce transport est dit dérive d'Ekman.
La solution du problème local dans ce cas n'est pas triviale. Si on utilise pour la viscosité turbulente l'équation (1.27) et on considère un K constant au dessous d'une couche de surface d'épaisseur négligeable.
Les gradients horizontaux sont nuls par hypothèse et les équation (1.32) deviennent

$$-fv=A_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$
$$fu=A_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

avec comme conditions aux frontières

$$A_z\frac{du}{\partial z}=0 \quad , \qquad A_z\frac{dv}{\partial z}=F_y \quad , \qquad (z=0)$$
$$\frac{du}{dt}=\frac{dv}{dt}=0 \quad , \qquad (z\Rightarrow-\infty)$$

L'échelle spatiale est la profondeur d'Ekman

$$D=\sqrt{\frac{2A_z}{f}} \tag{1.50}$$

et la solution peut s'écrire

$$u=\frac{F_y}{fD}e^{z/D}\left(\cos\frac{z}{D}-\sin\frac{z}{D}\right)$$
$$v=\frac{F_y}{fD}e^{z/D}\left(\cos\frac{z}{D}+\sin\frac{z}{D}\right) \tag{1.51}$$

À un profondeur -z >> D vitesse et tensions turbulentes disparaissent, ainsi il est raisonnable de

considérer négligeable le frottement au fond pour des eaux assez profondes.
On a déjà vu empiriquement que pour une couche d'Ekman turbulente la profondeur d'Ekman est

$$D \approx 0.1 \frac{u_*}{f} \tag{1.52}$$

alors pour la (1.50) on a

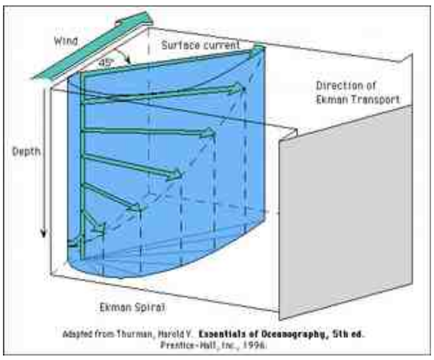
$$K = \frac{u_*^2}{200\, f} = \frac{u_* D}{20}$$

qui a la même forme de la (1.28) et nous dit que pour une couche d'Ekman homogène le nombre de Reynolds turbulent est environ 20.
L'équation (1.52) montre en plus que le facteur *u*/fD* qui est dans l'équation (1.51) vaut au peu prés 10. Alors les composantes de la vitesse à $z=0$, i.e. jusqu'au dessous de la couche limite de surface, sont $u = v = 10\, u^*$ et ici la direction de la vitesse est à 45 dégrées par rapport au vent .
Les propriétés de la couche de surface ne sont pas bien connues, mais on peut prendre un profil logarithmique

$$\frac{v_s - v}{u_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{|z|}{r} + 8.5$$

où k est la constante de Von Karman ($\approx$ 0.4) et r la rugosité équivalente en grain de sable de la surface. Cette dernière peu devenir très large (de l'ordre du mètre pour un vent modéré) ainsi la contribution du terme logarithmique pour une profondeur -z = 1 m devient négligeable. La variation de vitesse importante à travers la couche de surface est alors environ $8.5u^*$ entre la surface libre et la limite inférieure de la couche que se situe à $z = -r$.

La distribution des vitesses dans une couche d'Ekman turbulente avec la couche limite de surface est représentée sous forme de hodographe.
La vitesse de surface est environ de 45 dégrées sur la droite du vent et a une intensité de quelque 20u*, ce qui constitue selon l'équation (1.23) environ 3% de la vitesse du vent.
Pour une valeur typique de $u^* = 0.01$ m s^{-1} qui correspond à une vitesse du vent $W = 7$ m s^{-1} et de $f = 10\text{-}4$ s-1 la profondeur d'Ekman D est 10 m.
La vitesse du courant devient négligeable à une profondeur d'environ $z = -3D$ ou bien 30 m. Souvent la colonne d'eau est suffisamment homogène pour que cette profondeur soit réaliste.
Au contraire il faut se rappeler que dans ce modèle la côte est supposée être absente. En effet la distribution de vitesse montrée en figure est incompatible avec un profil de côte de n'importe quelle direction, vu que l'écoulement aurait toujours une composante normale à elle pour toutes les profondeurs. Toutefois il est aussi possible d'insérer une fine couche latérale pour régler le problème.



www-pord.ucsd.edu/~ltalley/sio210/Wind_forcing/

3. Ondes dans l'océan côtier

Dans ce chapitre sont montrées plusieurs solutions analytiques ondulatoires des équations du transport

$$\frac{\partial U}{\partial t} - f\,V = -gh\frac{\partial \eta}{\partial x} + F_x - B_x$$
$$\frac{\partial V}{\partial t} + f\,U = -gh\frac{\partial \eta}{\partial y} + F_y - B_y$$
$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial t}$$

Ce système est fermé avec trois équations pour trois inconnues

À partir de ces équations on peut trouver plusieurs solutions ondulatoires analytiques, correspondantes à plusieurs classes d'ondes qui peuvent se propager dans l'océan .
En général, ces ondes sont engendrées par des perturbations des forçages océaniques . Quand ces dernières disparaissent, la distorsion qu'elles ont engendrée ne disparaît pas forcement et peut se propager dans l'océan comme une onde libre .

Une première classe d'ondes est constituée par les ondes de gravité longues .

3.1 Les ondes de gravité longues

Les équations linéarisées pour des ondes se propageant dans un océan de profondeur constante sans frottement ($\vec{B}=0$) se déduisent des équations en eaux peu profondes en posant:

$$h = constant$$
$$\vec{F} = 0$$

En plus, pour étudier d'abord un cas simplifié, on suppose aussi que

- le domaine est non tournant, i.e. $f = 0$;

- le mouvement ne dépende que de *x*, i.e. en est dans un cas unidimensionnel.

On a alors à résoudre :

(B.1.a) $$\frac{\partial U}{\partial t} = -gh\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

(B.1.b) $$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

On différencie la première équation par rapport à *x* et la seconde équation par rapport à *t* et en soustrayant les deux équations résultantes, on obtient :

(B.2) $$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - g h \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0$$

Cette équation est une équation classique des ondes dont la solution est une onde progressive

$$\eta = \eta(x - c t)$$

qui se propage avec vitesse $c = \sqrt{g h}$

Donc, la surélévation η se propage sans se déformer avec la célérité c .

Ondes progressives

De façon à mieux comprendre le comportement de ces ondes, étudions le cas d'ondes périodiques.
Soit la surélévation, fonction périodique du temps et de l'espace, de la forme :

$$\eta \equiv \eta_o \cos(k x - \omega t)$$

où

η_o amplitude

k nombre d'onde avec par definition $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ longuer d'onde

ω pulsation avec par definition $\omega = \frac{2\pi}{T}$, T période d'onde

En posant cette expression de η dans la (B.2) on obtient la condition

$$\omega^2 - g h k^2 = 0$$

Cette relation montre une interdépendance entre ω et k et s'identifie à une relation de dispersion .

En mettant l'équation de η dans la (B.1.a) on obtient :

$$U = U_o \cos(k x - \omega t)$$

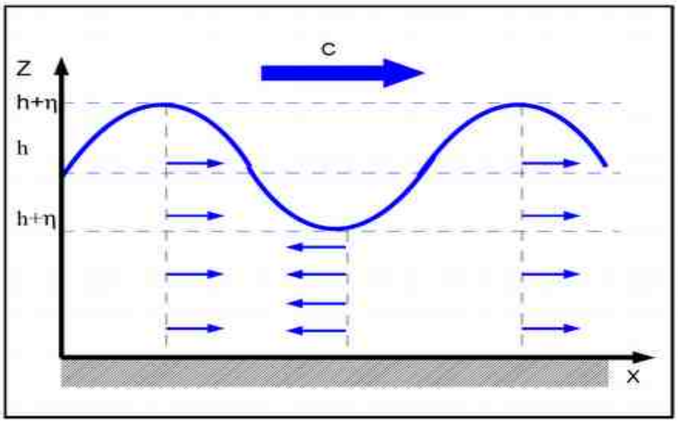
où

$$U_o = gh \frac{k}{\omega} \eta_o = \sqrt{g h}\, \eta_o = c\, \eta_o$$

on voit que η et U sont en phase . Il y a coïncidence entre le maximum de la surélévation et le maximum de transport :

$$U = c \eta \quad \text{et} \quad u = \frac{U}{h} = \frac{c}{h} \eta = \sqrt{\frac{g}{h}} \eta$$

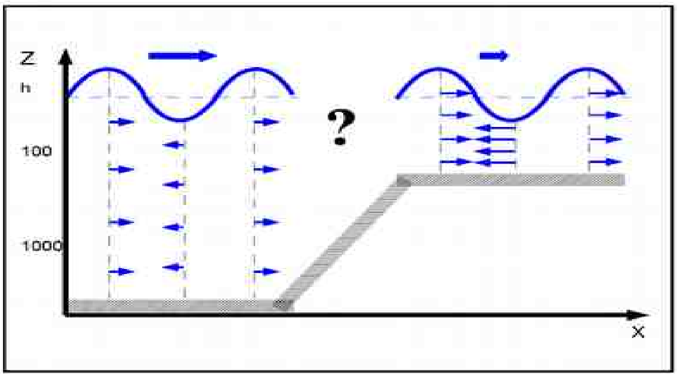
On a donc une onde progressive . C'est le cas par exemple de la propagation de la marée dans la Manche.



EXERCICE : On peut aussi utiliser la même approche que celle pour obtenir l 'équation (B.2), mais cette fois il faut différencier la (B.1.a) par rapport à *t* et la (B.1.b) par rapport à ??? et aussi multiplier par ???

EXERCICE : Ce type d'onde est plus rapide au large ou à la côte ? Qu'est-ce qu'il arrive au valeur du transport *U* quand une onde de ce type s'approche à la côte ? Et à la vitesse *u* ?

SOLUTION :



h = 1000 m

$$\eta \equiv \eta_o \cos(kx - \omega t)$$

$$U = \sqrt{gh}\,\eta = 10^2\,\eta$$

$$u = \sqrt{\frac{g}{h}}\,\eta = 10^{-1}\,\eta$$

du large à la côte :

l'onde décélère
le transport diminue
la vitesse augmente

h = 100 m

$$\eta \equiv \eta_o \cos(kx - \omega t)$$

$$U = \sqrt{gh}\,\eta \simeq 32\,\eta$$

$$u = \sqrt{\frac{g}{h}}\,\eta \simeq 0.3\,\eta$$

NB: dimensions et unités de mesure de variables

$$\eta \;\Rightarrow\; [L] \;\Rightarrow\; [m]$$

$$U \;\Rightarrow\; \sqrt{\frac{[L]}{[T^2]}[L]}\;[L] \;\Rightarrow\; [m^2 s^{-1}]$$

$$u \;\Rightarrow\; \sqrt{\frac{[L]}{[T^2]}\frac{1}{[L]}}\;[L] \;\Rightarrow\; [m\,s^{-1}]$$

Ondes stationnaires

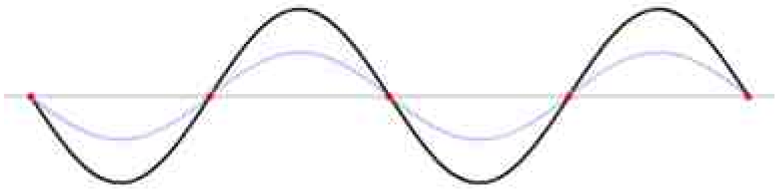
Cherchons maintenant des solutions sous forme d'ondes stationnaires, i.e. de la forme

(B.3) $$\eta=\eta_o \cos(\omega t)\cos(k x)$$

ces mouvements stationnaires peuvent être analysée comme la superposition de deux ondes progressives de même amplitude se propageant en sens contraire.

$$\eta_1=\frac{\eta_o}{2}\cos(k x+\omega t)$$
$$\eta_2=\frac{\eta_o}{2}\cos(k x-\omega t)$$
$$\eta=\eta_1+\eta_2=\frac{\eta_o}{2}[2\cos(k x)\cos(\omega t)]$$

ANIMATION: Onde stationnaire comme superposition de deux ondes progressives



http://fr.wikipedia.org/wiki/Onde_stationnaire

NB: pour réviser les formules trigonométriques d'addition et de différence
http://fr.wikipedia.org/wiki/Identité_trigonométrique

En portant (B.3) dans (B.1.a) on obtient:

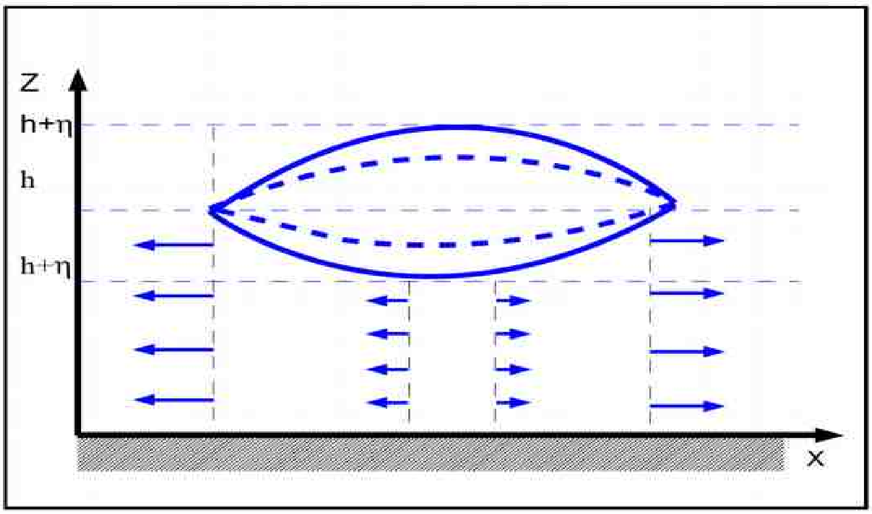
(B.4) $$U=g h \eta_o \frac{k}{\omega}\sin(\omega t)\sin(k x)$$

Analyse dans l'espace

La vitesse *u* a par rapport à la surélévation un déphasage de $\frac{\pi}{4}$ => *quadrature*

Les courants sont maximaux là où les amplitudes de niveau sont nulles => *nœuds*
et ils sont nuls là où les amplitudes de niveau sont maximales => *ventres*

$$\text{noeuds: } \eta=0 \quad \forall t \quad \text{si} \quad \cos(kx)=0 \Rightarrow kx=\frac{\pi}{2},3\frac{\pi}{2},5\frac{\pi}{2},...=(2n+1)\frac{\pi}{2} \quad \text{avec} \quad n=0,1,2,3...$$
$$\text{ventres: } U=0 \quad \forall t \quad \text{si} \quad \sin(kx)=0 \Rightarrow kx=0,\pi,2\pi,3\pi,...=n\pi \quad \text{avec} \quad n=0,1,2,3...$$



Les ondes stationnaires peuvent bien schématiser les oscillations de bassins fermés (seiches), puisque on peut en certaines points réaliser la condition de vitesse nulle quelque soit le temps, ces points sont les ventres.

EXERCICE : calculer la distance entre 2 nœuds consécutifs en terme de longueur d'onde

$$\eta=0\,\forall t \;\Rightarrow\; \cos(kx)=0 \;\Rightarrow\; kx=\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi,\ldots \quad kx=(2n+1)\frac{\pi}{2},n\in\mathbb{Z}$$

$$x_n=(2\mathrm{n}+1)\frac{\pi}{2}\frac{1}{k} \;\Rightarrow\; \text{vu que } k=\frac{2\pi}{\lambda} \text{ par définition} \;\Rightarrow\; x_n=(2\mathrm{n}+1)\frac{\lambda}{4}$$

$$x_1=\frac{3}{4}\lambda \quad x_2=\frac{5}{4}\lambda \quad x_2-x_1=\frac{\lambda}{2}$$

deux nœuds consécutifs sont distants d'une demi longueur d'onde

EXERCICE : calculer la distance entre 2 ventres consécutifs en terme de longueur d'onde

$$U=0\,\forall t \;\Rightarrow\; \sin(kx)=0 \;\Rightarrow\; kx=n\pi,n\in\mathbb{Z}$$

$$x_n=\frac{n\pi}{k} \;\Rightarrow\; \text{vu que } k=\frac{2\pi}{\lambda} \text{ par définition} \;\Rightarrow\; x_n=\frac{n}{2}\lambda$$

$$x_1=\frac{1}{2}\lambda \quad x_2=\lambda \quad x_2-x_1=\frac{\lambda}{2}$$

deux ventres consécutifs sont distants d'une demi longueur d'onde

EXERCICE : calculer la distance entre 1 nœud et 1 ventre consécutifs en terme de longueur d'onde

$$\eta=0 \quad \forall t \;\Rightarrow\; \cos(kx_{nd})=0 \quad kx_{nd}=\frac{\pi}{2}$$

$$\eta=max \;\; \forall t \;\Rightarrow\; \cos(kx_{vt})=1 \quad kx_{vt}=\pi$$

$$x_{nd}=\frac{\pi}{2k}=\frac{\lambda}{2} \quad x_{vt}=\frac{\pi}{k}=\frac{\lambda}{4} \quad x_{nd}-x_{vt}=\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda}{4}=\frac{\lambda}{4}$$

un ventre et un nœud consécutifs sont distants d'un quart de longueur d'onde

Analyse dans le temps

EXERCICE : trouver les instants t auxquels la surélévation est nulle pour chaque valeur de x

$$\forall x \quad \exists t \quad t.q.\, \eta=0 \;\Rightarrow\; \cos(\sigma t x_{nd})=0 \;\Rightarrow\; \sigma t=(2n+1)\frac{\pi}{2} \quad n\in\mathbb{Z}$$

$$t_n=(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sigma} \;\Rightarrow\; \text{vu que} \;\; \sigma=\frac{2\pi}{T} \;\; \text{par définition} \;\Rightarrow\; t_n=(2n+1)\frac{T}{4}$$

$$t_2-t_1=\frac{T}{2}$$

toutes les demi-périodes la surélévation est nulle partout

NB: À ces instants toute l'énergie de l'onde est sous forme d'énergie cinétique! En effet

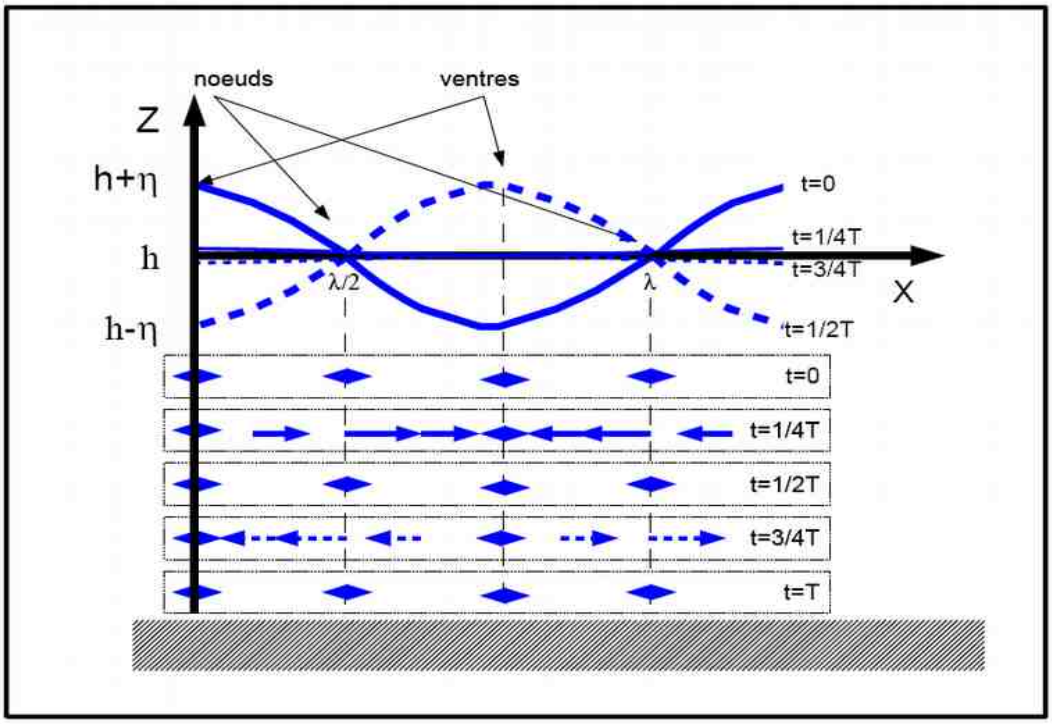
$$U(x,t_n)=max$$

EXERCICE : trouver les instants auxquels toute l'énergie de l'onde est sous forme de énergie potentielle en terme de pulsation et de période.

$$\eta=max \quad \Rightarrow \; \cos(\sigma t)=1 \quad \sigma t=n\pi \quad n\in\mathbb{Z}$$

$$t_n=\frac{n\pi}{\sigma} \;\Rightarrow\; \text{vu que} \;\; \sigma=\frac{2\pi}{T} \;\; \text{par définition} \;\Rightarrow\; t_n=\frac{n}{2}T$$

Résumé schématique



Longueur d'onde de la marée

La relation entre la longueur d'onde et la célérité est notamment

$$\lambda = c\,T$$

EXERCICE : calculer la longueur d'onde de la marée semi-diurne, dont la période est environ 12h, se propageant en plein océan (*h=4000 m*) ou en proximité de la côte (*h=40m*) .

$$\lambda = \sqrt{g\,H}\,T \qquad \begin{matrix} c_{4000} = \sqrt{4\,10^4} = 200\,m\,s^{-1} = 720\,km\,h^{-1} \\ c_{400} = \sqrt{4\,10^2} = 20\,m\,s^{-1} = 72\,km\,h^{-1} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \lambda_{4000} = 720 \times 12 = 8640\,km \\ \lambda_{400} = 72 \times 12 = 864\,km \end{matrix}$$

Oscillations 1D dans un bassin fermé.

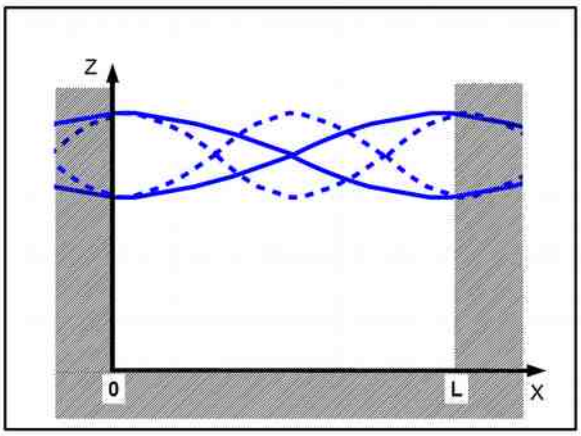
Dans le cas d'un bassin fermé aux deux extrémités on peut réaliser une oscillation avec vitesse nulle au bords, i.e. poser un condition de imperméabilité . Si on considère un bassin de largeur *L*, la condition d'imperméabilité est *U(x=0,t) = U(x=L,t) = 0*, qui implique

$$sen(k\,0) = 0 \quad \text{triviale!}$$

$$sen(k\,L) = 0 \quad \text{si} \quad k\,L = n\pi \;\Rightarrow\; k_n = n\frac{\pi}{L} \quad n \in \mathbb{Z}$$

d'où on déduit que la longueur d'onde générique pour les oscillations qui respectent la condition d'imperméabilité et leur période sont respectivement

$$\lambda_n = \frac{2}{n} L \qquad \text{et} \qquad T_n = \frac{\lambda}{c} = \frac{2L}{n\sqrt{g\,h}}$$



Pour *n=1* on a l'harmonique fondamentale caractérisée par

$$\lambda_1 = 2L \quad \text{et} \quad T_1 = \frac{2L}{\sqrt{g\,h}}$$

Pour *n=2*

$$\lambda_2 = L \quad \text{et} \quad T_2 = \frac{L}{\sqrt{g\,h}}$$

Dans certains cas, lorsque la période du bassin est voisine de cella de la force de marée, il peut y avoir résonance, phénomène qui produit des amplitudes énormes, comme par exemple dans la Baie de Fundy (*http://fr.wikipedia.org/wiki/Baie_de_Fundy*) .
C'est aussi pour cette raison que l'océan Atlantique (L ~= 5000[km]) réagit principalement aux périodes semi-diurnes, tandis que le Pacifique (L ~= 10000[km]) réagit aux périodes diurnes .

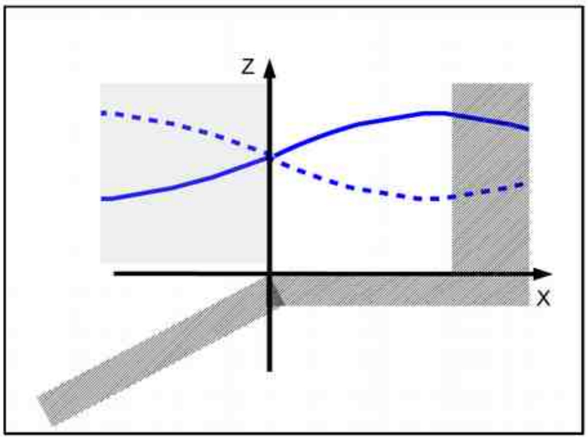
EXERCICE : Vérifier cette dernière affirmation!

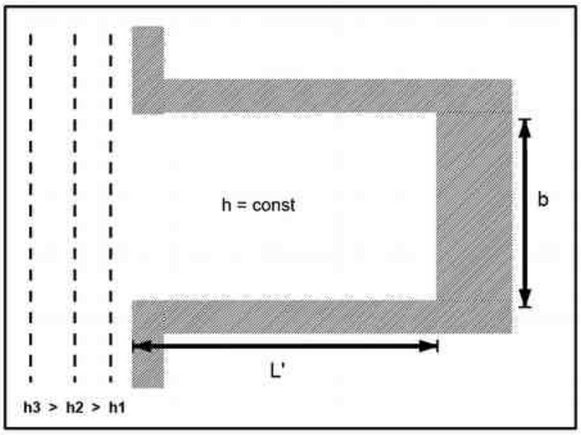
$$T_{Atlantique} = \frac{2L}{\sqrt{g\,h}} = \frac{2\;\;5\times10^6}{\sqrt{10\;\;4\times10^3}} = 5\times10^4 \simeq 43200\text{s} = 12\text{h} \qquad T_{Pacifique} = 10\times10^4 \simeq 86400\text{s} = 24\text{h}$$

EXERCICE : Le mode fondamentale n=1, T=2L/c d'une onde de gravité stationnaire oscille dans un bassin fermé de longueur L et profondeur uniforme h=30 [m]. Avec un marégraphe on mesure sur les bordes du bassin une surélévation d'amplitude 10 [cm]. En sachant que l'accélération de gravité g = 9.8 [m/s] et en utilisant la condition de imperméabilité aux bordes (i.e. U(x=0,t) = U(x=L,t) = 0), calculer la vitesse du courant au centre du bassin.

Oscillation 1D dans une baie semi -fermée

Avec le même approche on peut résoudre le cas d'une baie semi-fermée à fond plat de l'extension *L'=L/2* .





Si *b/L'* est petit (i.e. la baie est étroite et longue) on peut négliger les variation de niveau à l'extérieur de la baie (on considère que l'océan ne varie pas de niveau pour remplir/vider la baie) et insérer un terme correctif $\epsilon\equiv\epsilon(b)$ dans la formule de la période.

$$T_n=\frac{4L'}{n\sqrt{gh}}(1+\epsilon) \quad \text{avec par exemple} \quad \begin{array}{ll} \epsilon=0.4 & \text{si } b/L'\sim 1 \\ \epsilon=0.1 & \text{si } b/L'\sim 0.1 \end{array}$$

Ces valeurs correspondent à une oscillation qui a un noeud situé à l'entrée de la baie où la profondeur commence à diminuer .
Il peut aussi y avoir des cas avec adaptation de la longueur *L'* pour une autre valeur de période excitatrice, par exemple le noeud peut se trouver plus au large .

Les limites du modèle 1D

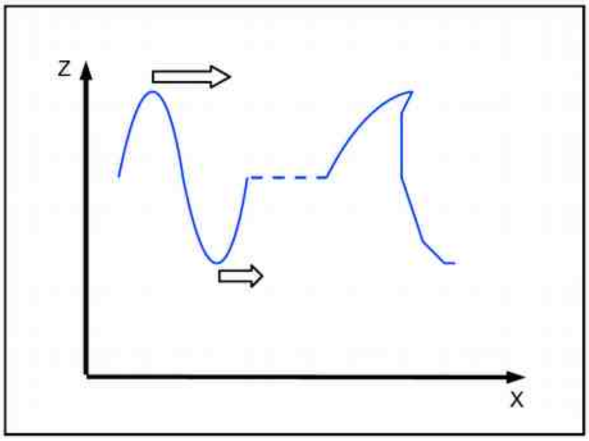
Le modèle 1D est suffisamment explicatif pour un certain nombre de phénomènes.
Par exemple la propagation de la marée dans les estuaires qui peuvent être considéré comme des canaux relativement étroits .

Il marche assez bien aussi pour la marée semi-diurne (*T* = 12 h 35 ') dans la Manche où on a $\lambda \gg h$ vu que $h\simeq 100\,m\,,\lambda=1350\,km$.

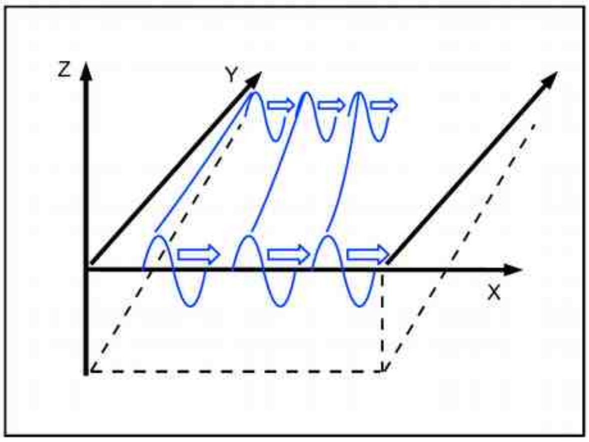
Si la condition $\eta\ll h$ n'est pas vérifiée, on peut ajouter un terme correctif dans la formule de la vitesse $c=\sqrt{gh}(1+\epsilon)$ avec $\epsilon\equiv\epsilon\left(\eta/h\right)$.
Cette correction permet de tenir en compte le fait que les crêtes se déplacent plus rapidement que les creux. En effet $c_{crête}=\sqrt{g(h+\eta)} > c_{creux}=\sqrt{g(h-\eta)}$.

Ce fait crée une dissymétrie entre la montée et la descente des eaux (la durée de la montée est supérieure à celle de la descente) mais aussi d'autres phénomènes tels que le **ressaut** dans les estuaires (une crête rattrape un creux) ou le **mascaret** (quand la bathymétrie n'est pas uniforme, les fronts d'ondes se rejoignent).

Ressaut



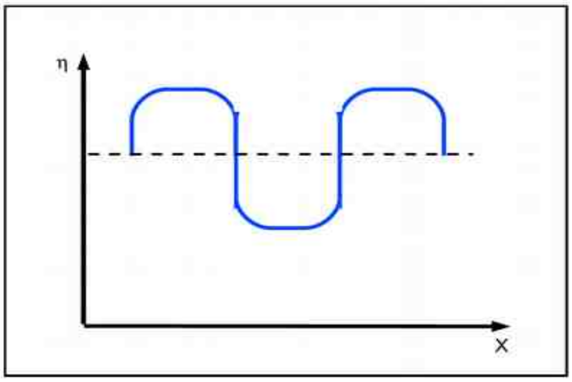
Mascaret



Le mascaret est une brusque surélévation de l'eau d'un fleuve ou d'un estuaire, survenant lors des grandes marées, provoqué par l'onde de la marée montante. C'est une vague, déferlante ou non, remontant le cours d'eau, s'accentuant généralement lorsque son lit se resserre. Parfois utilisée par les surfeurs. En Gironde, il est particulièrement visible sur la Dordogne, un peu avant Libourne, à Vayres.

Vagues déferlantes dès que le lit se resserre
http://archaero.com/mascaret.htm

Enfin, il faut aussi tenir compte des effet non linéaires, avec création d'harmoniques qui vont déformer le signal. Par exemple la « tenue du plein » , un signal presque carrée au Havre.



NB:

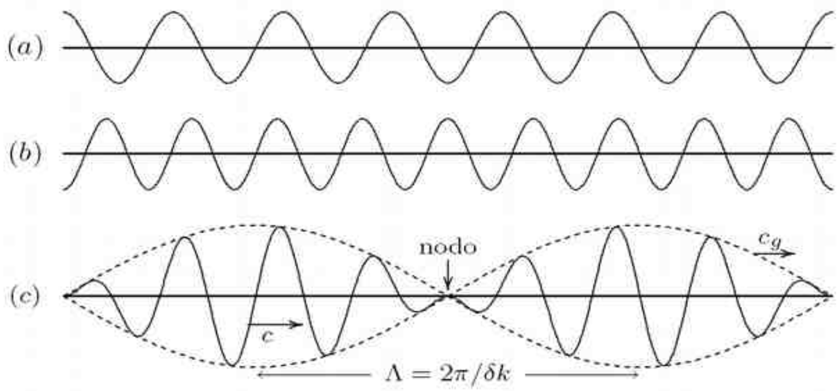
Le terme français « tenue du plein » désigne deux phénomènes qui semblent pouvoir être décrits dans une définition qui le confondrait. Une traduction en anglais implique nécessairement de distinguer deux noeuds sémantiques, conformément au principe d'équivalence :

tenue du plein ; durée significative de l'étale de plein mer ;
***High water stand** ;**stand of tide** ; **stand** : the condition at high tide or low tide when there is no change in the height of the water. It may be called high water stand if it occurs at the time of high tie, and low stand if it occurs at low tide .*

Tenue du plein ; **double pleine mer** : pleine mer comportant deux maximums de la hauteur d'eau à peu près égaux séparés par un minimum relativement peu marqué.
***Double high water** : a high water consisting of two maxima of nearly the same height separated by a relatively small depression .*

NB: Vitesse de phase et vitesse de groupe

Pour mieux comprendre la signification de vitesse de groupe nous considérons un train d'ondes donnée par superposition de deux ondes de fréquences légèrement différentes qui se propagent dans la même direction. La période de l'enveloppe est plus grande quand la fréquence de ces deux composantes est plus proche.



ω_1 et k_1 sont la pulsation et le nombre d'onde de la première onde et ω_2 et k_2 ceux de la seconde. L'onde totale est donnée par

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = \frac{a}{2}\cos(k_1 x - \omega_1 t) + \frac{a}{2}\cos(k_2 x - \omega_2 t).$$

Si on fixe

$$\omega_1 = \omega - \frac{\delta\omega}{2}, \qquad k_1 = k - \frac{\delta k}{2},$$
$$\omega_2 = \omega + \frac{\delta\omega}{2}, \qquad k_2 = k + \frac{\delta k}{2},$$

appliquant les formules trigonométriques on a

$$\eta = a\cos\left[\frac{1}{2}(k_1 - k_2)x - \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t\right]\cos\left[\frac{1}{2}(k_1 + k_2)x - \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t\right] =$$
$$= a\cos\left[\frac{1}{2}\delta k\left(x - \frac{\delta\omega}{\delta k}t\right)\right]\cos(kx - \omega t).$$

L'onde résultante est donc une onde de fréquence angulaire ω modulée en amplitude pas un coefficient qui varie dans l'espace avec périodicité

$$\Lambda = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\delta k/2} = \frac{2\pi}{\delta k},$$

et qui se propage avec vitesse

$$c_g = \frac{\delta\omega}{\delta k} = \frac{d\omega}{dk}.$$

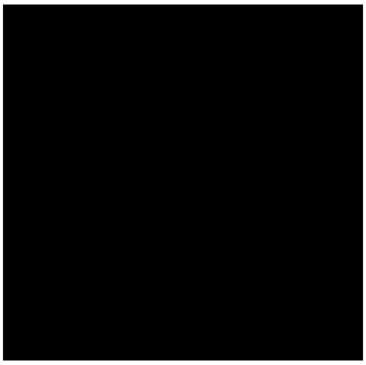
L'enveloppe de l'onde se propage avec la vitesse de groupe; et l'énergie aussi, vu que en correspondance des ligne nodales où la pression dynamique est nulle, il ne peut pas y avoir transmission d'énergie .

En eau de profondeur infinie chaque onde bouge avec sa vitesse de phase, tandis que l'enveloppe bouge avec la vitesse de groupe, ainsi les ondes semblent bouger du nœud postérieur au nœud antérieur. En eaux peu profondes, les deux vitesses sont identiques et alors chaque onde semble bloquée dans son propre enveloppe.

La formule de la vitesse montre que plus est petit δk , plus est grande Λ . Dans le cas le plus générale et réaliste d'un train d'ondes constitué par la superposition de plusieurs ondes monochromatiques de fréquence similaire avec une fréquence moyenne donnée, plus est grande l'extension du paquet d'ondes plus petite la dispersion en fréquence des différentes composantes. Le maximum du paquet d'onde se déplacera avec la vitesse de groupes relative à la vitesse moyenne, tandis que à cause des effets de la dispersion, sa configuration spatiale se modifiera et s'élargira dans le temps.

Traduction depuis *Mattioli, Principi fisici di Oceanografia e Meteorologia, seconda edizione, Università di Bologna* .

Formule d'Euler



3.2 Les effets de la rotation de la terre.

Jusqu'à maintenant on a négligé le rotation terrestre. Toutefois on a vu que pour les ondes de gravité quand la longueur d'onde augmente, la période augmente elle aussi. Il y aura alors certaines longueurs d'onde aux quelles la rotation de la terre ne sera plus négligeable.
En continuant à négliger le frottement, les équations deviennent

$$\frac{\partial u}{\partial t} - f\,v + g\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + f\,u + g\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (h u)}{\partial x} + \frac{\partial (h v)}{\partial y} = 0$$

Dans l'hypothèse de fond constant et de oscillation harmonique, on peut fixer pour toutes les variables une variation temporelle de type $e^{-i\omega t}$, i.e. on fait la transformation

$$u = \tilde{u}\, e^{-i\omega t} \quad , \quad v = \tilde{v}\, e^{-i\omega t} \quad , \quad \eta = \tilde{\eta}\, e^{-i\omega t}$$

Les équations du mouvement deviennent donc

$$-i\omega \tilde{u} - f\,\tilde{v} + g\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x} = 0 \qquad (\mathrm{B.5})$$
$$-i\omega \tilde{v} + f\,\tilde{u} + g\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial y} = 0 \qquad (\mathrm{B.6})$$
$$-i\omega \tilde{\eta} + h\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + h\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0 \qquad (\mathrm{B.7})$$

en multipliant la première par $i\omega$ et la deuxième par $-f$ et en suite en ajoutant les deux équations résultantes, on obtient :

$$(\omega^2 - f^2)\tilde{u} + g\left(i\omega \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x} - f\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial y} \right) = 0$$

En suite, en multipliant la première par $+f$ et la deuxième par $i\omega$ et en suite en ajoutant les deux équations résultantes, on obtient :

$$(\omega^2 - f^2)\tilde{v} + g\left(f\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x} + i\omega \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial y} \right) = 0$$

Enfin, en substituant ces deux expressions pour $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ dans l'équation de continuité on obtient

$$-i\omega\tilde{\eta}-\frac{gh}{\omega^2-f^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(i\omega\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial x}-f\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(f\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial x}+i\omega\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial y}\right)\right]=$$
$$=-i\omega\tilde{\eta}-\frac{gh}{\omega^2-f^2}i\omega\left[\frac{\partial^2\tilde{\eta}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tilde{\eta}}{\partial y^2}\right]-\frac{gh}{\omega^2-f^2}\beta\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial x}=0 \quad \text{où} \quad \beta=\frac{\partial f}{\partial y}$$

En réarrangeant les termes et en se posant sur un plan *f* (i.e. $\beta=0$) on obtient finalement

$$\nabla_H^2\tilde{\eta}+\frac{\omega^2-f^2}{gh}\tilde{\eta} \;=\; 0$$

On a ainsi obtenu une équation pour la seule variable $\tilde{\eta}$.

Les ondes de Poincaré – Sverdrup

On peut obtenir une solution de l'équation ci-dessus en supposant que la variation spatiale de la surélévation soit elle aussi sinusoïdale. Plus précisément on assume que l'onde soit progressive dans la direction *x*, c'est-à-dire

$$\tilde{\eta} = a\, e^{ikx}$$

ou bien que la surélévation ait une variation spatio-temporelle de type

$$\eta = \Re\left\{ a\, e^{i(kx-\omega t)} \right\} = a \cos(kx - \omega t)$$

Si on substitue cette expression dans l'équation pour la seule variable η, on obtient

$$-k^2 + \frac{\omega^2 - f^2}{g h} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = f^2 + k^2 g h$$

qui constitue la relation de dispersion pour les ondes de Poincaré – Sverdrup ou "ondes à crête horizontale" .
La relation de dispersion dit que la pulsation ω de ce type d'ondes doit être toujours inférieur à la période inertielle. Donc, la période continue à augmenter en augmentant la longueur d'onde, comme par les ondes sans rotation terrestre, mais cette fois-ci il y a une limite qu'on peut pas dépasser. Cette limite sont les ondes inertielles, qui sont uniformes dans l'espace et donc peuvent être considérées comme ayant longueur d'onde infinie.

Une façon pour évaluer le poids des effets de la rotation est de calculer le **rayon barotrope de déformation de Rossby**

$$\delta_R = \frac{\sqrt{g h}}{f} \qquad \frac{\text{vitesse des ondes en e.p.p.}}{\text{parmètre de Coriolis}}$$

cette quantité représente l'espace parcouru par une onde de gravité en eaux peu profondes sans rotation dans un intervalle de temps égal à la période inertielle divisée par 2π .
C'est à dire que il représente l'échelle spatiale typique à la quelle les effets dues à la gravité sont comparables aux effets de la rotation.

EXERCICE : les effets de la rotation sont plus fort dans la Mer du Nord (*h* = 40 m) ou dans l'océan Atlantique (*h* = 4000 m)?
Calculer les rayons barotropes de déformation de Rossby pour les deux bassins aux moyennes latitudes ($f = 10^{-4} s^{-1}$) et, en faisant une comparaison, répondre à la question.

$$\delta_R^{Atlantique} = \frac{\sqrt{g h}}{f} = \frac{\sqrt{10 \times 4 \times 10^3}}{10^{-4}} = 2000\, km$$

$$\delta_R^{Mer\, du\, Nord} = \frac{\sqrt{g h}}{f} = \frac{\sqrt{10 \times 4 \times 10}}{10^{-4}} = 200\, km$$

Dans la mer du Nord le rayon est plus petit, donc la rotation plus importante.

La célérité (ou vitesse de phase) est donnée par

$$c^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{f^2}{k^2} + g\,h$$

Si on la compare à la célérité des ondes sans rotation, elle est supérieure d'une quantité qui augmente avec la longueur d'onde . Ces ondes sont dispersives, i.e. la vitesse des ondes dépend de la longueur d'onde et de la période . Dans ce cas particulier les ondes plus longues sont plus rapides que les ondes courtes .

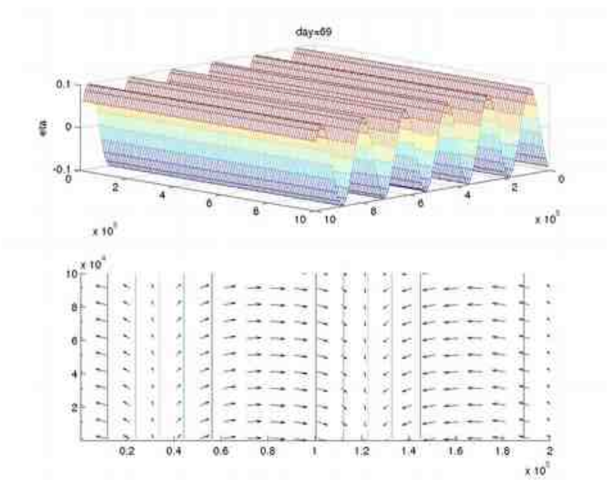
Le fait d'avoir fixé une direction de propagation de l'onde, n'implique pas que la vitesse soit parallèle à cette direction, mais ayant fixé comme direction de propagation l'axe *x*, l'équation (B.6) dit que on a plutôt que les deux composantes sont proportionnelles l'une à l'autre ($i\omega\tilde{v} = f\,\tilde{u}$). Si une composante n'est pas nulle, l'autre non plus.
A partir des équations (B.5) et (B.6) et en utilisant la relation de dispersion, on peut calculer les équations pour les deux composantes de la vitesse

$$\tilde{u} = -\frac{i\omega}{k^2 h}\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial x} = a\frac{\omega}{k\,h}e^{ikx}$$
$$\tilde{v} = -\frac{f}{k^2 h}\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial x} = -a\frac{i\,f}{k\,h}e^{ikx}$$

En multipliant pour $e^{-i\omega t}$ et en considérant seulement la partie réelle on trouve

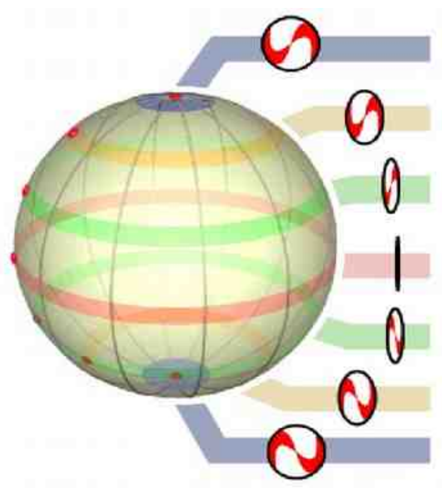
$$u = a\frac{\omega}{k\,h}\cos(k\,x - \omega\,t)$$
$$v = a\frac{f}{k\,h}\sin(k\,x - \omega\,t)$$

qui disent que les particules de fluide parcourent des trajectoires elliptiques avec l'axe en direction de la propagation de grandeur proportionnelle à ω et l'axe perpendiculaire à la direction de propagation de grandeur proportionnelle à *f*.



Champs de surélévation et de vitesse pour une onde de Poincaré-Sverdrup.

(voir scripts Matlab en Annexe)



La sphère de Poincaré montre l'ellipticité et l'orientation d'une onde complètement polarisée sur la surface d'une sphère.
http://cct.rncan.gc.ca/glossary/index_e.php?id=3092

Les ondes de Kelvin

Une autre classe d'ondes est donnée par les ondes de Kelvin qui sont des ondes progressives guidées pas une côte où on suppose que les vitesses restent partout parallèles aux berges. Si on suppose que la côte est représenté par l'axe *x*, on a que la composante *y* de la vitesse est nulle:

$$\tilde{\eta} = a e^{i(kx+ly)} \qquad (B.26)$$
$$\tilde{u} = a_u e^{i(kx+ly)} \qquad (B.27)$$
$$\tilde{v} = 0$$

en substituant dans les (B.5), (B.6) et (B.7) on obtient

$$-i\omega a_u + i k g a = 0 \qquad (B.28)$$
$$+ f a_u + i l g a = 0 \qquad (B.29)$$
$$-i\omega a + i k h a_u = 0 \qquad (B.30)$$

A partir de la dernière équation on peut calculer l'amplitude de la composante *x* de la vitesse

$$a_u = \frac{\omega}{kh} a \qquad (B.31)$$

En substituant ce valeur dans la (B.28), on obtient

$$-i\frac{\omega^2}{kh} + i k g = 0$$

qui est la relation de dispersion des ondes de gravité progressives en eaux peu profondes sans rotation et peut être re-écrite dans la forme

$$k^2 h = \frac{\omega^2}{g}$$

À partir de cette relation on peut obtenir la vitesse de phase des ondes en direction *x*

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gh}$$

qui est évidemment la même que dans le cas sans rotation!
En substituant la (B.31) dans la (B.29) on tire

$$\frac{f\omega}{kh} + i l g = 0,$$

d'où

$$l = -\frac{f\omega}{ikgh} = -\frac{f}{ic}$$

En utilisant les (B.26), (B.27) et (B.31)

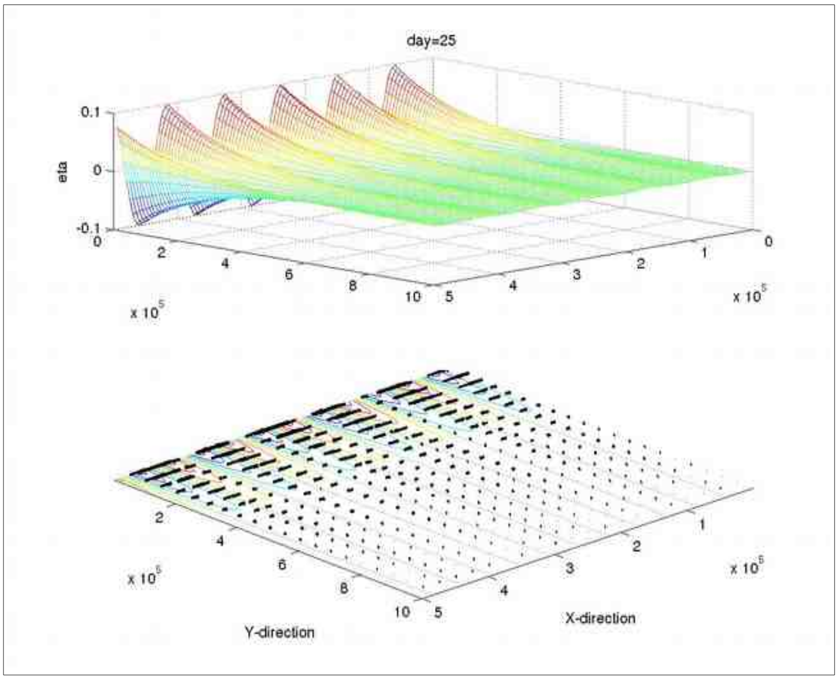
$$\tilde{\eta} = a e^{ikx} e^{ily} = a e^{-fy/c} e^{ikx},$$
$$\tilde{u} = \frac{\omega}{kh} a e^{ikx} e^{ily} = a\frac{c}{h} e^{-fy/c} e^{ikx}$$

qui peuvent êtres récrites explicitement en fonction du temps

$$\eta = a e^{-f y/c} \cos(kx - \omega t),$$
$$u = a \frac{c}{h} e^{-f y/c} \cos(kx - \omega t)$$

Ce type d'onde se propage avec vitesse $c = \sqrt{g h}$ dans une direction (ici direction *x*) et décroît exponentiellement dans l'autre (ici direction *y*), plus précisément à gauche de la direction de propagation dans l'hémisphère nord. Ce fait est du à la force de Coriolis, qui doit être équilibrée par la force de pression.

Évidemment, pour ce type de ondes il faut toujours considérer des domaines limités dans la direction perpendiculaire à la direction de propagation, autrement la surélévation va croire indéfiniment!!! L'astuce plus réaliste est de faire l'hypothèse que à $y = 0$ il y aie une côte. Donc les ondes de Kelvin se propagent le longue de la côte en "s'y appuyant" et elles décroissent exponentiellement vers le large.



Champs de surélévation et de vitesse pour une onde de Kelvin
(voir scripts Matlab en Annexe)

Les points amphydromiques

Le champ d'ondes à l'intérieur d'un canal de longueur infinie peut être représenté par la somme de deux ondes de Kelvin se propageant en direction *x* et en vers opposé

$$\eta = \frac{1}{2} a e^{-f y/c} \cos(k x - \omega t) + \frac{1}{2} a e^{-f y/c} \cos(-k x - \omega t) =$$
$$= \frac{1}{2} a \Re \left\{ e^{-f y/c} e^{i(k x - \omega t)} + e^{-f y/c} e^{i(-k x - \omega t)} \right\} \qquad (B.32)$$

Cette solution ne représente pas une onde stationnaire, parce que l'amplitude des ondes est maximale aux bordes!

Seulement au centre du canal (qui on peut mettre par simplicité à $y = 0$) ce système représente l'onde stationnaire

$$\eta(x,0) \;=\; a \;\; \cos k\,x \;\; \cos \omega t \;\; .$$

Cette onde est nulle dans les points

$$k\,x \;=\; \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\,, \qquad n=0,\pm 1,\ldots$$

qui sont appelés *points amphydromiques* .
En tout cas, pour chaque valeur de *y* le champs est déterminé par la superposition d'ondes sinusoïdales en *x* de la même longueur d'onde. Le champ totale peut donc être subdivisé en cellules similaires séparées les unes des autres par les lignes d'équation

$$k\,x \;=\; n\frac{\pi}{k}\,, \qquad n=0,\pm 1,\ldots$$

Pour des petits valeurs de *x* et *y* l'équation (B.32) peut être développé en série de Taylor :

$$\begin{aligned}
\eta \;&=\; \Re\left\{\frac{1}{2}a\left[\left(1-\frac{f}{c}\,y\right)e^{i\,k\,x}+\left(1+\frac{f}{c}\,y\right)e^{-i\,k\,x}\right]e^{-i\,\omega t}\right\} \;=\\
&=\; \Re\left\{a\left(\cos k\,x - i\frac{f}{c}\,y\sin k\,x\right)(\cos\omega\,t - i\sin\omega\,t)\right\} =\\
&=\; a \;\; \cos k\,x \;\; \cos\omega\,t \;-\; a\frac{f}{c}\,y \;\; \sin k\,x \;\; \sin\omega\,t\,.
\end{aligned}$$

On peut noter que à nouveau on a $\eta=0$ pour $i\,k\,x=\pi/2, y=0$
Si on fait une translation le long de l'axe *x* pour mettre ce point a l'origine des axes, l'équation de la surélévation devient

$$\eta \;=\; a \;\; \sin k\,x \;\; \cos\omega\,t \;+\; a\frac{f}{c}\,y \;\; \cos k\,x \;\; \sin\omega\,t\,.$$

Les lignes de phase constante peuvent être calculées en posant la condition

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} \;=\; a\omega \;\; \sin k\,x \;\; \sin\omega\,t + a\omega\frac{f}{c}\,y \;\; \cos k\,x \;\; \cos\omega\,t \;=\; 0\,,$$

qui fournit

$$y \;=\; \frac{c}{f} \;\; \tan kx \;\; \tan\omega\,t\,.$$

Cette équation représente un système de lignes de phase constante qui tournent en sens cyclonique avec vitesse angulaire ω .
Pour des petits valeurs de *x* et *y* ces lignes sont des lignes droites représentées par l'équation

$$y \;=\; \frac{kc}{f}\,x \;\; \tan\omega\,t\,,$$

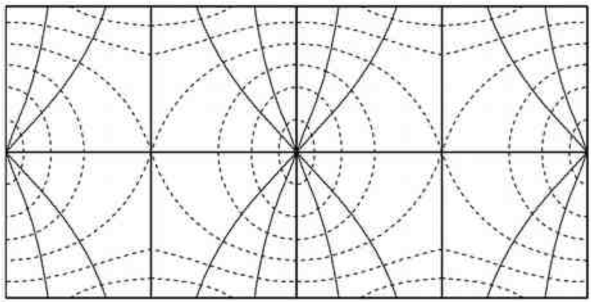
qui toujours tournent avec vitesse constante .
Les lignes de amplitude constante ont équation

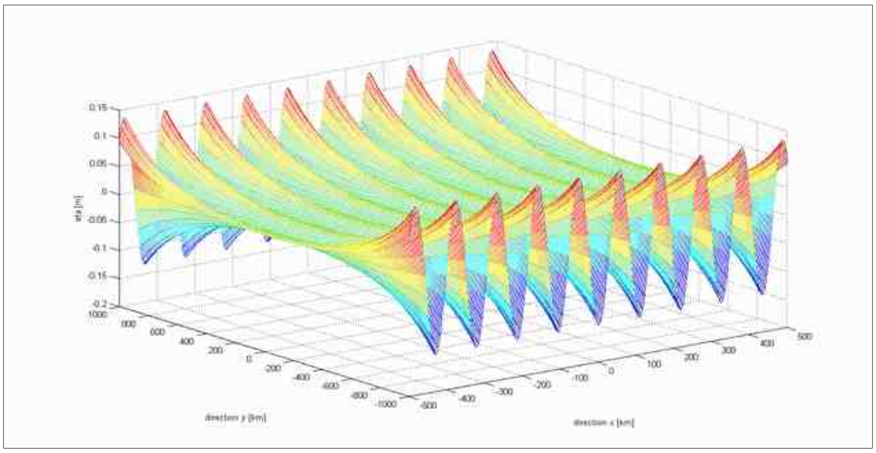
$$\sin^2 k\,x + \frac{f^2}{c^2}\,y^2\cos^2 k\,x \;=\; const$$

qui, pour des petites valeurs de x et y devient l'équation d'une ellipse

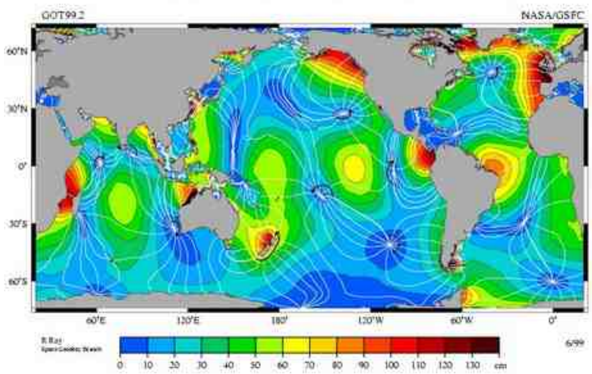
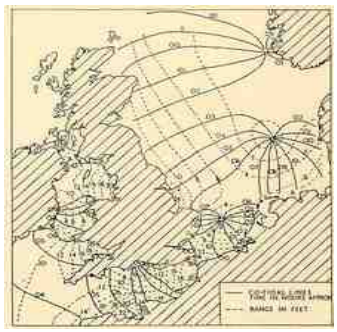
$$k^2 x^2 + \frac{f^2}{c^2} y^2 \ = \ const.$$

La figure ci-contre représente un champ oscillant caractérisé par la présence de points amphydromiques autour de quels tournent les lignes de phase constante (lignes continues) et l'amplitude du mouvement oscillatoire augmente en s'éloignant de ces points (les lignes pointillées représentent les ligne d'amplitude constante).





Champs de surélévation pour deux ondes de Kelvin dans un canal
(voir scripts Matlab en Annexe)

	
Cartes de l'océan globale et de la Mer du Nord mettant en évidence l'amplitude du terme M2 de la marée. Les lignes blanches sont des lignes cotidales qui diffèrent d'une heure l'une de l'autre. Les points amphidromiques sont situés à la jonction de plusieurs lignes cotidales. http://fr.wikipedia.org/wiki/Point_amphidromique	Points amphidromiques et lignes cotidales dans la Mer du Nord et la Manche. http://isis.uwimona.edu.jm/uds/GEOHAZARDS_2001/coastal2001/NorthSeaamphidromKING.jpg

ANNEXE : Scripts Matlab

##
ONDA_SVERDRUP.M
##

```
clear;close all;

xmax=1000;%[km]
ymax=1000;%[km]
x=[1:xmax/100:xmax]*1e+3;
y=[1:ymax/100:ymax]*1e+3;

g=9.8;%[ms^-2]
H=50;%[m]
f=1.03e-4;%[s^-1]

lambda=8*1e+3;
etazero=0.1;

c=sqrt(g*H);
k=xmax/lambda;
sigma=k*c;

[xx,yy] = meshgrid(x,y);
[i,j]=size(xx);
%v=zeros(i,j);
w=zeros(i,j);
zz=zeros(i,j);

figure(1)
it=86400;%[s]
eta=etazero.*cos(k.*xx-sigma*it);
u=etazero*sigma/k/H.*cos(k.*xx-sigma*it);
v=etazero*f/k/H.*sin(k.*xx-sigma*it);

subplot(2,1,1)
mesh(x,y,eta)
view(135,34)
title(['day=',num2str(it/86400)])
zlabel('eta')

r=6;
subplot(2,1,2)
hold on
contour(xx,yy,curl(u,v))
h=quiver(xx(1:r:100,1:r:100),yy(1:r:100,1:r:100),u(1:r:100,1:r:100),v(1:r:100,1:r:100),0.5,'k');
set(h,'LineWidth',2);
axis([1 xmax*1e3 1 ymax*1e3])
view(155,90)
xlabel('X-direction')
ylabel('Y-direction')

disp('click!')
waitforbuttonpress
hl=line([xx(1,1) xx(1,10) xx(10,10) xx(10,1)],[yy(1,1) yy(1,10) yy(10,10) yy(10,1)]);
set(hl,'LineWidth',5,'color','k');

disp('click!')
waitforbuttonpress

figure(2)
contour(xx,yy,curl(u,v))
r=1;
h=quiver(xx(1:r:10,1:r:10),yy(1:r:10,1:r:10),u(1:r:10,1:r:10),v(1:r:10,1:r:10),0.5,'k');

coefv=input('coefv? ')
figure(2)
contour(xx,yy,curl(u,v))
r=1;
h=quiver(xx(1:r:10,1:r:10),yy(1:r:10,1:r:10),u(1:r:10,1:r:10),coefv*v(1:r:10,1:r:10),0.5,'k');


disp('click!')
waitforbuttonpress

anim_onda_sverdrup
```

##
ANIM_ONDA_SVERDRUP.M
##

```
close(1)

h2=figure(2);
%for it=[1:1:1000]*86400;%[s]
it=1;
pippo=1;

disp('close!')


while pippo==1
it=it+86400;%[s]

eta=etazero.*cos(k.*xx-sigma*it);
u=etazero*sigma/k/H.*cos(k.*xx-sigma*it);
v=etazero*f/k/H.*sin(k.*xx-sigma*it);

subplot(2,1,1)
mesh(x,y,eta)
view(135,34)
title(['day=',num2str(it/86400)])
zlabel('eta')

subplot(2,1,2)
hold on
contour(x,y,u)
r=5;
h=quiver(xx(1:r:100,1:r:100),yy(1:r:100,1:r:100),u(1:r:100,1:r:100),v(1:r:100,1:r:100),1,'k');
set(h,'LineWidth',2);
axis([1 xmax*1e3 1 ymax*1e3])
view(155,90)
pause(0.1)
clf

if gcf==1;
pippo=0;
clf;
disp('FINE anim1');
end%if

end%while

anim_onda_sverdrup2
```

##
ANIM_ONDASVERDRUP2.M
##

```
close(1)
```

```
h2=figure(2);
%for it=[1:1:1000]*86400;%[s]
it=1;
pippo=1;

disp('close!')

while pippo==1
it=it+86400;%[s]

eta=etazero.*cos(k.*xx-sigma*it);
u=etazero*sigma/k/H.*cos(k.*xx-sigma*it);
v=etazero*f/k/H.*sin(k.*xx-sigma*it);

subplot(2,1,1)
mesh(x,y,eta)
view(135,34)
title(['day=',num2str(it/86400)])
zlabel('eta')

subplot(2,1,2)
hold on
contour(xx,yy,curl(u,v))
r=1;
h=quiver(xx,yy,u,coefv*v,0.5,'k');
axis([1 200*1e3 1 100*1e3])

pause(0.1)
clf

if gcf==1;
pippo=0;
clf;
disp('FINE anim 2');
end%if

end%while

%it=86400;%[s]
eta=etazero.*cos(k.*xx-sigma*it);
u=etazero*sigma/k/H.*cos(k.*xx-sigma*it);
v=etazero*f/k/H.*sin(k.*xx-sigma*it);

subplot(2,1,1)
mesh(x,y,eta)
view(135,34)
title(['day=',num2str(it/86400)])
zlabel('eta')

r=6;
subplot(2,1,2)
hold on
contour(xx,yy,curl(u,v))
h=quiver(xx(1:r:100,1:r:100),yy(1:r:100,1
:r:100),u(1:r:100,1:r:100),v(1:r:100,1:r:
100),0.5,'k');
set(h,'LineWidth',2);
axis([1 xmax*1e3 1 ymax*1e3])
view(155,90)
xlabel('X-direction')
ylabel('Y-direction')
```

##

ONDA_KELVIN

##

```
close(1)

h2=figure(2);
%for it=[1:1:1000]*86400;%[s]
it=1;
pippo=1;

disp('close!')

while pippo==1
it=it+86400;%[s]

eta=etazero.*cos(k.*xx-sigma*it);
u=etazero*sigma/k/H.*cos(k.*xx-sigma*it);
v=etazero*f/k/H.*sin(k.*xx-sigma*it);

subplot(2,1,1)
mesh(x,y,eta)
view(135,34)
title(['day=',num2str(it/86400)])
zlabel('eta')

subplot(2,1,2)
hold on
contour(xx,yy,curl(u,v))
r=1;
h=quiver(xx,yy,u,coefv*v,0.5,'k');
axis([1 200*1e3 1 100*1e3])

pause(0.1)
clf

if gcf==1;
pippo=0;
clf;
disp('FINE anim 2');
end%if

end%while

%it=86400;%[s]
eta=etazero.*cos(k.*xx-sigma*it);
u=etazero*sigma/k/H.*cos(k.*xx-sigma*it);
v=etazero*f/k/H.*sin(k.*xx-sigma*it);

subplot(2,1,1)
mesh(x,y,eta)
view(135,34)
title(['day=',num2str(it/86400)])
zlabel('eta')

r=6;
subplot(2,1,2)
hold on
contour(xx,yy,curl(u,v))
h=quiver(xx(1:r:100,1:r:100),yy(1:r:100,1
:r:100),u(1:r:100,1:r:100),v(1:r:100,1:r:
100),0.5,'k');
set(h,'LineWidth',2);
axis([1 xmax*1e3 1 ymax*1e3])
view(155,90)
xlabel('X-direction')
ylabel('Y-direction')
```

##

ANIM-ONDA-KELVIN

##

```
close(1)

h2=figure(2);
%for it=[1:1:1000]*86400;%[s]
it=1;
```

```
pippo=1;

disp('close!')

while pippo==1
it=it+86400;%[s]

eta=etazero*exp(-f*yy./c).*cos(k.*xx-
sigma*it);
u=etazero*c/H*exp(-f*yy./c).*cos(k.*xx-
sigma*it);

subplot(2,1,1)
mesh(x,y,eta)
view(135,34)
title(['day=',num2str(it/86400)])
zlabel('eta')

subplot(2,1,2)
hold on
contour(x,y,u)
r=5;
h=quiver(xx(1:r:100,1:r:100),yy(1:r:100,1
:r:100),u(1:r:100,1:r:100),v(1:r:100,1:r:
100),1,'k');
set(h,'LineWidth',2);
axis([1 xmax*1e3 1 ymax*1e3])
view(155,90)

pause(0.1)
clf

if gcf==1;
pippo=0;
clf;
disp('FINE');

%it=86400;%[s]
eta=etazero*exp(-f*yy./c).*cos(k.*xx-
sigma*it);
u=etazero*c/H*exp(-f*yy./c).*cos(k.*xx-
sigma*it);
subplot(2,1,1)
mesh(x,y,eta)
view(135,34)
title(['day=',num2str(it/86400)])
zlabel('eta')

subplot(2,1,2)
hold on
contour(x,y,u)
r=5;
h=quiver(xx(1:r:100,1:r:100),yy(1:r:100,1
:r:100),u(1:r:100,1:r:100),v(1:r:100,1:r:
100),1,'k');
set(h,'LineWidth',2);
axis([1 xmax*1e3 1 ymax*1e3])
view(155,90)
xlabel('X-direction')
ylabel('Y-direction')

end

end
```

##

ANFIDROMICI

##

```
clear;close all;

xmax=500;%[km]
ymax=1000;%[km]
reso=99;
x=[-xmax:xmax/reso:xmax]*1e+3;
y=[-ymax:ymax/reso:ymax]*1e+3;

g=9.8;%[ms^-2]
H=100;%[m]
f=1.03e-4;%[s^-1]

lambda=2*1e+6;%[m]
etazero=0.01;%[m]

c=sqrt(g*H);%[ms^-1]
k=xmax*1e+3/lambda;
sigma=k*c;

[xx,yy] = meshgrid(x,y);
[i,j]=size(xx);
v=zeros(i,j);
w=zeros(i,j);
zz=zeros(i,j);


h1=figure(1);

it=1*86400;%[s]

eta1=1/2*etazero*exp(-
f*yy./c).*cos(+k.*xx-sigma*it);
eta2=1/2*etazero*exp(+f*yy./c).*cos(-
k.*xx-sigma*it);
eta=eta1+eta2;

subplot(3,1,1)
mesh(x,y,eta1)
view(135,34)
title(['day=',num2str(it/86400)])
zlabel('eta1')

disp('click!')
waitforbuttonpress

subplot(3,1,2)
mesh(x,y,eta2)
view(135,34)
zlabel('eta2')

disp('click!')
waitforbuttonpress

subplot(3,1,3)
mesh(x,y,eta)
view(135,34)
zlabel('eta=eta1+eta2')

disp('click!')
waitforbuttonpress

anim_anfidromici
```

##

ANIM_ANFIDROMICI.M

##

```
h1=figure(2);

it=1;
pippo=1;

disp('close!')
```

```
while pippo==1
it=it+86400;%[s]

eta1=1/2*etazero*exp(-
f*yy./c).*cos(+k.*xx-sigma*it);
eta2=1/2*etazero*exp(+f*yy./c).*cos(-
k.*xx-sigma*it);
eta=eta1+eta2;

subplot(3,1,1)
mesh(x,y,eta1)
view(135,34)
title(['day=',num2str(it/86400)])
zlabel('eta1')

subplot(3,1,2)
mesh(x,y,eta2)
view(135,34)
zlabel('eta2')

subplot(3,1,3)
mesh(x,y,eta)
view(135,34)
zlabel('eta=eta1+eta2')

pause(0.2)
clf

if gcf==1;
pippo=0;
clf;
anfidromici2
%disp('FINE');
end

end%while
```

##

ANFIDROMICI2.M

##

```
h1=figure(1);clf;hold on;

it=86400;%[s]

eta1=1/2*etazero*exp(-
f*yy./c).*cos(+k.*xx-sigma*it);
eta2=1/2*etazero*exp(+f*yy./c).*cos(-
k.*xx-sigma*it);
eta=eta1+eta2;

mesh(x,y,eta)
view(-40,52)
zlabel('eta=eta1+eta2')
%axis([1 xmax*1e3 -ymax*1e3 ymax*1e3 -0.1
0.1])
grid on;
hl=line(xx(50,:),yy(50,:),eta(50,:));
set(hl,'Color','b');
hl=line(xx(100,:),yy(100,:),eta(100,:));
set(hl,'Color','k');
hl=line(xx(150,:),yy(150,:),eta(150,:));
set(hl,'Color','r')

disp('click!')
waitforbuttonpress
clf
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure(2)
it=1;
pippo=1;

disp('close!')

while pippo==1
it=it+86400;%[s]

eta1=1/2*etazero*exp(-
f*yy./c).*cos(+k.*xx-sigma*it);
eta2=1/2*etazero*exp(+f*yy./c).*cos(-
k.*xx-sigma*it);
eta=eta1+eta2;

plot(xx(50,:),eta(50,:),'b',xx(100,:),eta
(100,:),'k',xx(150,:),eta(150,:),'r');
axis([-1e5 +1e5 -.03 0.03]);

ht=text(26500,0,'o');
set(ht,'FontSize',20);
ht=text(-28000,0,'o');
set(ht,'FontSize',20);

grid

pause(0.1)
clf
if gcf==1;
pippo=0;
end

end%while
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
etay0=etazero*cos(k*x)*cos(sigma*it);
plot(xx(50,:),eta(50,:),'b',xx(100,:),eta
(100,:),'k',xx(150,:),eta(150,:),'r',x,et
ay0,'g--');
axis([-1e5 +1e5 -.03 0.03]);

ht=text(26500,0,'o');
set(ht,'FontSize',20);
ht=text(-28000,0,'o');
set(ht,'FontSize',20);

grid

disp('click!')
waitforbuttonpress
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
contourf(x,y,eta);
colorbar;shading flat;

ht=text(26500,0,'o');
ht=text(-27500,0,'o');

waitforbuttonpress
it=86400;
fasecost=c/f*tan(k*xx)*tan(sigma*it);
hl=line(xx,fasecost);
set(hl,'linewidth',6,'color','k')

disp('click!')
waitforbuttonpress
axis([-1e5 1e5 -2e5 2e5])

disp('click!')
waitforbuttonpress
clf
anim_anfidromici2
```

##

ANIM_ANFIDROMICI2.M

```
##################################################
h1=figure(2);hold on;
clf

it=1;
pippo=1;

disp('close!')

while pippo==1
it=it+86400/48;%[s]

eta1=1/2*etazero*exp(-
f*yy./c).*cos(+k.*xx-sigma*it);
eta2=1/2*etazero*exp(+f*yy./c).*cos(-
k.*xx-sigma*it);
eta=eta1+eta2;

contourf(x,y,eta);
colorbar;shading flat;

ht=text(26500,0,'o');
ht=text(-27500,0,'o');

fasecost=c/f*tan(k*xx)*tan(sigma*it);
hl=line(xx,fasecost);
set(hl,'linewidth',6,'color','k')
axis([-1e5 1e5 -10e5 10e5])

pause(0.1)
clf

if gcf==1;
pippo=0;
close all;
disp('FINE');
end

end%while
```

4. Courants levés par le vent au voisinage d'une côte

Dans ce chapitre sont montrés plusieurs solutions analytiques des équations du transport linéarisée

$$\frac{\partial U}{\partial t} - f\,V = -gH\frac{\partial \eta}{\partial x} + F_x - B_x$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + f\,U = -gH\frac{\partial \eta}{\partial y} + F_y - B_y \qquad H = h + \eta \simeq h \quad \text{si} \quad h \gg \eta$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial t}$$

4.1 L'équilibre dit "*wind setup*"

On considère un bassin fermé avec profondeur constante h et on suppose que le vent souffle uniformément sur toute la surface avec un frottement en direction y égale à $F_y = u_*^2$ où

$$u_* = \left(\frac{\tau_y^S}{\rho}\right)^{1/2} \quad \text{est une vitesse de frottement, avec } \tau \text{ intensité de la tension à la frontière}$$

Dans ce cas on a alors que les dérivées spatiales du forçage sont nulles, mais pas le forçage

$$\nabla\cdot\vec{F} = 0 \qquad \nabla\times\vec{F} = 0 \qquad \vec{F} \neq 0$$

La présence de la côte empêche un transport normale, mais pour chercher de déterminer le changement dans la surélévation en proximité de la côte, on peut imposer en première approximation que le transport soit nul dans toutes les deux directions

$$U = V = 0$$

On ajoute encore une hypothèse: le frottement sur le fond reste négligeable:

$$B_x = B_y = 0$$

Enfin, on décide de chercher une solution stationnaire.
Dans ces conditions, les équations du transport se simplifient beaucoup et deviennent :

$$0 = -gh\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$0 = -gh\frac{\partial \eta}{\partial y} + F_y$$

$$0 = 0$$

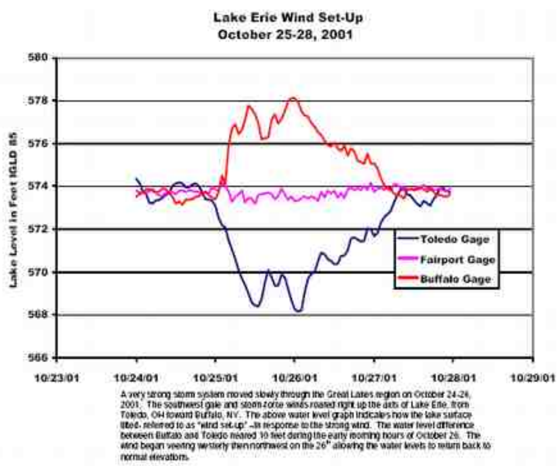
dont la solution non triviale est

$$\eta \;=\; \frac{F_y}{g\,h}\,y \quad (+\; const) \tag{2.3}$$

qui implique seulement de poser l'axe y dans une façon consistante avec la conservation de la masse totale.

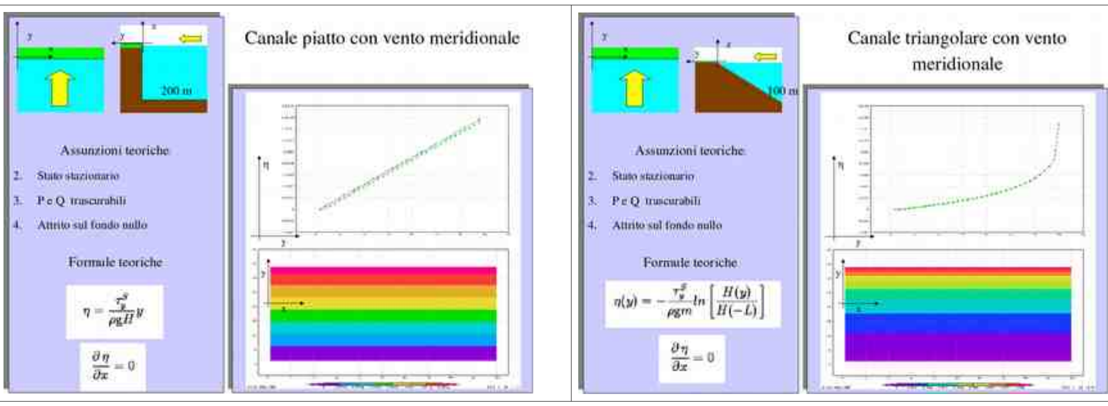
Cette solution est connue comme *wind setup* et représente un simple bilan entre la force du vent et un gradient de pression horizontale associé à une variation de surélévation qui ne dépend pas du temps (i.e. cas stationnaire).

EXERCICE: calculer le gradient de surélévation provoqué par les fort vents (F = 0,0025 m^2/s), qui soufflent sur le lac Erie (Amérique du Nord) qui est long 300 km et profonde 30 m. En sachant que 1 feet = 0.3048 m, confrontez votre résultat avec la variation de niveau du lac enregistré dans 3 différents sites pendant une tempête .



Carte du Lac Erie (modifiée depuis GoogleMaps) avec les trois localités dans lesquelles ont été effectuées les mesures de surélévation du graphe ci-contre

http://www.lre.usace.army.mil/_kd/go.cfm?destination=ShowItem&Item_ID=2802



Comparaison entre résultats numériques (modèle POM) et analytiques pour le *wind setup* dans un lac à fond plat et à fond incliné. (Thèse M.Magaldi)

Le *wind setup* dans un bassin de forme arbitraire

Dans la solution précédente nous avions fixé *U=V=0* et trouvé une solution pour un bassin fermé, maintenant cherchons d'éviter une hypothèse si contraignant .

Reprendrons les équations du transport en eaux peu profondes en négligeant toujours le frottement sur le fond on se disant qu'il agisse seulement dans la couche limite de fond.

$$\frac{\partial U}{\partial t} - fV = -c^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + F_x \qquad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + fU = -c^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} + F_y \qquad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial t} \qquad (3)$$

où $c = \sqrt{gH}$

Hypothèses:

plan *f*	=>	f = constante
bathymétrie plane	=>	*h* = constante
vent uniforme	=>	dérivées spatiales nulles mais pas le forçage $\nabla \cdot F = 0 \quad \nabla \times F = 0 \quad F \neq 0$

Notation:

$$D = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = \nabla_H \cdot \vec{U}$$ divergence du transport

$$R = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = \hat{k}(\nabla \times \vec{U})$$ rotationnel du transport

$$\frac{\partial *}{\partial x} \Rightarrow \partial_x *$$

(A) $\partial_x(1) + \partial_y(2)$

En différentiant l'équation (1) par rapport à *x* et l'équation (2) par rapport à *y*, en ajoutant les deux équations ainsi obtenues, on tire

$$\partial_t(\partial_x U + \partial_y V) - f(\partial_x V - \partial_y U) = -\partial_x(c^2 \partial_x \eta) - \partial_y(c^2 \partial_y \eta) + \partial_x F_x + \partial_y F_y$$

$$\partial_t D - fR = -c^2 \nabla^2 \eta + \nabla \cdot \vec{F}$$

(B) $\partial_x(2) - \partial_y(1)$

En différentiant l'équation (2) par rapport à *x* et l'équation (1) par rapport à *y*, en soustraient les deux équations ainsi obtenues, on tire

$$\partial_t(\partial_x V - \partial_y U) + f(\partial_x U + \partial_y V) = c^2 \partial_{yx}^2 \eta - c^2 \partial_{xy}^2 \eta + \partial_x F_y - \partial_y F_x$$

$$\partial_t R + fD = \nabla \times \vec{F}$$

(C)
Enfin on peut reformuler l'équation (3) sous la forme

$$D=-\partial_t \eta$$

En se rappelant que le vent est uniforme on récrit le système (1-3) sous la forme

$$\begin{array}{ll} (A) & \partial_t D - f R = -c^2 \nabla^2 \eta \\ (B) & \partial_t R + f D = 0 \\ (C) & D = -\partial_t \eta \end{array}$$

Maintenant on cherche d'obtenir une seule équation pour la seule surélévation.
On substituant *D* dans l'équation (B) avec l'équation (C) on obtient

$$\partial_t R - f \partial_t \eta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \partial_t (R - f \eta) = 0$$

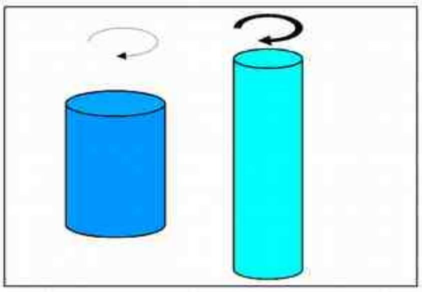
À l'état initial

$$R - f\eta = R_o - f\eta_o \qquad \forall\, x, y \qquad \text{avec} \quad R_o \equiv R(t=0) \qquad \eta_o \equiv \eta(t=0)$$

Si on considère une situation initiale de repos, on a

(D) $$R = f\eta$$

Cette équation nous dit que la vorticité varie selon l'étirement de la colonne d'eau où on se déplaçant avec la latitude (voir la loi de la conservation de la vorticité potentielle) .



Maintenant, si on substitue *D* et *R* dans l'équation (A) en utilisant les équations (C) et (D)

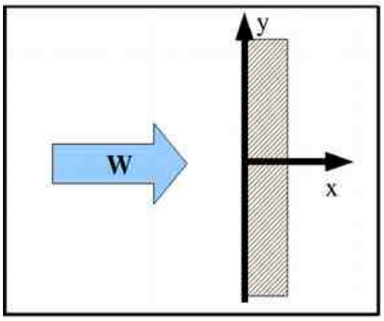
$$\partial_t(-\partial_t \eta) - f(f\eta) = -c^2 \nabla^2 \eta$$

on obtient finalement une équation aux dérivées partielles de type hyperbolique

(E) $$\partial^2_{tt} \eta + f^2 \eta - c^2 \nabla^2 \eta = 0$$

NB: si on cherche une solution pour l'équation (E) de type $\eta = \eta_o e^{i(kx - \sigma t)}$
on retrouve la relation de dispersion des ondes de Poincaré-Sverdrup $\sigma^2 = f^2 + g h k^2$

4.2 Vent perpendiculaire à une côte rectiligne



La géométrie du problème implique que

$$F_y = 0$$

$$\partial_y * = 0$$

On reprend l'équation (E) et on cherche un solution stationnaire (i.e. $\partial_t * = 0$)

$$f^2\eta - c^2\nabla^2\eta = 0 \qquad \text{vu que} \quad \partial_y * = 0 \qquad f^2\eta - c^2\partial_{xx}^2\eta = 0$$

Pour ce type d'équation on peut trouver une solution de type

$$\eta(x) = Ae^{f\frac{x}{c}} + Be^{-f\frac{x}{c}}$$

où mieux, vu que η est bornée pour $x \to -\infty$ $|\eta| < \infty$ alors $B = 0$

(F) $$\eta(x) = Ae^{f\frac{x}{c}}$$

Étant la côte rectiligne ($\partial_y * = 0$) et le vent perpendiculaire à la côte ($F_y = 0$), l'équation (2) devient

$$\frac{\partial V}{\partial t} + fU = 0 \qquad \text{et si on cherche une solution stationnaire} \qquad U = 0 \quad \forall x$$

Avec un état initial de repos ($U(t=0) = 0$ et $V(t=0) = 0$), l'équation (1) devient

$$0 = -c^2\frac{\partial\eta}{\partial x} + F_x \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{F_x}{c^2}$$

NB: dans le cas de solution stationnaire ($\partial_t U = 0$), cette condition est valable aussi comme condition limite à la côte où $V(x = 0) = 0$.
Si on applique ces conditions à l'équation (F) on a

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = f\frac{A}{c}e^{f\frac{x}{c}} = \frac{F_x}{c^2}$$

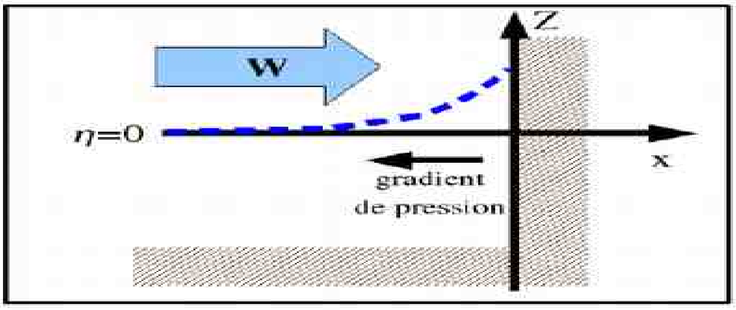
en se mettant en $x = 0$ on retrouve le coefficient $A = \dfrac{F_x}{fc}$

Ainsi on a finalement

(G)

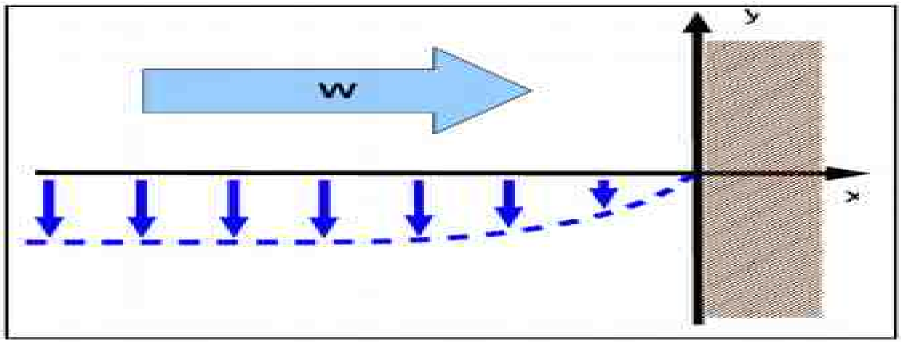
$$\eta(x) = \frac{F_x}{fc}e^{\frac{x}{R_b}} \quad \text{où} \quad R_b = \frac{c}{f} \quad \text{est dit rayon de Rossby ou rayon externe de déformation}$$

Il y a une dénivellation qui crée un gradient de pression près de la côte



Si on met l'équation (G) dans la (1) à l'état stationnaire on trouve finalement une solution pour le transport le long de la côte

$$-fV = -c^2\left(\frac{F_x}{f\,c}e^{\frac{x}{R_b}}\frac{f}{c}\right) + F_x \quad \Rightarrow \quad V = \frac{F_x}{f}\left(e^{\frac{x}{R_b}}-1\right)$$



hauturier $x \rightarrow -\infty$ côtier $x \simeq R_b$ à la côte $x=0$

$$V = -\frac{F_x}{f} \qquad V = -\frac{F_x}{f}+\frac{F_x}{f}e^{\frac{x}{R_b}} \qquad V = 0$$

Maintenant qu'on a la solution pour le transport on cherche celles pour le vitesses internes.
On prend les équations du mouvement

$$\frac{\partial u}{\partial t}-f\,v = -g\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}+f\,u = -g\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

et on fait la décomposition suivante:

$$\vec{u} = \vec{u}_G+\vec{u}_E \quad \text{avec} \quad \vec{u}_G \equiv (u_G, v_G) \quad \text{et} \quad \vec{u}_E \equiv (u_E, v_E)$$

où $\vec{u}_G$ est la solution du sous-système

$$\frac{\partial u_G}{\partial t}-f\,v_G = -g\frac{\partial \eta}{\partial x}$$
$$\frac{\partial v_G}{\partial t}+f\,u_G = -g\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

qui dans le cadre de nos hypothèses (∂_t*= 0, ∂_y*= 0) a pour solution un courant géostrophique stationnaire en équilibre avec la pente de η

$$u_G = 0 \qquad \text{et} \qquad v_G = \frac{g}{f}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

Tandis que $\vec{u}_E$ est la solution du sous-système

$$-f\,v_E = \frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial u_E}{\partial z}\right)$$
$$+f\,u_E = \frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial v_E}{\partial z}\right)$$

qui a pour solution notamment la spirale d'Ekman

$$u_E = \frac{F_x}{f\,D_E}e^{z/D_E}\left(\cos\frac{z}{D_E}-\sin\frac{z}{D_E}\right)$$
$$v_E = \frac{F_x}{f\,D_E}e^{z/D_E}\left(\cos\frac{z}{D_E}+\sin\frac{z}{D_E}\right)$$

avec $D_E = \sqrt{\frac{2K}{f}}$ profondeur d'Ekman.

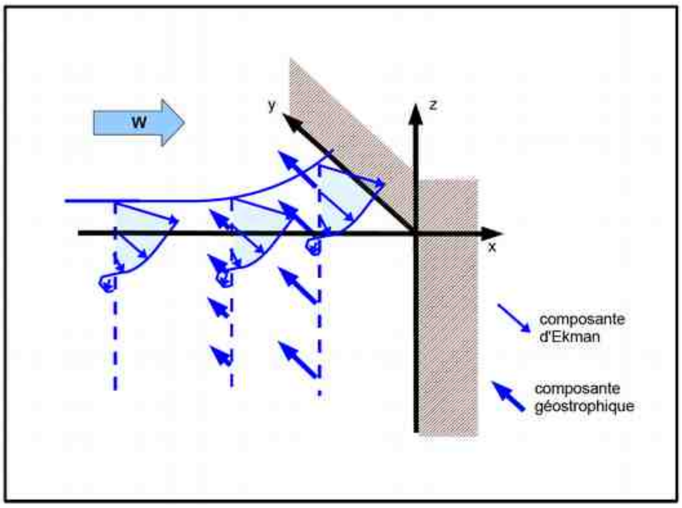
Enfin, on peut vérifier le calcul précédent du transport total en faisant la somme des transport des deux régimes

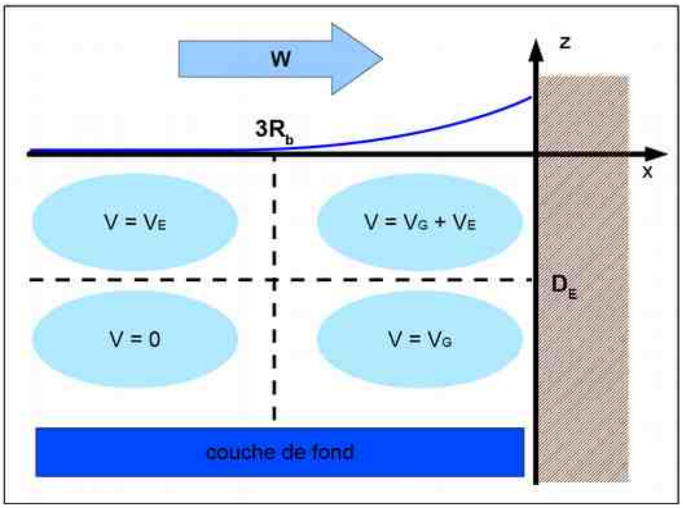
$$V_G = \int_{-h}^{\eta}\frac{g}{f}\frac{\partial \eta}{\partial x}dz \simeq \int_{-h}^{0}\frac{g}{f}\left(\frac{F_x}{f\,c}e^{\frac{x}{R_b}}\frac{f}{c}\right)dz = \frac{g}{f}\frac{F_x}{g\,h}e^{\frac{x}{R_b}}h = \frac{F_x}{f}e^{\frac{x}{R_b}}$$

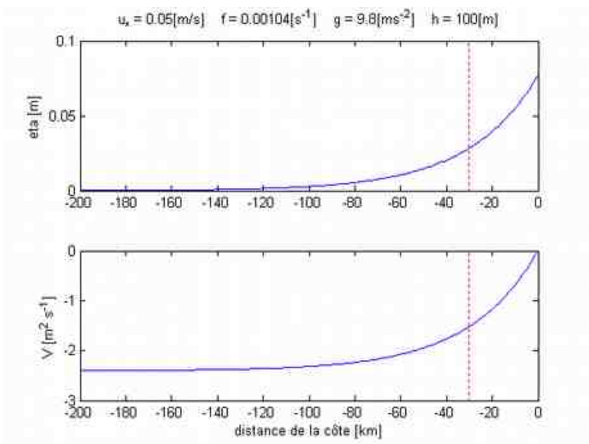
$$V_E = -\frac{F_x}{f} \qquad (\text{voir section } 2.9)$$

$$V = V_G+V_E = \frac{F_x}{f}e^{\frac{x}{R_b}}-\frac{F_x}{f}$$

Résumé schématique :







Exemple de calcul (voir script MATLAB en annexe) :

ici $R_b = 300\,\text{km}$,

donc à $x = -R_b$ le transport d'Ekman est réduit du 36%,

à $x = -3R_b$ du 5% et

à $x = -7R_b$ seulement du 1%

NB: la couche d'Ekman n'existe pas tout près de la côte

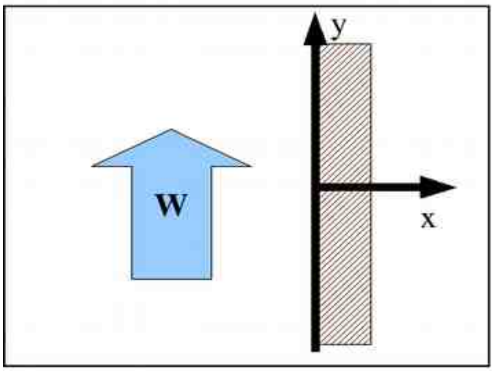
NB: si $D = h$ alors il faut aussi compter la couche de fond.

4.3 Vent parallèle à la côte

La géométrie du problème implique que

$$F_x = 0$$

$$\partial_y * = 0$$



Si on se met sur un tout petit domaine tel que $f = 0$, dès la (2) on tire

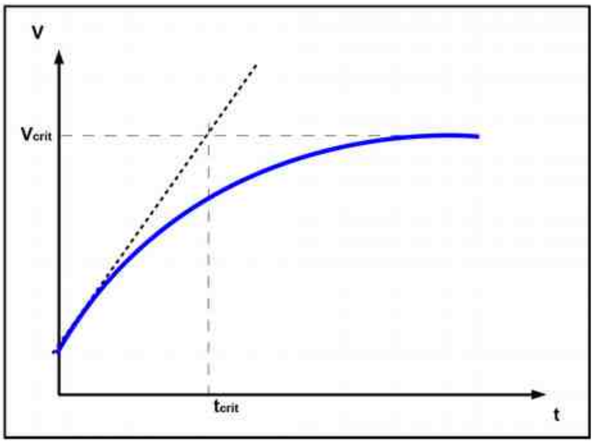
$$\frac{\partial V}{\partial t} = F_y \quad \Rightarrow \quad V = V_o + F_y t$$

Il y a donc une accélération constante du fluide par le vent et $V \to \infty$ s'il n'y a pas de frottement sur le fond.

Si par contre $B_y = C_D V^2$ alors on a

$$\partial_t V = F_y - C_D V^2$$

et le transport aura un certain valeur critique *Vcrit* à ne pas dépasser.



Si par contre on retourne à considérer le frottement sur le fond négligeable en dehors de la couche limite et on se met sur un domaine assez grande tel que maintenant $f \neq 0$, alors on a que

$$\frac{\partial V}{\partial t} = F_y \quad \Rightarrow \quad V(x=0) = V_o + F_y t$$

est vérifiée seulement à la côte où $U(x=0)=0$. Cette fois il s'agit donc non pas d'une solution globale, mais d'une condition limite. En mettant cette condition dans la (1) on trouve

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = f \frac{F_y}{c^2} t$$

qui indique que le courant à la côte est dans une espèce d'équilibre géostrophique avec la pente de la surélévation.

La dépendance de la surélévation du temps mets en évidence que il ne peut pas exister une solution stationnaire $\forall x, y$.

Ces conditions sont satisfaites par l'équation (E), qui peut être résolue avec la transformation de Laplace. Avec cette méthode de résolution on obtient

$$\eta = \frac{F_y}{f\,c}\left[f\,t\,e^{\frac{x}{R_b}} \;-\; \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos(ft-\pi/4)}{\sqrt{f\,t}} \;+\; O(f\,t)^{-3/2}\right]$$

Si on étudie un régime lentement variable, on peut garder seulement la partie non ondulatoire de la solution

(H) $$\eta = \frac{F_y}{f\,c}\left[f\,t\,e^{\frac{x}{R_b}}\right]$$

En mettant cette expression de la surélévation dans l'équation de continuité (3) avec $\frac{\partial V}{\partial y}=0$, on peut calculer la composante du transport normale à la côte

$$\frac{\partial U}{\partial x} \;=\; -\frac{\partial \eta}{\partial t} \;=\; -\frac{F_y}{f\,c} f\,e^{\frac{x}{R_b}} \;=\; -\frac{F_y}{c} e^{\frac{x}{R_b}}$$

$$U(x) \;=\; \int_0^x -\frac{F_y}{c} e^{\frac{\hat{x}}{R_b}} dx \;=\; -\frac{F_y}{c} R_b\left[e^{\frac{\hat{x}}{R_b}}\right]_o^x \;=\; -\frac{F_y}{c}\frac{c}{f}\left(e^{\frac{\hat{x}}{R_b}}-1\right) \;=\; -\frac{F_y}{f} e^{\frac{\hat{x}}{R_b}} + \frac{F_y}{f}$$

NB: cette composante ne dépende pas de *t*, elle est donc (dans le cadre de nos approximations!) stationnaire, alors que la surélévation ne l'est jamais.

La composante perpendiculaire à la côte et sa condition limite à la côte sont calculées en mettant l'équation (H) dans l'équation (1)

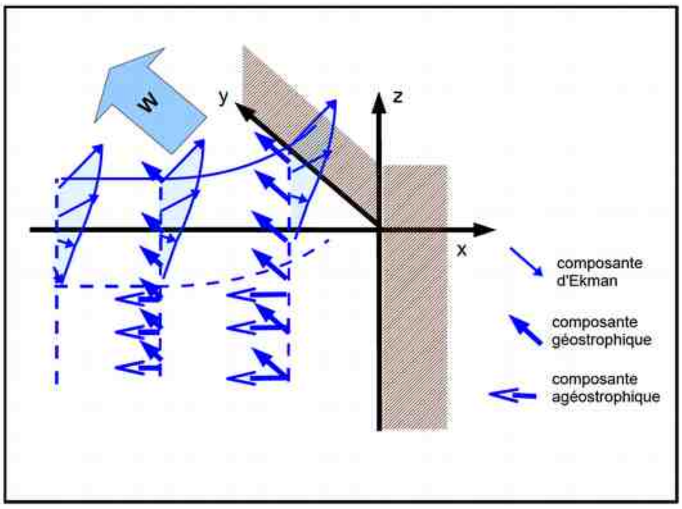
$$V \;=\; \frac{c^2}{f}\frac{\partial \eta}{\partial x} \;=\; \frac{c^2}{f}\left(\frac{F_y}{f\,c} f\,t\,e^{\frac{x}{R_b}}\frac{f}{c}\right) \;=\; F_y t\,e^{\frac{x}{R_b}} \qquad \text{et} \qquad V(x=0) \;=\; -F_y t$$

Cette composante constitue la contribution au transport de la vitesse géostrophique en équilibre avec la pente de la surélévation.
La partie du transport due à l'équilibre géostrophique peut être calculée comme auparavant avec la décomposition du problème, mais cette fois $u_G \neq 0$, le sous-système est donc

$$\begin{cases} -f\,v_G = -g\,\dfrac{\partial \eta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_G}{\partial t} + f\,u_G = 0 \end{cases} \qquad \text{qui a pour solution} \qquad \begin{cases} v_G = g\,\dfrac{F_y}{c^2}\,t\,e^{\frac{x}{R_b}} \\ u_G = -\dfrac{F_y}{f\,h}\,e^{\frac{x}{R_b}} \end{cases}$$

v_G est un jet côtier géostrophique, tandis que u_G est une composante agéostrophique d'ajustement qui est là pour contrecarrer le transport d'Ekman en surface.

Résumé schématique :



Évolution temporelle

$$\eta \equiv \eta(t) \propto t$$
$$V \equiv V(t) \propto t$$

dans le temps l'élévation augmente et le jet en surface aussi

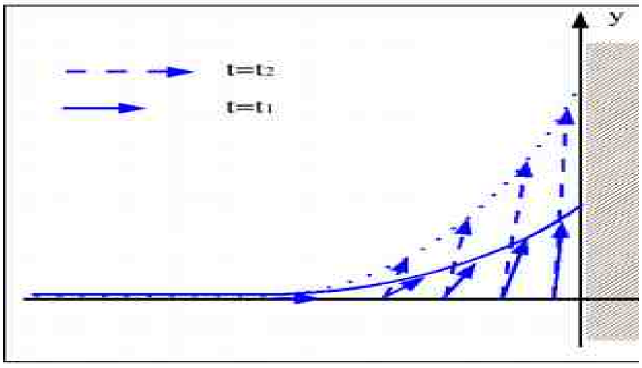
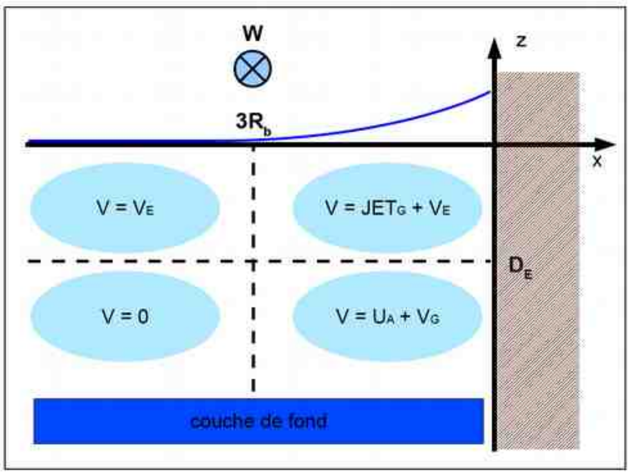


Schéma verticale

il y a plongées des eaux *(downwelling)*



4.4 Courant d'inertie (Séance de cours de A.Petrenko)

Résumé : L'oscillation d'inertie est, en milieu tournant, un mouvement horizontal et circulaire d'une particule soumise à la seule force de Coriolis et assujettie à glisser sans frottement sur une équipotentielle de la gravité (localement, un plan horizontal) avec une vitesse initiale non nulle. Un cycle de cette oscillation définit le cercle d'inertie qui est décrit dans le sens des aiguilles d'une montre dans l'hémisphère nord, en un temps égal à la période d'inertie.

Bibliographie

Chereskin T.K., M.D. Levine, A.J. Harding, L.A. Regier, *Observations of near-inertial waves in Acoustic Doppler Current Profiler measurements made in the Mixed Layer Dynamics Experiment*, J. Geophys. Res., 94 (C6) (1989), pp. 8135–8145

C. Millot, *The Gulf of Lion's hydrodynamics*, Cont. Shelf Res., 10 (9–11) (1990), pp. 885–894

Millot and Crepon, 1981, *Inertial oscillations on the Continental Shelf of the Gulf of Lions – Observations and Theory*, JPO vol 11, 5.

Petrenko A., C. Dufau and C. Estournel (2008), *Barotropic eastward currents in the western Gulf of Lion, north-western Mediterranean Sea, during stratified conditions.* J. Marine Syst., doi:10.1016/j.jmarsys.2008.03.004

Petrenko A., Y. Leredde, and P. Marsaleix (2005), *Circulation in a stratified and wind-forced Gulf of Lions, NW Mediterranean Sea: in-situ and modeling data.* Continental Shelf Res., 25, 5-27, doi:10.1016/j.csr.2004.09.004

Petrenko, A.A. (2003), *Circulation features in the Gulf of Lions, NW Mediterranean Sea; importance of inertial currents*, Oceanol. Acta, 26, pp. 323–338

Rappel du cours de L3 (Dynamique océanique A. Doglioli et A. Petrenko ; et rappel Section 2.9 de ce cours)

Si une particule n'est soumise à aucune force extérieure, son accélération dans un repère d'inertie obéit à la 2ème loi de Newton . Les équations du mouvement se simplifient de la façon suivante :

$$\frac{du}{dt} = fv$$
$$\frac{dv}{dt} = -fu$$

en résolvant pour *u* et en remplaçant dans la deuxième équation

$$v=\frac{1}{f}\frac{du}{dt}$$
$$\frac{1}{f}\frac{d^2u}{dt^2} = -fu \qquad \text{i.e.} \qquad \frac{d^2u}{dt^2}+f^2u = 0$$

La solution générale de cette équation différentielle du deuxième degré est :

$$u = +V_o\cos(ft+\phi)$$
$$v = -V_o\sin(ft+\phi)$$

et, si on remplace u par cette solution dans l'équation pour *v :*

où la vitesse V_o et la phase ϕ dépendent des conditions initiales .

Par exemple si on prend le cas des oscillations déclenchées par les coups de Mistral au large de Marseille, en positionnant les axes comme dans la figure ci-dessous, on fixe les conditions initiales suivantes :

vitesse initiale du courant dans la direction du vent, i.e. $u_{t=0}=0$. Alors,

$$u_{t=0}=V_o \cos(\phi)=0 \quad \text{et} \quad \phi=\pi/2$$

En remplaçant dans l'équation pour *v*

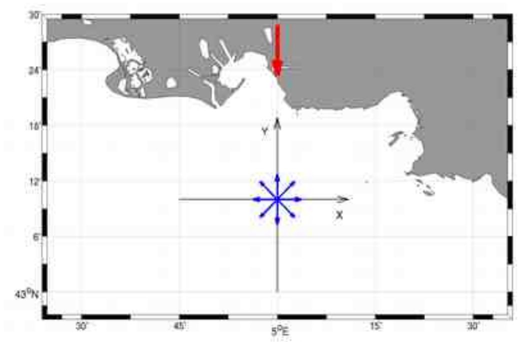
$$v \;=\; -V_o \sin(ft+\pi/2) \quad \text{et donc}$$

$$v_{t=0} \;=\; -V_o \sin(\pi/2) \;=\; -V_o$$

L'intensité dépend du vent, par exemple, pour un vent de 80 km h^{-1} on peut estimer une vitesse du courant de surface de 50 cm s^{-1} .

Voir par exemple:

http://www.dot.state.fl.us/rddesign/dr/Research/CE/Wind-Generated-Currents.pdf



En rouge vecteur du vent, en bleu vecteurs du courant d'inertie, variant de direction avec le temps (script matlab disponible dans cours L3 (site web Doglioli).

Comme $f=2\Omega \sin\lambda \;[\text{rad.s}^{-1}]$ avec λ latitude, pour Marseille qui se trouve à la latitude de 43°N, on a approximativement :

$$f \;\simeq\; 2\frac{2\pi}{24}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \;\simeq\; \frac{2\pi}{17} \;[\text{rad.h}^{-1}]$$

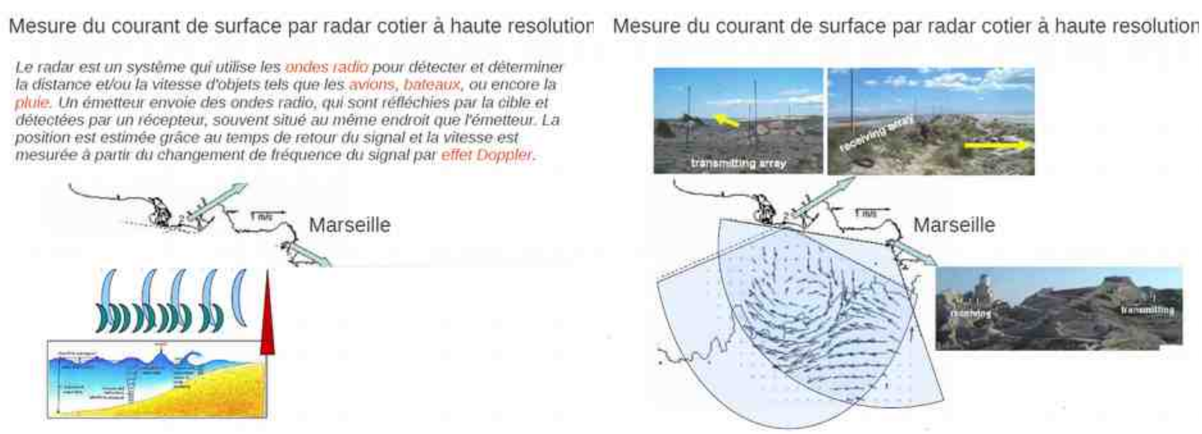
i.e. la période sera $T \;\simeq\; 17 \;[\text{h}]$

NB : Pour calculer une valeur plus précise, utilisez la durée du jour sidéral de 23 h 56 min 4 s et la latitude de Marseille à 43° et non pas 45° dans l'AN précédente (valeur de T plus précise obtenue 17h33').

Si on prend un valeur de T=16h (amusez vous à vérifier à quelle latitude cela correspond) pour simplifier les calculs, en remplaçant dans les équations pour *u* et *v,* on obtient

$\vec{v}_{t=0}\equiv(0,-0.5)V_o$, $\vec{v}_{t=4\text{h}}\equiv(-0.5,0)V_o$, $\vec{v}_{t=8\text{h}}\equiv(0,+0.5)V_o$ et $\vec{v}_{t=12\text{h}}\equiv(+0.5,0)V_o$

Les mesures effectuées avec un radar côtier par les collègues du MIO (ex- LSSET-Laboratoire des Sondages Électromagnétiques) de Toulon corroborent ce modèle analytique.



Note ; les radars sont à l'heure actuelle installés en face de Toulon et de Nice.

En intégrant de nouveau, avec $u \;=\; \dfrac{dx}{dt}$ et $v \;=\; \dfrac{dy}{dt}$ on obtient la trajectoire :

$$x = x_o + \frac{V_o}{f}\sin(ft+\varphi)$$
$$y = y_o - \frac{V_o}{f}\cos(ft+\varphi)$$
$$(x-x_o)^2+(y-y_o)^2 = \left(\frac{V_o}{f}\right)^2$$

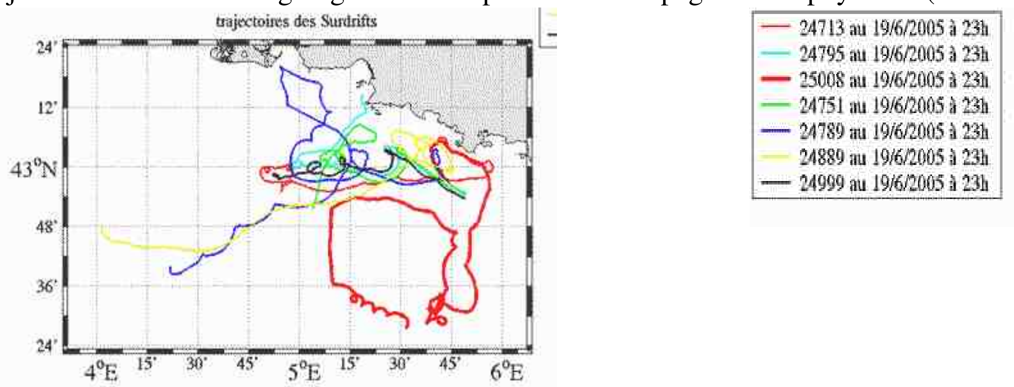
Cette dernière formule montre que la trajectoire parcourue par une particule fluide « piégée » dans une oscillation d'inertie, est un cercle de centre (x_o,y_o) et de rayon $|V_o|/f$.
La force de Coriolis agissant à droite du mouvement dans l'hémisphère nord, la particule parcourt le cercle d'inertie dans le sens indirect, soit dans le sens des aiguilles d'une montre. C'est l'inverse dans l'hémisphère sud.
Le cercle d'inertie est parcouru en un temps T dépendant uniquement de la fréquence d'inertie f.
A l'équateur, il n'y a pas de mouvement d'inertie et f croît avec la latitude.

Dans cette rotation circulaire, la force centrifuge (ou axifuge) est compensée par la force de Coriolis (rappel voir TD1 Cours Dynamique océanique ; Doglioli et Petrenko):

$$m\omega^2 r = m\left(\frac{u^2}{r}\right) = mfu$$
$$f = \frac{u}{r}$$
$$Du\,coup \quad T = \frac{2\pi}{f} = \frac{2\pi r}{u}$$

A une latitude donnée, il existe une relation entre vitesse et rayon du cercle d'inertie. Plus le module de la vitesse (dépendant du forcage générateur) est grand, plus le rayon est grand . La période de rotation elle ne change pas.

Des cercles purs sont difficiles à observer dans la nature à cause du frottement toujours présent dans la réalité, mais ils sont très souvent observés avec des flotteurs lagrangiens en tant que trajectoires circulaires s'atténuant au cours du temps. Dans la figure ci-dessous, sont dessinées les trajectoires de flotteurs lagrangiens lâchés pendant la campagne Ecolophy 2005 (MIO/Ifremer)



Les courants d'inertie sont générés par des variations locales du forçage atmosphérique. Le phénomène est le plus souvent observé en période de stratification. Dans ce cas, il y a un processus à deux couches qui se met en place, le courant d'inertie dans la couche inférieure est décalée temporellement de la moitié de la période d'inertie (déphasage de π).

Théorie

from Millot and Crepon, 1981, Inertial oscillations on the Continental Shelf of the Gulf of Lions – Observations and Theory, JPO vol 11, 5.

The density variation of the ocean is simplified by using a two-layer fluid. This is a crude, but realistic assumption corresponding to retention of only the first internal mode, which is the most important for small motions (Lightill, 1969; Gill and Clarke, 1974). Because of the small depths of the Gulf of Lions we will also investigate the effects of bottom friction on the motions.

Hydrostatic and Boussinesq assumptions are employed and we deal with the vertically averaged equations of hydrodynamics in each layer. Since we consider small perturbations from rest, the equations are linearized.

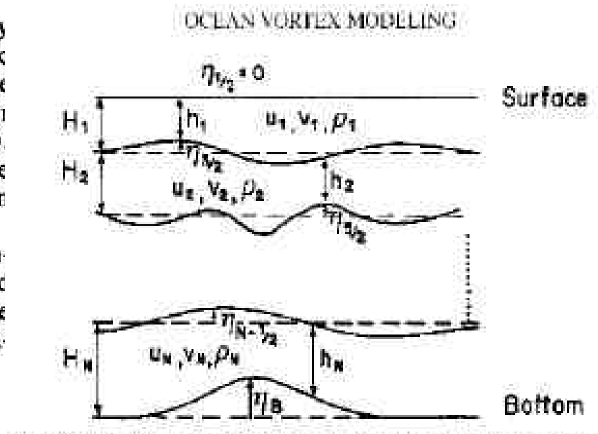


Figure 2a. Vertical cross-section of a N-layer shallow-water model.

In the upper fluid

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}_1 + f\mathbf{z}\times\mathbf{u}_1 = -g\nabla\zeta_1 + \frac{1}{\rho_1 h_1}(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_I) \quad (4.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\zeta_1 - \zeta_2) + \nabla h_1\mathbf{u}_1 = 0. \quad (4.$$

In the lower fluid

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}_2 + f\mathbf{z}\times\mathbf{u}_2 = -g\epsilon\nabla\zeta_2 - g(1-\epsilon)\nabla\zeta_1 + \frac{1}{\rho_2 h_2}(\boldsymbol{\tau}_I - \boldsymbol{\tau}_b), \quad (4.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\zeta_2 + \nabla h_2\mathbf{u}_2 = 0. \quad (4.$$

The terms are defined as follows:

ζ_1 (ζ_2)	elevation at sea surface (interface) from rest
$\mathbf{u}_1$ ($\mathbf{u}_2$)	averaged velocity in the upper fluid (lower fluid)
f	Coriolis parameter
g	acceleration of the gravity
ϵ	fractional change in density $[=(\rho_2-\rho_1)/\rho_2]$
∇	two-dimensional operator $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$
$\mathbf{z}$	unit vector along the vertical axis, positive upward
h_1 (h_2)	thickness of the upper layer (lower layer) at rest
$\boldsymbol{\tau}$	stress at the sea surface
$\boldsymbol{\tau}_I$	stress at the interface
$\boldsymbol{\tau}_b$	bottom stress.

Voir Section 6 (Carton 2005) du cours pour les équations en eaux peu profondes (EPP) en système multi-couche (Figure 2a ci-dessus), ici à 2 couches
Voir section 2.8 (EPP ou Equations de Saint Vénant) pour la notation de l'équation de la masse

Etant donné les echelles spatio-temporelles du processus, on peut faire l'hypothèse que f est constant et que la profondeur totale H = h1 + h2 l'est aussi.

D'après Thompson et O'Brien (1973), l'ordre de grandeur du stress à l'interface (τ_I) est un ordre de magnitude plus petit que τ_b et τ . Donc le couplage entre les 2 couches est du aux forces de pression. La tension de fond est considérée comme proportionnelle à la vitesse:

$$\tau_b = \rho_2 h_2 \nu u_2$$

ou ν est un coefficient d'atténuation (dimension t^{-1}).

Méthode de résolution

L'étude est effectuée le long d'une cote rectiligne x=0 (repère classique: x positif vers l'est, y positif vers le nord) avec un vent transitoire (i.e., VARIABLE). On fait l'hypothèse que la solution sera indépendante de y (dérivées par rapport à y nulles).

En effectuant la transformée de Laplace (Voir section 4.3 pour un résumé sur Laplace et la méthode de transformée de Laplace) par rapport au temps pour l'élévation, les vitesses et les tensions de stress, on a:

$$Z_i(p, x) = \int_0^\infty e^{-pt}\zeta_i(t, x)dt = \mathscr{L}(\zeta_i),$$

$$\mathbf{U}_i(p, x) = \int_0^\infty e^{-pt}\mathbf{u}_i(t, x)dt = \mathscr{L}(\mathbf{u}_i),$$

$$\mathbf{T}(p, x) = \int_0^\infty e^{-pt}(\mathbf{x}\tau^x + \mathbf{y}\tau^y)dt = \mathscr{L}(\boldsymbol{\tau}).$$

A partir des équations EPP (4.1 et 4.3), on peut trouver Ui à partir de Zi. Si on entre alors Ui dans les équations dérivés de la cons. de la masse (4.2 et 4.4), cela donne:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} Z_1 - (p^2 + f^2)(Z_1 - Z_2)\frac{1}{gh_1}$$
$$= \frac{1}{\rho_1 g h_1}\left(\nabla \mathbf{T} + \mathbf{z}\frac{f}{p}\nabla \times \mathbf{T}\right)$$
$$\times (p + \nu)\frac{\partial^2}{\partial x^2}[(1 - \epsilon)Z_1 + \epsilon Z_2]$$
$$- p[(p + \nu)^2 + f^2]Z_2\frac{1}{gh_2} = 0. \quad (4.($$

The solution of the homogeneous differenti: equation associated with (4.6) is of the form

$$Z = Ae^{\pm\alpha_i x},$$

where α_i is a positive eigenvalue of Eq. (4.6).

Alors :

If τ does not depend on x, and taking into account the radiation condition (the motions must vanish as x tends to infinity), the solution of (4.6) is

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= A_1 e^{-\alpha_1 x} + A_2 e^{-\alpha_2 x} \\ Z_2 &= B_1 e^{-\alpha_1 x} + B_2 e^{-\alpha_2 x}\end{aligned}\right\}, \qquad (4.7)$$

where

$$B_i = \left(1 - \alpha_i^2\frac{gh_1}{p^2 + f^2}\right)A_i,$$

$$A_i = (-1)^i\frac{1}{\rho_1(gh_1)^2\epsilon}(fT^y + pT^x)$$
$$\times \frac{p^2 + f^2 - \alpha_{3-i}^2 g\epsilon h_1}{(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)p\alpha_i}.$$

Here A_i does not depend on x; it is determined by the boundary condition $\mathbf{u}_i(t, 0) = 0$.

1) <u>Simplification – Cas ou</u> ν <u>le coefficient d'atténuation est pris nul</u> (= pas de tension de fond)

processus très étudié voir O'Brien et al (déjà en 1977)

les valeurs propres solutions pour α_i sont les suivantes:

$$\alpha_1^2 = \frac{p^2 + f^2}{c_1^2} \quad \text{et} \quad \alpha_2^2 = \frac{p^2 + f^2}{c_2^2}$$

avec $c_1 = (gH)^{1/2}$ vitesse des ondes longues barotropes

et $c_2 = \left(\frac{g\epsilon h_1 h_2}{H}\right)^{1/2}$ vitesse des ondes longues baroclines

avec r_i les rayons de déformation associés $r_i = \frac{c_i}{f}$

On a généralement $c_1 \gg c_2$ (eg, dans le golfe du Lion, $\frac{c_2}{c_1} \approx 2.10^{-2}$) et $r_1 \gg r_2$

Deux cas sont généralement traités:

1a – cas ou le vent est perpendiculaire à la côte
1b - cas ou le vent est parallèle à la côte

1a - cas ou le vent est perpendiculaire à la côte avec $\tau=\tau_0 Y(t) x$
$avec\, Y(t)=1\; pour\, t\geqslant 0\, et\; Y(t)=0\; pour\, t<0$

On trouve un upwelling près de la côte dans le terme d'élévation (voir papier pour plus de détails) et on obtient les vitesses suivantes pour les deux couches quand $0<x<r_2\leqslant r_1 et\;\, ft>2$:

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \frac{\tau_0}{\rho_1 f H}\frac{h_2}{h_1}\{(e^{-x/r_2}-1)\mathbf{y} + (x/r_2) \\
&\quad \times (ft)^{-1/2}(2/\pi)^{1/2}[\cos(ft-\pi/4)\mathbf{x} \\
&\quad - \sin(ft-\pi/4)\mathbf{y}]\} \\
\mathbf{u}_2 &= -\frac{h_1}{h_2}\mathbf{u}_1
\end{aligned}\right\} . \quad (4.16)$$

The spin-up time of (4.16) is $T = 2f^{-1}$. The inertial oscillations are polarized clockwise. The currents are baroclinic. The mean currents and the inertial oscillations in the upper and the lower layers have opposite phases, in agreement with the observations of Section 3.

1b - cas ou le vent est parallèle à la côte avec $\tau=\tau_0 Y(t) y$
$avec\, Y(t)=1\; pour\, t\geqslant 0\, et\; Y(t)=0\; pour\, t<0$

On retrouve un upwelling près de la côte dans le terme d'élévation et on obtient les vitesses suivantes pour les deux couches quand $0<x<r_2\leqslant r_1 et\;\, ft>2$:

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \frac{\tau_0}{\rho_1 H f}\frac{h_2}{h_1}\left\{\left(\frac{h_1}{h_2}+e^{-x/r_2}\right)ft\mathbf{y}\right. \\
&\quad + (1-e^{-x/r_2})\mathbf{x} + (x/r_2)(ft)^{-1/2} \\
&\quad \times (2/\pi)^{1/2}[\sin(ft-\pi/4)\mathbf{x} \\
&\quad \left. + \cos(ft-\pi/4)\mathbf{y}]\right\} \\
\mathbf{u}_2 &= \frac{\tau_0}{\rho_1 H f}\{(1-e^{-x/r_2})(ft\mathbf{y}-\mathbf{x}) \\
&\quad - (x/r_2)(ft)^{-1/2}(2/\pi)^{1/2} \\
&\quad \times [\sin(ft-\pi/4)\mathbf{x} + \cos(ft-\pi/4)\mathbf{y}]\}
\end{aligned}\right\} , \quad (4.20)$$

where the spin-up time of (4.20) is $T = 2f^{-1}$.

Il y a la présence d'un jet côtier près de la côte le long de y.

On remarque aussi que le cas est plus complexe que le précédent avec $u_1 = A + B \, et \, u_2 = \frac{-h_1}{h_2} B$

On the continental shelf, the behavior of currents is similar to that in (4.16). The inertial oscillations are polarized clockwise. The mean current perpendicular to the shore and the inertial oscillations are in opposite phases in the two layers, but the mean current parallel to the shore increases linearly with time and has a tendency to become semi-barotropic for distances off the shore of the order of r_2. This agrees with the observations of currents off the Oregon shore where the wind is parallel to a straight coastline (Smith, 1974).

2) Cas ou ν le coefficient d'atténuation n'est pas nul; solution plus complexe (voir Annexe du papier Millot and Crepon, 1981, Inertial oscillations on the Continental Shelf of the Gulf of Lions – Observations and Theory, JPO vol 11, 5.

Exemples de données

Déphasage de pi sous la thermocline visible sur les coupes verticales.

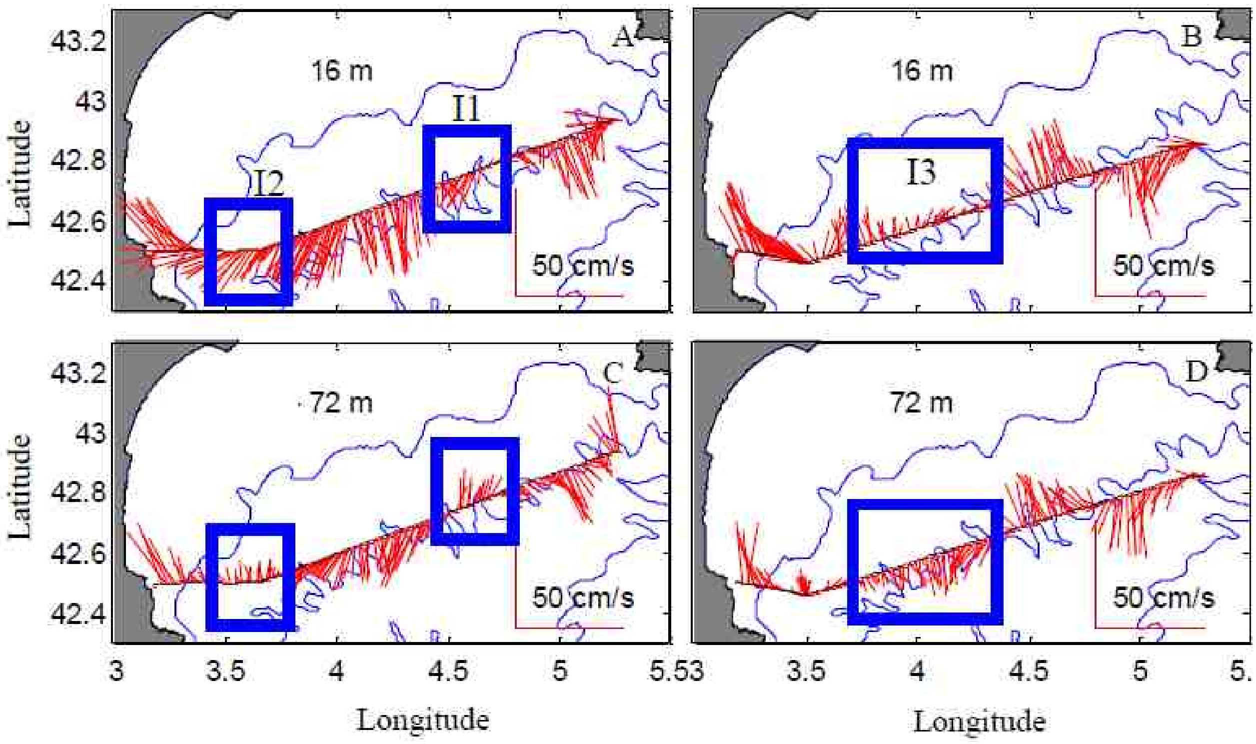


Fig. - Horizontal currents during MOOGLI 2 at A) 16 m and C) 72 m along transect TR1, and B) 16 m and D) 72 m along transect TR2. The boxes isolate the zones with inertial currents. At 16 m, they are labeled (I1, I2, and I3) in the chronological order currents were measured. Isobaths 100 m, 1000 m, and 2000 m are shown. (Fig 9 extraite de **Petrenko A.** (2003), *Circulation features in the Gulf of Lions, NW Mediterranean Sea; importance of inertial currents.* Oceanol. Acta, 26, 323-338)

and associated text:
"The presence of inertial currents can also be verified on the spatial maps of TR1 and TR2 currents. For example, surface inertial currents are oriented southwestward at the end of TR1 (I2) and northward in the center of TR2 (I3), about 10 hours after (Figure 9 and Table 1). A full rotation of 360 degrees representing 17.5 hours, it is expected that the inertial currents rotate by 126 degrees (taking into account the geostrophic component of the NC) clockwise in 10 hours. The observed clockwise rotation is ~ 120 degrees, in nearly perfect agreement with the one calculated. The inertial currents compared are separated by 50 to 75 km. This shows that our horizontal coherence assumption was acceptable. No coherence is found between I1 and I2, nor between I1 and I3."

Détection des intrusions

Quand des courants locaux pré-existent avant le coup de vent, ils peuvent continuer à être présents durant le coup de vent ; par exemple, superposition de deux courants: Courant Nord considéré comme quasi-géostrophique + courant d'inertie.

Si on veut filtrer les courants d'inertie pour obtenir les courants pré-existants, plusieurs méthodes sont possibles.

a) *Modèle*

Dans les sorties numériques de modèle de circulation, les courants peuvent être très nets.
Dans l'exemple donné, les courants sont montrés sur une période inertielle (Figure). Les courants d'inertie sont principalement visibles au sud et à l'est du plateau. Les courants sur le plateau tournent également dans le sens horaire mais avec un léger déphasage avec le courant d'inertie au large du plateau (déphasage ou légère différence de période ?).

Pour contourner ce problème, si l'on veut « retirer » l'influence des courants d'inertie, il suffit de moyenner les sorties numériques de courant sur la période inertielle, ou sur une période proche (ex période journalière mais avec un risque d'aliasing).

From Petrenko A., Y. Leredde, and P. Marsaleix (2005), *Circulation in a stratified and wind-forced Gulf of Lions, NW Mediterranean Sea: in-situ and modeling data.* Continental Shelf Res., 25, 5-27, doi:10.1016/j.csr.2004.09.004

"A strong inertial oscillation, with maximum amplitude of 60 cm/s, is clearly observed at the western side of the gulf due to the absence of the NC there. The model also exhibits this oscillation, and provides its temporal variations. The analysis, closely coupling in situ measurements and model
results, provides information that would not have been obtained using either data separately. »
(voir papier pour plus de détails)

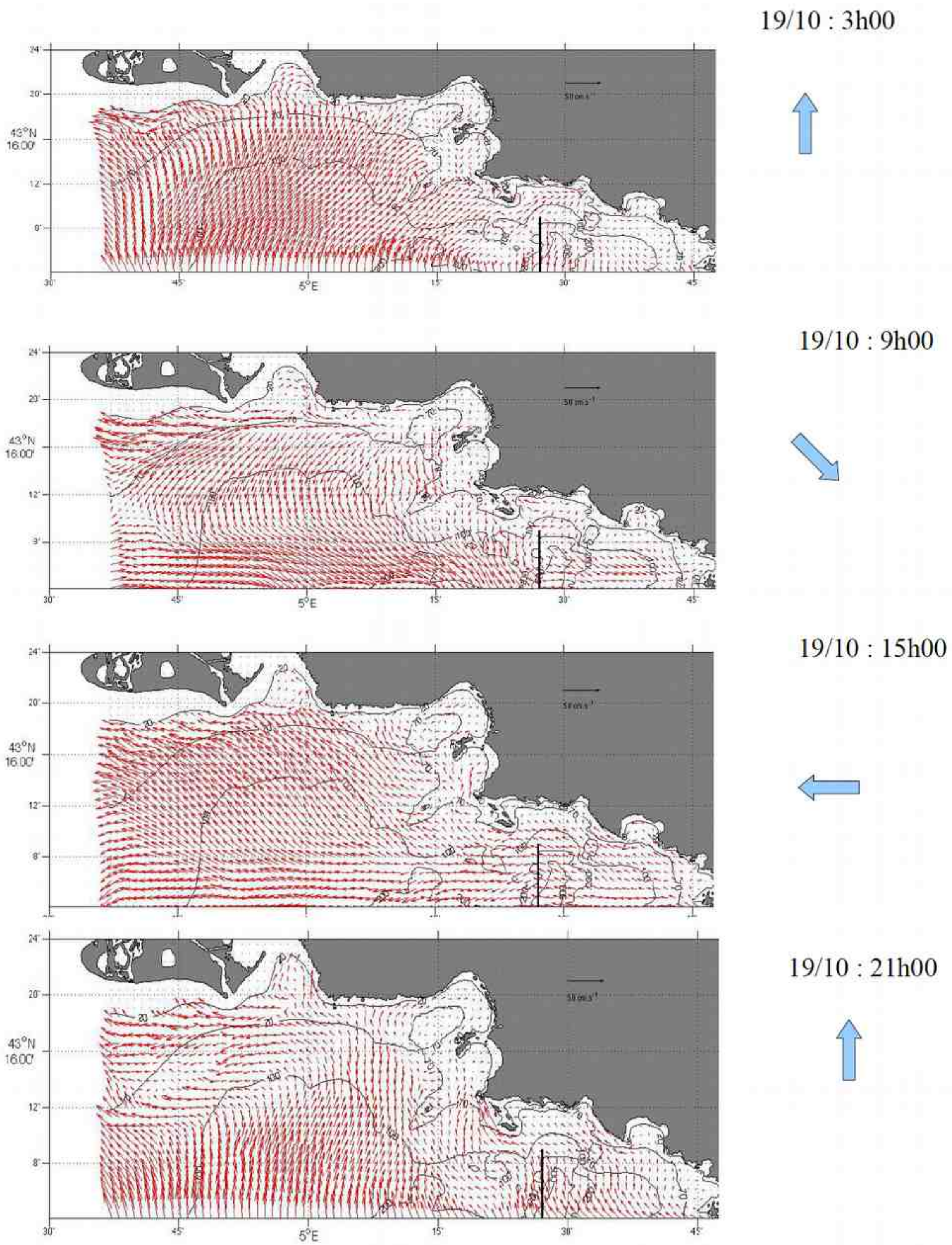


Fig. - Modélisation océanique au large de Marseille avec MARS 3D – Rhoma (remerciements F. Desbiolles, stage avec I. Pairaud et A. Petrenko, 2010)

b) *Données de courant mesurées in situ*

From Petrenko, A.A. (2003), *Circulation features in the Gulf of Lions, NW Mediterranean Sea; importance of inertial currents*, Oceanol. Acta, 26, pp. 323–338

“The summer stratification allows the development, after strong wind variations, of inertial currents with their characteristic 2-layer baroclinic structure. In the surface layer, the speed of the inertial oscillation can locally be as high as 200 % the NC speed. Otherwise the inertial current is about 2/3 the NC. Horizontal spatial coherence of inertial currents is found on scales up to 50 - 75 km. The contribution of these inertial currents to the measured circulation can not be neglected but is hard to estimate without the detailed and local analysis done in this article. The situation is different with time series data sets where high frequency motions such as inertial currents are classically filtered out. Spatial interpolation technique [*Candela et al.*, 1992] was tried unsuccessfully on the MOOGLI 1 ADCP data to isolate inertial currents (Durrieu de Madron, pers. comm.). The retrieval of the inertial component from the circulation is one of the main problems that oceanographers and modelers, working on the circulation in the Gulf of Lions and elsewhere, are presently dealing with."

plusieurs méthodes sont appropriées suivant les données disponibles

1 Plot de u+iv
2 Déroulement de phase
2 Sinusoïde additionnée au courant
3 Filtre passe-bande

1) Plot de u+iv - Soient u et v les composantes est et nord du courant, on peut dessiner u+iv en répresentation graphique. Si la courbe tourne autour de 0 en une période d'inertie, on a affaire à un courant inertiel. Si la courbe tourne autour de d'un point (u_o, v_o) en une période d'inertie, on a affaire à un courant inertiel superposé à un courant fixe de grandeur (u_o, v_o).

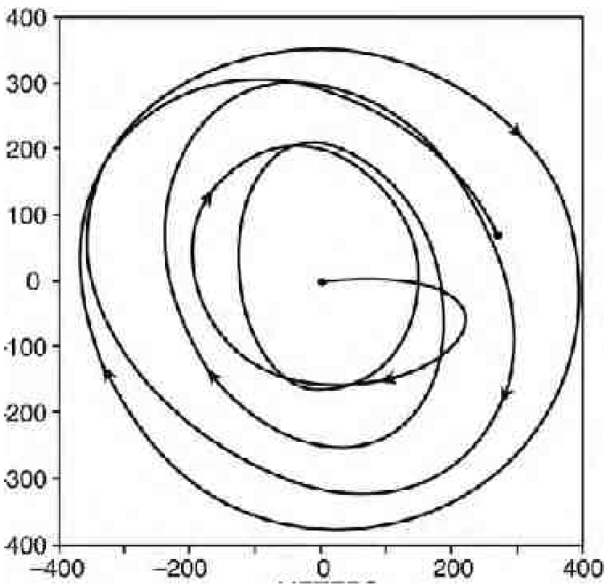


Fig Inertial circles observed by a current meter in the main thermocline of the Atlantic Ocean at a depth of 500 m; 28°N, 54°W. Five inertial periods are shown. The inertial period at this latitude is 25.6 h. (Courtesy of Carl Wunsch, MIT, via J. Marshall and A. Plumb « Atmosphere, Ocean and Climate Dynamics », Elsevier book, 2008, Fig 6.16)

2) Déroulement de phase
Chereskin JGR 1989

"La stratification estivale permet le développement, après un fort épisode de vent, de courants inertiels de structure barocline à 2 couches. Dans la couche supérieure, la vitesse de l'oscillation inertielle peut s'élever localement à 200 % la vitesse du CN. Sinon, dans la couche de surface, le courant inertiel représente à peu près 2/3 du CN. La cohérence des courants inertiels s'étend jusqu'à 75 km." extrait de Petrenko (2003).

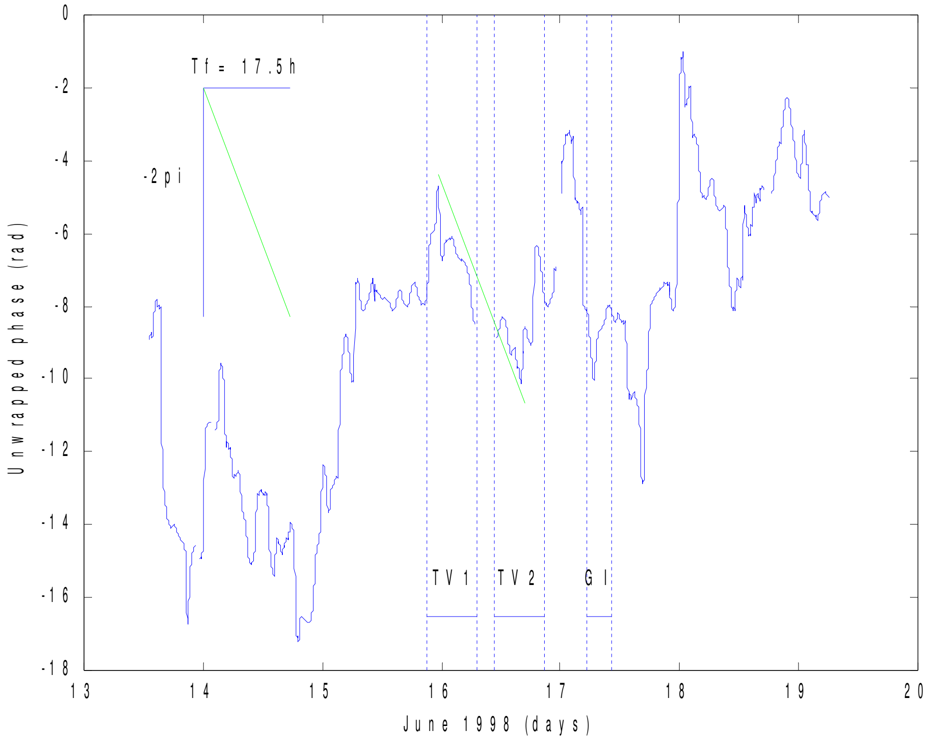
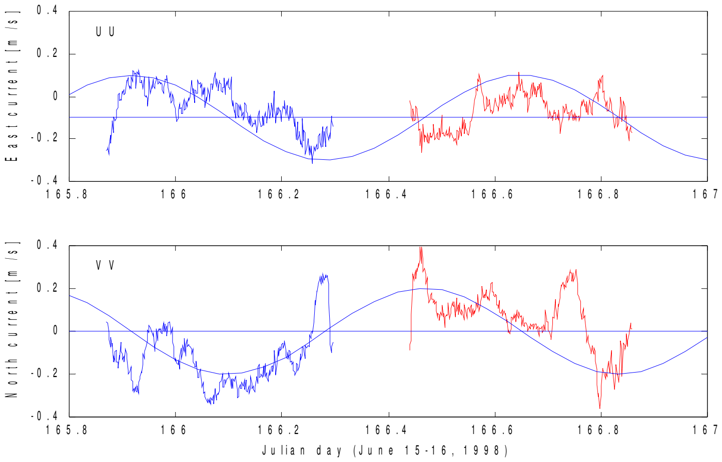


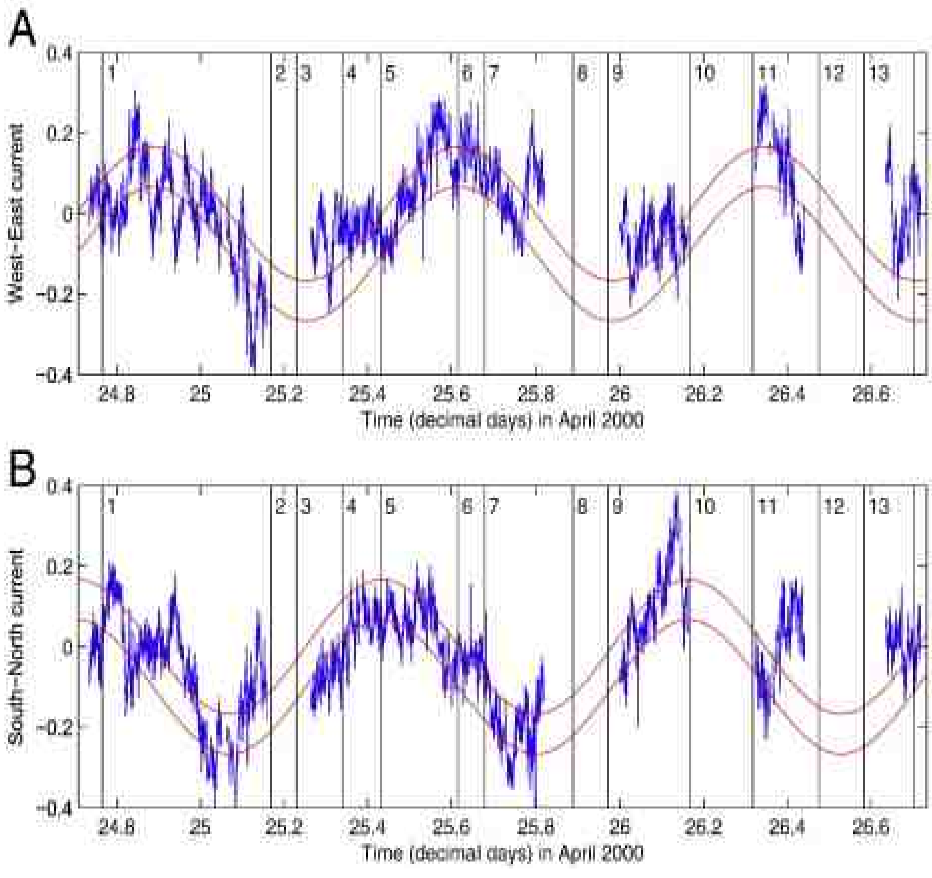
Fig. - Phase unwrapping of the horizontal current shear (16 m - 72 m) during June 13-19, 1998 (Moogli 2 cruise). The negative slope corresponding to the Coriolis factor is shown. Transects TR1, TR2 and GI were done during the periods indicated by vertical dotted lines. (Fig. 8 extraite de **Petrenko A.** (2003), *Circulation features in the Gulf of Lions, NW Mediterranean Sea; importance of inertial currents.* Oceanol. Acta, 26, 323-338)

3) Sinusoïde additionnée au courant



Time series of the A) west-east and B) south-north current components, at 16 m depth, along transects TR1 and TR2 of MOOGLI 2. Superimposed is a sinusoidal curve of inertial period, shifted by + π/2 on A compared to B. The means of the two components are also drawn: A) -0.10 m/s; and B) 0 m/s. (Fig 12 extraite de **Petrenko A.** (2003), *Circulation features in the Gulf of Lions, NW Mediterranean Sea; importance of inertial currents.* Oceanol. Acta, 26, 323-338).

and associated text:
"The mean current of the eastward component is around -10 cm/s, corresponding to the average westward speed of the NC. The mean component of the northward component is zero. The amplitude of the sinusoidal curve, corresponding to the inertial current, is about 20 cm/s. Hence, at that depth (16 m), the speed of the inertial oscillation can be locally as high as 200% the NC speed. Otherwise, the average speed of the NC in its core is about 30 cm/s; so the inertial current is about 2/3 the NC. It is important to remember that the thickness of the top layer of the inertial oscillation is about 30 m while the NC extends over 200 m; hence, the inertial oscillation energy is much smaller than the NC energy."



Time series of the ADCP current differences between two depths, in m/s A) *u*(12 m)–*u*(48 m), *u* being the west–east (+ east) component of the horizontal current and B) *v*(12 m)–*v*(48 m), *v* being the south–north (+ north) component during Sarhygol 2, April 2000. A sinusoid at the Coriolis frequency, representing the inertial oscillation is added to A and shifted by *π*/2 in B. (from Petrenko A**.**, C. Dufau and C. Estournel (2008), *Barotropic eastward currents in the western Gulf of Lion, north-western Mediterranean Sea, during stratified conditions.* J. Marine Syst., doi:10.1016/j.jmarsys.2008.03.004, Fig 2)

3 Filtre

papier à venir

D. Allain, 2014, Numerical filtering of geophysical data : methods and application on ocean inertial waves.

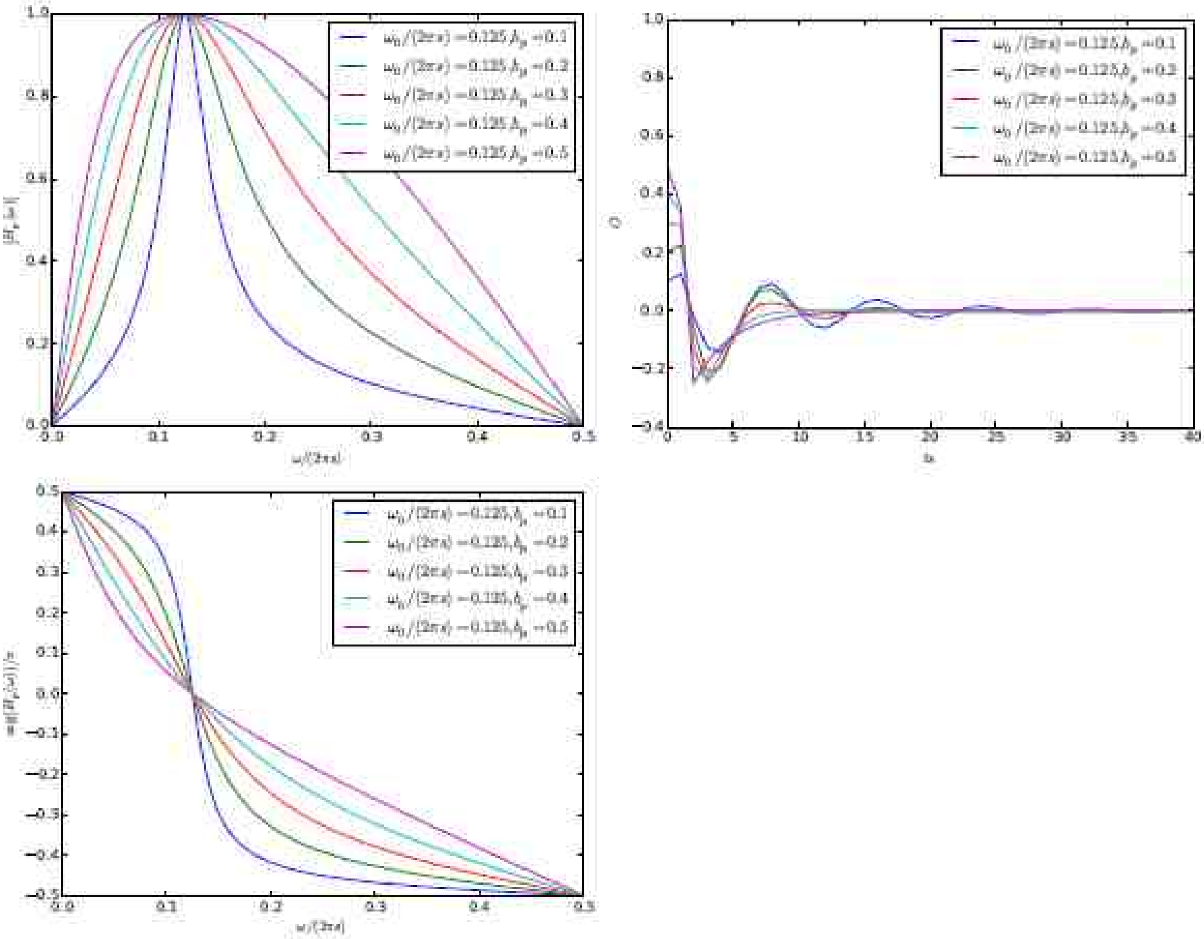
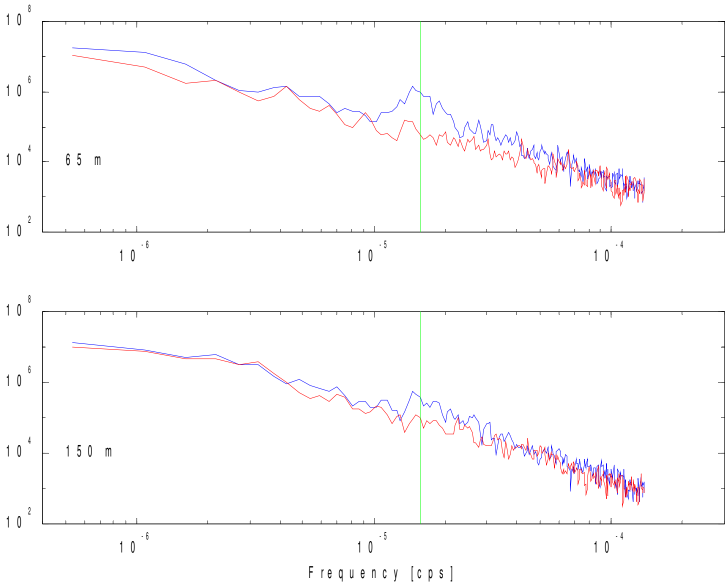


Figure 2: Amplitude and phase diagrams and convolution kernels of the DF-II IIR BP filter for different values of b_n

Pour plus de détails, contacter D. Allain (SHOM-founded CNRS research engineer working within the ECOLA team, damien.allain@legos.obs-mip.fr)

4) Rotary spectra



Rotary spectra versus frequency (bottom x-axis) for A) 65 m, B) 150 m currents measured at SOFI during April to June 1998. The black (grey) line is the clockwise (counter-clockwise) component of the spectra. Note that, at the inertial frequency (indicated by the vertical line), the clockwise component is much higher than the counter-clockwise component. (Fig 11 extraite de **Petrenko A.** (2003), *Circulation features in the Gulf of Lions, NW Mediterranean Sea; importance of inertial currents.* Oceanol. Acta, 26, 323-338).

5) Analyse en ondelettes

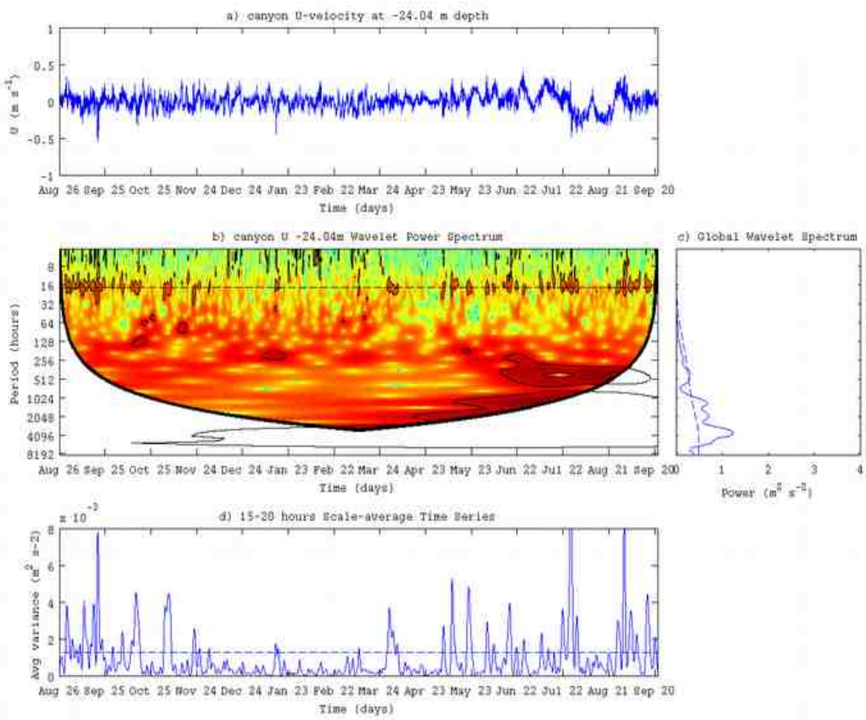


Fig – Analyse en Ondelettes de la série temporelle de vitesse acquise durant Latex (Mouillage du canyon) de aout 2009 à aout 2010 (Courtesy F. Nencioli) – outil d'analyse spectrale d'après Torrence and Compo, 1998.

ANNEXE : Script MATLAB

```
clear;close all;

x=[-200:1:0]*1000;%[m]
ustar=0.05; %[m/s]
f=1.04*10e-4; %[s^{-1}]
g=9.8; %[m/s^2]
h=100; %[m]

c=sqrt(g*h);%[m/s]
Rb=c/f ; %[m]
eta=ustar^2/f/c.*exp(x./Rb);

V=ustar^2/f*(exp(x./Rb)-1);

figure(1);

subplot(2,1,1);hold on;box on;
plot(x./1000,eta)
plot([-Rb -Rb]./1000,[0 0.1],'r:');
ylabel('eta [m]');
title(['u_* = ',num2str(ustar),'[m/s]
f = ',num2str(f),'[s^{-1}]    g =
',num2str(g),'[ms^{-2}]    h =
',num2str(h),'[m]']);

subplot(2,1,2);hold on;box on;
plot(x./1000,V)
plot([-Rb -Rb]./1000,[-3 0],'r:');
ylabel('V [m^2 s^{-1}]');
xlabel('distance de la côte [km]');

V=ustar^2/f*(exp(-Rb/Rb))
V*100/2.4
V=ustar^2/f*(exp(-3*Rb/Rb))
V*100/2.4
V=ustar^2/f*(exp(-7*Rb/Rb))
V*100/2.4
```

5. Tourbillons côtiers

Fondements
Les écoulement potentiels satisfaisaient simultanément les relations

$$\nabla \times \vec{v} = 0 \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

i.e. le champ de vitesse est irrotationel et incompressible.

Si le champs de vitesse est irrotationel (ou conservative), vu que par définition $\nabla \times (\nabla \Phi) = 0$, il doit exister un champ scalaire Φ dit potentiel des vitesses tel que

$$\vec{v} = \nabla \Phi \quad . \tag{5.1}$$

Si le champs de vitesse est solénoïdale (ou incompressible), vu que par définition $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{\Phi}) = 0$, il doit exister un champ vectoriel $\vec{\Psi}$ dit potentiel vecteur des vitesses tel que

$$\vec{v} = \nabla \times \vec{\Psi} \quad . \tag{5.2}$$

Si l'écoulement est plan (bidimensionnel horizontal), on a $\vec{\Psi} \equiv (0, 0, \Psi)$ et le champ scalaire $\Psi \equiv \Psi(x, y)$ est dit fonction de courant.
Les écoulement potentiels sont équivalents à des problèmes d'électrostatique dans le vide. Ces écoulements interviendront toutes le fois qu'on pourra négliger les effets de la viscosité.

Exemples

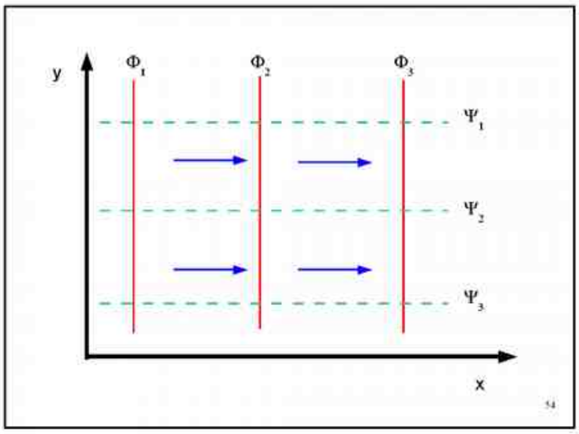
Écoulement parallèle uniforme

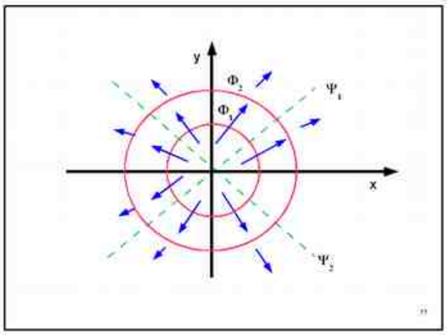
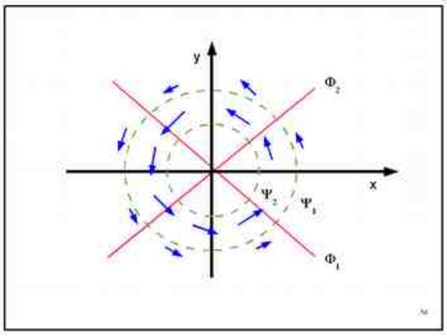
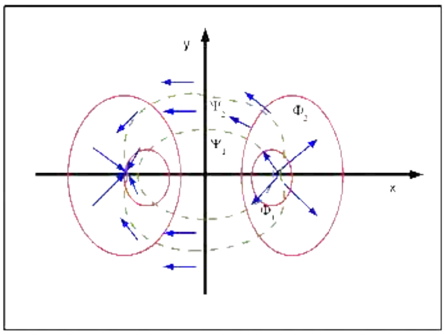
$$v_x = U \qquad v_y = 0$$

D'après les définitions (5.1) et (5.2)

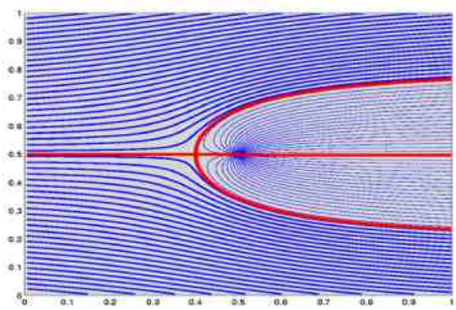
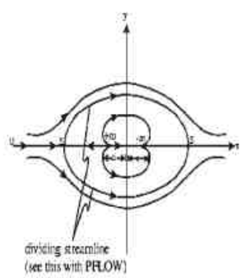
$$v_x = \partial_x \Phi = \partial_y \Psi \quad \text{et} \quad v_y = \partial_y \Phi = -\partial_x \Psi \quad \text{d'où}$$

$$\Phi = U\,x \quad \text{et} \quad \Psi = U\,y$$

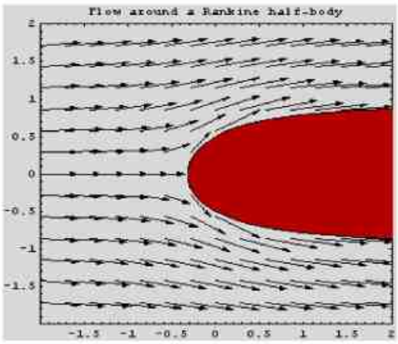


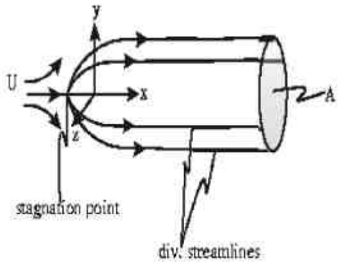
Source ou puits	$v_r = \frac{Q}{2\pi r} \quad v_\theta = 0$ $\Phi = \frac{Q}{2\pi} \log\left(\frac{r}{r_o}\right)$ $\Psi = \frac{Q}{2\pi}\theta$	
Tourbillon	$v_r = 0 \quad v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$ $\Phi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$ $\Psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \log\left(\frac{r}{r_o}\right)$	
Dipôle	$v_r = \frac{p\cos\theta}{2\pi r^2} \quad v_\theta = \frac{p\sin\theta}{2\pi r^2}$ $\Phi = -\frac{Q d \cos\theta}{2\pi r}$ $\Psi = \frac{Q d \sin\theta}{2\pi r}$	

La superposition des écoulements simples ci-dessus permet d'introduire des écoulements toujours potentiels mais un un peu plus compliqués.

Écoulement uniforme + Source/Puits	
Écoulement uniforme + Dipôle	

Dans ce type d'écoulement il y a des point où la vitesse est nulle dites point d'arrêt. La courbe qui représente la ligne de courant qui comprend le/les point/points d'arrêt sépare l'espace en deux régions où le fluide est apporté par chacun des deux écoulements de base. On peut la remplacer par un obstacle solide, sans modifier l'écoulement déterminé.
En 3D on parle de « Solides de Rankine » depuis le nome du chercheur qui a développé cette technique pour l'étude de l'architecture des bateaux.





http://web.mit.edu/fluids-modules/www/potential_flows/LecturesHTML/lec1011/

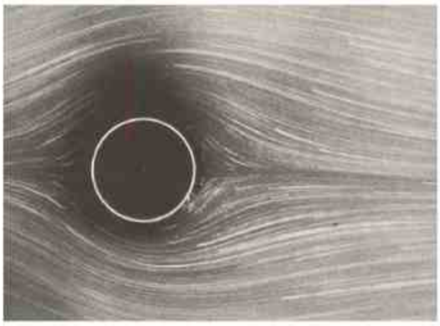
http://fr.wikipedia.org/wiki/William_Rankine

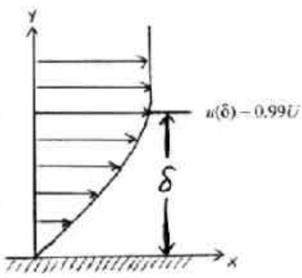
Couche limite laminaire

Loin du corps et tant que l'écoulement incident n'est pas turbulent, les termes des forces de viscosité de l'équation du mouvement (eq. Navier -Stokes)

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{u}$$

sont négligeables et l'écoulement a pratiquement le même profil de celui d'un fluide parfait.
Le raccordement entre la solution de fluide parfait et la condition de vitesse nulle sur les parois solides se fait dans une zone appelée couche limite, d'épaisseur d'autant plus faible que le nombre de Reynolds $Re = \frac{UL}{\nu}$ est grand. Dans cette région les termes de viscosité et de convection sont à prendre en compte simultanément. La notion de couche limite est la liaison entre 2 domaines de la mécanique de fluides l'écoulement potentiels des fluides parfaits et l'étude expérimentale de l'écoulement des fluides visqueux.





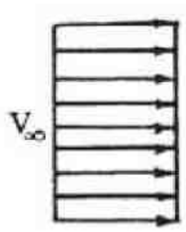
Création de vorticité relative

La vorticité relative est la composante verticale du rotationnel de la vitesse

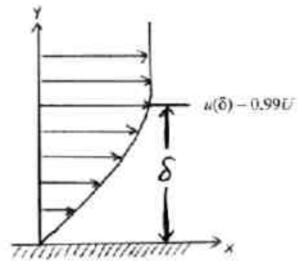
$$\zeta = \vec{k}(\nabla \times \vec{V}) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

La vorticité relative exprime la tendance d'un fluide à tourner. Le signe de ζ peut être illustré avec le schéma suivant :

Elle est appelée vorticité relative, car elle est mesurée par rapport à la terre.Dans la couche limite a cause de la condition de vitesse nulle sur la parois solide on a création de vorticité. Faisons un parallèle entre le cas visqueux et celui non visqueux



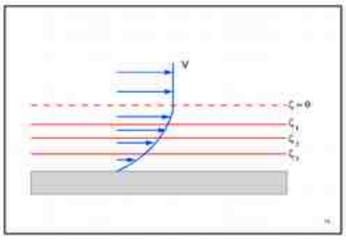
$$\vec{u} = (U, 0, 0) \text{ avec } U = const \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$



$$\vec{u} = (U, 0, 0) \text{ avec } U \equiv U(y) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} \neq 0$$

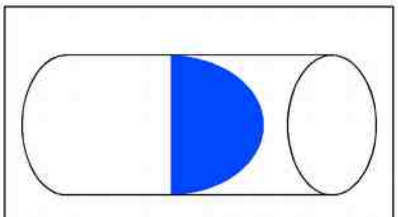
Dans la couche limite il y a donc création de vorticité relative.

si on dessine les isolignes on peut mettre en évidence comme la vorticité est concentré dans la couche limite

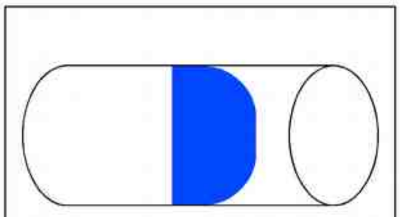


Couche limite turbulente

Jusqu'à maintenant on a parlé de viscosité en pensant à la viscosité moléculaire donc on a été dans des couche limites laminaires. Prandtl a adapté la notion de couche limite au cas turbulent.
Dans le cas laminaire le transport de quantité de mouvement est du à la viscosité moléculaire, il s'agissait donc d'un transport diffusif. Quand le transport convectif de quantité de mouvement joue un rôle plus important que le transport diffusif on est dans un écoulement turbulent. Les profiles de vitesse changent considérablement de forme. L'expérience de Reynolds a bien montré ce changement dans le cas d'un tube cylindrique: dans le cas laminaire on a le profile parabolique de l'écoulement de Poiseuille tandis que dans le cas turbulent, le profil est plus plat



Profil laminaire



Profil turbulent

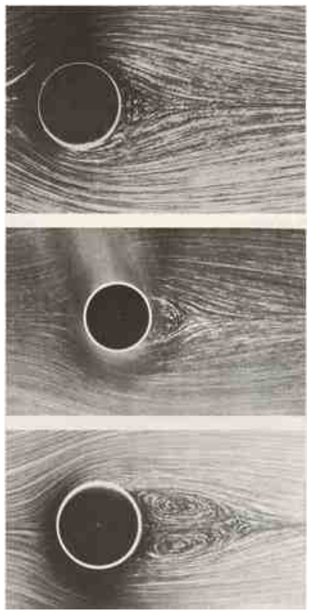
Mais dans tout les deux cas il y a une couche limite. Dans le cas turbulent il s'agisse d'une couche limite turbulente et dans cette couche il y a création de vorticité.

Différents régime d'écoulement

Selon les vitesses et les géométrie des écoulements, le transport de la quantité de mouvement d'un fluide peut être dominé par des phénomènes diffusifs ou convectifs. L'ordre de grandeur relatif de ces termes est le nombre de Reynolds qui peut être aussi interprété comme rapport entre le temps caractéristique de la diffusion de la quantité de mouvement et celui de la convection de celle ci.
Une expérience pour visualiser les différents régimes d'écoulement est la suivante: on pose un cylindre de diamètre D aligné le long de l'axe *z* dans un écoulement de vitesse *U* suivant la direction *Ox* perpendiculaire à son axe. En réalité en laboratoire en générale le fluide est a repos et on fait avancé le cylindre à la vitesse *U*, ce qui est équivalent. Pour visualiser les ligne de courant on peut mettre dans le fluide des particules fines et éclairer le dispositif par une nappe de lumière perpendiculaire. En fonction de la valeur de *Re* on distingue différent régimes.

Pour $Re \ll 1$ la vitesse est faible (ou le fluide très visqueux, mais ça nous intéresse pas trop en océanographie), l'écoulement laminaire, parfaitement symétrique entre l'amont et l'aval du cylindre. On a une situation très similaire à la solution du solide de Rankine.

Pour $Re \simeq 1$ on commence à observer deux tourbillons contrarotatifs fixes en aval du cylindre (écoulement de récirculation). La longueur de la zone de récirculation croît à l'augmenter de *Re*



Re = 1.54

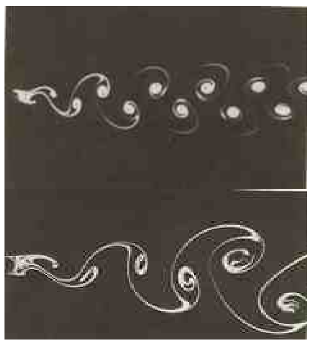
Re = 13.1

Re = 26

Pour $Re \simeq 50$ l'écoulement cesse d'être stationnaire et la vitesse du fluide dépend du temps: des tourbillons sont émis périodiquement en aval de l'écoulement. Ils forment une double rangée de tourbillons appelée allée de Von Karman. La fréquence d'émission est caractérisée par le nombre de Strouhal

$$Sr = f\,\frac{D}{u}$$

avec f fréquence d'émission des tourbillons .
Physiquement, il représente le rapport du temps d'advection et du temps caractéristique de l'instationnarité. Si Sr << 1, l'écoulement est dit quasi-stationnaire. Dans ce cas est constant et de l'ordre de 1 .



Re = 105

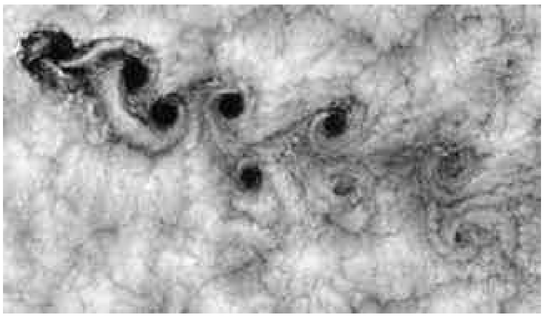
Re = 150

http://www.media.mit.edu/physics/pedagogy/nmm/student/95/aries/mas864/obstacles.html

Pour $Re \gg 1$ il y a superposition entre ces grandes structures cohérentes et des mouvements incohérentes, à des échelles spatiales plus faibles, autant plus petites que *Re* est grand. En pratique leur taille minimale décroît comme $1/\sqrt{Re}$

L'allée de Von Karman peut être observée jusqu'à très grand nombre de *Re* dans des écoulement océanographique ou atmosphériques, derrière des îles ou des obstacles de grande taille.

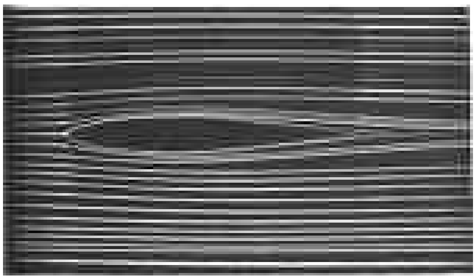
Ci-contre une allée de tourbillons de Von Kármán observé dans l'atmosphère au large de la côte chilienne près de l'île Juan Fernandez



Décollement

Qu'est-ce qu'il arrive à la vorticité une fois qu'elle a été générée?

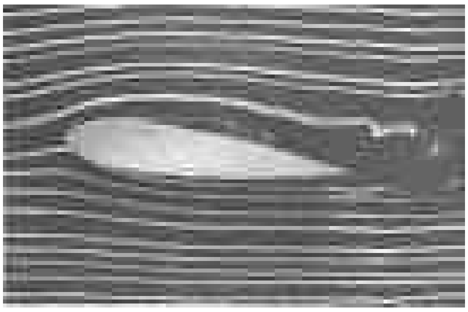
La vorticité générée près des parois est entraînée par l'écoulement dans un sillage en aval de l'obstacle. Dans le cas d'un profil d'aile placé sous incidence nulle dans un écoulement uniforme on peut voir un tout petit petit sillage en aval.

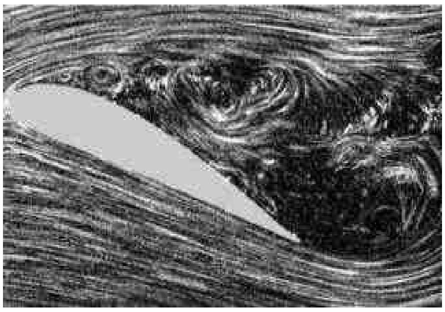


Quand on met un corps mal profilé il y a des changement importants. *Re* change parce que L change.
Prenons par exemple un cylindre. Dans ce cas la couche limite n'existe alors que sur la partie en amont de la surface du corps. En aval il y a un sillage turbulent de longueur comparable au corps même.

Ce phénomène est appelé décollement des couches limites. Dans ce cas l'écoulement en aval n'a plus rien à voir avec celui du d'un fluide parfait et la dissipation d'énergie ainsi que la force de traînée sur le corps sont considérablement augmentées.

Ci dessous deux exemples de décollement en aval d'une aile. Qu'est-ce que fait varier le nombre de Reynolds?





Équation de la vorticité relative intégrée sur la verticale

La formation et l'évolution des tourbillons en aval des caps peut être expliqués plus « simplement » en termes de production, advection et dissipation de vorticité.
Pour décrire les phénomènes qui nous intéressent les équations les plus simples sont celle en eaux peu profondes. Dans ces équations, malgré les approximations faites il y a encore toute la physique qui nous intéresse.
Pour un fluide homogène et en approximation hydrostatique les équations de la quantité de mouvement et de continuité peuvent s'écrire [Signell et Geyer, 91] :

$$\partial_t \vec{u} + \vec{u}\cdot\nabla\vec{u} + f(\vec{k}\times\vec{u}) = -g\nabla\eta - \frac{c_D \vec{u}|\vec{u}|}{h+\eta} + \nabla\cdot(A_H \nabla\vec{u}) \qquad \text{(A)}$$

$$\partial_t \eta + \nabla\cdot[\vec{u}(h+\eta)] = 0 \qquad \text{(B)}$$

L'équation de la vorticité moyennée sur la verticale est obtenue en calculant le rotationnel de l'équation (A).
Dans la suite on analyse chaque terme de l'équation
Le premier terme devient

$$\nabla\times\partial_t\vec{u} = \partial_t \nabla\times\vec{u} = \partial_t \vec{\zeta}$$

Le deuxième devient

$$\begin{aligned}\nabla\times(\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}) \;&=\; \nabla\times(\vec{\zeta}\times\vec{u}) \;= \\ &=\; \vec{u}\cdot\nabla\zeta - (\vec{\zeta}\cdot\nabla)\vec{u} + (\nabla\cdot\vec{u})\zeta + \vec{u}(\nabla\cdot\vec{\zeta}) \;= \\ &=\; \vec{u}\cdot\nabla\zeta - (\vec{\zeta}\cdot\nabla)\vec{u} - \frac{\zeta}{H}\left(\partial_t\eta + \vec{u}\cdot\nabla H\right)\end{aligned}$$

où le terme $\vec{u}(\nabla\cdot\vec{\zeta})$ est nul parce que c´est la divergence du rotationel de la vitesse et on a substitué la divergence de la vitesse obtenue à partir de (B) et $H = h+\eta$

Le terme de Coriolis peut s'écrire

$$\nabla\times f(\vec{k}\times\vec{u}) = f[\vec{k}(\nabla\cdot\vec{u}) - \vec{u}(\nabla\cdot\vec{k}) + (\vec{k}\cdot\nabla)\vec{u} - (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{k}] = f\vec{k}(\nabla\cdot\vec{u}) = -\frac{f}{H}\vec{k}\left(\partial_t\eta + \vec{u}\cdot\nabla H\right)$$

Le terme de gravité est nul parce que il est le rotationnel d'un gradient

$$\nabla\times(g\nabla\eta) = 0$$

Le terme de frottement sur le fond pour le moment on l'écrit simplement dans la façon suivante

$$\nabla\times\frac{c_D \vec{u}|u|}{h+\eta}$$

et enfin le terme visqueux en cosiderant une viscosité turbulente costante, devient

$$\nabla\times A_H \nabla^2\vec{u} \;=\; A_H \nabla^2(\nabla\times\vec{u}) \;=\; A_H \nabla^2\vec{\zeta}$$

Étant dans le cas bidimensionel, la vorticité $\vec{\zeta} = \vec{k}(\partial_x v - \partial_y u)$ est un vecteur avec la seule composante verticale non nulle, on peut donc écrire l'équation cette seule composante

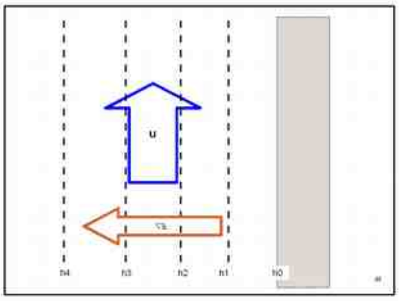
$$\partial_t\zeta + \vec{u}\cdot\nabla\zeta = \frac{\zeta+f}{H}[\partial_t\eta + \vec{u}\cdot\nabla H] - \left[\nabla\times\left(\frac{C_D\vec{u}|\vec{u}|}{H}\right)\right]\cdot\vec{k} + A_H\nabla^2\zeta$$

Dans cette équation, la partie gauche décrive la vitesse de changement de la vorticité et son advection, i.e. le changement de vorticité en suivant une particule de fluide avec masse fixée.
La partie droite représente les processus qui provoquent ces changements:
i) le premier terme est la production de vorticité due à la compression (ou à l'étirement) et à la vorticité planétaire;
ii) le deuxième est la production et dissipation due à la friction sur le fond.
iii) le troisième est la diffusion de la vorticité due au processus de mélange turbulent.

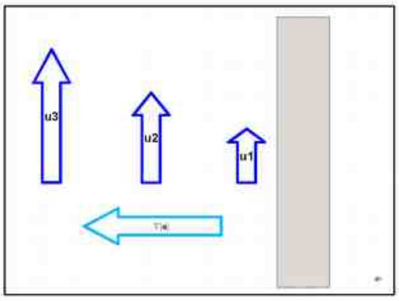
À cause de la petite profondeur des zones côtières le deuxième terme peut être très important. Si on développe ce terme on obtient encore une fois trois termes:

$$\left[\nabla\times\left(\frac{C_D\vec{u}\,|\vec{u}|}{H}\right)\right]\cdot\vec{k} = \frac{c_D|\vec{u}|}{H^2}[\vec{u}\times\nabla H]\cdot\vec{k} - \frac{c_D(\vec{u}\times\nabla|\vec{u}|)}{H} + \frac{c_D|\vec{u}|\zeta}{H}$$

a) « slope torque »: création de vorticité quand il y a une composante de la vitesse perpendiculaire au gradient de la bathymétrie. Physiquement on peut expliquer ça en pensant que l'eau plus proche de la côte subie un frottement intégré sur la verticale plus fort que l'eau au large.



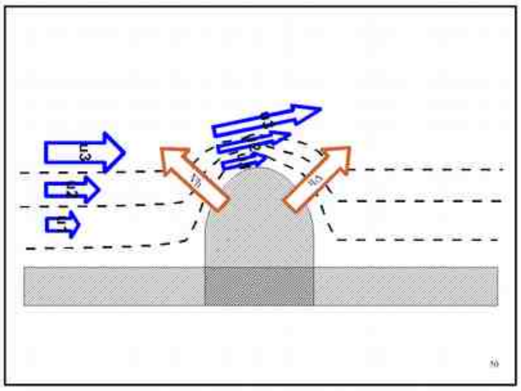
b) « speed torque »: il y a création de vorticité quand il y a une composante de la vitesse perpendiculaire au gradient de la vitesse même. Ce phénomène est lié au fait que le frottement obeit à une loi quadratique. Un écoulement plus rapide est beaucoup plus retardé que un écoulement un peu plus lent.



c) dissipation de la vorticité à cause du frottement. L'échelle temporelle du phénomène est $\tau = \frac{H}{c_D|\vec{u}|}$

En proximité d'un cape il y a plusieurs mécanismes qui peuvent générer de la vorticité.

La faible profondeur et les forts gradients de bathymétrie peuvent correspondre au mécanisme a) comme aussi au mécanisme b). En effet, l'écoulement le long des isobathes subit des forts gradients de bathymétrie, mais aussi des fort gradients de vitesse perpendiculaires à la direction de l'écoulement générale.
Un troisième source de vorticité sera aussi la condition latérale de vitesse nulle à la côte.



En proximité d'un cape, on a donc un fluide généralement très riche en vorticité, mais on n'a pas forcement des tourbillons. Afin que ces derniers puissent se former il faut que le fluide riche en vorticité ne reste pas confiné dans la couche limite mais il puisse rejoindre l'intérieur du fluide. Si l'écoulement reste parallèle à la côte, le phénomène ne peut pas se passer, en revanche s'il y a décollement oui. Il faut alors étudier les conditions de décollement.

Décollement en proximité d'un cape

Dans la couche limite, si on adopte un système de coordonnées qui suit l'écoulement, les dérivées par rapport à la coordonnée parallèle à la côte x_1 sont beaucoup plus petites que celles par rapport à la coordonnée perpendiculaire x_2 .
L'équation de la composante parallèle et celle de continuité s'écrivent:

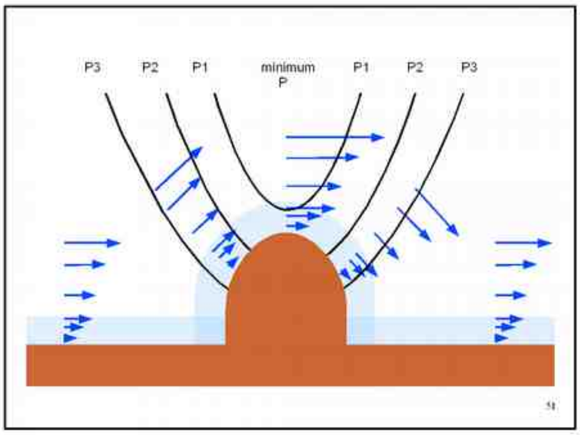
$$\partial_t u_1 + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x_1} - \frac{c_D U_o u_1}{h} + A_H \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \quad \text{(C)}$$

$$\partial_{x_1} u_1 h + \partial_{x_2} u_2 h = 0 \quad \text{(D)}$$

avec U_o amplitude de l'écoulement loin du cap (en particulier pour les courant de marée).
En absence de frottement au fond et de topographie, ces équations sont équivalentes aux équations de Prandtl pour la couche limite d'un écoulement bidimensionnel.

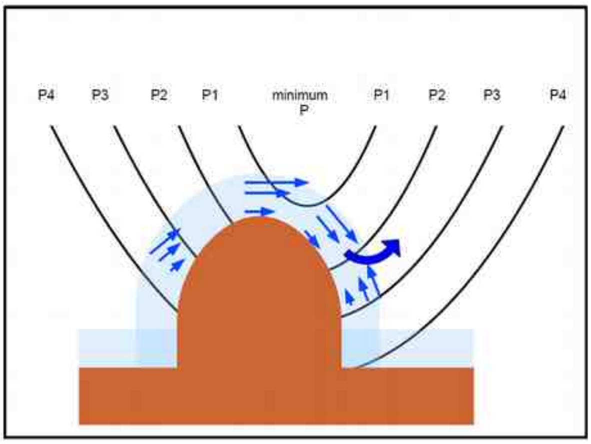
On considère d'abord le cas d'un écoulement stationnaire et sans frottement au fond.

En dehors de la couche limite l'écoulement accélère en s'approchant à la pointe du cape.
En suite il ralenti dès que la pointe a été dépassée.
Selon la loi de Bernoulli cela génère un minimum local de pression à l'extrémité du cap. Le long de la frontière de la couche limite il y a donc un gradient de pression favorable (dans le sens que P diminue dans la direction de l'écoulement) en amont et défavorable en aval.



En amont, le gradient de pression favorable maintient le mouvement de l'amont à l'aval du fluide dans la couche limite, parce qu'il compense la perte de quantité de mouvement dans la couche limite.

En revanche, en aval, le gradient de pression défavorable soustrait de la quantité de mouvement à la couche limite.
Quand dans la couche limite il n'y a plus assez d'advection de quantité de mouvement de l'amont, l'écoulement commence à virer en arrière.
Par continuité la décélération de l'écoulement parallèle à la côte doit être accompagnée par un flux vers le fluide intérieure, loin de la couche limite.



Le point le long de la frontière de la couche limite où l'écoulement parallèle à la côte devient nul est dit point de décollement.
Ici la ligne de courant à la frontière avec la couche limite part vers l'intérieur de l'écoulement.

La distance entre le point de pression minimale et le point de décollement dépend du flux de quantité de mouvement et de l'intensité du gradient de pression défavorable (donc, de l'écoulement).

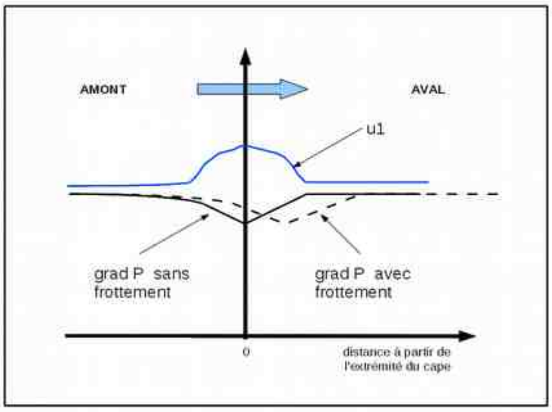
Pour un fluide visqueux sans frottement au fond les termes d'advection sont tous petits proche de la couche limite et le bilan de la quantité de mouvement (équation C) est fait entre le gradient de pression et le termes d'étirements

$$g\frac{\partial \eta}{\partial x_1} = A_H \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \qquad \text{(C')}$$

un gradient de pression défavorable demande seulement que l'écoulement ait une courbature négative près de la couche limite et par conséquence que le profile de vitesse parallèle à la côte aie un point d'inflexion.
Physiquement cela signifie que il n'y a pas de décollement si le flux de quantité de mouvement est assez fort pour contraster le gradient de pression défavorable.

Mais en circulation côtière le frottement au fond est important!
Dans ce cas le maximum de vitesse ne correspond plus au minimum de pression parce que le gradient de pression doit contraster advection *et aussi* le frottement!

Le minimum de pression se déplace donc en aval du maximum de vitesse.



Le bilan de la quantité de mouvement devient entre le gradient de pression et le terme de pression:

$$g\frac{\partial \eta}{\partial x_1} = -\frac{c_D U_o u_1}{h} \qquad \text{(C'')}$$

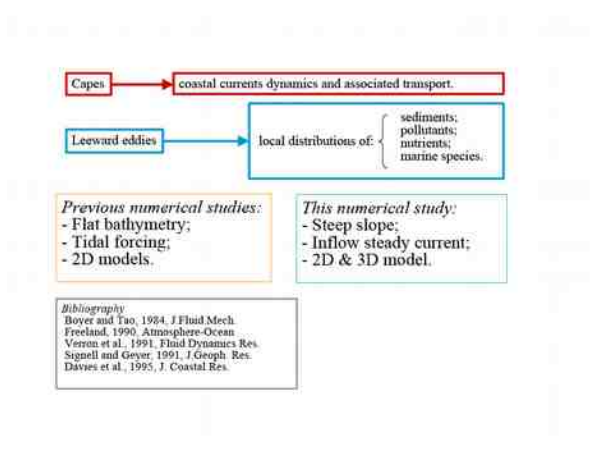
Notez que maintenant le gradient de pression défavorable demande que u_1 aie un signe opposé: donc si jamais il y a l'inversion du gradient alors il y a tout de suite décollement parce que u_1 change de signe.
Le problème du décollement devient donc celui de l'inversion du gradient de pression.

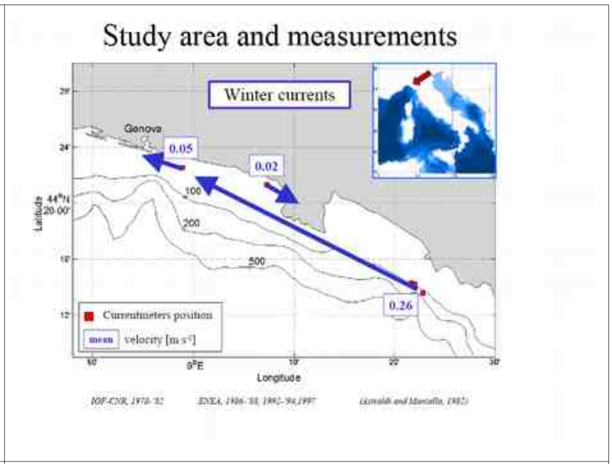
Avec un modèle analytique, Signel et Geyer ('91) démontrent que il y a inversion du gradient de pression quand (en absence de marée) le terme d'advection domine le frottement.
Pour un cape avec forme fixée *a/b* , l'importance des termes de advection est mesurée par le nombre de Reynolds équivalent:

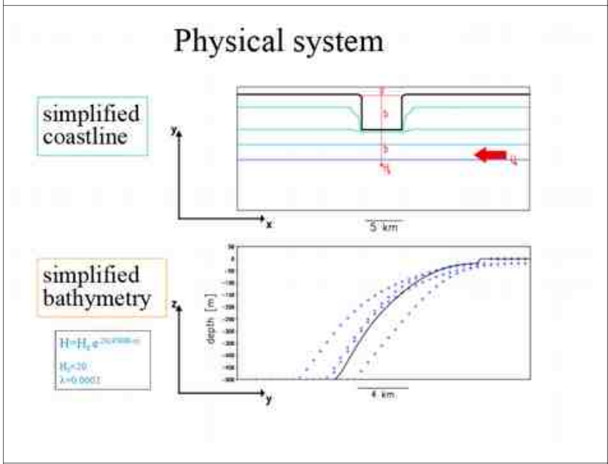
$$Re_f = \frac{H}{C_D a}$$

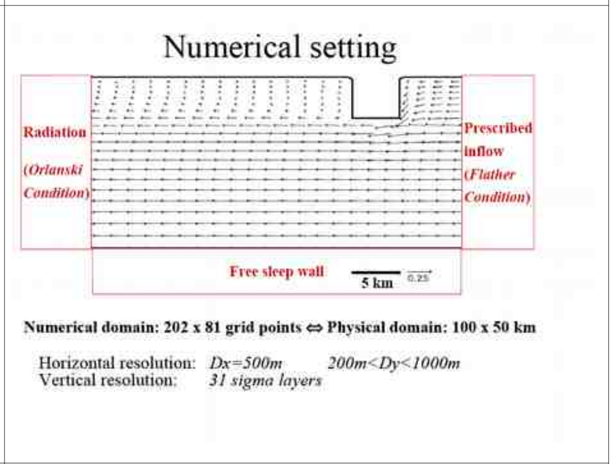
D'une façon similaire au nombre de Reynolds, à la variation de la valeur de Re_f on observe différentes régimes d'écoulement en aval d'un cape [Doglioli et al, 2004 et présentation ci-dessous].

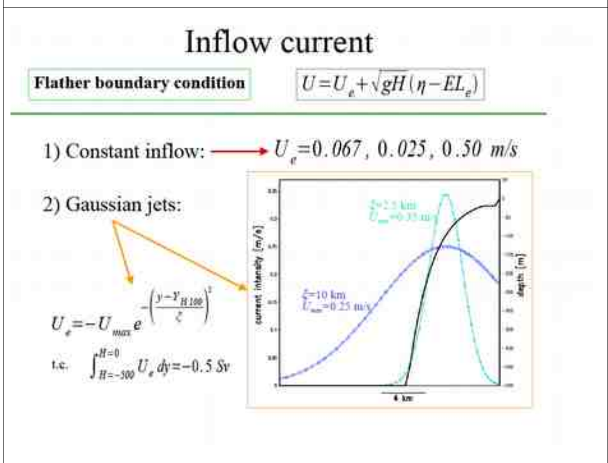
5.5 Exemple : circulation autour du Promontoir de Portofino

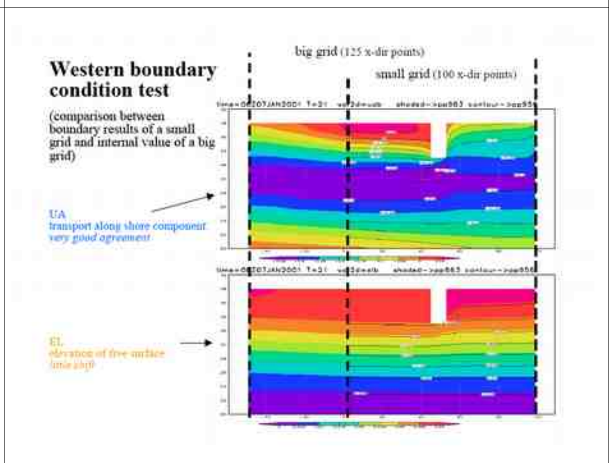


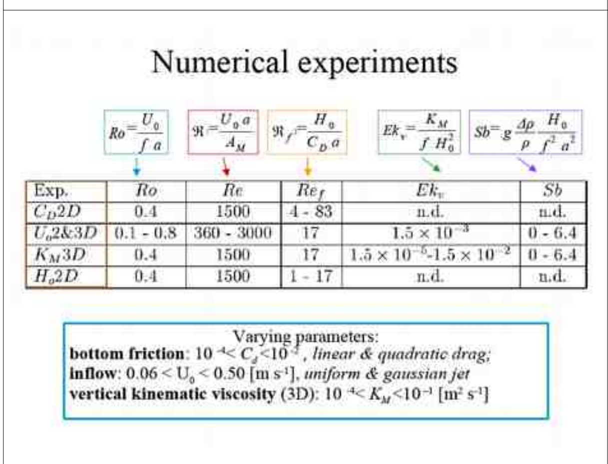




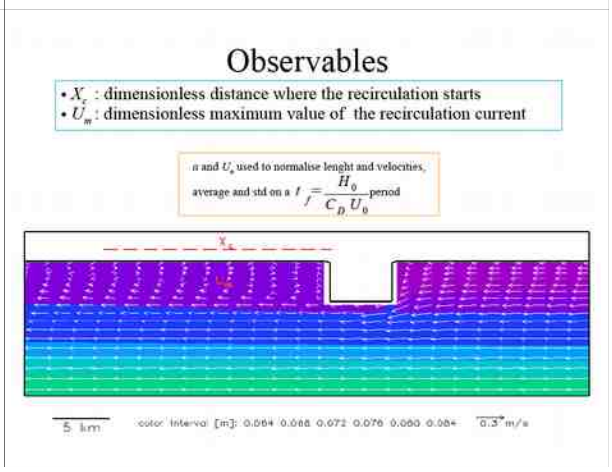


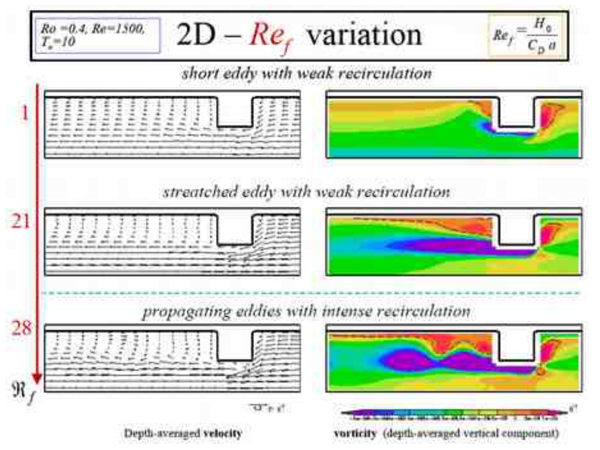


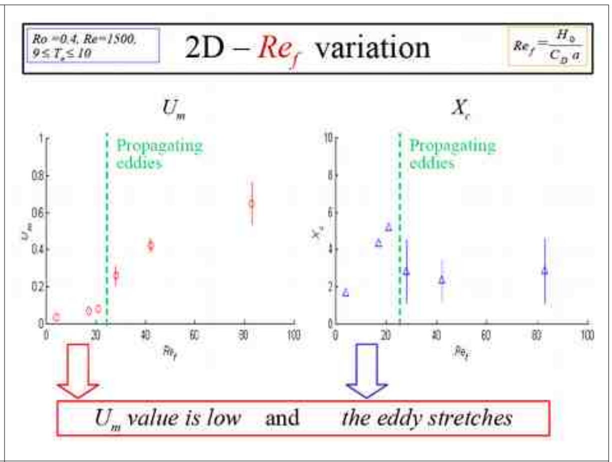


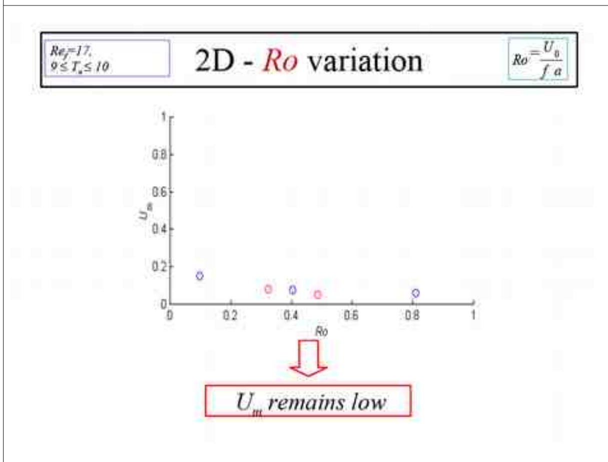


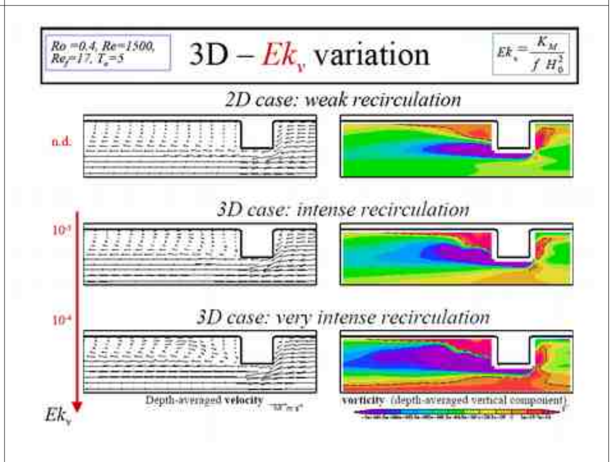
Exp.	Ro	Re	Re_f	Ek_v	Sb
C_D2D	0.4	1500	4 - 83	n.d.	n.d.
$U_o2\&3D$	0.1 - 0.8	360 - 3000	17	1.5×10^{-3}	0 - 6.4
K_M3D	0.4	1500	17	1.5×10^{-5}-1.5×10^{-2}	0 - 6.4
H_o2D	0.4	1500	1 - 17	n.d.	n.d.

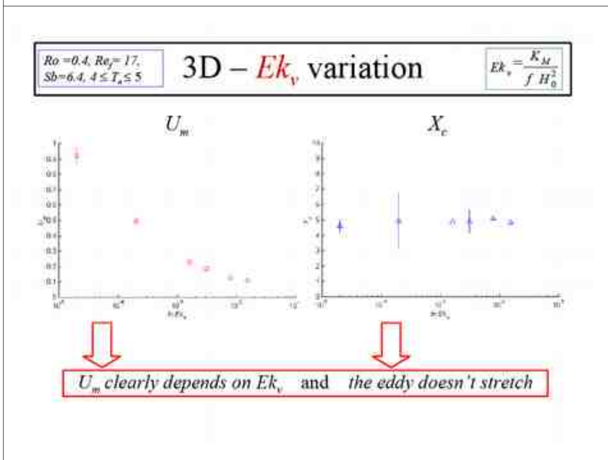


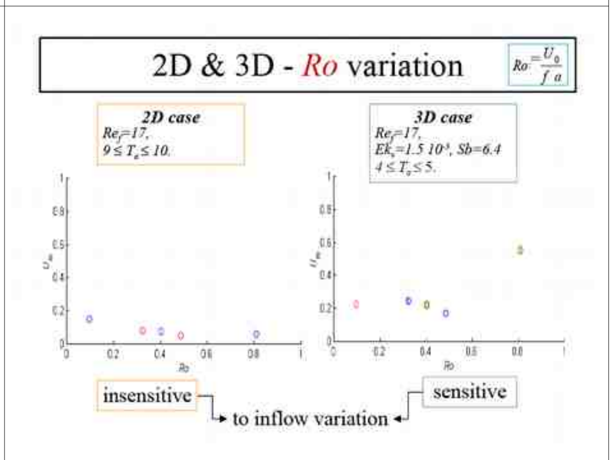

Ro =0.4, Re=1500, T_a=10
2D – Re_f variation
Re_f = H_0 / C_D a
short eddy with weak recirculation
1
streatched eddy with weak recirculation
21
propagating eddies with intense recirculation
28
ℜ_f
Depth-averaged velocity
vorticity (depth-averaged vertical component)

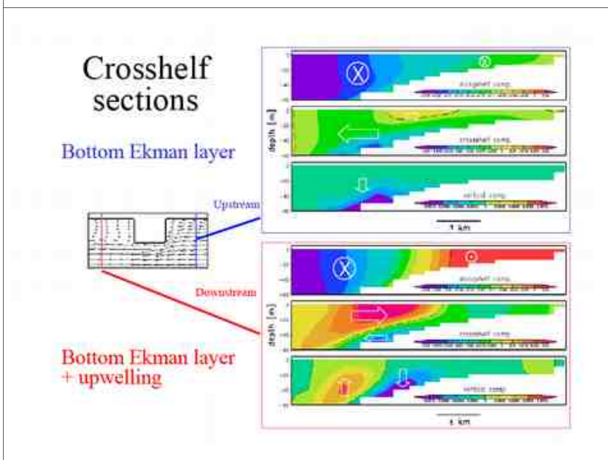

Ro =0.4, Re=1500, 9 ≤ T_a ≤ 10
2D – Re_f variation
Re_f = H_0 / C_D a
U_m
X_c
Propagating eddies
Propagating eddies
U_m value is low and the eddy stretches

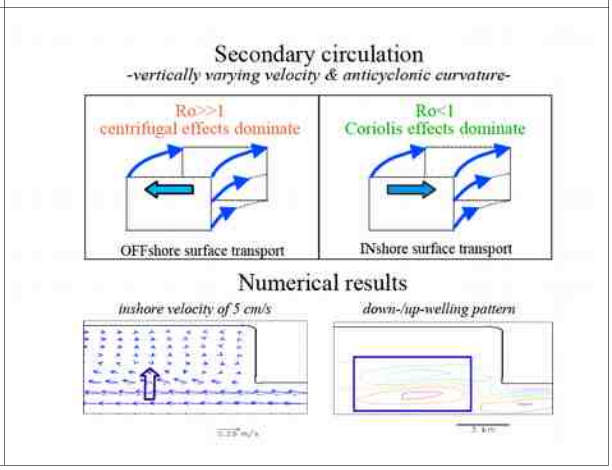

Re_f=17, 9 ≤ T_a ≤ 10
2D - Ro variation
Ro = U_0 / f a
Ro
U_m remains low


Ro =0.4, Re=1500, Re_f=17, T_a=5
3D – Ek_v variation
Ek_v = K_M / f H_0^2
2D case: weak recirculation
n.d.
3D case: intense recirculation
10⁻³
3D case: very intense recirculation
10⁻⁴
Ek_v
Depth-averaged velocity
vorticity (depth-averaged vertical component)

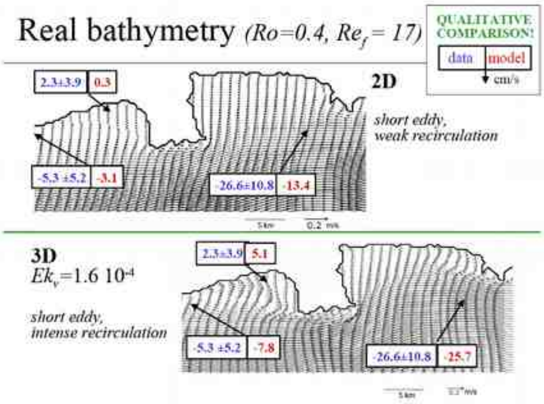

Ro =0.4, Re_f= 17, Sb=6.4, 4 ≤ T_a ≤ 5
3D – Ek_v variation
Ek_v = K_M / f H_0^2
U_m
X_c
U_m clearly depends on Ek_v and the eddy doesn't stretch


2D & 3D - Ro variation
Ro = U_0 / f a
2D case
Re_f=17, 9 ≤ T_a ≤ 10.
3D case
Re_f=17, Ek_v=1.5 10⁻³, Sb=6.4
4 ≤ T_a ≤ 5.
insensitive
to inflow variation
sensitive


Crosshelf sections
Bottom Ekman layer
Upstream
Downstream
Bottom Ekman layer + upwelling
depth [m]
1 km


Secondary circulation
-vertically varying velocity & anticyclonic curvature-
Ro>>1
centrifugal effects dominate
Ro<1
Coriolis effects dominate
OFFshore surface transport
INshore surface transport
Numerical results
inshore velocity of 5 cm/s
down-/up-welling pattern

Real bathymetry *(Ro=0.4, Re_f = 17)*



Conclusions

- in the case of *inflow steady current + narrow shelf + steep slope* the 2D models might not be appropriate;

-in 3D, the resolved bottom Ekman layer and secondary circulation could explain the leeward eddy intensification;

- with the realistic bathymetry 3D model, a good calibration is obtained varying both Re_f and Ek_v;

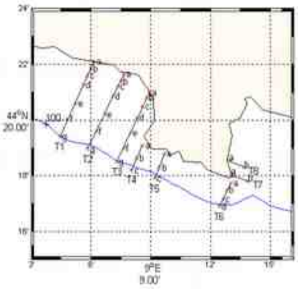
Outlooks

- time varying inflow;
- real stratification;
- new data.

Grigliato:

Metodo

misure idrologiche
17 giugno: 35 stazioni
9 agosto: 36 stazioni



Sonda IDRONAUT
OCEAN SEVEN 316 CTD multiparameter probe ???

Conducibilita'
Temperatura
Salinita'
O2
Chl-A

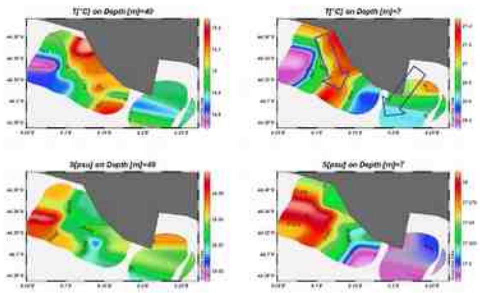
Metodo

misure correntometriche e idrologiche

SEPTR
(Shallow water Environmental Profiler in Trawl-safe Real-Time)

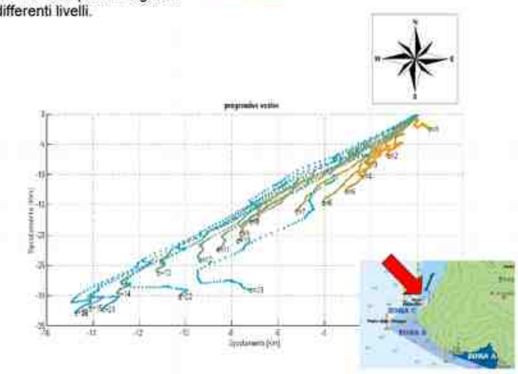
CTD
17 giugno

Risultati



Vettori progressivi della corrente ricampionata ogni 6h a differenti livelli.

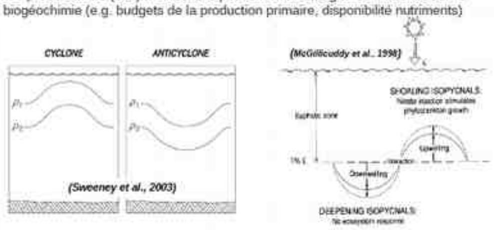
Risultati



5.6 Exemple : tourbillons dans l'ouest du Golfe du Lion

Motivations – Question ouvertes

Les processus de (sub)mesoechelle peuvent avoir une grande influence sur la biogéochimie (e.g. budgets de la production primaire, disponibilité nutriments)



Études recentes intéressants en **océan ouvert**
(e.g. Benitez-Nelson et al. 2007, McGillicuddy et al. 2007, Dickey et al 2008)

TOURBILLONS	TYPE D'EAU	BIOLOGICAL PUMP
Cyclones	oligotrophique	sousestimation
Anticyclones	*eutrophique*	*surestimation*

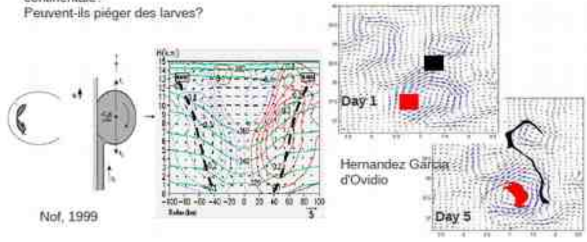
Motivations – Question ouvertes

*En plus, peu est connu **en eaux côtières***

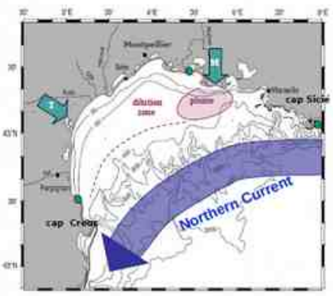
Comment se forment ces tourbillons? Quel est leur dynamique?

Y a-t-il des circulations secondaires? Avec des fortes vitesses secondaires?
Quel est leur rôle dans la dispersion?

Facilitent-ils le transfert horizontal de matière au travers du plateau et de la pente continentale?
Peuvent-ils piéger des larves?



Study zone: Gulf of Lion (GoL)



Forcings:

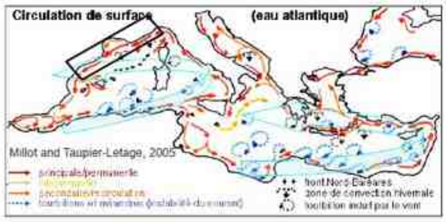
1- Rhone plume

2- Winds : Tramontane, Mistral.

3- Northern Current (NC)

Zone d'étude : Golfe du Lion

Le Courant Nord est partie intégrante de la circulation générale de la Méditerranée



I approximation : courant géostrophique, i.e. barriere dynamique

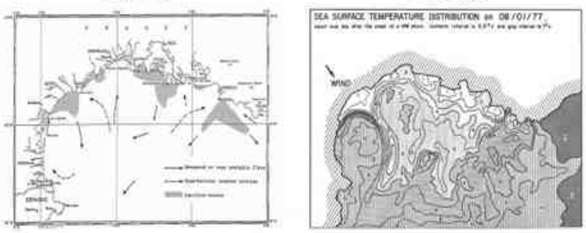
reputation de stabilité par rapport aux courants coté sud,

*mais aussi **comportement turbulent***

Zone d'étude : Golfe du Lion

Circulation anticyclonique dans l'ouest

Millot, 1979 | Millot, 1982



LATEX - LAgrangian Transport Experiment

PIs: Anne Petrenko and Frédéric Diaz
financement LEFE/IDAO&CYBER – Région PACA
Pilot project 2007 – Main project 2008-11

Objectif
comprendre le rôle de la dynamique couplée physique-biogéochimie à (sub) mésoéchelle dans les échanges de matière et d'énergie entre les zones côtière et hauturière

Méthode
utilisation sélective et combinée de modélisation numérique et d'observations in situ (Lagrangian floats, SF6, ADCPs de coque, mouillages, images satellitaires, gliders, radars)

LATEX - LAgrangian Transport Experiment

MODÉLISATION	EXPÉRIMENTAL
Hydrodynamique (Symphonie) with C.Estournel et P.Marsaleix [POC, Toulouse]	**Sept 2007 - Tests de communication et mesure de concentration ambiante du traceur**
Analyse en ondelettes (WATERS)	**Sept 2008 – Identification d'un tourbillon**
Particules numériques (ARIANE) with B.Blanke et N.Grimas [LPO, Brest]	**Sept 2009 – Mouillages & Identification d'un tourbillon**
	Oct 2009 – Test du dispositif SF6
Couplage **Physique (Symphonie)** **Biogeochimie (Eco-3M)**	***Sept 2010 – campagne avec Suroit and Téthys II***

MODÉLISATION – étude de sensibilité

Modèle aux équations primitives Symphonie

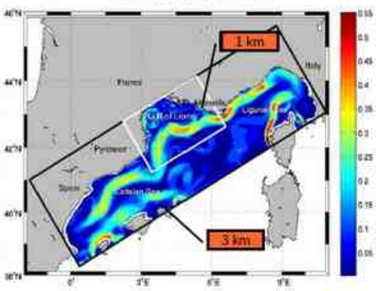
modeled velocity intensity (July 25, 2001) at 20 m
boxes: model domains

Emboîtement

1-km resolution

One – Way Nesting

Coefficient d'attenuation introduit dans le schéma d'advection-diffusion



[Hu et al., 2009]

I-2. Sensitivity study

Advection – Diffusion Scheme in Symphonie
(upwind + Leapfrog time-stepping):

$$\frac{\phi_i^{t+\Delta t}-\phi_i^{t-\Delta t}}{2\Delta t} = \underbrace{-\frac{u_{i+1/2}}{\Delta x}\frac{\phi_i^t+\phi_{i+1}^t}{2} + \frac{u_{i-1/2}}{\Delta x}\frac{\phi_i^t+\phi_{i-1}^t}{2}}_{\text{Advection}} \underbrace{+\frac{A_{i+1/2}}{\Delta x}\frac{\phi_{i+1}^{t-\Delta t}-\phi_i^{t-\Delta t}}{\Delta x} - \frac{A_{i-1/2}}{\Delta x}\frac{\phi_i^{t-\Delta t}-\phi_{i-1}^{t-\Delta t}}{\Delta x}}_{\text{Numerical diffusion}}$$

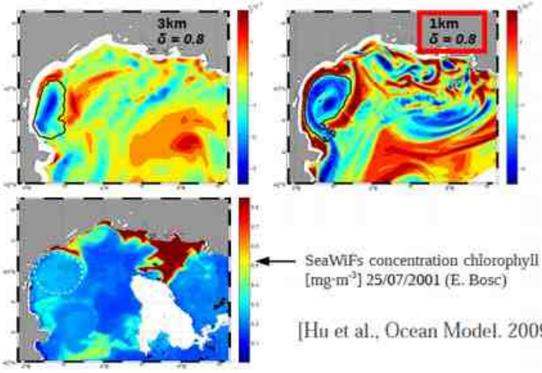
Viscosity Coefficient: $A = |u|\frac{\Delta x}{2} \longrightarrow \tilde{A} = \delta \cdot |u|\frac{\Delta x}{2}$

$\delta \in [0,1]$

$\delta = 0$ No dissipation effect
$\delta = 1$ Dissipation totally taken into account

MODÉLISATION – étude de sensibilité

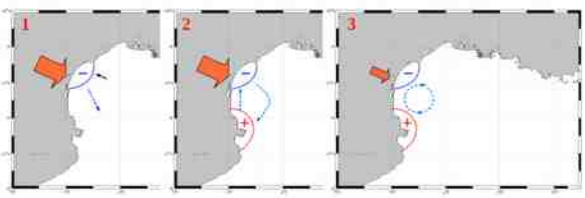
vorticité relative modèle [s^{-1}] 25/07/2001



SeaWiFs concentration chlorophyll [mg·m^{-3}] 25/07/2001 (E. Bosc)

[Hu et al., Ocean Model. 2009]

MODÉLISATION – hyp. génération du tourbillon



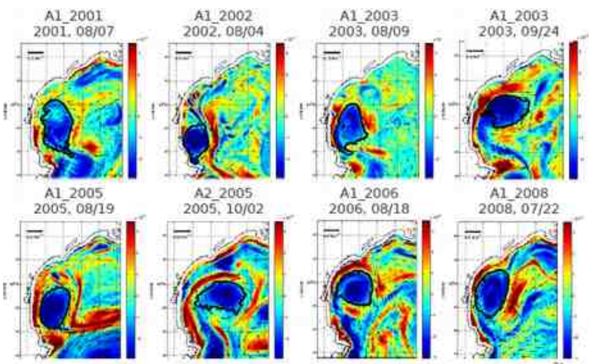
Time interval : 0(week)

- Wind
- Surface current
- Bottom current
- Sea surface level

Effets combinés du vent (et son rotationnel), de la topographie et de la circulation de mesoéchelle

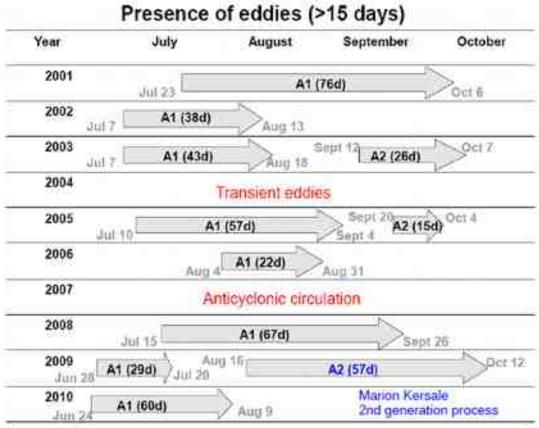
Hu et al 2009b, YSOPP Award for Ocean Science at EGU 2009

Eddies from 2001 to 2008



[Hu et al., 2011, JGR, minor revisions] 21

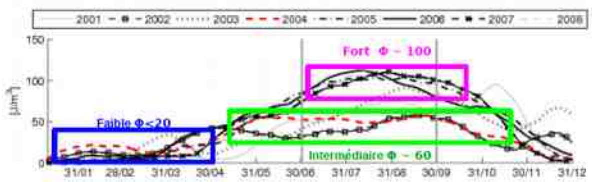
Presence of eddies (>15 days)



Influence of stratification on the eddy

Potential energy anomaly $\phi = \frac{1}{D}\int_{-H}^{\eta} gz(\bar{\rho}-\rho)dz$

[Simpson, 1981; Simpson et Bowers, 1981; Schaeffer, 2010]



25

Generation process

2 conditions are necessary to generate a long-life eddy:
- strong North-West wind (Tramontane)
- strong stratification

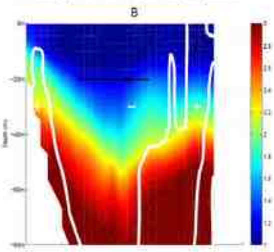
Wind	weak	strong	strong	strong	strong & persistent	strong & persistent
Stratif.	strong weak	no	intermediate	strong	intermediate	strong
Eddy	no	no	transient	long-life	long-life	anticyclonic circulation
		winter spring	early summer, end of fall, summer 2004	summers: 2001, 2003, 2005, 2006, 2008	summer 2002	summer2007

26

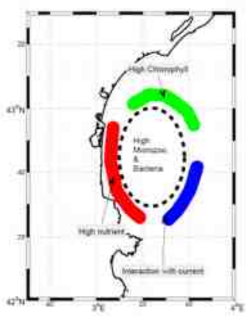
[Hu et al., 2011, JGR, minor revisions]

Coupled Physical (Symphonie) - Biogeochemical (Eco3M) Modeling

Nitrate (mmolN.m-3) on Aug 1, 2001



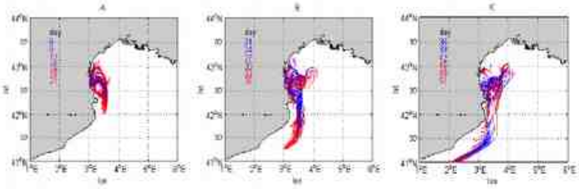
Zero contour of the vertical velocities:
+ upward
- downward



[Campbell et al., to be submitted] 29

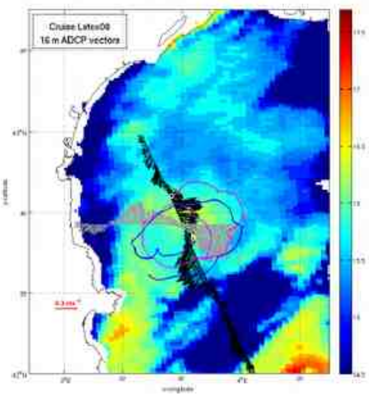
MODÉLISATION – échanges (résultats préliminaires)

ARIANE Lagrangian tool (N. Grima et B. Blanke, LPO)



170 particules lancées le 11/08/2001 dans un transect de A1 eddy (toute la colonne d'eau) et intégrées pour 51 jours

EXPERIMENTAL - Latex08, 1-6 Septembre 2008



ADCP (16m)
+ SST
+ trajectories bouées

T ~ 5 jours

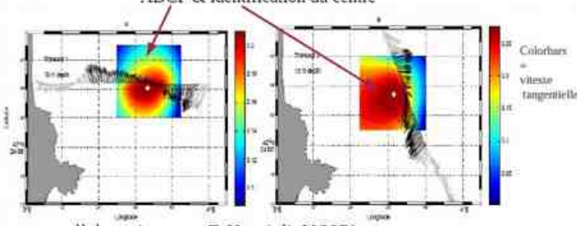
V ~ 0.3 ms-1

R ~ 11.5 – 21.5 km
(+/- 1.5 km)

(Hu et al., submitted to JMS)

EXPERIMENTAL - Latex08, 1-6 Septembre 2008

ADCP & identification du centre

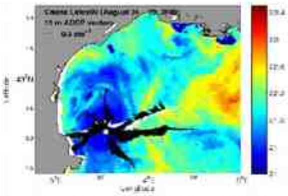


collaboration avec F. Nencioli, UCSB)

Center moved ~ 4 km in 5 days - Drift velocity 1.4 cm/s

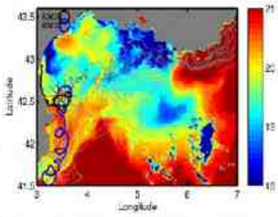
Hu et al., submitted to JMS

EXPERIMENTAL - Latex09, 24-29 Août 2009



Sea surface temperature (AVHRR: Météo-France) on Sept. 2, 2008; horizontal current measured by ADCP at 16 m depth along Transect 1 (gray) on Sept. 1-2, 2008 and Transect 3 (black) on Sept. 5, 2008; trajectories of floating buoys from Sept. 5 to 8, 2008 with their inital positions (white o).

ADCP transects (15 m)
+ SST images
+ Buoy trajectories



EXPERIMENTAL - Latex08 & Latex09

XBT 2008

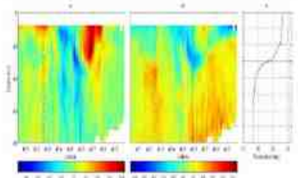
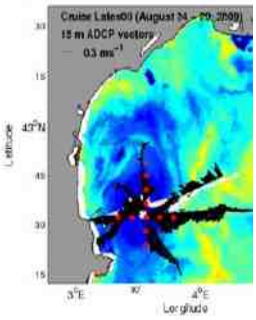


Fig. 6. Vertical sections (depth vs. latitude) of the horizontal currents (colors: m s^{-1}) for Transect 3: a) the observed west-east component (eastward, positive); b): the observed south-north component (northward, positive); c): the temperature profile measured by XBT at the location marked by dotted line; the solid line indicates the nearest position to the estimated eddy center using 15 m ADCP data.

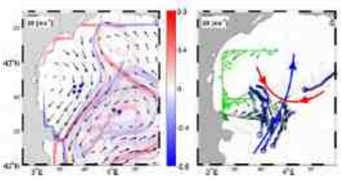
(Hu et al., submitted to JMS)

CTD& Niskins 2009 casts



Nutrient analysis completed

Latex10 (September 2010)
Example of Lyapunov exponents real-time experiments



Colors: FSLEs (s^{-1})
1[st] Lyapunov experiment
Vectors: AVISO
geostrophic currents (Sept 14)

Blue manifold: unstable
Red manifold: stable
Vectors:
15-m ADCP currents (Sept 12-14)
Drifter trajectories (Sept 12-14)

[Nencioli et al., GRL, 2011]

38

Conclusions

- Physical model: 10 years of realistic simulations 2001 – 2010
- Characteristics of the eddies
- Eddy-induced coastal plankton community changes
- Generation process of the eddy : wind forcing + stratification

Perspectives

- Second generation mechanism (M. Kersale, PhD)
- Quantification of the coast-offshore exchanges; 2 cases :

1) when the eddy is present : eddy-retention on the coastal shelf ?
eddy interaction with the NC ?

2) when there is no eddy : corridors as potential exit pathways ?
(Latex10 case)

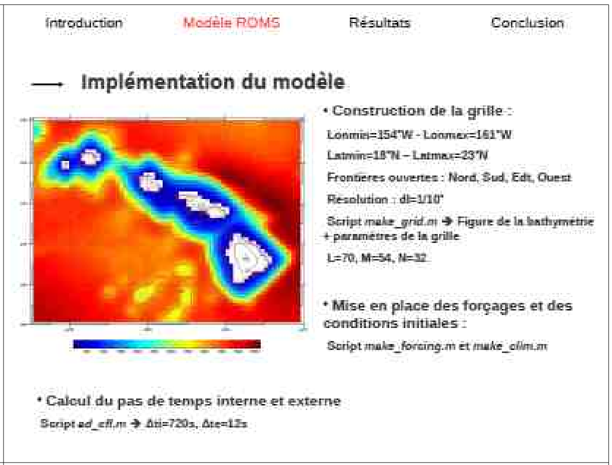
- Estimation of *in situ* eddy diffusivity (tracers and SCAMP)

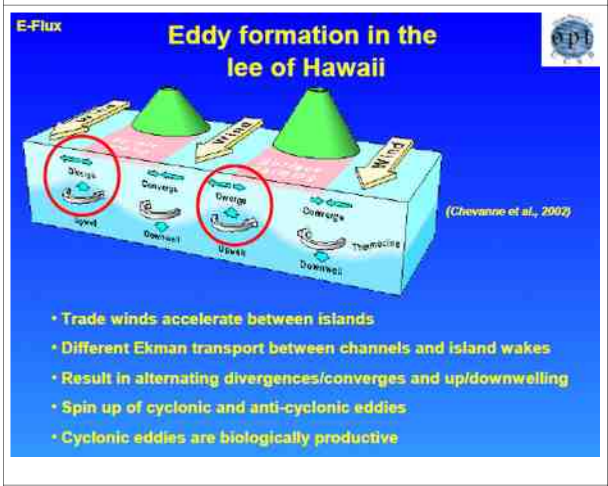
39

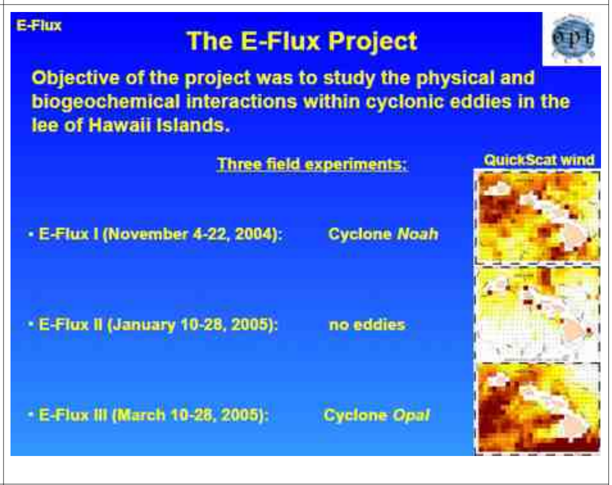
LATEX web site

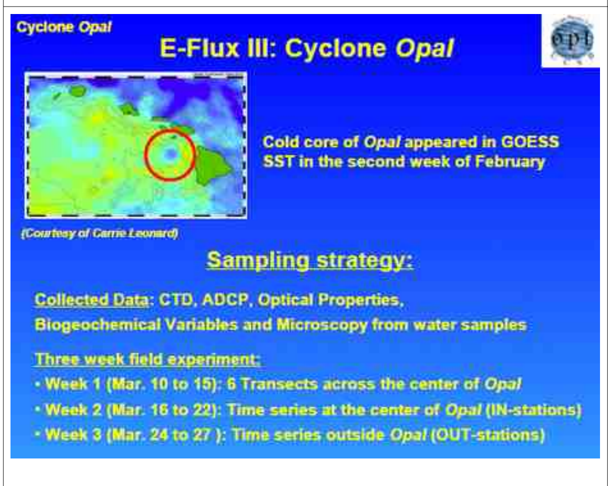
http://www.com.univ-mrs.fr/LOPB/LATEX

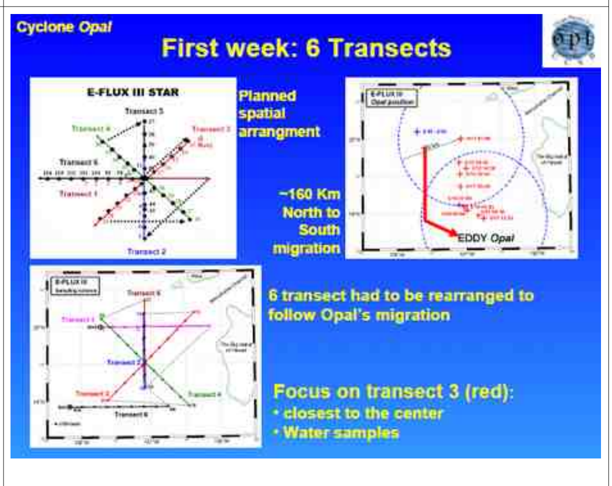
5.7 Exemple : circulation autour des îles Hawaii

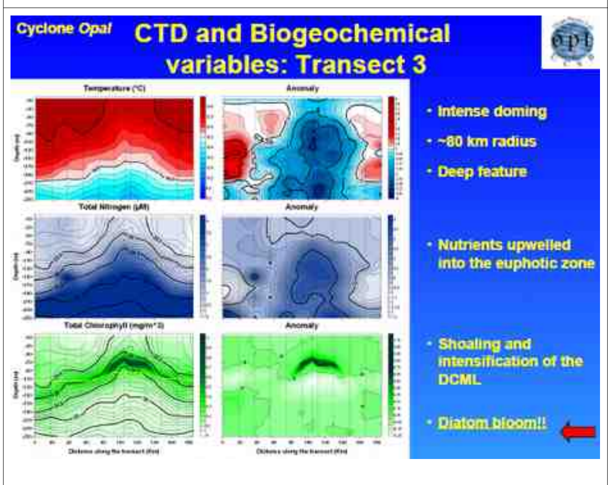


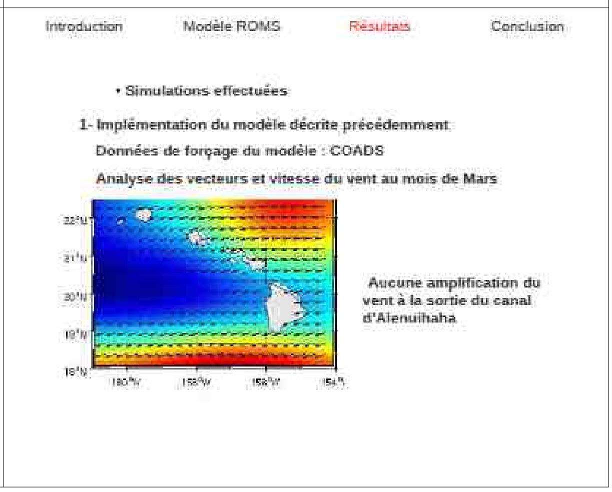








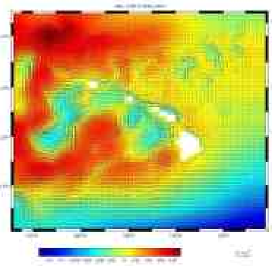




Introduction Modèle ROMS Résultats Conclusion

2- Domaine de simulation plus grand

Analyse des vecteurs et vitesse du vent ➔ Aucune amplification

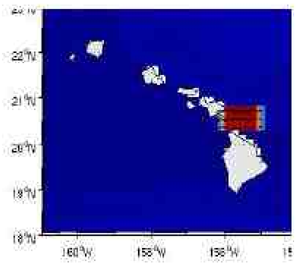


Analyse des vecteurs du courant et du champ d'élévation le 8 Mars

➔ Circulation océanique régionale (Lumpkin,1998)

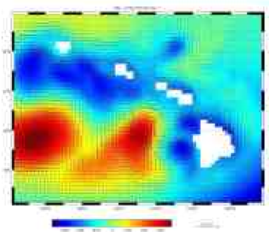
Introduction Modèle ROMS Résultats Conclusion

3- Modification du script *make_forcing.m* ➔ impose une augmentation du vent dans le canal d'Alenuihaha



Introduction Modèle ROMS Résultats Conclusion

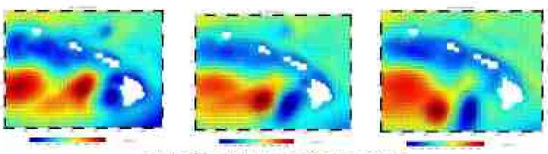
Visualisation du résultat



Analyse du champ d'élévation en surface le 14 Mars ➔ Formation du tourbillon cyclonique OPAL

Introduction Modèle ROMS Résultats Conclusion

- Comparaison avec des résultats issues de la publication de Dickey & al. (2008)
  - Comparaison de la trajectoire du cyclone



Champ d'élévation le 17/03/07, le 29/03/07, le 08/04/07

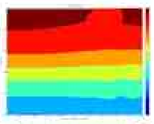
Déplacement vers le Sud ensuite vers l'ouest

Dans la publication : Déplacement du cyclone OPAL vers le sud et ensuite vers l'est.

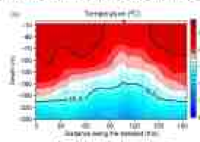
➔ Propagation des tourbillons problématique

Introduction Modèle ROMS Résultats Conclusion

- Comparaison d'un profil vertical en fonction de la température



Profil issu de les données de ROMS



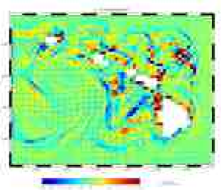
Profil issu de la publication

Différence : Remontée des isothermes

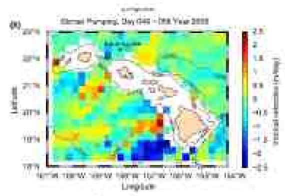
Similitude : 'Outcropping' d'une isotherme

Introduction Modèle ROMS Résultats Conclusion

- Comparaison de la composante verticale de la vitesse du courant



Résultat simulé par ROMS



Résultat issu de la publication

Zones d'upwelling ➔ w= +2,5 m/jour

Zone de downwelling ➔ w= -2,5m/j

Introduction Modèle ROMS Résultats Conclusion

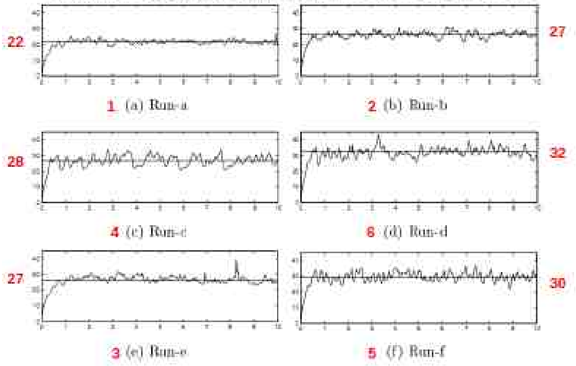
IV- PREMIÈRE CONCLUSION

- Ile d'Hawaii ➔ Rôle important dans la circulation océanique et atmosphérique➔ Formation de tourbillons cycloniques et anticycloniques
- Tourbillon + Alysée Nord ➔ Variations locales de la température et de la salinité des eaux
- Les structures du vent à méso-échelle doivent être inclues dans le forçage des modèles océaniques
- Résultats difficiles à généraliser➔ Perturbations locales des flux dues à la présence de ces îles
- Mêmes perturbations observées aux îles Canaries et aux îles du Cap-Vert

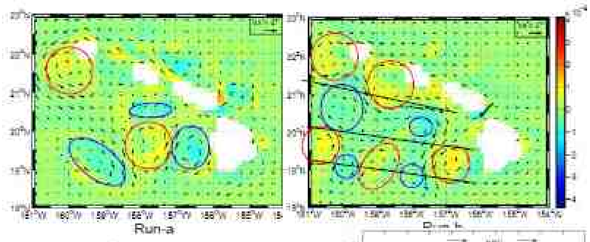
Différentes simulations

Run	Wind forcing	Advection (m s-1)	Topographic forcing
a	Ø	0.12	oui
b	Ø	0.24	oui
c	QuikSCAT	Ø	oui
d	QuikSCAT	0.12	Cd=0
e	COADS	0.12	oui
f	QuikSCAT	0.12	oui

Temporal evolutions (model time, years) of volume-averaged kinetic energy [cm2 s-2]. The horizontal line indicates the 10-year mean value



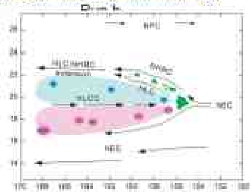
Topographic forcing with advection and no wind



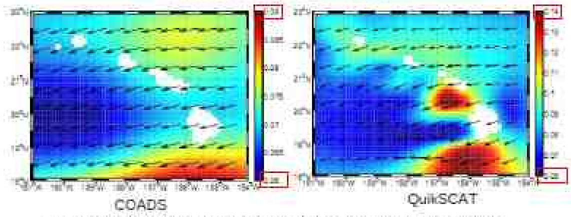
NEC split ➔ Mesoscale structure

HLCC➔ no Run-a :
reverse direction Run-b 19°N

Deviation du courant dans le canal
➔ Formation d'anticyclone ➔ 4 zones

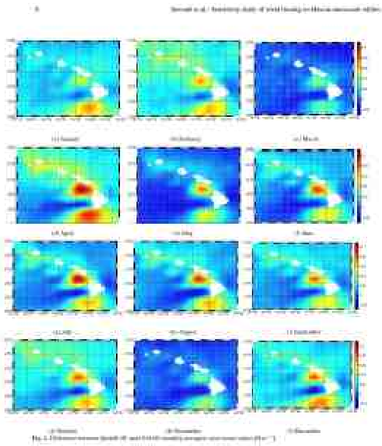


Wind forcing comparison

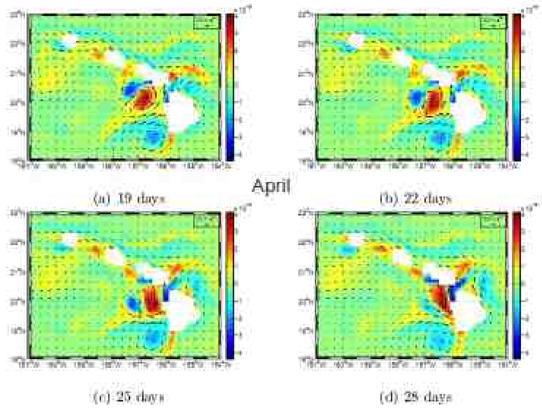


Annually-averaged wind stress values [N m-2] and wind stress vector

- Unidirectional wind regine = Trade wind (NE)
- Wind stress intensity
- COADS ➔ Effect of wind on all the islands in a larger scale (archipelago continuous)
  Acceleration N & S of the archipelago
- QuikSCAT ➔ effect of each island individually



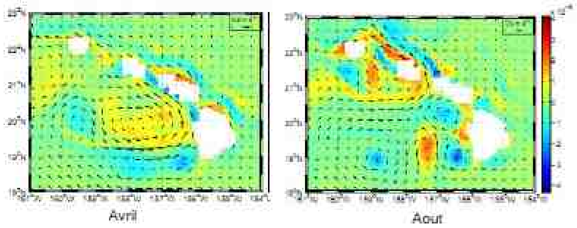
Topographic forcing with QuikSCAT wind forcing and no advection



(a) 19 days (b) 22 days

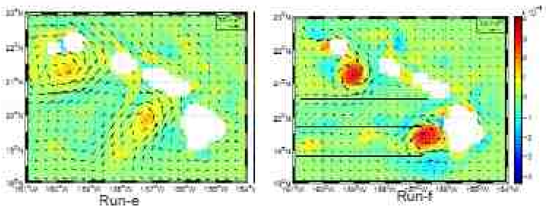
(c) 25 days (d) 28 days

QuikSCAT wind forcing with advection and no drag coefficient



- Présence du NEC et du HLCC
- HLCC = border between a large-scale cyclonic circulation to the north and anticyclonic eddies to the south
- 4 mois : structures s'élargissent + se déplacent à l'ouest
- Juillet / Aout = Formation de nouveaux tourbillons (Vent + intense)

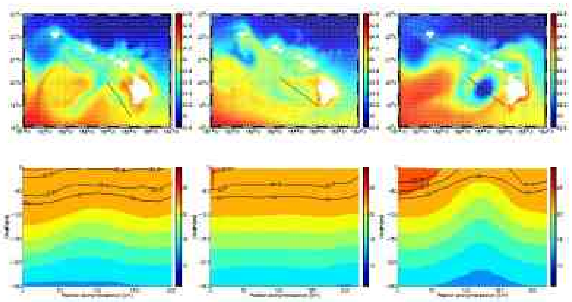
Topographic and Wind forcing with advection



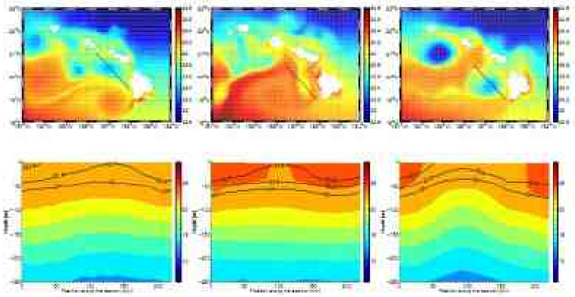
- NEC split + HLCC + mesoscale structures
- Strucures Run-e less intense / less coherent
- Deplacement vers l'ouest
- Run-f : deplacement vers le sud sud-est du à l'accélération du vent dans le canal
  Disturbance in the flow field (anticyclone au S / cyclone au N)
-Run-f: presence de petits tourbillons (même echelle que le canal)

Run-e = 2 zones / Run-f = 4 zones

Comparaison des cyclones



(a) Run-a (b) Run-b (c) Run-c



(a) Run-d (b) Run-e (c) Run-f

Conclusions

➔3 forcages = Courant – Vent – Effet topographique agissent dans la meme Direction ➔ meme conclusion

➔Aucun forcage seul n'est capable de créer une situation réaliste (Jimenez, 2008)

➔Importance du vent (Yoshida, 2010)
Ekman pumping des cyclones du essentiellement au vent

➔ Comparaison des cyclones + comparaison Opal (Dickey, 2008)

➔Comparaison COADS/QuikSCAT
+ comparaison avec Calil,2008 Présence de mesoscale structure avec COADS

➔Circulation en 4 zones avec QuikSCAT (Lumpkim, 1998)
U=0.12/COADS/Cd=0 ➔ Large scale (2 zones)

6. Tourbillons isolés

Définition (Carton, 2005)

Des mouvements de recirculation peuvent être identifiés pratiquement à toute échelle dans l'océan, dès grand gyres océaniques (L=O(5000km)) à la turbulence de petite échelle (L=O(1km)) . Entre ces deux extrémités les tourbillons de mesoéchelle (L=O(100km) sont des structures particulièrement intéressantes : bien que présents sous différentes formes et produits par différents mécanismes, ils sont tous énergétiques et vivent longtemps . Souvent ils peuvent alors parcourir des grandes distances et jouer un rôle très important dans la dynamique océanique . Pour cette raison ils sont très étudiés .
Les tourbillons océaniques cohérents ont une longue durée de vie, un écoulement intense et fermé, bloqué sur le plan horizontal par la rotation planétaire et la stratification . Souvent ils ont une forme presque circulaire et des rayon de 20 à 200 km et une vorticité relative qui rejoint une fraction considérable de la vorticité planétaire .
Les temps caractéristiques de recirculation au rayon de vitesse maximale sont de quelque jours . Au delà de ce rayon la vitesse tangentielle décroît rapidement en fonction de la distance du centre. En générale ils sont isolés . Sauf que dans les zones de formation, ils sont distant les uns des autres et ils n'interagissent pas entre eux pour de long périodes de temps, mais quand il y a une interaction, elle peut avoir un effet destructif . Il peuvent disparaître rapidement aussi a cause d'interactions avec des forts courant ou quand il rencontrent des fort gradient de topographie, ou bien être peu à peu détruits par la dispersion, la dissipation ou les échanges thermique avec l'atmosphère .
Les tourbillons océaniques peuvent piéger à l'intérieur des leur noyau des masses d'eau caractéristiques pour des longues périodes . En effet ils sont souvent le produit final de processus d'instabilité locale et ils piègent les masses d'eaux de leur région d'origine . Cet eau est ensuite transportée par les tourbillons à travers l'océan sans qu'elle se mélange avec l'eau ambiante sinon un peu à la périphérie du tourbillon .
Dans les régions de formation des tourbillons des fins filaments ou des mouvements convectives à petite échelle (dans le cas d'instabilités statiques) peuvent aussi apparaître et participer aux transferts d'énergie et aux processus de mélange locales . Les tourbillons peuvent aussi contribuer à la thermodynamique locale, en favorisant la propagation d'ondes inertielles et la pénétration des flux atmosphériques ou la subduction des eau de la couche de mélange au dessous des fronts de grande échelle .

6.1 Équations de la dynamique des tourbillons isolés

L'océan peut être idéalisé comme une succession de couches homogènes (modèle isopycnale) . En générale l'épaisseur de chaque couche varie entre quelque dizaine de mètres et 1-2 centaines de mètres, tandis que l'échelle des mouvement horizontaux à mesoéchelle est entre quelque dizaines et quelque centaine de kilomètres . Ce petit rapport d'échelle nous permets de adopter pour ces phénomènes l'approximation de Boussinesq, l'approximation hydrostatique et les équations en eaux peu profondes .

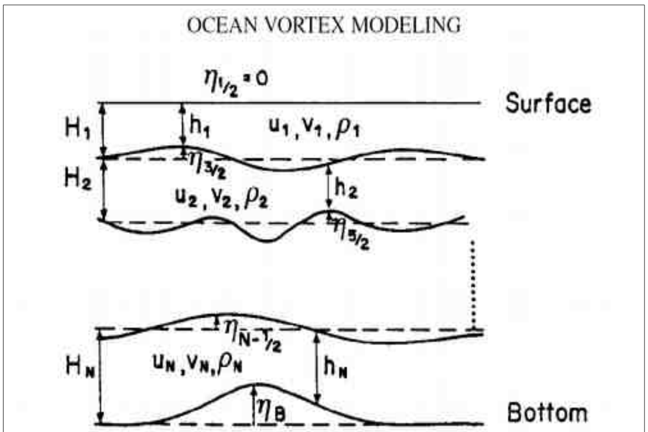


Figure 2a. Vertical cross-section of a N-layer shallow-water model.

$$\frac{Du_j}{Dt} - f\,v_j = \partial_t u_j + u_j \partial_x u_j + v_j \partial_y u_j - f\,v_j = \frac{-1}{\rho_j}\partial_x p_j + F_{xj},$$

$$\frac{Dv_j}{Dt} + f\,u_j = \partial_t v_j + u_j \partial_x v_j + v_j \partial_y v_j + f\,u_j = \frac{-1}{\rho_j}\partial_y p_j + F_{yj},$$

$$\frac{Dh_j}{Dt} + h_j \vec{\nabla}\cdot\vec{u_j} = \partial_t h_j + u_j \partial_x h_j + v_j \partial_y h_j + h_j\left(\partial_x u_j + \partial_y v_j\right) = 0 \qquad (1)$$

où $u_j, v_j, p_j, h_j, \rho_j, F_j,$ représentent respectivement les composantes de la vitesse horizontale, la pression, l'épaisseur de la couche, la masse volumique et les forces de volumes dans la couche *j* (avec *j* qui varie entre 1 à la surface et N au fond) .
f est le paramètre de Coriolis en approximation de plan β , $f = f_o + \beta\, y$.
L'épaisseur locale est $h_j = H_j + \eta_{j-1/2} - \eta_{j+1/2}$ avec H_j épaisseur de la couche à repos et $\eta_{j+1/2}$ l'interface entre la couche *j* et la couche *j+1* due au mouvement locale . Aux limites verticales, une approximation souvent adoptée est aussi celle de toit rigide à la surface $(\eta_{1/2} = 0)$ tandis que la topographie du fond est décrite par $\eta_{N+1/2} = \eta_B(x, y)$.
Enfin le bilan hydrostatique est

$$p_j = p_{j-1} + g(\rho_j - \rho_{j-1})\eta_{j-1/2}.$$

Les tourbillons océaniques peuvent être considérés comme circulaires et on peut alors récrire les équations de la dynamique (sans mettre de index j) en coordonnées polaires :

$$\frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\theta^2}{r} - f\,v_\theta = \partial_t v_r + v_r \partial_r v_r + \frac{v_\theta}{r}\,\partial_\theta v_r - \frac{v_\theta^2}{r} - f\,v_\theta = \frac{-1}{\rho}\partial_r p + F_r,$$

$$\frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} + f\,v_r = \partial_t v_\theta + v_r \partial_r v_\theta + \frac{v_\theta}{r}\,\partial_\theta v_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r} + f\,v_r = \frac{-1}{\rho r}\partial_\theta p + F_\theta,$$

$$\frac{Dh}{Dt} + h\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \partial_t h + v_r \partial_r h + \frac{v_\theta}{r}\partial_\theta h + \frac{h}{r}\left(\partial_r(r v_r) + \partial_\theta v_\theta\right) = 0, \qquad (2)$$

En absence de forçage et de dissipation (*F = 0*), un tourbillon circulaire est une solution invariante de ces équations dans le plan *f* $(\beta = 0)$. En effet, si $\partial_t = 0, v_r = 0, \partial_\theta = 0$ les deux dernières équations disparaissent et la première équation se réduit à

$$-\frac{v_\theta^2}{r} - f_0\,v_\theta = \frac{-1}{\rho}\frac{dp}{dr}. \qquad (3)$$

Cette équation est dite bilan cyclo-géostrophique (ou *gradient wind balance*, Cushman-Roisin, 1994) .
Il s'agit du bilan entre la force centrifuge crée par la rotation du tourbillon, la force de Coriolis et le gradient radiale de pression . Quand la force centrifuge est négligeable (i.e. il n'y a pas une forte rotation) le bilan est simplement le bilan géostrophique .

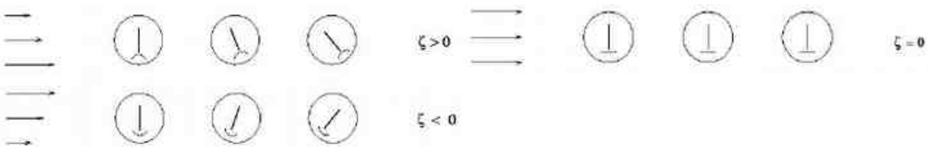
6.2 Vorticité

La vorticité relative

Elle est définie comme la composante verticale du rotationnel de la vitesse

$$\zeta \;=\; \vec{k}(\nabla\times\vec{V}) \;=\; \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$$

La vorticité relative exprime la tendance d'un fluide à tourner. Le signe de ζ peut être illustré avec le schéma suivant :



Elle est appelée vorticité relative, car elle est mesurée par rapport à la terre.

La vorticité planétaire

Pour un solide en rotation la vorticité est égale à deux fois sa vitesse angulaire. A la latitude Φ la vitesse angulaire par rapport à l'axe verticale en ce point est $\Omega\sin\Phi$, la vorticité est donc

$$2\Omega\sin\Phi \;=\; f$$

Une colonne d'eau à repos sur la terre en rotation possédera donc une vorticité dite « planétaire » f. La vorticité planétaire correspond au paramètre de Coriolis en approximation dite de « mouvements quasi-horizontaux » (voir TD4) .

La vorticité absolue

On prend les équations de la quantité de mouvement pour les composantes horizontales, qui on considère ne varient pas sur la verticale. On néglige aussi la viscosité et le frottement (on se positionne donc hors des couches d'Ekman et des couches limites de bords Ouest) :

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-fv \;=\; -\frac{1}{\rho_o}\frac{\partial p}{\partial x}$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+fu \;=\; -\frac{1}{\rho_o}\frac{\partial p}{\partial y}$$

Différentiation croisée et soustraction $\partial_x(2)-\partial_y(1)$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial f}{\partial y}v-f\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_o}\frac{\partial^2 p}{\partial y\partial x}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x}u+f\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_o}\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial y}$$

conduisent à une seule équation (en se rappelant que $\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+u\frac{\partial f}{\partial x}+v\frac{\partial f}{\partial y}$)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) + u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) + v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{df}{dt}+f\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0$$

qui peut être re-écrite

$$\frac{\partial}{\partial t}\zeta + \frac{\partial u}{\partial x}\zeta + u\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\zeta + v\frac{\partial\zeta}{\partial y} + \frac{df}{dt}+f\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0$$

en regroupant les termes 1, 3 et 5, qui représentent la dérivée totale de la vorticité relative et aussi les termes 2 et 4

$$\frac{d\zeta}{dt} + \zeta\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{df}{dt}+f\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0$$

et finalement

$$\frac{d(\zeta+f)}{dt} + (\zeta+f)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$$

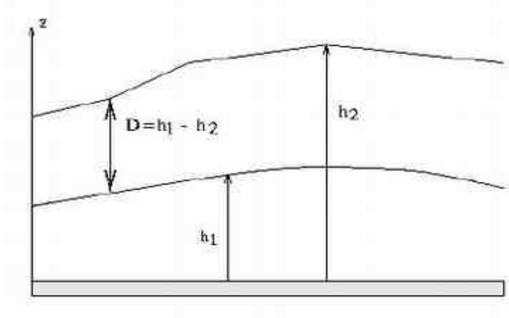
Cette équation exprime le principe de la conservation de la vorticité absolue $\zeta_{abs} = (\zeta+f)$ pour les écoulements sur terre lorsque le frottement est négligé : le module de la vorticité absolue s'accroît dans un écoulement convergent $(\nabla_H\vec{u} < 0)$ et décroît dans un écoulement divergent $(\nabla_H\vec{u} > 0)$.

La vorticité potentielle

Soit une couche d'épaisseur *D* dan laquelle la densité est supposée homogène.

L'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$



on peut écrire que :

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\left(\frac{dh_1}{dt}-\frac{dh_2}{dt}\right)}{(h_1-h_2)} = \frac{1}{D}\frac{dD}{dt}$$

en remplaçant dans l'équation de continuité

$$\frac{1}{D}\frac{dD}{dt} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

On peut alors remplacer la divergence horizontale dans l'équation de conservation de la vorticité absolue et obtenir

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\zeta+f}{D}\right) = 0}$$

NB : On a utilisé le règle de la dérivé de la division:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\zeta_a}{D}\right)=0 \ \rightarrow \ \left(\frac{d\zeta_a}{dt}D-\zeta_a\frac{dD}{dt}\right)\frac{1}{D^2}=0 \ \rightarrow \ \frac{d\zeta_a}{dt}\frac{1}{D}-\zeta_a\frac{dD}{dt}\frac{1}{D^2}=0 \ \rightarrow \ \frac{d\zeta_a}{dt}-\zeta_a\frac{dD}{dt}\frac{1}{D}=0$$

Si on compare les dimensions de quatre vorticité: relative, planétaire, absolue et potentielle

$$\zeta_{rel} \ : \ \left[\frac{LT^{-1}}{L}\right]=[T^{-1}] \quad \zeta_{pla} \ : \ [T^{-1}] \quad \zeta_{abs} \ : \ [T^{-1}] \quad \zeta_{pot} \ : \ \left[\frac{T^{-1}}{L}\right]=[T^{-1}L^{-1}]$$

on voit que la vorticité potentielle n'a pas le mêmes dimensions que les autres!

NB: Une formulation plus générale de la vorticité potentielle tiens compte aussi des effets de la densité, de la température, de la salinité ou autre et les dimension dépendent de la grandeur prise en considération

$$\frac{d}{dt}\left(\zeta_{abs}\cdot\frac{\nabla\lambda}{\rho}\right) = 0$$

Exemple : Intensification des tourbillons étirés

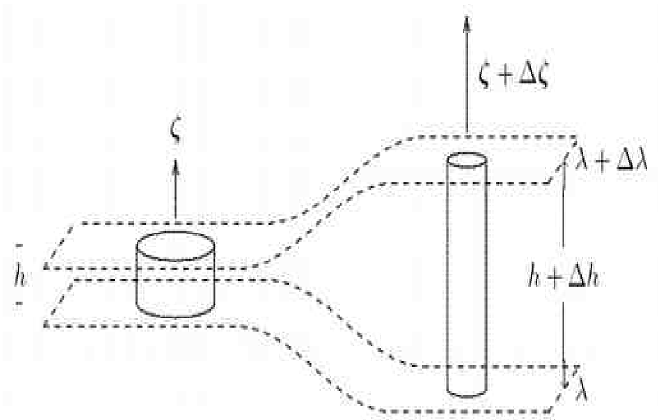
Si on se mets sur un plan-*f*

$$\left(\frac{\zeta}{D}\right) = const$$

alors une colonne d'eau qui bouge entre deux surface sur le quelles λ doit être conservée, doit se modifier pour satisfaire les lois de conservation de la masse et du moment angulaire. Plus grande sera la hauteur de la colonne, plus grande devra être la vitesse de rotation de la colonne de fluide.

$$\Delta D>0\rightarrow\Delta\zeta>0$$

$$\Delta D<0\rightarrow\Delta\zeta<0$$



Tirée de Mattioli (1995) Principi Fisici di Oceanografia e Meteorologia, Fig.48.1

Anomalie de la vorticité potentielle

Étant donné que la rotation d'un tourbillon est associé à un déplacement des isopycnes, une variable physique qui combine les deux quantités avec le paramètre de Coriolis est la grandeur plus appropriée pour quantifier la dynamique du tourbillon. Cette quantité est la vorticité potentielle (*potential vorticity, PV)* qui est conservé dans les modèles basés sur les équations en eaux peu profonde sans frottement.

$$\frac{d\Pi_j}{dt} = 0 \qquad \Pi_j = \frac{\zeta_j+f}{h_j}$$

avec ζ_j vorticité relative et f vorticité planétaire .
En réalité, la dynamique d'un tourbillon est complétement caractérisée par la différence entre la vorticité potentielle à l'intérieur et à l’extérieur du tourbillon. En plus, la variation méridienne de la vorticité planétaire est en générale faible par rapport à la vorticité relative . On peut donc définir l'anomalie de vorticité potentielle la quantité :

$$Q_j = \Pi_j - \Pi_j^o = \frac{\zeta_j + f_o}{h_j} - \frac{f_o}{H_j} = \frac{1}{h_j}\left(\zeta_j - f_o \frac{\delta \eta_j}{H_j}\right)$$

avec $\delta \eta_j = h_j - H_j$ variation verticale des surfaces isopycnales à l'intérieur du tourbillon . Il faut se rappeler que l'anomalie de PV toute seule n'est pas conservée et que les échanges avec la vorticité planétaire peuvent avoir des conséquences importantes, comme la dérive des tourbillons (*vortex drift*)

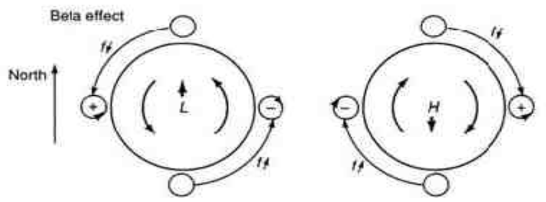


Figure 4. Meridional drift of vorticies on a β-plane [after *Cushman-Roisin*, 1994]. The figure is drawn for the Northern Hemisphere, in the Southern Hemisphere cyclones still move poleward and anticyclones equatorward.

Morrow et al

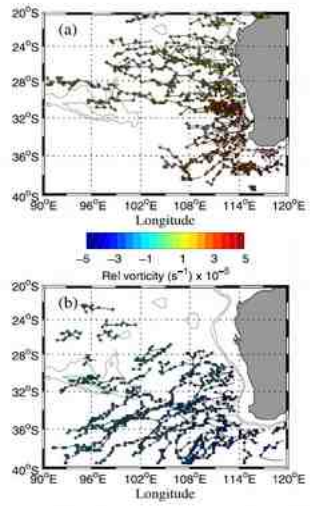


Figure 1. Propagation pathways for anti-cyclonic eddies (upper panel) and cyclonic eddies (lower panels), in the southeast Indian Ocean. Their relative vorticity is represented by the colored circle: one every 10 days along their pathway.

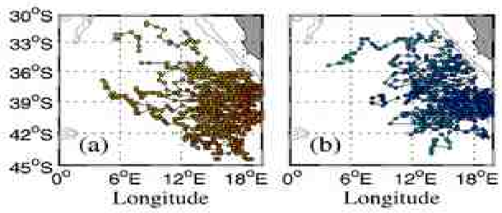


Figure 2. As for Figure 1, but in the southeast Atlantic Ocean. Color bar shown in Figure 1.

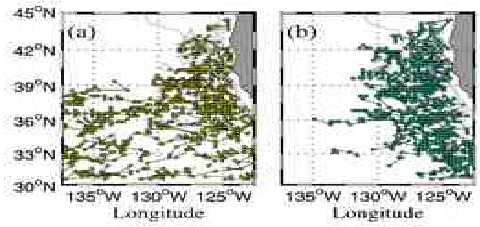


Figure 3. As for Figure 1, but in the northeast Pacific Ocean. Here we plot negative relative vorticity for this northern hemisphere case, so that anti-cyclonic eddies remain in yellow/red, and cyclonic eddies in blue.

6.3 Exemple : Meddies

La découverte historique des meddies repose sur une erreur (voir l'article en ligne de McDowell et Rossby http://www.gso.uri.edu/maritimes/Back_Issues/00%20Fall/Text%20(htm)/meddy.htm). Tout d'abord, les chercheurs découvrent en 1976 un énorme tourbillon au large des Bahamas, très chaud et très salé. Ces caractéristiques hors normes les amènent à conclure que ce tourbillon a une origine méditerranéenne. Cette découverte singulière initia la recherche d'autres structures de ce type. Une étude systématique fut alors menée entre 1984 et 1986 en Atlantique Nord-Est et Nord-Ouest. On en découvrit en effet quelques uns dans l'Atlantique Est, mais aucun meddy n'avait la taille du fameux "meddy des Bahamas" et surtout aucun meddy n'avait été détecté dans le bassin ouest... Les chercheurs, honnêtes, admirent leur erreur mais cela les obligea à chercher une autre origine pour ce tourbillon de père inconnu. La solution fut trouvée bien plus tard, dans les années 90 : le meddy des Bahamas avait plutôt pour origine la Dérive Nord-Atlantique, extension du Gulf Stream, après que celui-ci ait tourné vers le nord au niveau des Grands Bancs de Terre-Neuve. De temps en temps, les eaux de ce courant se détachent en tourbillons anti-cycloniques aux coeurs chauds (10,8° observé) et salés (35,4 g/l observé). La "double ironie" dont parle les auteurs repose donc sur le fait que c'est le vrai-faux meddy des Bahamas qui a entraîné la découverte des vrais meddies mais que cette erreur mena à la découverte que la Dérive Nord-Atlantique pouvait générer des tourbillons capables de se déplacer sur une distance de 4000 km le long du continent nord-américain...

Dans son papier de 1985, McWilliams propose en effet la figure ci-dessous et l'explication suivante .

Dense, salty Mediterranean water enters the North Atlantic above 350 m depth with a salinity S of about 38.2%0 [Bryden and Stomrnel, 1984] and is gravitationally unstable outside the Strait of Gibraltar. Consequently, convection, entrainment, and sinking occur (process (1) in Figure 5), until a depth around 1000 m is reached where isolated, diluted Mediterranean water blobs are marginally gravitationally stable. The International Geophysical Year hydrographic section along 36øN shows its saltiest water along the eastern boundary, with S = 36.8%0 [Fuglister, 1960].

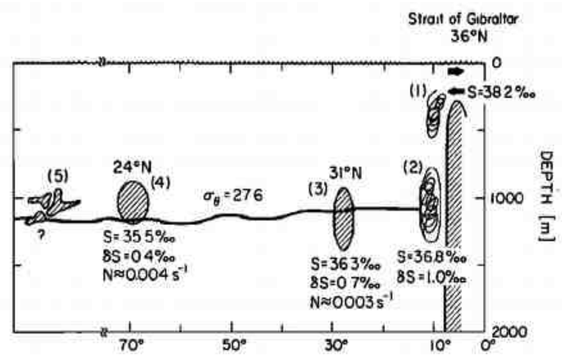
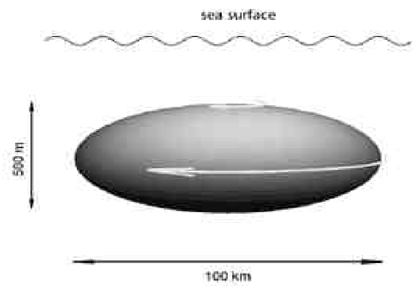


Fig. 5. A cartoon of the life cycle of a Meddy (see text for explanation)

McWilliams 1985

For lack of more complete observations, we identify this water with the end-state of the convection process; this would indicate a dilution of the outflow water with 1-2 times as much Atlantic water, depending upon the depths at which the entrainment occurs. The relatively well mixed blobs then undergo an adjustment process and acquire a geostrophic or cyclostrophical anticyclonic circulation(process(2) in Figure 5) (see appendix, note 2). This protects the core water mass from straining and diffusion by the general circulation as the latter advects Meddies into the interior of the Atlantic, approximately along the •o = 27.6 potential density surface.
Cross sections of the locally anomalous salinity cores are shaded at processes(3) and (4) in Figure 5, where the horizontal scale has been exaggerated by a factor of 5 relative to the abscissa These particular Meddies are depictions of the observations of Arrni and Zenk [1984] for Meddy (3) and of McDowell and Rossby [1978] and McDowell r1985a-I for Meddy (4). From maps of the salinity anomalies the approximate dimensions of Meddy (3) are L = 40 km and h = 300 km, while for Meddy (4), L = 60 km and h = 200 km. Adjacent to the cross sections are values for the local maximum S, maximum salinity anomaly relative to the local environment 5S, N for the environment at the depth of the Meddy core, and latitude. In the migration away from Gibraltar, S and 5S systematically decrease, consistent with weak diffusion en route. Between Meddies (3) and (4) there is also a change of core volume and shape: the volume increases by about 50% (again a sign of diffusion), and the aspect ratio h/L decreases from about 0.0075 to 0.0033. The latter might be an indication of anisotropic diffusion (horizontal dominating vertical), but it may also reflect a partial compensation for the changing N/f of the Meddy environment in such a way as to tend to preserve the B valuef or the SCV: N/f changesfr om 42 to 70, so that B only changes from 0.32 to 0.23 The lifetime of the Meddy at (4) is more than 4 years by the previous estimate of the general circulation transport rate. Destruction of a Meddy (process (5)) probably occurs when interactions with other currents fragment the core water mass



Meddies are large, squat eddies that are located below the surface and rotate clockwise.

http://www.gso.uri.edu/maritimes/Back_Issues/00%20Fall/Text%20(htm)/meddy.htm

(2) Meddy formation from the Mediterranean water outflow

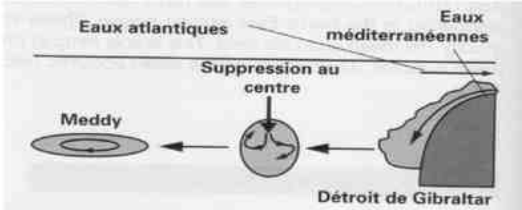


FIG. 2. – Les eaux méditerranénnes entrent dans l'Atlantique au niveau du détroit de Gibraltar. Par un mécanisme qui reste à élucider, de grosses bulles sont lâchées. Celles-ci s'aplatissent et sous l'action de la force de Coriolis, qui dévie les mouvements vers la droite dans notre hémisphère, forment des tourbillons anticycloniques : les meddies.

(meddy = Mediterranean water eddy)

Les eaux de la Méditerranéenne tourbillonnent dans l'Atlantique

Tirée de http://www.mercator-ocean.fr/html/actualites/news/actu_meddies_fr.html

A Gibraltar, les eaux de la Méditerranée et de l'Atlantique se croisent. Les eaux atlantiques entrent en surface dans la Méditerranée et les eaux méditerranéennes, plus denses, sortent dans l'Atlantique par le fond du détroit en formant une veine d'eau méditerranéenne. Dans certaines conditions, cette veine donne naissance à des tourbillons qui vont ensuite se propager à travers l'Atlantique. Ce sont les meddies, ou lentilles d'eau méditerranéenne. Le modèle haute résolution de Mercator dans l'Atlantique est capable de simuler de tels événements.

Vitesse moyenne (moyennée sur 3 ans) à 870 m de profondeur, issue du modèle PAM : la présence de l'eau Méditerranéenne est marquée par des zones de vitesses plus élevées (zones sombres sur la figure) par rapport aux eaux environnantes. Les pointillés montrent les principales trajectoires des 4 principales veines d'eau méditerranéenne. Crédit : Yann Drillet et al., 2005 (cliquez pour agrandir)

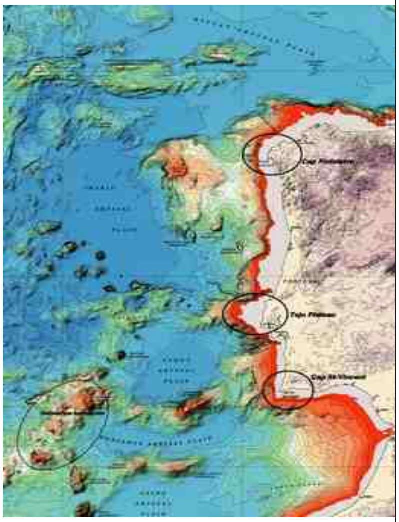
Le détroit de Gibraltar (250 mètres de profondeur, 15 à 20 kilomètres de large) est le seul endroit d'échange de la Méditerranée avec l'extérieur. L'eau méditerranéenne, plus chaude, plus salée et plus dense s'écoule dans l'Atlantique au fond du détroit à un débit moyen de l'ordre de 0.57 Sv . Afin de rétablir l'équilibre, de l'eau Atlantique, plus froide et moins salée entre en surface. La Méditerranée étant un bassin d'évaporation, la quantité d'eau Méditerranéenne sortante est inférieure à la quantité d'eau Atlantique entrante.

Une fois qu'elle a franchi Gibraltar, l'eau méditerranéenne plonge par effet de densité et se stabilise dans le Golfe de Cadiz, entre 800 et 1000-1200 mètres, là où les profondeurs de l'océan atteignent 4000 à 5000 mètres. La branche principale tourne autour de l'Espagne, longe la côte portugaise, contourne la Corogne, entre dans le Golfe de Gascogne où elle longe le talus continental et continue son chemin jusqu'au large de l'Irlande, vers les 50°N.

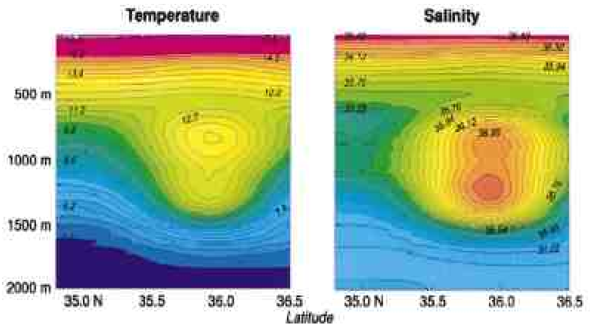
Une autre branche part directement vers l'ouest en quittant la côte espagnole au large du Cap St-Vincent, à 36°N de latitude, pour atteindre les 25° ouest. La vitesse de l'eau méditerranéenne au fond du détroit de Gibraltar est de l'ordre de 15 cm/s. Entre le seuil et 700m de profondeur, dans une zone centrée sur 6,5°W et 36°N, cette vitesse peut atteindre des maxima de 1 m/s. L'écoulement se stabilise ensuite en aval du Cap St-Vincent vers 1000 m de profondeur avec des vitesses de l'ordre de 15 cm/s. La salinité est également déterminante pour identifier l'eau méditerranéenne. On définit le noyau de forte salinité avec des salinités supérieures à 35,8 g/kg.

Les lentilles d'eau méditerranéenne (ou Medditerranean eddies ou meddies) sont des tourbillons (généralement anticycloniques, c'est-à-dire tournant dans le sens des aiguilles d'une montre), chauds et salés générés à partir des instabilités que subit l'eau méditerranéenne en provenance de Gibraltar, lors de sa rencontre avec des accidents topographiques (passage du Cap St Vincent, à l'extrémité sud-ouest de l'Espagne), du Tejo Plateau, au large de Lisbonne, et du Cap Finisterre à la pointe nord-ouest de l'Espagne).

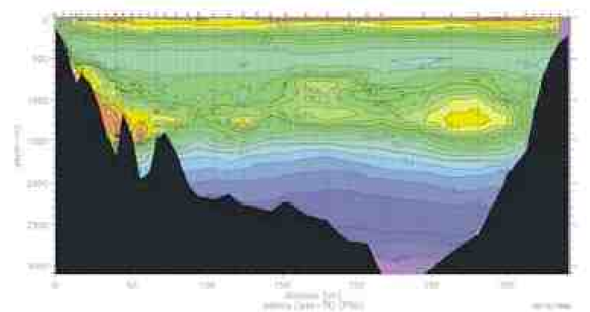
Leur période de rotation (temps pour faire un tour complet) peut varier de 3 jours à 24 jours, avec une moyenne de 8 jours et leur vitesse de déplacement est de l'ordre de 2 cm/s. On estime qu'environ 70% entrent en collision avec les monts sous-marins Horseshoe (dans l'ouest-sud-ouest du Cap St-Vincent) en se désintégrant ou en s'affaiblissant fortement. Les 30% restant contournent les Seamounts par le nord et parviennent dans le Bassin des Canaries.
La durée de vie moyenne d'un meddy nouvellement formé est estimée à 1,7 ans, bien que certains aient été suivis pendant 5 ans.
On estime qu'une vingtaine de meddies se forment chaque année, ce qui, combiné avec leur durée de vie, fait estimer à une trentaine le nombre de meddies qui se promènent en permanence dans l'Atlantique Nord.
On a également observé des phénomènes d'agrégation de deux meddies, puis le contraire : leur séparation.
L'Eau Profonde Nord-Atlantique, est en partie alimentée par ces meddies qui lui confèrent un surplus de chaleur et de sel.



Bathymétrie de la zone de génération des meddies Crédit : Bulletin de la Sociéte Géologique de France



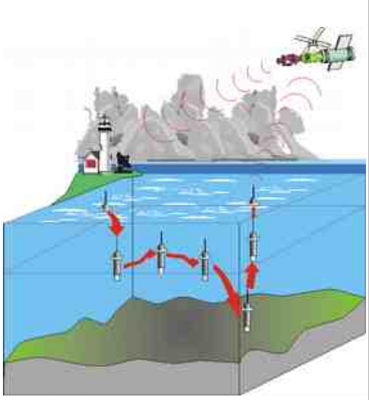
Sections verticales de température et de salinité à travers un meddy mesuré en Juillet 1993 dans le Basin des Canaries vers 36°N 28°W. Ce meddy présente un double maximum en température et en salinité. Les valeurs atteignent 13.2°C et 36.4 g/l à 850 m et 12.3°C and 36.5 psu à 1250 m. Les anomalies maximales par rapport à l'eau environnante atteignent 4,1°C et 1,1 g/l à 1250 m. Le diamètre total est de 120 km
Crédit : Tychensky et Carton, 1998



Section de salinité entre le Portugal (à gauche) et le Maroc (à droite), longitude : 8,2° ouest, tirée des mesures faites lors de la campagne Sémane, juillet 1999
Un cyclone (au centre) et un meddy (à droite) sont présents sur la section
Crédit : V. Thierry, X. Carton et J. Paillet.

Il faut une grande chance aux chercheurs embarqués sur les bateaux océanographiques pour capter un meddy. Les observations sont rares. En effet, le signal altimétrique étant trop faible, on ne peut les repérer du ciel (certaines études se penchent cependant sur la question, voir par exemple http://conference.iproms.org/presentation/145). Quelques observations ont pu être faites toutefois et sont décrites avec précision dans des articles de revues spécialisées (Richardson et al., 2000, Tychensky and Carton, 1998). Les rayons mesurés donnaient des valeurs entre 20 et 80 kilomètres et des épaisseurs verticales entre 800 et 1400 mètres, avec le coeur de la structure situé dans les 1000 mètres de profondeur. La salinité au coeur du meddy pouvait atteindre les 36,37 g/l et une température de 13,2°C. Les autres observations nous proviennent des flotteurs Argo (capteurs plongeant à 2000 mètres mesurant par cycles de plongées successives la température et la salinité le long de leur trajectoire et retransmettant leurs données aux satellites Argos lors de leur retour en surface.

Argo, programme international

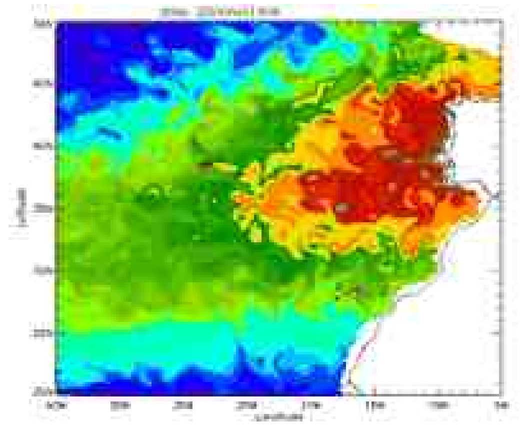


http://www.mercator-ocean.fr/html/actualites/news/actu_argo2000_fr.html

Dès le milieu des années 90, Les pionniers de la prévision océanique ont compris que les satellites altimétriques, indispensables à l'océanographie opérationnelle, ne suffisaient pas pour une modélisation fine des processus qui ont lieu dans l'océan profond. En 2000, commence le déploiement des flotteurs Argo dans le cadre d'un programme international.
Argo vise à déployer et à maintenir un réseau d'environ 3000 flotteurs profilants, repartis sur un maillage de 3° x 3°, mesurant des profils de température et de salinité jusqu'à des profondeurs de 2000m, d'où leur nom de "profileur Argo", ainsi que la vitesse du courant à des profondeurs variables, ces trois paramètres pouvant être assimilés dans les modèles numériques. Ce programme a été initié comme support aux programmes d'océanographie opérationnelle et de prévision climatique saisonnière et interannuelle. Chaque flotteur remonte tous les dix jours à la surface, transmet ses données aux satellites Argos (d'autres systemes comme Iridium sont à l'étude), avant de replonger à 2000m. Les données sont diffusées gratuitement et sans aucune restriction en temps réel sur le système mondial de transmission (SMT) ainsi que sur Internet. 17 pays plus l'Union Européenne participent au réseau Argo. Le projet Coriolis est la composante française d'Argo ; il comprend l'instrumentation (developpement du modèle Provor), le déploiement des instruments et le traitement de données (Coriolis est en particulier un des deux Centres de Données Argo Globaux).

Une étude approfondie menée par l'équipe modélisation de Mercator Océan avait pour but d'évaluer la capacité du Prototype Atlantique Nord Méditerranée (PAM) à simuler ces structures.

Cette expérience s'est faite sans assimilation de données, en faisant tourner le modèle d'océan avec, comme seules données d'entrée, outre la bathymétrie et l'état climatologique de départ (un état moyen de l'océan), les forçages atmosphériques (vent, flux de chaleur, évaporation, précipitation). PAM a une résolution horizontale de 5 à 7 km sur l'Atlantique et la Méditerranée et une résolution verticale comprise entre 6m en surface, 300m au fond et des épaisseurs de couche d'environ 100 m dans l'eau Méditerranéenne (les couches de surface sont plus fines que les couches profondes pour mieux représenter les phénomènes complexes de surface). La simulation a été faite sur 5 années, de 1998 à 2002.

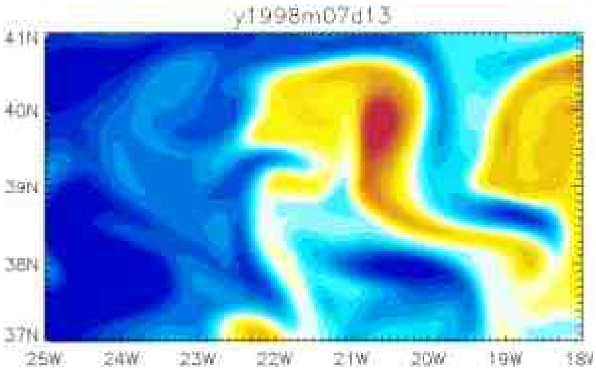


Simulation PAM sur toute l'année 2000: salinité à 870m, Les meddies sont les petits tourbillons à coeur gris. Crédit : Yann Drillet

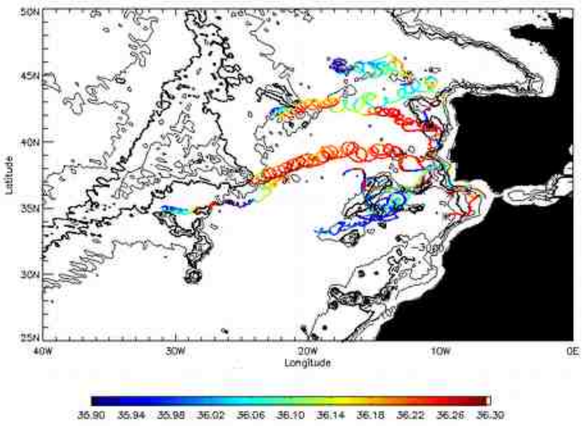
Les résultats révèlent l'aptitude du modèle à simuler les meddies. Cette simulation a permis de mieux comprendre le rôle respectif des zones de formations et d'évaluer les routes privilégiées empruntées par ces structures pendant leur voyage dans l'Atlantique.

Le modèle permet également la simulation des phénomènes d'agrégation/séparation de deux meddies (voir l'animation ci-dessous). Une méthode de suivi des meddies grâce à des calculs de trajectoires lagrangiennes a été mise au point. Elle permet de suivre la trajectoire des tourbillons comme l'illustre la figure ci-dessous. La simulation de 5 ans n'est pas suffisamment longue pour étudier les meddies depuis leur création le long des côtes espagnoles et portugaises. On a cependant pu suivre quelques meddies sur une période de 4 ans et un plus grand nombre sur une période de un an. Les trajectoires simulées sont très réalistes si on les compare à certaines observations qui ont pu être faites pendant des campagnes océanographiques : formation au Cap St Vincent et au Tejo Plateau ou au Cap Finistère, déplacement vers l'ouest, le sud-ouest et le nord. Un meddy crée dès le début de la simulation a pu être suivi pendant 5 ans jusqu'à atteindre la dorsale Atlantique à 30° ouest et 35° nord. A cette position des meddies ont déjà été observés, en particulier au cours de la campagne océanographique Sémaphore. Des simulations plus longues permettront par la suite d'étudier les déplacements extrêmes des meddies, et en particulier leur capacité éventuelle à franchir les monts sous marins qui s'élèvent au milieu de l'Atlantique.

Cette simulation a également permis une nouvelle estimation des quantités de sel transportés à travers l'Atlantique et la contribution des meddies à cette tâche essentielle pour la circulation thermo-haline



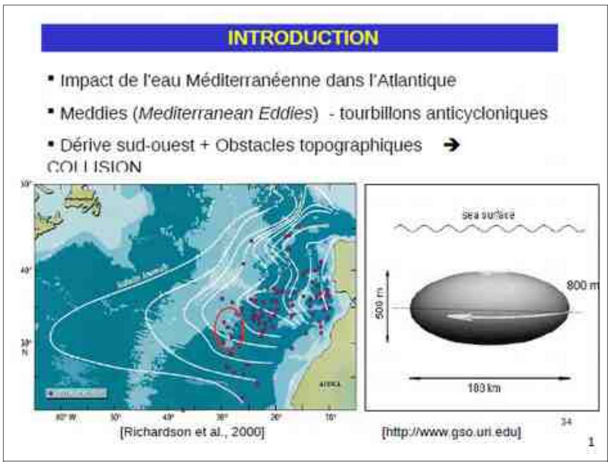
Simulation PAM : salinité à 870 m, entre le 13 juillet et le 30 novembre, un plot tous les 20 jours Remarquez la séparation du meddy en deux structures distinctes et la ré-agrégation de ces deux structures. Crédit : Yann Drillet

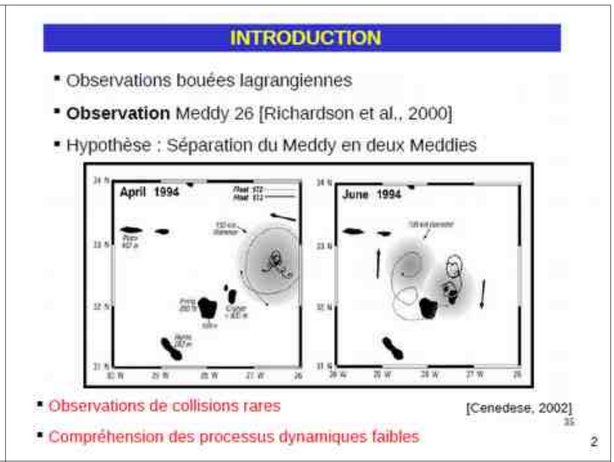


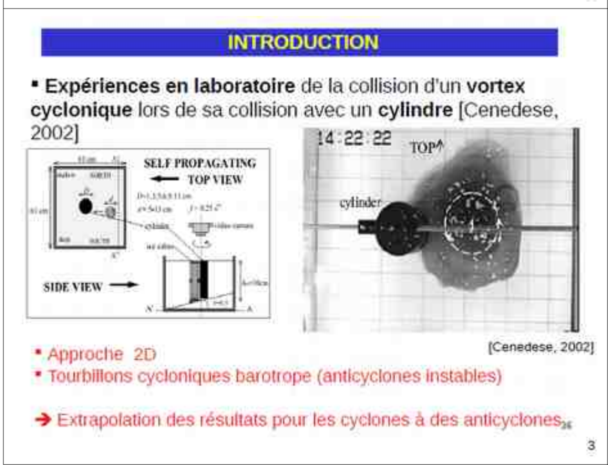
Trajectoires de flotteurs simulés par le modèle. La couleur représente la salinité à la position du flotteur qui évolue sur cet exemple entre 35.9 et 36.3 g/kg d'eau de mer, soit environ 0.5 à 0.6 g/kg de plus que l'eau environnante. Crédit : Yann Drillet et al., 2005

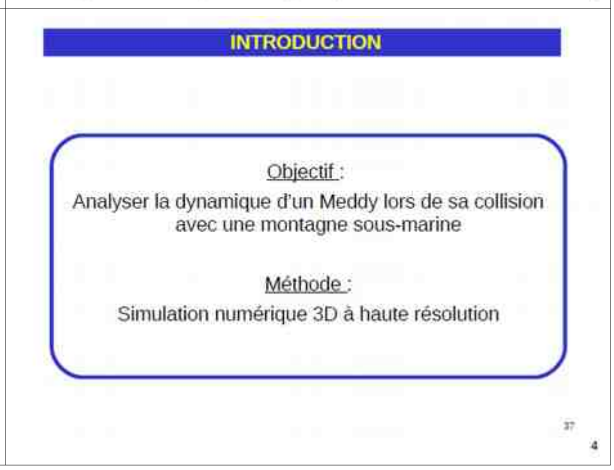
6.4 Exemple : Etude numérique de la collision d'un Meddy avec une montagne sous-marine

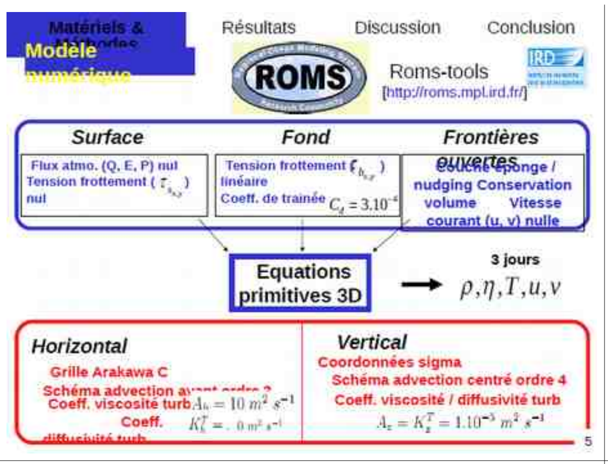
Les Meddies (Medditerranean eddies), tourbillons composés d'eau chaude et salée d'origine Méditerranéenne sont des structures hydrologiques proéminentes de l'Atlantique Nord. Lors de leur propagation, les Meddies sont confrontés à de nombreux obstacles topographiques. L'objectif de ce stage est l'étude de la dynamique et des processus intervenant lors de la collision d'un Meddy avec une montagne sous-marine. Des simulations à haute résolution ont été réalisées afin de modéliser cette collision. Une étude préalable, en l'absence de montagne sous-marine, a été effectuée afin de comprendre l'évolution et la structure du Meddy sans perturbation. Sa propagation est affectée principalement par l'effet β et une interaction hétonique avec une structure cyclonique sous-jacente se mettant en place. Une analyse de sensibilité des paramètres physiques du modèle a été accomplie en considérant différentes caractéristiques de la montagne sous-marine. Dans toutes les simulations, le Meddy survit à la collision et se sépare en deux structures indépendantes : un Meddy principal et un Meddy secondaire. Un changement dans la structure verticale de la vorticité du Meddy principal met en évidence une évolution rapide vers une structure hétonique. Le Meddy principal continue ensuite à se propager vers le sud-ouest. Dans une des simulations, l'évolution vers une structure hétonique est tellement importante qu'une structure stable émerge et se propage vers l'est. Des processus d'érosion, d'agrégation et de filamentation sont également analysés.



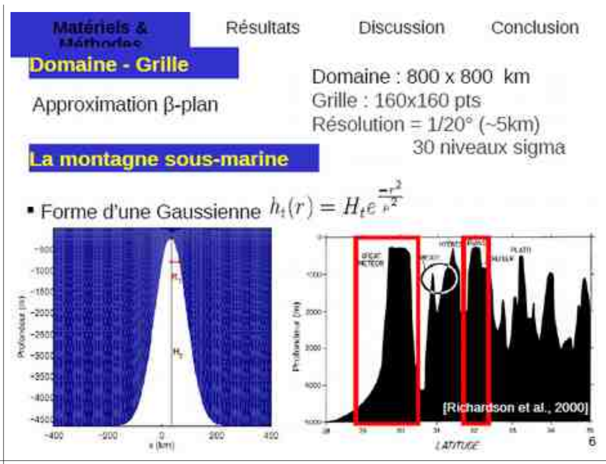




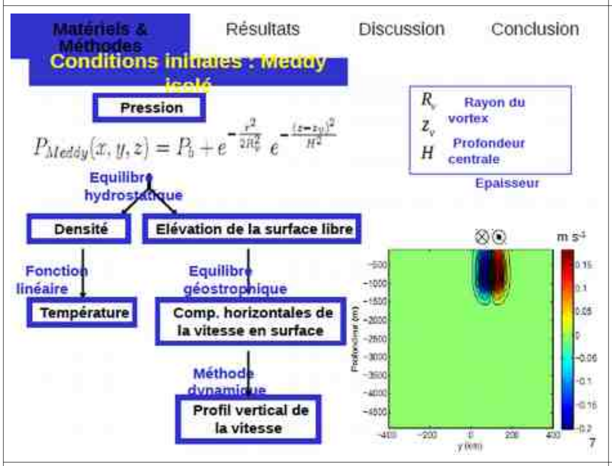




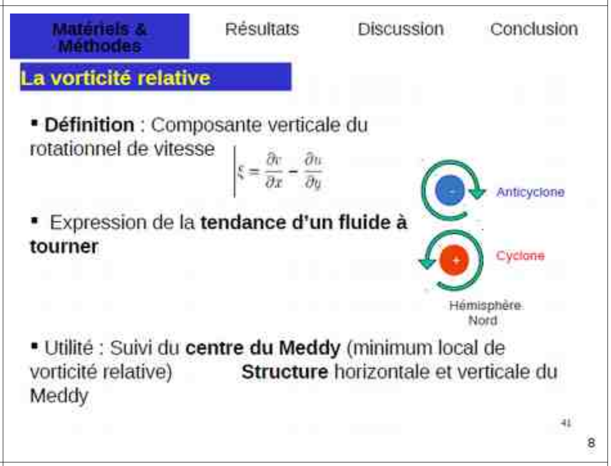
Matériels & Méthodes
Résultats
Discussion
Conclusion
Modèle numérique
ROMS
Roms-tools
[http://roms.mpl.ird.fr/]
IRD
Surface
Fond
Frontières
Flux atmo. (Q, E, P) nul
Tension frottement nul
Tension frottement linéaire
Coeff. de trainée
ouvertes
Couche éponge / nudging Conservation volume Vitesse courant (u, v) nulle
Equations primitives 3D
3 jours
Horizontal
Grille Arakawa C
Vertical
Coordonnées sigma
Schéma advection centré ordre 4
Coeff. viscosité / diffusivité turb
5



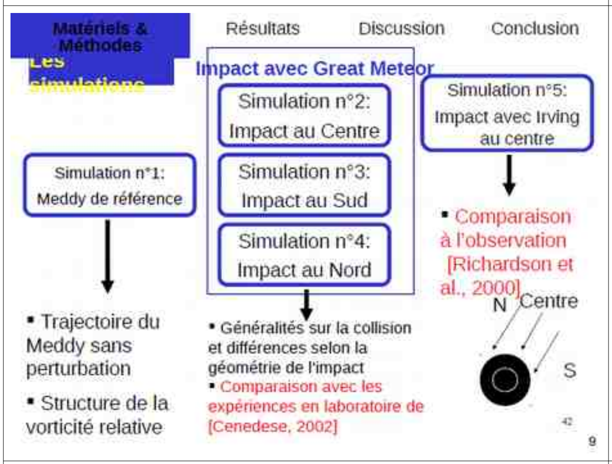
Matériels & Méthodes
Résultats
Discussion
Conclusion
Domaine - Grille
Approximation β-plan
Domaine : 800 x 800 km
Grille : 160x160 pts
Résolution = 1/20° (~5km)
30 niveaux sigma
La montagne sous-marine
Forme d'une Gaussienne
[Richardson et al., 2000]
6



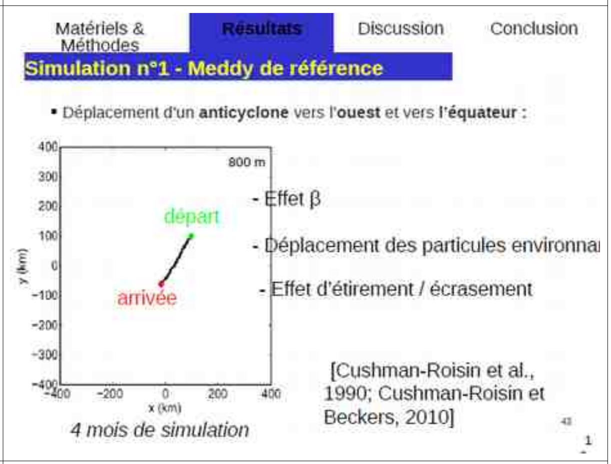
Matériels & Méthodes
Résultats
Discussion
Conclusion
Conditions initiales : Meddy isolé
Pression
Rayon du vortex
Profondeur centrale
Epaisseur
Equilibre hydrostatique
Densité
Elévation de la surface libre
Fonction linéaire
Equilibre géostrophique
Température
Comp. horizontales de la vitesse en surface
Méthode dynamique
Profil vertical de la vitesse
7



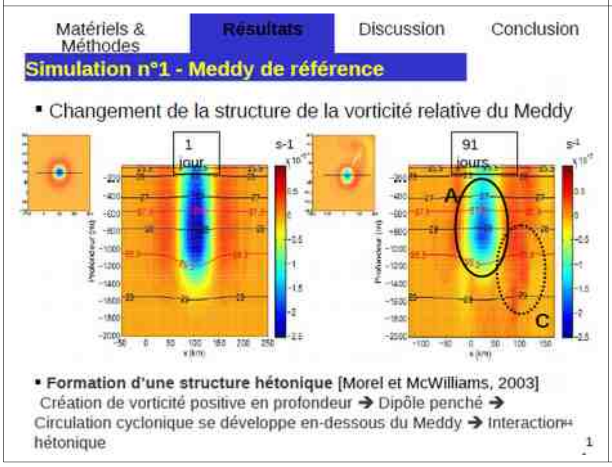
Matériels & Méthodes
Résultats
Discussion
Conclusion
La vorticité relative
Définition : Composante verticale du rotationnel de vitesse
Expression de la tendance d'un fluide à tourner
Anticyclone
Cyclone
Hémisphère Nord
Utilité : Suivi du centre du Meddy (minimum local de vorticité relative) Structure horizontale et verticale du Meddy
8



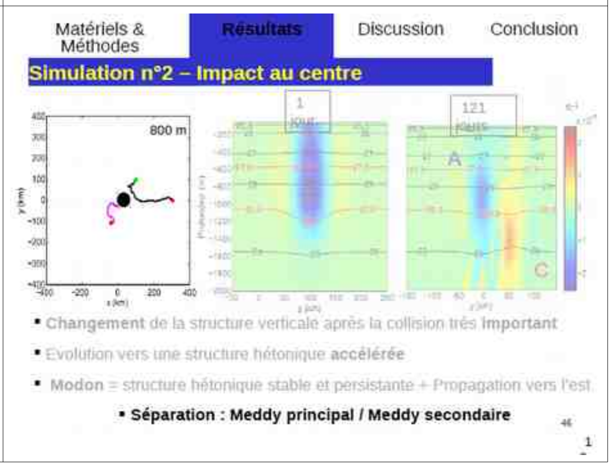
Matériels & Méthodes
Résultats
Discussion
Conclusion
Les simulations
Impact avec Great Meteor
Simulation n°2: Impact au Centre
Simulation n°3: Impact au Sud
Simulation n°4: Impact au Nord
Simulation n°5: Impact avec Irving au centre
Simulation n°1: Meddy de référence
Comparaison à l'observation [Richardson et al., 2000]
Trajectoire du Meddy sans perturbation
Structure de la vorticité relative
Généralités sur la collision et différences selon la géométrie de l'impact
Comparaison avec les expériences en laboratoire de [Cenedese, 2002]
N
Centre
S
9



Matériels & Méthodes
Résultats
Discussion
Conclusion
Simulation n°1 - Meddy de référence
Déplacement d'un anticyclone vers l'ouest et vers l'équateur :
départ
arrivée
- Effet β
- Déplacement des particules environnantes
- Effet d'étirement / écrasement
[Cushman-Roisin et al., 1990; Cushman-Roisin et Beckers, 2010]
4 mois de simulation



Matériels & Méthodes
Résultats
Discussion
Conclusion
Simulation n°1 - Meddy de référence
Changement de la structure de la vorticité relative du Meddy
1 jour
91 jours
A
C
Formation d'une structure hétonique [Morel et McWilliams, 2003]
Création de vorticité positive en profondeur → Dipôle penché →
Circulation cyclonique se développe en-dessous du Meddy → Interaction hétonique

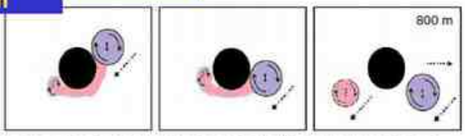


Matériels & Méthodes
Résultats
Discussion
Conclusion
Simulation n°2 – Impact au centre
1 jour
121 jours
A
C
Changement de la structure verticale après la collision très important
Evolution vers une structure hétonique accélérée
Modon = structure hétonique stable et persistante + Propagation vers l'est
Séparation : Meddy principal / Meddy secondaire

Matériels & Méthodes | **Résultats** | Discussion | Conclusion

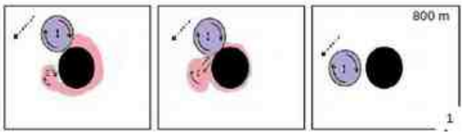
La collision

Simulations n°2-3-5



- Formation d'une langue de vorticité cyclonique qui s'enroule dans le sens horaire
- **Séparation** de la structure : Meddy principal (1) – Meddy secondaire (2)
- Le Meddy principal dérive vers le sud-ouest ou vers l'est

Simulation n°4



1

Matériels & Méthodes | Résultats | **Discussion** | Conclusion

Expériences en laboratoire de Cenedese (2002)

- Etude de l'évolution d'un **vortex cyclonique** lors de sa collision avec un **cylindre** ➔ Extrapolation des résultats pour les cyclones à des anticyclones

Cenedese (2002)		Cette étude
Formation d'un ***streamer*** dans le sens **horaire** autour du cylindre	✓	Formation d'une langue de vorticité dans un sens horaire autour de la montagne sous-marine
Formation d'un **nouveau pôle** de vorticité **en aval** du cylindre	✓	Formation du **Meddy secondaire en aval** de la montagne sous-marine
Séparation pour un impact au **Nord et au centre** du cylindre	X	**Séparation** pour un impact **au Sud et au centre** de la montagne sous-marine

- Mécanisme de formation du nouveau vortex = Tourbillons de l'allée de Von-Karman

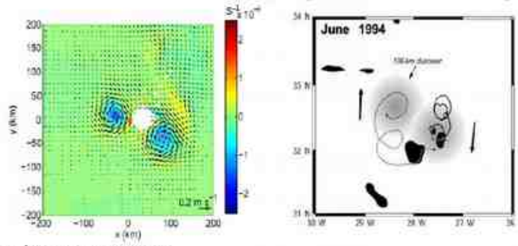
48

1

Matériels & Méthodes | Résultats | **Discussion** | Conclusion

Simulation n°5 – Impact Irving

Observation Meddy 26 [Richardson et al., 2000]



- Séparation du Meddy
- Dérive vers le nord du Meddy secondaire - Dérive vers le Sud du Meddy principal

Confirmation de l'hypothèse issue de l'observation

1

Matériels & Méthodes | Résultats | Discussion | **Conclusion**

Meddy

Propagation Sud-ouest + interaction hétonique

Collision avec une montagne sous-marine

Processus de séparation

Meddy principal — **Meddy secondaire**

Structure hétonique accélérée — **Allée de Von-Karman**

Impact au nord ➔ Processus d'agrégation entre le Meddy principal et le Meddy secondaire en aval de la montagne sous-marine

50

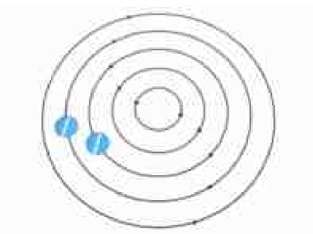
1

6.5 Techniques d'identification et de suivi de tourbillons

Une définition appropriée d'un tourbillon et la mise en œuvre d'un algorithme pour identifier automatiquement et de suivre les structures de méso-échelle et subméso-échelle sont fondamentales pour en étudier la dynamique à l'aide de grands bases données, tels que celles issue de l'altimétrie satellite, ou les sorties des modèles de circulations. Différentes méthodes ont été proposées, fondées soit sur le plan physique ou les caractéristiques géométriques de la zone d'écoulement.
Les méthodes basées sur les caractéristiques physiques identifient les tourbillons à l'aide des valeurs d'un paramètre spécifié choisis qui dépassent un seuil. Les méthodes basées sur les caractéristiques géométriques du champ d'écoulement identifient les tourbillons en fonction de la forme ou courbure des lignes de courant instantanées. Par conséquent, les algorithmes de détection automatisée peuvent être classées en trois types (Nencioli et al, 2009): 1) basés sur les paramètres physiques; 2) basé sur la géométrie de l'écoulement; et 3) hybride, qui implique à la fois des paramètres physiques et de la géométrie de l'écoulement.

En théorie, la vitesse u de particules (et, par conséquent, le tourbillon) dans un tourbillon peut varier en fonction de la distance r de l'axe de plusieurs façons. Il existe deux cas particuliers importants: tourbillon de corps rigide et tourbillon irrotationel.
Si le fluide tourne comme un corps rigide - autrement dit, si la Ω la vitesse de rotation angulaire est uniforme, de telle sorte que u augmente proportionnellement à la distance r de l'axe - une petite boule portée par l'écoulement serait également tourner autour de son centre, comme si elle faisaient partie de ce corps rigide. Dans un tel écoulement, la vorticité est la même partout: sa direction est parallèle à l'axe de rotation, et son amplitude est égale à deux fois la vitesse angulaire Ω uniforme du fluide autour du centre de rotation.

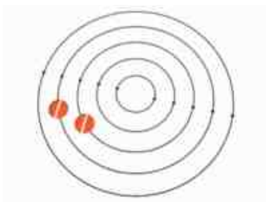
$$\vec{\Omega} = (0,0,\Omega), \quad \vec{r} = (x,y,0),$$
$$\vec{u} = \vec{\Omega} \times \vec{r} = (-\Omega y, \Omega x, 0),$$
$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} = (0,0,2\Omega) = 2\vec{\Omega}.$$



http://en.wikipedia.org/wiki/Vortex

Si la vitesse u de particules est inversement proportionnelle à la distance r de l'axe, puis le ballon d'essai imaginaire ne tourne pas sur lui-même; il maintenir la même orientation tout en se déplaçant dans un cercle autour de l'axe du vortex. Dans ce cas, la vorticité $\vec{\omega}$ est nulle en tout point pas sur cet axe, et l'écoulement est dit irrotationnel.

$$\vec{\Omega} = (0,0,\alpha r^{-2}), \quad \vec{r} = (x,y,0),$$
$$\vec{u} = \vec{\Omega} \times \vec{r} = (-\alpha y r^{-2}, \alpha x r^{-2}, 0),$$
$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} = 0.$$



http://en.wikipedia.org/wiki/Vortex

En l'absence de forces extérieures, une vortex évolue habituellement assez rapidement en direction de la configuration d'écoulement irrotationnel où les vitesses d'écoulement U est inversement proportionnelle à la distance r. Pour cette raison, les tourbillons irrotationnels sont aussi appelés tourbillons libres (*free vortices*).
Pour un vortex irrotationnel, la circulation est nulle le long de tout contour fermé qui ne renferme pas l'axe du vortex et a une valeur fixe, Γ, pour tout contour qui entoure l'axe une fois. La composante tangentielle de la vitesse des particules est alors $u_\theta = \frac{\Gamma}{(2\pi r)}$.
Toutefois, un vortex irrotationnel n'est pas physiquement réalisable, car cela impliquerait que la vitesse des particules (et donc la force nécessaire pour maintenir les particules dans leurs trajectoires circulaires) augmenteraient sans borne que l'on s'approche de l'axe du vortex. En effet, dans de véritables tourbillons, il y a toujours une région de coeur entourant l'axe où la vitesse des particules cesse d'augmenter puis diminue vers zéro lorsque r tend vers zéro. Dans cette région, l'écoulement n'est plus irrotationnel: la vorticité $\vec{\omega}$ devient non nulle, avec la direction à peu près parallèle à l'axe du vortex. Le tourbillon de Rankine est un modèle qui suppose un flux de corps rigide de rotation où r est inférieur à un r0 distance fixe, et le flux irrotationnel extérieur que les régions centrales.

Un tourbillon de rotation peut être maintenu indéfiniment dans cet état seulement par l'application d'une force supplémentaire, qui n'est pas générée par le mouvement du fluide lui-même. Par exemple, si un seau d'eau est fait tourné à une vitesse angulaire constante w autour de son axe vertical, l'eau finira par tourner comme dans un corps rigide. Les particules se déplacent alors le long de cercles, avec une vitesse u égale à wr. Dans ce cas, la surface libre de l'eau prendra une forme parabolique. Dans cette situation, le gradient de pression supplémentaire dans l'eau, dirigée vers l'intérieur empêche l'évolution de l'écoulement en corps rigide à celui irrotationnel. Dans ce type d'écoulement pour un fluide de densité constante, la pression dynamique est proportionnelle au carré de la distance r de l'axe. Dans un champ de gravité constant, la surface libre du liquide, si elle est présente, est une paraboloïde concave.

L'étude par McWilliams (1990) représente l'un des premières œuvres dans la détection de tourbillons. L'algorithme a été développé pour mesurer quantitativement les propriétés spécifiques de tourbillons cohérents à partir d'une solution numérique de circulation en deux dimensions. Il est basé sur la notion que la rotation domine dans un vortex et la vorticité relative ζ est le paramètre physique utilisé pour la détection. Les centre des tourbillons sont identifiés par des minima locaux et maxima de ζ et leur limites sont définies par la points autour du centre où $\frac{\zeta}{\zeta_{center}} < 0.2$ Une séries de contraintes est appliquée sur les caractéristiques géométriques des structures détectées, et seules les structures pas trop axisymétriques sont considérés comme représentant d'un vortex. Pour cette raison, cette méthode appartient à la dernière catégorie,

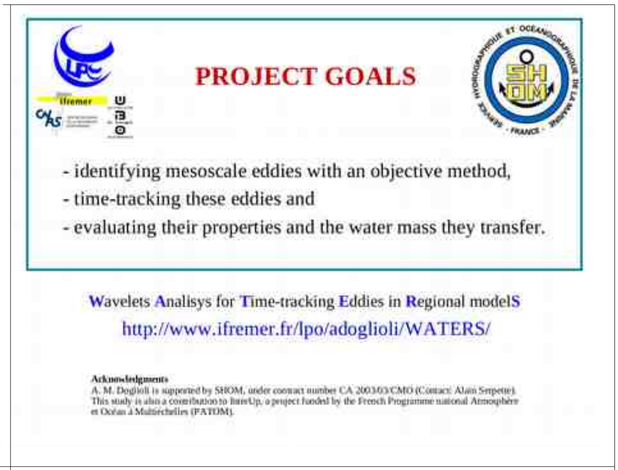
Dans la catégorie des algorithmes de détection basés sur des paramètres physiques, l'un des plus largement utilisé est celui qui fait appel au paramtère d'Okubo-Weiss W (Okubo 1970; Weiss 1991). Ce paramètre est calculé à partir du champ de vitesse horizontale

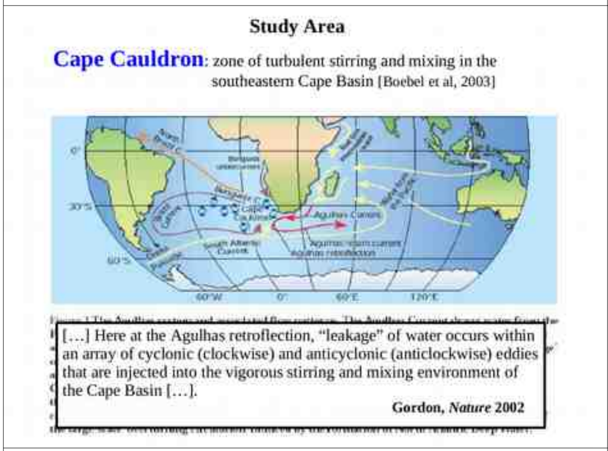
$$W = s_n^2 + s_s^2 - \omega^2 \quad \text{où} \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad s_n = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \quad s_s = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

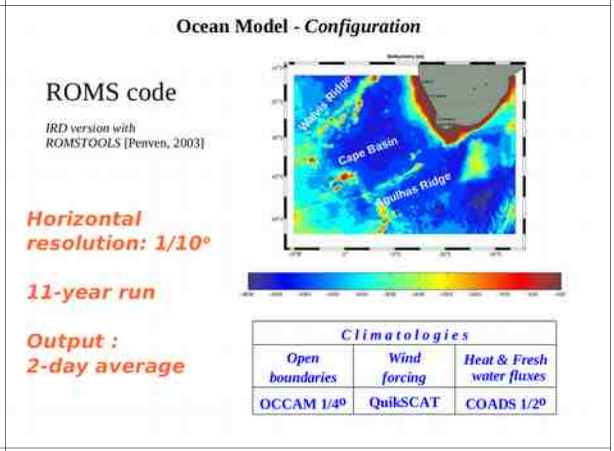
où ssh et sst sont la déformation de cisaillement et de déformation, respectivement, et j est la composante verticale de la vorticité. Ici, W quantifie l'importance relative de la déformation par rapport à la rotation. Étant donné que le champ de vitesse dans un vortex est dominé par rotation, les tourbillons océaniques sont généralement caractérisées par les valeurs négatives de W. Il est donc possible d'identifier ces fonctions par contours fermés de W=W0, où W0 est une valeur seuil choisie. Ce procédé a été souvent utilisé pour détecter les tourbillons dans de données d'altimétrie du niveau de la mer (SLA) (e.g. Isern-Fontanet et al 2003;. Morrow et al. 2004; Chelton et al. 2007). Toutefois les dérivés de vitesse provoquent du bruit supplémentaire dans the champs de W. Ceci est habituellement réduite en appliquant un algorithme de lissage, qui, cependant, pourraient retirer également de l'information physique. Quelques études ont mis en évidence des limites de cette méthode (Sadarjoen et Post 2000; Chaigneau et al. 2008): une tendance à la excès de détection de tourbillons (des structure sont identifiées comme tourbillons quad il ne les sont pas) semble persister même après lissage le champ de W; en outre, lorsque de longues séries chronologiques sont analysés, la valeur de seuil W0 doit être ajustée en permanence en fonction de la variation des propriétés turbulentes du champ de vitesses.

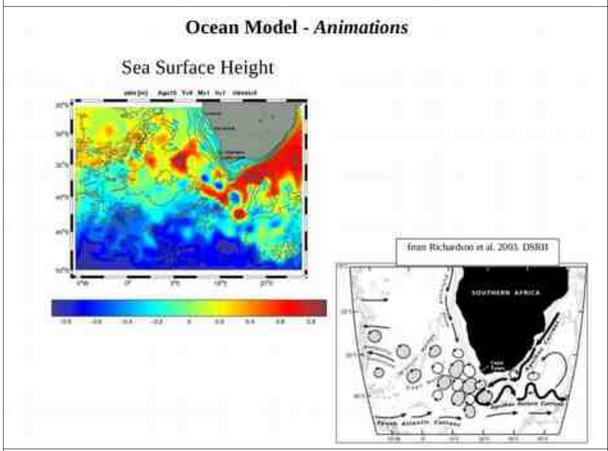
Une approche dite de l'angle d'enroulement (*winding-angle method*) a été proposée par Sadarjoen et Post (2000); elle appartient à la deuxième catégorie. Il a été développé sous l'hypothèse que les tourbillons peuvent être définis comme des éléments caractérisé par une forme à peu près circulaire ou en spirale autour de leurs noyaux (Robinson, 1991). Comme première étape, les lignes de courant instantanées sont dérivés de l' champ de vitesse; ensuite, la variation de direction cumulée des segments qui composent une ligne de courant donnée (angle d'enroulement) est calculée pour chaque ligne de courant. Le tourbillons sont identifiés par les lignes de courant avec un angle d'enroulement $|\alpha| \geq 2\pi$. ce qui correspond à une courbe fermée ou en spirale. Cette méthode a été utilisée par Chaigneau et al. (2008) pour analyser l'activité tourbillonaire dans la partie orientale du Pacifique Sud à partir de données SLA. La comparaison avec les résultats obtenus avec la méthode Okubo-Weiss sur le même jeu de données a montré que la méthode de l'angle d'enroulement a plus de chances de détecter avec succès tourbillons et surtout un excès beaucoup plus faible de l'erreur de détection. Toutefois il y a un prix à payer pour cela en termes de effort de calcul plus important. Chaigneau et al. (2008) ont trouvé un moyen de contourner ce problème par l'application du procédé que dans les régions de la domaine où les tourbillons ont été identifiés par des maxima locaux et les minima de SLA. Pour cette raison, leur méthode peut être classés comme hybrides (troisième catégorie): une grandeur physique (SLA) est utilisé pour identifier les tourbillons, puis les caractéristiques géométriques de la zone d'écoulement (lignes de courant) sont utilisés pour définir les limites des tourbillons.

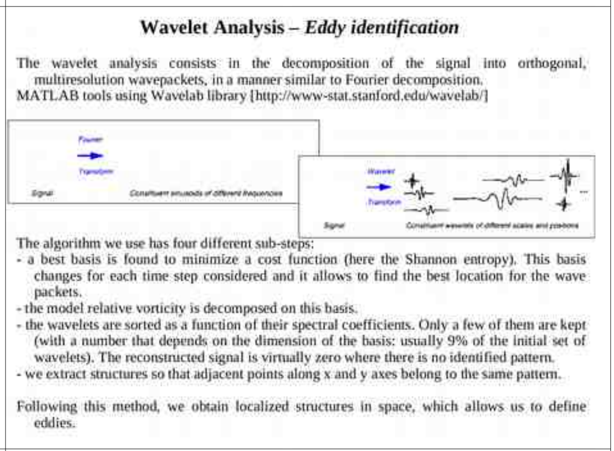
6.6 Exemple : suivi des tourbillons dans le *Cape Basin* et dans le Golfe du Lion

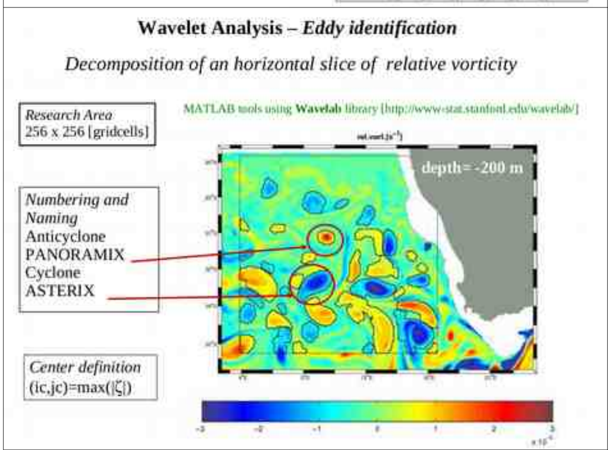


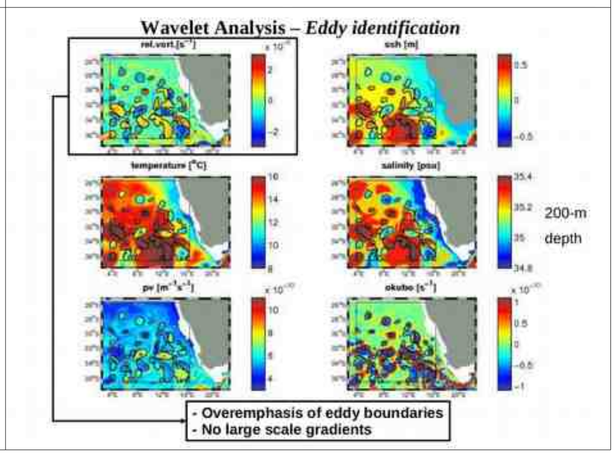








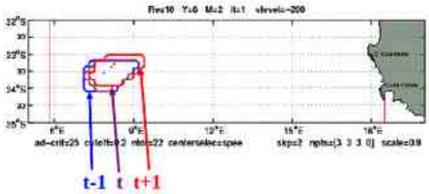




Wavelet Analysis – *Time tracking*

Forward Tracking: $c_t \in \mathfrak{E}_{t-\Delta t}$

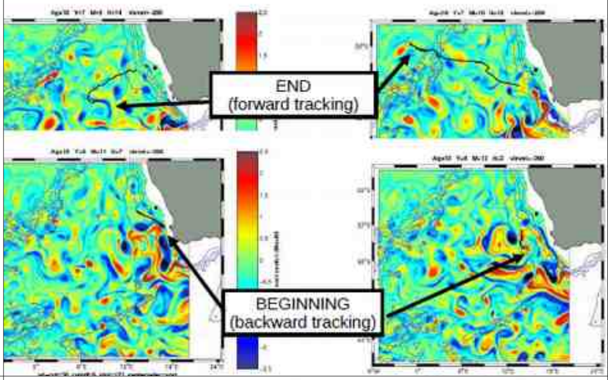
Eddy center — Set of eddy points



Backward = Forward

Wavelet Analysis – *Time tracking*

Cyclone Asterix — Anticyclone PANORAMIX



Wavelet Analysis – *Vertical Tracking*

Downward Tracking: $c_z \in \mathfrak{E}_{z-\Delta z}$

Eddy center — Set of eddy points

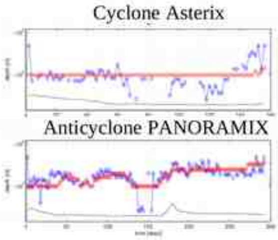
Upper limit: 200-m depth

Lower limit: 1000-m depth

Increment: Δz=100 m

Cyclone Asterix

Anticyclone PANORAMIX



Flierl [1981] criterion
Z where $v_{rot}=v_{trans}$

Wavelets analysis

Bathymetry

$$V = \sum_{k=1}^{iz_L} A_k \cdot \Delta z$$

Wavelet Analysis – *4D tracking*

Velocity

$$v \equiv v(t) = \frac{1}{iz_L}\sum_{k=1}^{iz_L} v_k \qquad v_{err} = \frac{\sigma_z(u)}{v}$$

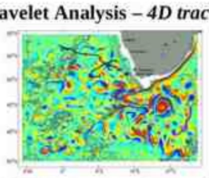
Volume

$$V = \sum_{k=1}^{iz_L} A_k \cdot \Delta z \qquad V_{err}(t) = \frac{\Delta z \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2}{V} + \frac{4\Delta x \Delta z \sum_{k=1}^{iz_L} A_k D_k^{-1}}{V}$$

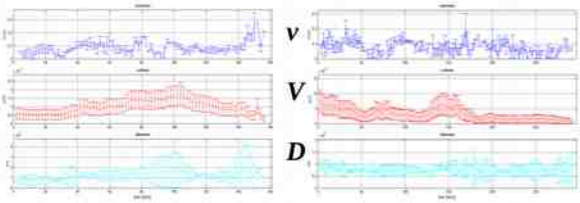
Diameter

$$D = \frac{1}{2\,iz_L}\sum_{k=1}^{iz_L}\left(D_k^{EW} + D_k^{NS}\right) \qquad D_{err} = \frac{\frac{1}{2\,iz_L}\sum_{k=1}^{iz_L}\left|D_k^{EW} - D_k^{NS}\right|}{D}$$

Wavelet Analysis – *4D tracking*

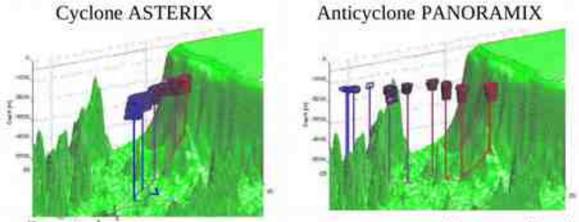


Cyclone ASTERIX — Anticyclone PANORAMIX



Wavelet Analysis – *4D tracking*

Cyclone ASTERIX — Anticyclone PANORAMIX



January-June
Vel = 0.09 [ms^{-1}]
Diam= 121 [km]
Vol=9.7 10^{12} [m^3]

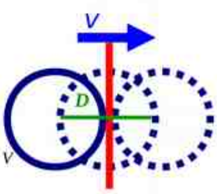
January to October
Vel = 0.08[ms^{-1}]
Diam = 75[km]
Vol=3.1 10^{12} [m^3]

	Boebel et al, 2003		Van Ballegooyen et al.,1994	
	Cyclones	Agulhas Rings	Cyclones	Anticyclones
Diameter [km]	120	200	160	190 – 320
Velocity [m/s]	0.036	0.038	0.046	0.04 – 0.09
Volume [$10^{12}m^3$]	-	-	-	11.2 - 33.8

Divergent pathways
[Morrow et al., 2004]

Wavelet Analysis – *transport*

$$Tr = V \cdot \Delta t^{-1}$$



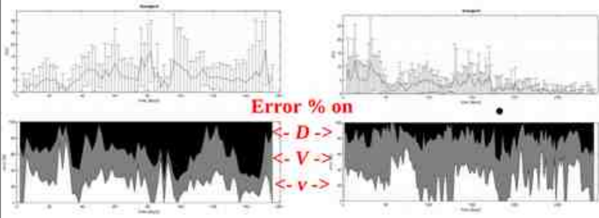
$$Tr = v \cdot V \cdot D^{-1}$$

$$D = \frac{1}{2\,iz_L}\sum_{k=1}^{iz_L}\left(D_k^{EW} + D_k^{NS}\right) \qquad D_{err} = \frac{\frac{1}{2\,iz_L}\sum_{k=1}^{iz_L}\left|D_k^{EW} - D_k^{NS}\right|}{D}$$

Wavelet Analysis – *Transport*

$$\boxed{Tr = v \cdot V \cdot D^{-1}} \qquad Tr_{err} = v_{err} + V_{err} + D_{err}$$

Cyclone ASTERIX — Anticyclone PANORAMIX



<Tr> = 6.6 [Sv] — <Tr> = 3.3 [Sv]

Wavelet Analysis

SUMMARY

- the wavelet analysis proved successful in tracking eddies;
- tracked mesoscale eddies present realistic dynamics;
- wavelets diagnostic offer estimates of eddy mass transport.

Reference:
Doglioli, A.M., Blanke, B., Speich, S., Lapeyre, G. (2006), *Wavelets Analysis for Tracking Eddies in Regional Models. Application to Cape Basin Eddies*. J. Geophys. Res., In revision.

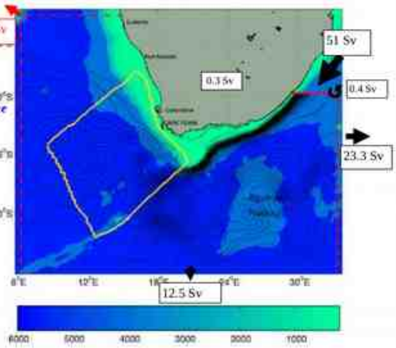
Lagrangian particles – *Interocean Exchange*

ARIANE
http://www.univ-brest.fr/lpo/ariane

Compute total, cross-section transport from them.

Forward/Backward 7-yr time integration

Cape Cauldron [Boebel et al. 2003] 6-hour sampling for spin analysis



Lagrangian particles – *Spin parameter*

$$\Omega = \frac{<u'\mathrm{d}v' - v'\mathrm{d}u'>}{2\,\Delta t\ \mathrm{EKE}}$$

Veneziani et al., 2004. JPO 34, 1884-1906

The eddy field properties in the subsurface northwestern Atlantic are due to the **superposition** of two different regimes: the regime of the **coherent vortices (loopers)** and that of the **background field (non-loopers)**

The observed features can be parameterized through a first-order **LSM** Lagrangian Stochastic Model with **bi-modal distributed spin Ω**

Veneziani et al., 2005a. JMR 63, 753-788

The majority (85%) of looping trajectories are core-loopers, which provide estimates of **Ω**:
- very similar to the **vortex core relative vorticity** and
- whose temporal changes are directly connected to the actual **vortex evolution**.

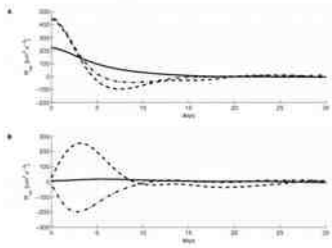
Only the remaining 15% of loopers sample the vortex edge

Lagrangian particles – *Spin parameter*

Two 10% random subsets

30-day chunks

Thresholds:
$\Omega_{0surf} = 0.30\ \mathrm{days}^{-1}$
$\Omega_{0deep} = 0.15\ \mathrm{days}^{-1}$



Lagrangian particles

SUMMARY

- high resolution ocean model reproduces fairly well the vigorous stirring and mixing processes of the study area;
- the Lagrangian particle-following technique provided an estimate of Agulhas leakage of about 14 Sv, which is consistent with observations and previous results from lower resolution models;
- looper regime accounts for about 30% of the estimed interocean exchange, with a remarkable contribution due to cyclones;
- Lagrangian computations coupled with spin analysis revealed promising results, and it would be worth conducting a more complete study

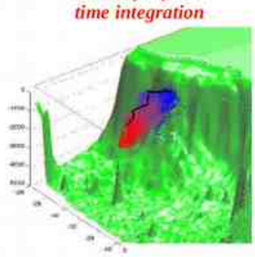
Reference:
Doglioli, A.M., Veneziani, M., Blanke, B., Speich, S., Griffa, A. (2006), A Lagrangian analysis of the Indian-Atlantic interocean exchange in a regional model. Geophys. Res. Lett., In press.

OUTLOOK

Wavelets & Lagrangian particles

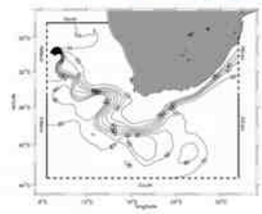
Coherent eddies

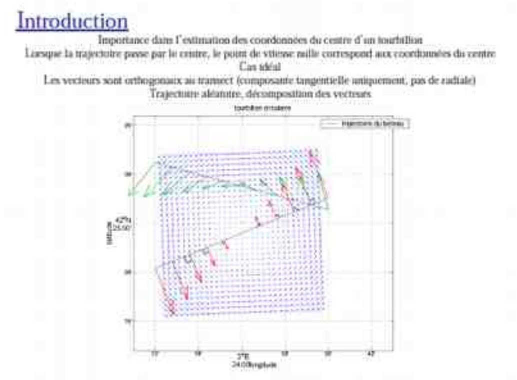
Eddy-life time integration

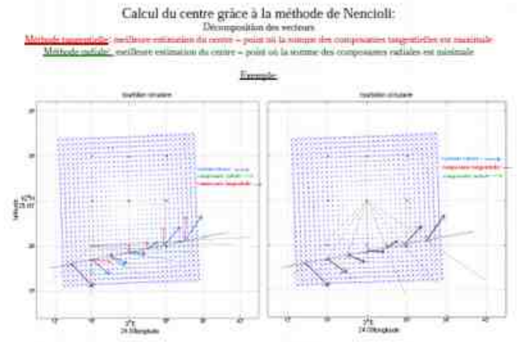


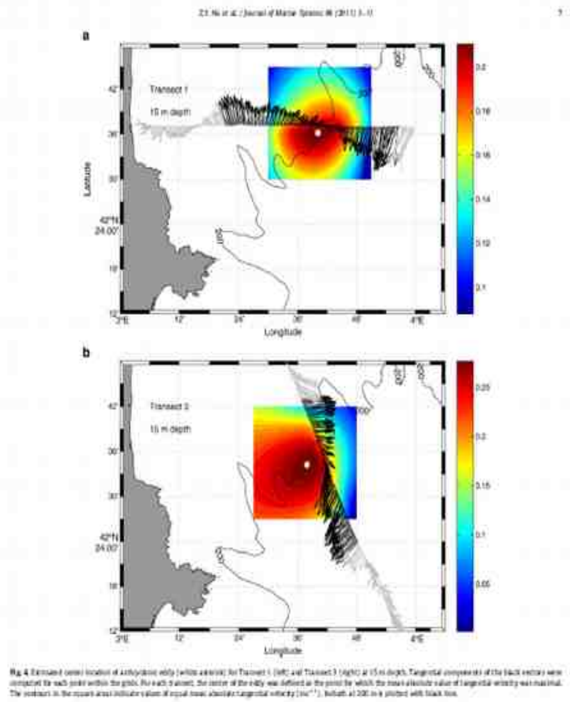
Remote Origins

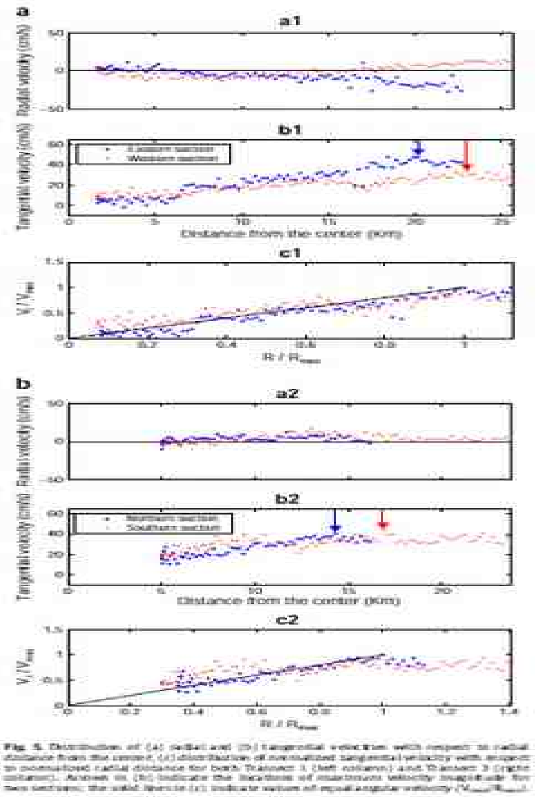
Multiple-years backward time integration




Introduction
Importance dans l'estimation des coordonnées du centre d'un tourbillon
Lorsque la trajectoire passe par le centre, le point de vitesse nulle correspond aux coordonnées du centre
Cas idéal
Les vecteurs sont orthogonaux au transect (composante tangentielle uniquement, pas de radiale)
Trajectoire aléatoire, décomposition des vecteurs


Calcul du centre grâce à la méthode de Nencioli:
Décomposition des vecteurs
Exemple:


a
Transect 1
15 m depth
Latitude
Longitude
b
Transect 3
15 m depth
Longitude


a
a1
Radial velocity (cm/s)
b1
Eastern section
Western section
Tangential velocity (cm/s)
Distance from the center (Km)
c1
b
a2
Radial velocity (cm/s)
b2
Northern section
Southern section
Tangential velocity (cm/s)
Distance from the center (Km)
c2

7. Dispersion

Fondements

7.1 Théorème de conservation

La loi de conservation d'un quantité générique de densité ψ s'écrit

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \mathbf{u}) = 0,$$

un cas particulier de loi de conservation est l'équation de continuité dans laquelle est la masse volumique à se conserver

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0\,,$$

Une forme più générale est la suivante

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \mathbf{u}) = \gamma.$$

dans laquelle on tient en compte aussi la présence éventuelle de puits et/ou sources de ψ , qui sont représentés par le terme γ . Ce terme peut être décomposé en deux autres termes, une contribution non divergente ξ et la divergence d'un certain vecteur $-\chi$

$$\gamma = \xi - \nabla \cdot \boldsymbol{\chi}\,.$$

pour obtenir

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\psi \mathbf{u}) + \nabla \cdot \boldsymbol{\chi} = \xi,$$

qui est la forme la plus générale pour une équation de conservation.

Théorème de flux-divergence

http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_flux-divergence

En analyse vectorielle, le **théorème de flux-divergence**, appelé aussi **théorème de Green-Ostrogradski** ou de Gauss affirme l'égalité entre l'intégrale de la divergence d'un champ vectoriel sur un volume dans $\mathbb{R}^3$ et le flux de ce champ à travers la frontière du volume (qui est une intégrale de surface).
L'égalité est la suivante :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\ \vec{F}\ \mathrm{d}V = \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

où V est le volume de référence et S la surface qui entoure ce volume

En intégrant maintenant cette équation sur un volume fini de référence et en appliquant le théorème de flux-divergence, on obtient un forme intégrale du théorème de conservation

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}} \psi\, dV + \oint_S \psi\, \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} + \oint_S \boldsymbol{\chi} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{V}} \xi\, dV\,,$$

Cette formulation nous permet de mettre en évidence que la variation temporelle locale de la propriété ψ dans le volume V (premier terme) est liée à la somme de trois termes ;

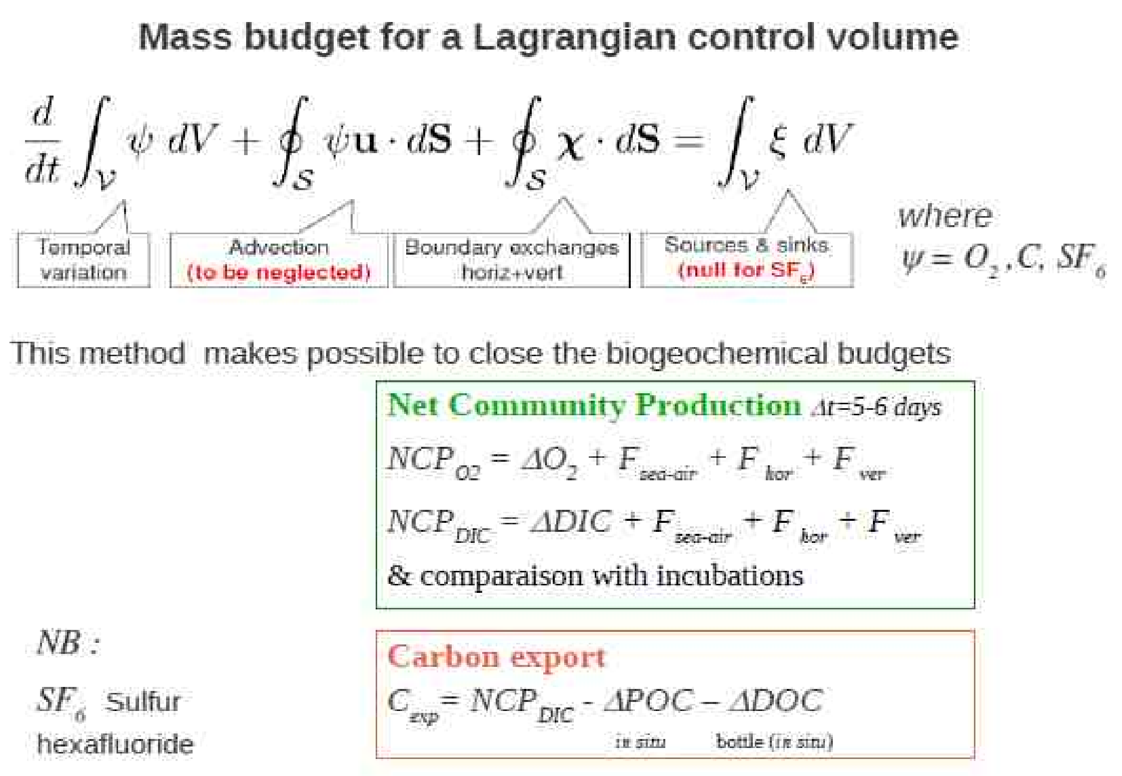
- un terme de transport $\psi \boldsymbol{v}$, lié à l'entraînement de la propriété par le fluide en mouvement ;

- un terme de flux, i.e. des effects des actions de surface, liés à χ qui génère une perte ou une augmentation de quantité dans des volumes finis d'espace, mais, dans le cas que $\chi=0$ sur l'enveloppe du fluide, non pas forcement dans l'espace occupé complètement par le fluide . Il s'agit donc d'un terme de redistribution de la propriété à l'intérieur du fluide ou bien de distribution a cause d'actions qui cherchent d'introduire ou exporter à travers de l'enveloppe .

- un terme de dissipation ou de génération, i.e. effets des actions de volume, liés à ξ qui représente la croissance ou la diminution de ψ dues à des agents distribués dans l'espace, qui pourraient être aussi nuls ou nuls en total, bien que dans la plus grande partie de cas ce terme représente le fait que la propriété ψ n'est pas conservée, et en tout cas n'est jamais conservé localement .

EXEMPLE: estimation du la production nette à l'intérieur d'un tourbillon océanique (projet LATEX)

NB : dans ces cas les coefficients de diffusion sont ceux turbulents (voir ci-dessous) et non pas ceux moléculaires.



On peut maintenant prendre la prendre la propriété ψ comme

$$\psi = \rho S$$

avec S salinité de l'eau de mer mesurée en part per mille.
En appliquant la loi de la conservation de la masse et la définition de dérivée lagrangienne on a que

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho S\mathbf{u}) = \rho\frac{\partial S}{\partial t} + S\frac{\partial \rho}{\partial t} + S\nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) + \rho\mathbf{u}\cdot\nabla S =$$
$$= \rho\left(\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla S\right) + S\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u})\right) = \rho\frac{dS}{dt}.$$

L'equation de conservation de la salinité devienne alors

$$\rho\,\frac{d\,S}{dt} + \nabla\cdot\boldsymbol{\chi} = \xi$$

En générale on fait l'hypothèse que le flux d'une propriété est proportionnel en module et dirigé en sens opposé au gradient de la propriété, i.e.

$$\boldsymbol{\chi} = -k_s\nabla\,S$$

avec k_S une constante de proportionnalité. L'équation de conservation devient alors

$$\rho\frac{d\,S}{dt} = \nabla\cdot\,(k_s\,\nabla\,S) + \xi$$

et puisque on peut aussi considérer la variation spatiale de k_S négligeable,

$$\frac{d\,S}{dt} = \kappa_s\nabla^2\,S + \frac{\xi}{\rho}$$

avec $\kappa_S = \frac{k_S}{\rho}$ coefficient de diffusion moléculaire.

Les processus de diffusion moléculaire ont des échelles temporelles très longues par rapport à celle du mouvements et de la diffusion turbulente et dans la suite on les négligera, mais si le mouvement est absent alors sont les seuls responsables de la redistribution d'une certaine propriété. En absence de sources/puits, la diffusion moléculaire, en accord avec le second principe de la thermodynamique, agit pour réduire les gradients du champs .

Il est utile pour la suite d'étudier le cas de diffusion moléculaire dans un fluide à repos.
Dans ces conditions on a

$$\frac{\partial\,S}{\partial t} = \kappa_s\nabla^2\,S + \frac{\xi}{\rho}\,.$$

Si $\xi = 0$ un solution possible est la suivante

$$\mathcal{G}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{(4\pi\kappa_s t)^{3/2}}\,e^{-\frac{r^2}{(4\pi\kappa_s t)}}\;,$$

avec $r^2 = x^2+y^2+z^2$. Cette solution représente une gaussienne tridimensionnel centrée dans l'origine et avec variance $\sigma^2 = 2\kappa_S t$.

À l'état initiale la propriété *S* est initialement toute concentrée dans un point (l'origine des axes pour simplicité), en suite la concentration de la propriété *S*, s'étale avec une vitesse $\sqrt{\frac{2\kappa_S}{t}}$. Le rayon de la région occupée par le fluide augmente avec la racine carrée du temps tandis que la vitesse d'expansion diminue avec la même quantité; en générale pour des valeurs réalistes du coefficient de diffusion, le processus et très très lent .

En mer le coefficient de diffusion du sel κ_S vaut environ 1.5 10^{-9} m^2 s^{-1} .Cette valeur nous dit que une « tache » d'eau salée d'un mètre carré s'élargira par diffusion moléculaire d'un demi mètre carré en 10 000 jours (1 jour = 86400 s ~10^5 s)! Le coefficient de diffusion thermique κ_T vaut environ 1.5 10^{-7} m^2 s^{-1} . Cela comporte que la diffusion de la chaleur soit environ 100 fois plus rapide que celle du sel, restant toutefois très lente . Le coefficient de viscosité cinématique (i.e. de diffusion moléculaire de la quantité de mouvement) à la température de 20 ºC et à une salinité de 39 psu vaut 1.0 10^{-6} m^2 s^{-1} .

Cette lenteur des processus de transport permet l'utilisation des traceurs pour marquer le champ de mouvement (e.g. une veine de courant) .

En plus cette solution 3D homogène peut être décomposée dans le produit de trois solution unidimensionnelles :

$$\mathcal{G}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{(4\pi\kappa_s t)^{3/2}} \left(e^{-\frac{x^2}{(4\pi\kappa_s t)}}\right) \left(e^{-\frac{y^2}{(4\pi\kappa_s t)}}\right) \left(e^{-\frac{z^2}{(4\pi\kappa_s t)}}\right)$$

chacune d'entre elles étant la solution de l'équation de diffusion unidimensionnelle

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \kappa_s \frac{\partial^2 S}{\partial x_i{}^2},$$

$$\text{in cui } x_i = x, y, z \text{ per } i = 1, 2, 3.$$

La solution trouvée permet de construire des solutions dans le cas où $\xi \neq 0$ à partir d'un certain instant initial ou si on a une concentration initiale S_o :

$$S(\mathbf{r},t) = \int_0^t \int_{\mathcal{V}} \mathcal{G}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t') \frac{\xi(\mathbf{r},t)}{\rho} d\mathbf{r}'dt + \int_{\mathcal{V}} \mathcal{G}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t) S_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' .$$

Donc pour suivre l'évolution de la distribution d'une certaine substance qui diffuse, on peut considérer la distribution présente au début, ou ajoutée dans la suite, comme la somme de plusieurs sources ponctuelles, suivre l'évolution de chacune d'entre elles et enfin sommer tous les différents contribution au champs de concentration . La prévision de la diffusion est donc relativement simple, jusqu'à quand il n'y a pas de mouvement et de la turbulence .

7.2 La turbulence comme un processus stochastiques

La turbulence peut être considérée comme le résultat d'un flux instable, ou bien d'un flux dans lequel les perturbations infinitésimales dues à des mouvement à niveau moléculaire ont tendance à grandir, jusqu'à rejoindre une intensité comparable à celle de l'écoulement de base .
Le passage de stable à instable est aléatoire, la vitesse à laquelle il y a les première phénomènes turbulents est en générale plus haute que la vitesse à laquelle l'écoulement revient à être laminaire .
En plus des vibrations, la rugosité des surfaces solides et d'autres irrégularités peuvent favoriser la transition à l'état turbulent .
Le nombre de Reynolds fournit un seuil pour déterminer le passage de laminaire à turbulent .

Quand un écoulement devient turbulent il n'a pas de sens de vouloir décrire son évolution dans tous ses détails vu que les fluctuations intéressent toutes les échelles spatiales et temporelles et aussi que ces fluctuations n'ont aucune régularité . On utilisera plutôt un approche probabiliste et on se concentre plutôt sur le mouvement moyen .

Moyenne temporelle :	Moyenne spatiale :
$$\overline{\xi} = \frac{1}{T}\int_0^T \xi \; dt$$	$$\overline{\xi} = \frac{1}{V}\int_{\mathcal{V}} \xi \; dV$$
avec T une période de temps assez longue pour comprendre un numéro assez grand des fluctuations qu'on veut négliger .	avec $\mathcal{V}$ une région de l'espace avec volume V autour du point d'intérêt assez grande pour englober assez des fluctuations spatiales .

La moyenne d'ensemble $\langle \xi \rangle (\boldsymbol{r}, t)$ est définie comme la moyenne dans chaque instant de temps et pour chaque point de l'espace entre les valeurs obtenues par la répétition d'un nombre indéfini de fois de la même expérience .
Dans une situation stationnaire, l'hypothèse d'ergodicité considère $\overline{\xi} = \langle \xi \rangle$ pour permettre d'avoir des informations sur les moyennes d'ensemble à partire une seule expérience, à travers de moyennes temporelle ou spatiales .

http://fr.wikipedia.org/hypothèse_ergodique

L'hypothèse ergodique, ou hypothèse d'ergodicité, est une hypothèse fondamentale de la physique statistique. Elle fut formulée initialement par Boltzmann en 1871 pour les besoins de sa théorie cinétique des gaz. Elle s'appliquait alors aux systèmes composés d'un très grand nombre de particules, et affirmait qu'à l'équilibre, la valeur moyenne d'une grandeur calculée de manière statistique est égale à la moyenne d'un très grand nombre de mesures prises dans le temps. La première valeur est celle que permet de calculer la physique statistique, la seconde est proche de ce qu'on peut expérimentalement mesurer. L'hypothèse ergodique est donc fondamentale pour un bon rapprochement entre la théorie et l'expérience.
Un système pour lequel l'hypothèse ergodique est vérifiée sera qualifié de système ergodique. Dans la plupart des cas, il est très difficile de démontrer rigoureusement si un système est ergodique ou non. L'analyse mathématique de ce problème a donné naissance à la théorie ergodique qui précise la nature mathématique de l'hypothèse et donne des résultats sur ses conditions de validité. Mais l'hypothèse ergodique reste souvent une simple hypothèse, jugée vraisemblable a posteriori quand elle permet de faire des prédictions correctes. En ce sens, elle constitue un point faible de la physique statistique.
L'hypothèse d'ergodicité intervient également en traitement du signal, où elle consiste à admettre que l'évolution d'un signal aléatoire au cours du temps apporte la même information qu'un ensemble de réalisation. Elle est importante dans l'étude des chaînes de Markov, les processus stationnaires et pour l'apprentissage numérique.
Dans l'étude de la turbulence, on aussi considère que cet hypothèse soit valable .

7.3 Approche Eulerienne et Lagrangienne dans la résolution de l'équation de conservation d'un soluté en cas d'écoulement turbulent

Comme vu dans l'introduction, la relation entre dérivé totale par rapport au temps dans un système de référence Lagrangien et les dérivées partielles par rapport au temps et à l'espace dans un système Eulerien est

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$$

L'approche mathématique au problème de l'advection-dispersion peux donc être de deux types :

- schéma Eulerien : on assume un système de référence fixe ; les bilans de quantité de mouvement, d'énergie, de masse dépendent des fluxes du fluide qui traversent le parois d'un volume V qui est fixe par rapport aux axes de référence . Dans un tel système on intègre les équations d'advection-diffusion .

- schéma Lagrangien : le fluide est interprété comme un ensemble de particules et à chaque particule sont attribuées des caractéristiques propres, comme une certaine concentration de polluant et un comportement aléatoire dans la dynamique ; dans tel schéma on utilise le concept de trajectoire comme le chemin d'une particule imaginaire ; le long des trajectoire sont simulée les transformations que les particules subissent en fonction des conditions ambiantes .

Approche Eulérien
Ce type d'approche est basé sur la résolution de la loi de conservation de la masse de chaque particule d'une certaine espèce (polluant, plancton, sel, etc.) à la quelle est associé une certaine concentration *c(x,y,z,t)*. L'équation de conservation peut s'écrire :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) c = \kappa_s \nabla^2 c + \frac{\xi}{\rho},$$

et on assume que la vitesse $\boldsymbol{v}$ peut être représenté comme la somme d'une composante moyenne et d'une composante fluctuante (décomposition de Reynolds) :

$$\boldsymbol{v} = \bar{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{v}'$$

Tandis que $\bar{\boldsymbol{v}}$ représente la portion de l'écoulement qui peut être décrite avec des mesure expérimentales ou calculé avec de modèles hydrodynamiques, $\boldsymbol{v}'$ est une variable stochastique qui contient les informations sur la diffusion turbulente et dont la moyenne temporelle est nulle par définition $\overline{\boldsymbol{v}'}=0$. De la même façon pour la concentration on écrit

$$c = \bar{c} + c' \qquad \text{avec} \quad \overline{c'}=0$$

Markovian process order

> 0	= 0
Paris07	other all

U from ADCP data & linear interpolation

Heat94

U from eulerian model

Horizontal interpolation	Vertical interpolation	Temporal interpolation	
linear	linear	None	linear
Miller98finite elements	*Lett07 SIGMA*	*Speirs06*	*Miller98*
Cianelli07	*Cianelli07*	*Lett07*	*Lett08*
		Cianelli07	
		Paris07	

U' horizontal

nodiffusion	white noise	randow walk
Lett07	*Speirs06*	*Guizen06 gaussian with s proporzionale eulerian TKE*
Allain03		*Lett08, Peliz07 dissrate+unresolvescale*
Cianelli07		

U' vertical

nodiffusion	randow walk	no-naif random walk	inertial eddies???
Lett07	*Guizen06 from a gaussian with sigma proportional to eulerianTKE*	*Peliz07*	*Heat94*
Allain03		*Lett08 following Visser07 con cubic spline interp of diffusivity*	
Cianelli07			

ULARVA

ontogenic changes+sensitivity to the light+interindividual varaibility (Guizen)

schemes

Euler	Adams-Bashford-Multon	RungeKutta
Guizen06	*Carr06*	*Lett08*
Lett07	*Lett07*	
Lett08	*Peliz07*	

coupling with thermohydrodinamics

Lett07, Lett08, Hinckley96, Mullon03

AGRIF

Peliz07

Dans les mouvements turbulents en mer on a la superposition de plusieurs échelles temporelles avec une amplitude variable avec continuité et on ne peut donc pas fixer d'une façon univoque intervalle temporel T. Il dépendra d'une choix arbitraire sur ce qu'on veut considérer mouvement moyen ou pas .
Une fois fixé T selon le problème en examen, on pourra formuler l'hypothèse que il est possible de décomposer le mouvement dans deux composantes :
- le mouvement moyen, lentement variable ;
- le mouvement turbulent, rapidement variable .

Enfin l'hypothèse ergodique comporte que

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \bar{\mathbf{v}} \qquad \langle \mathbf{v}' \rangle = \overline{\mathbf{v}'} = 0 \qquad \langle c \rangle = \bar{c} \qquad \langle c' \rangle = \overline{c'} = 0$$

On remplaçant dans l'équation de conservation on obtient :

$$\frac{\partial\bar{c}}{\partial t}+\frac{\partial c'}{\partial t}+(\bar{\boldsymbol{v}}+\boldsymbol{v}')\cdot\nabla(\bar{c}+c') = \kappa_c(\nabla^2\bar{c}+\nabla^2 c')+\frac{\xi}{\rho}$$

$$\frac{\partial\bar{c}}{\partial t}+\frac{\partial c'}{\partial t}+\bar{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\bar{c} + \bar{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla c'+\boldsymbol{v}'\cdot\nabla\bar{c} + \boldsymbol{v}'\cdot\nabla c' = \kappa_c(\nabla^2\bar{c}+\nabla^2 c')+\frac{\xi}{\rho}$$

on moyennant toute l'équation et en appliquant les définitions ci-dessous

$$\frac{\partial\bar{c}}{\partial t}+\bar{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\bar{c} + \overline{\boldsymbol{v}'\cdot\nabla c'} = \kappa_c(\nabla^2\bar{c})+\left\langle\frac{\xi}{\rho}\right\rangle$$

on voit apparaître un "nouveau" terme, qui peut être re-écrit dans la façon suivante

$$\overline{\boldsymbol{v}'\cdot\nabla c'} = \overline{\boldsymbol{v}'\cdot\nabla c'}+\overline{c'\nabla\cdot\boldsymbol{v}'} = \nabla\cdot\overline{c'\boldsymbol{v}'}$$

étant que le terme $\overline{c'\nabla\cdot\boldsymbol{v}'}=0$ vu que si on applique la décomposition des vitesse à l'équation de continuité pour un fluide incompressible

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 \ , \ \nabla\cdot(\bar{\boldsymbol{v}}+\boldsymbol{v}') = \nabla\cdot\bar{\boldsymbol{v}}+\nabla\cdot\boldsymbol{v}'=0 \ \text{avec} \ \nabla\cdot\bar{\boldsymbol{v}}=\overline{\nabla\cdot\boldsymbol{v}}=0 \ \text{et donc} \ \nabla\cdot\boldsymbol{v}'=0$$

Le terme $\overline{c'\boldsymbol{v}'}=\langle c\boldsymbol{v}'\rangle$ représente la diffusion turbulente ; la théorie K (ou fermeture newtonienne) suggère de prendre

$$\langle c'\boldsymbol{v}'\rangle = -\boldsymbol{K}\nabla\langle c\rangle$$

avec K tenseur diagonale de diffusion turbulente, dont les éléments sont estimés à partir de mesures expérimentales ou modèles : pour ce qui concerne les écoulements océaniques on distingue entre phénomènes horizontaux et phénomènes verticaux et donc

$$\langle c'u'\rangle = -K_H\frac{\partial c}{\partial x} \quad \langle c'v'\rangle = -K_H\frac{\partial c}{\partial y} \quad \langle c'w'\rangle = -K_V\frac{\partial c}{\partial z}$$

ou K_H, K_V sont les coefficients de diffusion turbulente .

Vu que l'ordre de grandeur de ces coefficients est en générale de plusieurs ordres de grandeurs plus grand de celui des coefficients de diffusion moléculaire, le terme relative à ces dernières termes peut être négligé .
La principale différence entre coefficients de diffusion turbulente et moléculaire est que les premiers ne sont pas une caractéristique du fluide mais de l'écoulement ; souvent ils sont déterminés à posteriori pour satisfaire les données expérimentales . Les coefficients de diffusion sont du même ordre de ceux de viscosité turbulente, qui est d'ailleurs la diffusion de la quantité de mouvement .
En considérant par exemple des polluants qui ne se dégradent pas ($\langle\xi/\rho\rangle=\xi/\rho$), l'équation 3.5 devient

$$\frac{\partial\bar{c}}{\partial t}+\bar{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\bar{c} = K_H(\nabla_H^2\bar{c})+K_V\left(\frac{\partial^2\bar{c}}{\partial z^2}\right)+\left\langle\frac{\xi}{\rho}\right\rangle$$

Les symboles qui indiquent la moyenne temporelle sont négligé, et le même est fait dans la littérature, mais il faut jamais oublier le raisonnement (e.g. décomposition de Reynolds) et les approximations (e.g. fluide incompressible) et les hypothèses (e.g. ergodicité) qui menènt à la formulation des équations de conservation d'un soluté où apparaissent les coefficients de mélange turbulent .

Des solutions de type $<c(\boldsymbol{r},t)>$ pour cette équation peut être trouvées analytiquement avec des opportunes hypothèses de simplification (e.g. stationairité) ou numériquement, avec différents méthode (différences finies, éléments finis, spettrale) .

Approche Lagrangien

L'approche Lagrangien est basé sur l'équation de la dispersion d'un certain soluté caractérisé par la concentration *c(x,y,z,t) :*

$$< c(\mathbf{r},t) >= \int_{-\infty}^{t} \int_{\mathcal{V}} P\left(\mathbf{r},t \mid \mathbf{r}_0,t_0\right) \; \xi(\mathbf{r}_0,t_0) \; d\mathbf{r}_0 \; dt_0$$

dans laquelle $P(r,t \mid r_o,t_o)$ est la densité de probabilité de transition qui établi la probabilité que une particule qui se trouve en r_o au moment t_o puisse se retrouver en r à l'instant t . Comme dans le cas eulérien, cette équation peut être intégrée analytiquement, en assumant pour P une certaine distribution de probabilité (souvent on utilise une gaussienne et on parle de modèles gaussiens) et des simplifications opportunes, ou bien avec une intégration numérique .

7.4 Modèles numériques à particules lagrangiennes

La dispersion peut être simulée avec des modèles à particules lagrangiennes dans deux façons :
- modèles à une seule particule : le mouvement de chaque particule est indépendant de celui des autres ;
- modèles à deux (ou plus) particules : reproduisent la dispersion relative entre les particules .

Dans le modèles à une seule particule, les particules bougent à chaque pas de temps avec une vitesse v_e équivalente à la vitesse réelle v . Si v définit le déplacement d'une particule dans intervalle de temps $\Delta t = t_2 - t_1$ selon la relation

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}\Big(\mathbf{r}(t),t\Big) \; dt \,,$$

la vitesse équivalente est définie comme :

$$\mathbf{v}_e = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}\Big(\mathbf{r}(t),t\Big) \; dt \,.$$

Une estimation de v_e est faite en utilisant les mesures ou les modèles eulériens de **v** en définissant

$$\mathbf{v}_e = \overline{\mathbf{v}} + \mathbf{v}' \,,$$

où
- $\overline{\mathbf{v}}$ représente la partie déterministe du transport, basée sur les mesures eulériennes de courant ou fournie par un modèle hydrodynamique ;
- $\mathbf{v}'$ représente la vitesse de diffusion, i. e. une perturbation numérique artificiel qui est liée à l'intensité de la turbulence et aux caractéristiques des plus petits tourbillons qui ne sont pas considérés dans le champs moyen .

Pour estimer $\mathbf{v}'$ il y a deux possibilités :
- dans le calcul déterministe on utilise une relation obtenue en partant de l'équation de la théorie *K* de la diffusion appliquée dans une maille de grille :

$$\mathbf{v}' = -\frac{\mathcal{K}}{c} \nabla c \,,$$

ou c est la concentration calculée à partir du nombre de particules dans la maille ;

- dans le calcule statistique il y a par contre une évaluation stochastique de $\mathbf{v}'$ en utilisant des méthodes appelées de type Monte Carlo .

Tiré de http://fr.wikipedia.org/wiki/Méthode_de_Monte-Carlo

On appelle méthode de Monte-Carlo toute méthode visant à calculer une valeur numérique, et utilisant des procédés aléatoires, c'est-à-dire des techniques probabilistes. Le nom de ces méthodes, qui fait allusion aux jeux de hasard pratiqués à Monte-Carlo, a été inventé en 1947 par Nicholas Metropolis[1], et publié pour la première fois en 1949 dans un article co-écrit avec Stanislas Ulam[2].

Les méthodes de Monte-Carlo sont particulièrement utilisées pour calculer des intégrales en dimensions plus grandes que 1 (en particulier, pour calculer des surfaces, des volumes, etc.).

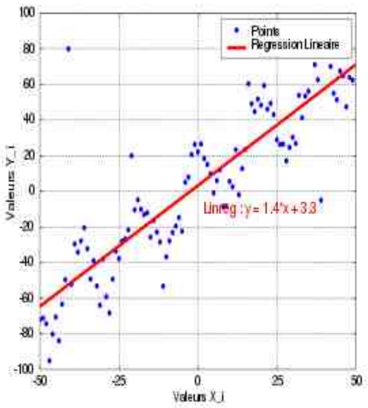
La méthode de simulation de Monte-Carlo permet aussi d'introduire une approche statistique du risque dans une décision financière. Elle consiste à isoler un certain nombre de variables-clés du projet telles que le chiffre d'affaires ou la marge... et à leur affecter une distribution de probabilités. Pour chacun de ces facteurs, on effectue un grand nombre de tirages aléatoires dans les distributions de probabilité déterminées précédemment, afin de déterminer la probabilité d'occurrence de chacun des résultats.

Le véritable développement des méthodes de Monte-Carlo s'est effectué, sous l'impulsion de John von Neumann et Stanislas Ulam notamment, lors de la Seconde Guerre mondiale et des recherches sur la fabrication de la bombe atomique. Notamment, ils ont utilisé ces méthodes probabilistes pour résoudre des équations aux dérivées partielles dans le cadre de la Monte-Carlo N-Particle transport.

Tiré de http://fr.wikipedia.org/wiki/Régression_linéaire

En statistiques, étant donné un échantillon aléatoire (Y_i, X_i), $i = 1, \ldots, n$ un modèle de régression simple suppose la relation affine suivante entre Y_i et X_i:

$$Y_i = aX_i + b, \qquad i = 1, \ldots, n$$



La **régression linéaire** consiste à déterminer une estimation des valeurs *a* et *b* et à quantifier la validité de cette relation grâce au **coefficient de corrélation linéaire**. La généralisation à *p* variables explicatives de ce modèle est donnée par

$$Y_i = a_0 + a_1 X_{i1} + a_2 X_{i2} + \ldots + a_p X_{ip}$$

et s'appelle la régression linéaire multiple.

Ce deuxième type d'approche est plus flexible et le plus utilisé dans plusieurs domaines .

La distribution de la vitesse des particules qui se dispersent dans un fluide en écoulement turbulent peut être décrite en utilisant les modèles auto-régressifs.
Un processus auto-régressif est un modèle de régression pour séries temporelles dans lequel la série n'est expliquée par d'autres variables que par ses valeurs passées.
Le modèle auto-régressifs sont donc des modèles discrètes dans lesquels la valeur de la vitesse à un instant donné est un combinaison linéaire de ses valeurs dans le passé plus un terme aléatoire à l'instant donné .
Un modèle auto-régressif d'ordre *p* est indiquée avec la sigle *AR(p)* et dans le cas de notre vitesse

$$\boldsymbol{v}'_n = \alpha_1 \boldsymbol{v}'_{n-1} + \alpha_2 \boldsymbol{v}'_{n-2} + \ldots + \alpha_p \boldsymbol{v}'_{n-p} + \nu$$

avec ν une vitesse stochastique aléatoire .

Modèles auto-régressifs d'ordre zéro ou « random walk »

Dans ce type de modèles on fait l'hypothèse que le mouvement brownien peut être décrit par un modèle auto-régressif d'ordre zéro *AR(0)* en se disant que la composante stochastique de la vitesse de la particule est purement aléatoire à chaque instant, étant le résultat de collisions aléatoires avec les molécules du fluide, i.e. :

$$\boldsymbol{v}_n{}' = \boldsymbol{\nu}$$

En utilisant l'analogie entre diffusion moléculaire et diffusion turbulente pour les particules immergées dans fluide en écoulement turbulent, on considère les déplacements dus aux tourbillons comme purement aléatoires . Un modèle numérique qui utilise cette approximation, calcules les déplacements d'une particule dans la façon suivante :

$$\boldsymbol{r}_{n+1} - \boldsymbol{r}_n = \overline{\boldsymbol{v}_n}\Delta t + \boldsymbol{\mu}_n$$

où $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\nu}\Delta t$. À chaque composante de $\boldsymbol{\mu} = (\mu_x, \mu_y, \mu_z)$ on assigne une valeur tirée au sort en respectant une fonction de densité de probabilité choisie .

Modèles auto-régressifs du premier ordre

Un modèle auto-régressif du premier ordre, AR (1), s'applique si on considère les particules de polluant assez petites pour que les molécules qui sont autour produisent des variations aléatoires de leur vitesse, mais aussi assez grandes pour que avertissent le frottement avec les molécules du liquide qui provoque une réduction de leur vitesse.
L'équation du mouvement prend la forme de l'équation stochastique de Langevin

$$\frac{d\boldsymbol{v}'}{dt} = -\beta\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\nu}$$

Dans cette équation l'accélération de la particule est séparée en deux termes qui décrivent différemment l'interaction entre chaque particule et le reste du fluide:
$\beta\boldsymbol{v}'$ décrit le comportement du fluide comme un milieu continu, macroscopique, qui exerce sur la particule une force de frottement proportionnelle à sa vitesse;
$\boldsymbol{\nu}$ est un terme représentant le forçage stochastique dû aux collisions, qui décrit donc le comportement du fluide comme un ensemble de variations aléatoires en raison de l'accélération stochastique de la particule.
Le déplacement d'une particule immergée dans un fluide en mouvement avec une vitesse $\overline{\boldsymbol{v}}$ sera alors donné par la somme de la vitesse de l'écoulement du fluide et de la composante aléatoire décrite par l'équation stochastique de Langevin . Il faudra donc résoudre numériquement le système :

$$\boldsymbol{r}_{n+1} - \boldsymbol{r}_n = [\overline{\boldsymbol{v}_n} + \boldsymbol{v}'_n]\Delta t$$
$$\boldsymbol{v}'_n - \boldsymbol{v}'_{n-1} = -\beta[\boldsymbol{v}'_{n-1} + \boldsymbol{\nu}_n]\Delta t$$

La deuxième équation devient

$$\boldsymbol{v}'_n - \boldsymbol{v}'_{n-1} = (1-\beta\Delta t)\boldsymbol{v}'_{n-1} + \boldsymbol{\nu}_n\Delta t = \Phi\boldsymbol{v}'_{n-1} + \boldsymbol{\nu}_n\Delta t$$

Étant la série $\{\boldsymbol{\nu}_n\}$ purement aléatoire et stationnaire et avec moyenne nulle, la moyenne d'ensemble

$$\langle\boldsymbol{v}'_n\rangle = \Phi\langle\boldsymbol{v}'_{n-1}\rangle$$

et à l'état stationnaire on aura $\langle\boldsymbol{v}'_n\rangle = 0$.
La covariance sera

$$\langle\boldsymbol{v}'_n\boldsymbol{v}'_{n-1}\rangle = \Phi\langle\boldsymbol{v}'^2_{n-1}\rangle$$

étant donné que le terme $\langle\boldsymbol{\nu}_n\boldsymbol{v}'_n\rangle = 0$, puisque $\boldsymbol{\nu}$ est indépendant de $\boldsymbol{v}'$.
À l'état stationnaire, en appelant la covariance $C_o = \langle\boldsymbol{v}'^2_n\rangle$ la formule précédente peut être écrite dans la forme

$$C_1 = \Phi C_o$$

et plus en générale

$$C_k = \Phi C_{k-1} \quad \text{ou bien} \quad C_k = \Phi^k C_o$$

On peut définir un coefficient de corrélation

$$\rho_k = \frac{C_o}{C_k} = \Phi^k$$

qui, puisque $|\Phi|<1$, aura l'évolution montrée en figure ci-contre

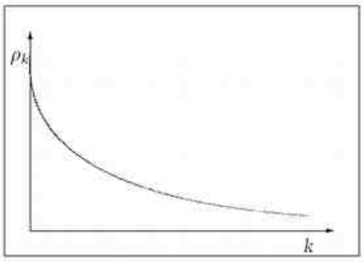


Figura 3.4: Andamento del coefficiente di correlazione.

La variance de $\{\boldsymbol{v}'_n\}$ est liée à celle de $\{\boldsymbol{\nu}_n\}$ par la relation suivante dans laquelle $2\Phi\langle \boldsymbol{\nu}_n \boldsymbol{v}_{n-1}\rangle = 0$

$$\langle \boldsymbol{v}'^2_n\rangle = \Phi^2\langle \boldsymbol{v}'^2_{n-1}\rangle + \langle \boldsymbol{\nu}^2_n\rangle \quad \text{ou bien} \quad \langle \boldsymbol{v}'^2_n\rangle = \frac{1}{1-\Phi^2}\langle \boldsymbol{\nu}^2_n\rangle$$

La série $\{\boldsymbol{v}'_n\}$ peut donc être calculé par itération :

$$\begin{aligned}
v'_1 &= \Phi v'_o + \nu_1 \\
v'_2 &= \Phi^2 v'_o + \Phi \nu_1 + \nu_2 \\
&\dots \\
v'_n &= \Phi^n v'_o + \sum_{i=0}^{\infty} \Phi^i \nu_{n-1}
\end{aligned}$$

mais puisque Φ^n décroit rapidement, v_n perd rapidement mémoire de son état initial. Asymptotiquement (en régime stationnaire) on aura

$$v'_n \simeq \sum_{i=0}^{\infty} \Phi^i \nu_{n-1}$$

La série $\{\boldsymbol{v}'_n\}$ tend donc a être une moyenne mobile pesée exponentiellement sur l'histoire passée de $\{\boldsymbol{\nu}_n\}$.

7.5 Implémentation d'un modèle « random walk » et d'un modèle d'advection-diffusion

Pour le moment on considère vitesse moyenne nulle, en se mettant vraiment dans les conditions comparable à la diffusion d'une goutte d'encre dans un verre d'eau.
On aura alors que notre modèle est simplement

$$\boldsymbol{r}_{n+1} - \boldsymbol{r}_n = \mu$$

Il faut maintenant calculer μ .
De vrais nombres aléatoires peuvent être produits avec du matériel qui tire parti de certaines propriétés physiques stochastiques (e.g. bruit d'une résistance), mais cela serait peu pratique pour un code numérique. Alors on utilise des générateur de nombres pseudo-aléatoires, *pseudorandom number generator* (PRNG) en anglais, qui est un algorithme qui génère une séquence de nombres présentant certaines propriétés du hasard. Par exemple, les nombres sont supposés être approximativement indépendants les uns des autres, et il est potentiellement difficile de repérer des groupes de nombres qui suivent une certaine règle (comportements de groupe). Cependant, il faut pas oublier que les sorties d'un tel générateur ne sont pas entièrement aléatoires ; elles s'approchent seulement des propriétés idéales des sources complètement aléatoires. John von Neumann insista sur ce fait avec la remarque suivante : « Quiconque considère des méthodes arithmétiques pour produire des nombres aléatoires est, bien sûr, en train de commettre un péché ». Une analyse mathématique rigoureuse est nécessaire pour déterminer le degré d'aléa d'un générateur pseudo-aléatoire.
Les méthodes pseudo-aléatoires sont souvent employées sur des ordinateurs, dans diverses tâches comme la méthode de Monte-Carlo, la simulation ou les applications cryptographiques.

La plupart des algorithmes pseudo-aléatoires essaient de produire des sorties qui sont uniformément distribuées, typiquement avec distribution de probabilité uniforme entre les valeurs 0 et 1, tandis que pour la diffusion dans un liquide on a plutôt nécessité de avoir une densité de probabilité gaussienne.

Afin d'obtenir un tirage gaussien, d'espérance et d'écart type paramétrable, une manipulation du tirage uniforme est à effectuée :

Une variable r possède une distribution de probabilité uniforme, entre 0 et 1. On définit une variable r'=r-1/2, qui aura alors une distribution de probabilité uniforme entre -1/2 et 1/2, une moyenne <r'>=0 et une variance :

$$\sigma^2 = \int_{-1/2}^{+1/2} r'^2 \, dr = \left[\frac{r^3}{3} \right]_{-1/2}^{+1/2} = \mathbf{1/12}$$

Considérons maintenant la variable R définie tel que

$$R = \sum_{i=1}^{n} r'_i$$

On a donc

$$\langle R \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle r'_i \rangle$$

$$\sigma_R^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{r'i}^2$$

En sommant des nombres r' tirés uniformément entre -1/2 et +1/2, on change la distribution de probabilité : une suite de n variable aléatoire indépendante (comme R) tend pour $n \to \infty$ a une distribution gaussienne $G(\langle R \rangle, \sigma^2)$. Lorsque n est grand, R a effectivement plus de chance d'être égale à 0 qu'à 1/2 (où il faudra n tirages de r' égal à1/2 !).

Si nous prenons n=12, nous avons $\langle R \rangle = 0$ et $\sigma_R^2 = 1$, nous tombons sur le théorème centrale limite.

Nous pouvons calculer maintenant le nombre g tel que

$$g = \left[\sum_{i=1}^{12} r'i \right] \cdot \sigma$$

Le nombre g est alors un nombre tiré d'une distribution de probabilité gaussienne approximativement avec une moyenne nulle et un écart type σ , comme le montre la figure 1.

```
devst=10;
imax=1000;

for j=1:imax
    g=0;
    for i=1:12
        r=rand(1);
        g=g+(r-0.5);
    end
gg(j)=g.*devst;
end

edges=[-100:1:100];
N=histc(gg,edges);
bar(edges,N./imax,'histc')

var=devst^2;
y=1/sqrt(2*pi*var).*exp(-edges.^2/(2*var));

line(edges,y,'color','r')
```

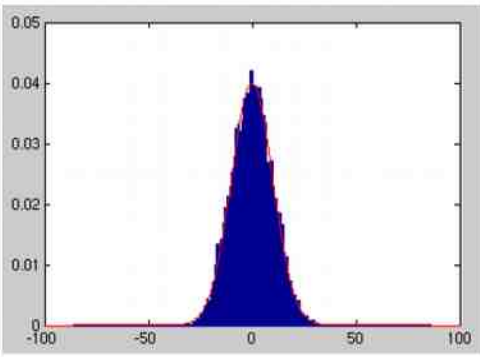


Figure 1 : *Comparaison de l'histogramme de gg (en bleu) avec y une gaussienne théoriqe (en rouge)*

Marche aléatoire à deux dimensions d'espace

Afin de simplifier la modélisation du mouvement brownien, nous considérerons tout le long de notre étude un espace à deux dimensions spatiale seulement. Considérons le cas d'une seule particule isolée pour l'instant. Cette particule décrit une marche aléatoire quand chaque

pas est de direction aléatoire et de longueur aléatoire. Par exemple si l'on note (xi, yi) les coordonnées du point après i pas, alors le (i+1) ème pas est tel que :
x(i+1)=x(i)+depx
y(i+1)=y(i)+depy
où depx et depy sont des variables aléatoires tirées de la distribution gaussienne énoncée auparavant, centrée en 0 et d'écart type 1 (devst dans le code). Le chemin parcouru par la particule est une marche aléatoire à pas indépendants que l'on peut visualiser sur la figure suivante

```
figure(1);hold on;
devst=1;
x(1)=0;
y(1)=0;
itmax=300;

for it=2:itmax
   g=0;
   for j=1:12
      r=rand(1);
      g=g+(r-0.5);
    end
   depx=g.*devst;
   g=0;
   for j=1:12
      r=rand(1);
      g=g+(r-0.5);
   end
   depy=g.*devst;

   x(i)=x(i-1)+depx;
   y(i)=y(i-1)+depy;
end

line(x,y)
hold off;
```

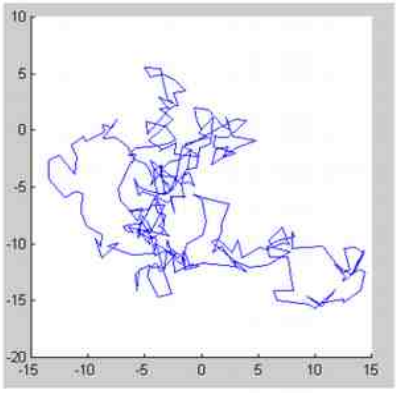


Figure 2 : *Marche aléatoire dune particule dans un espace à 2 dimensions*

Il suffit d'implémenter une boucle supplémentaire afin de modéliser le mouvement de plusieurs particules indépendantes (ipmax représente le nombre de particules).

```
figure(1);hold on;
ipmax=10;

for ip=1:ipmax

--
script précédent
--

line(x,y,'color',[ip/ipmax 0 1-ip/ipmax])

text(20,30-ip*4,num2str(ip),
'color',[ip/ipmax 0 1-ip/ipmax])

end

axis([-40 40 -40 40])

hold off;
```

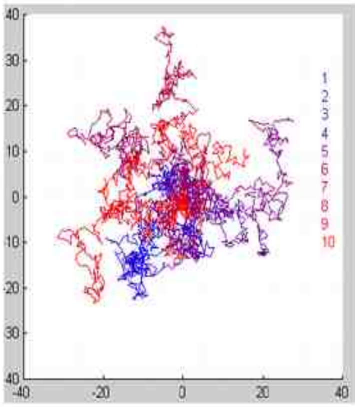


Figure 3 : *Marche aléatoire de 10 particules indépendantes*

Calcul de la concentration spatiale

On a obtenu le tracé© de plusieurs particules, au cours du temps. Nous souhaitons cependant axer notre étude sur le phénomène de diffusion. Pour ce faire, il est utile d'imaginer
un petit domaine, de forme arbitraire, entourant un espace où les particules peuvent diffuser. Nous avons choisis ici un carrée, de côté 100 unités arbitraires (la matrice CONC dans le code). Nous voulons donc afficher la concentration dans l'espace à chaque instant it. Pour cela, il faut d'abord inverser la boucle temporelle (it dans le code) avec la boucle sur les particules (ip dans le code). Ensuite nous centrons initialement toutes les particules en (50,50) (pour it=1) et nous les faisons bouger (d'un déplacement depx et depy).

```
deltat=1;ipmax=4;itmax=10;
xold(1:ipmax)=50;
yold(1:ipmax)=50;

for it=1:itmax
CONC=zeros(100,100);

 for ip=1:ipmax
   g=0;
    for i=1:12
     r=rand(1);
     g=g+(r-0.5);
    end
   depx=g.*deltat;

   g=0;
    for i=1:12
     r=rand(1);
     g=g+(r-0.5);
    end
   depy=g.*deltat;

xnew(ip)=xold(ip)+depx;
ynew(ip)=yold(ip)+depy;

if xnew(ip)<1 | xnew(ip)>100 | ynew(ip)<1 |
ynew(ip)>100

 xnew(ip)=xold(ip);
 ynew(ip)=yold(ip);
end

ii=fix(xnew(ip));
jj=fix(ynew(ip));
CONC(ii,jj)=CONC(ii,jj)+1;

xmem(ip)=xnew(ip);
ymem(ip)=ynew(ip);

xold(ip)=xnew(ip);
yold(ip)=ynew(ip);

end %pour ip

figure(1);hold on;
grid;
contour(CONC)

plot(xmem,ymem,'k+')
waitforbuttonpress
clf;

end %pour it
```

A chaque instant it, on compte combien il y a de particules dans chaque maille de grilles (*CONC dans le code*).

On remarque sur la figure un léger décalage des iso lignes de concentration, par rapport aux positions réelles des particules (croix noire). Ceci parce que l'on rapporte toutes les particules d'une maille de grille (de i à i+1, et de j à j+1) à un point de coordonnée (i,j). Mais avec un très grand nombre de particule, ceci n'a plus d'importance

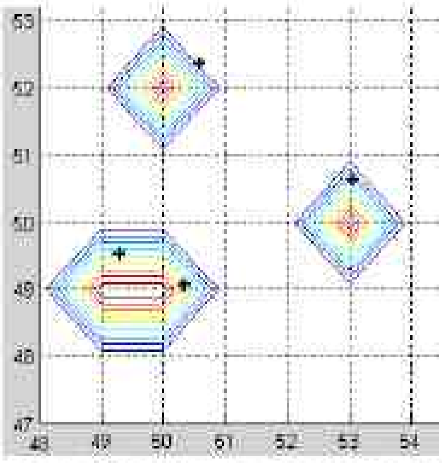


Figure 4 : *Calcul de la concentration dans notre espace à l'instant it=1*

Il ne nous reste maintenant plus qu'à augmenter le nombre de particules représentant la goutte d'encre.

La figure 5 montre 9 étapes de la diffusion d'une goutte d'encre au cours du temps. La goutte d'encre est d'abord centrée en (50,50), puis diffuse dans la boite.

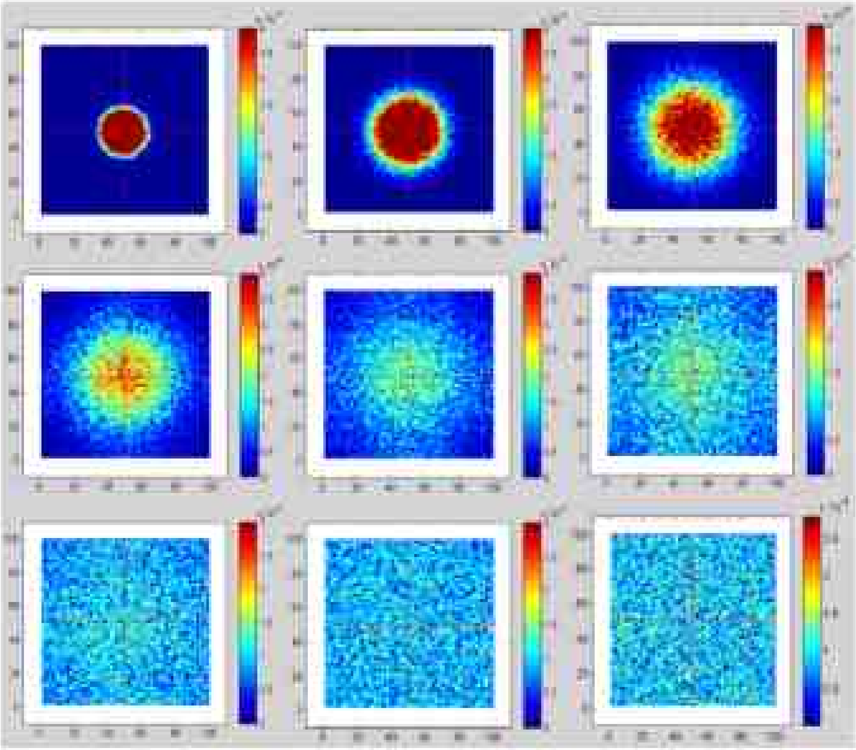


Figure 5 : *Diffusion d'une goutte d'encre dans de l'eau*

En suivant la concentration le long de l'axe horizontal et vertical (croix rouge sur la figure 5), et en la comparant avec la gaussienne théorique, on obtient la figure 6.

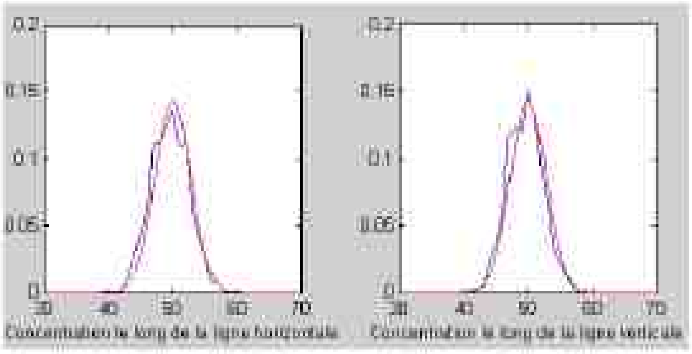


Figure 6 : *Concentration (courbe en bleu le long d'un axe horizontal (à gauche) et vertical (à droite) comparée à la gaussienne théoriqu (en rouge) à l'instant it=300*

La figure 2 nous montre la marche aléatoire d'une particule brownienne. Bien que toutes les directions soient équivalentes, la marche aléatoire ne révèle aucune isotropie. En fait la marche aléatoire n'est que statistiquement isotrope ; c'est-à-dire que l'isotropie ne se révèle que sur un grand nombre de marches. C'est ce que nous dévoile la figure 5 qui nous montre l'évolution d'une goutte d'encre plongée dans un fluide. Nous constatons aisément que cette goutte d'encre diffuse au cours du temps, c'est-à-dire qu'elle se répand, se propage, jusqu'à obtenir un espace idéologiquement homogène. Nous constatons maintenant que l'étalement ne suit pas une direction particulière mais toutes les directions de l'espace. L'isotropie se révèle macroscopiquement car il s'agit d'une propriété statistique. Nous pouvons constater également sur la figure 5 que l'étalement de la goutte d'encre diminue au cours du temps. Effectivement, l'équation de diffusion proposé par A. Fick est :

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial t} = ks \,.\, \nabla^2 S + \xi}$$

Avec ks coefficient de diffusion, ∇^2 opérateur Laplacien, ξ la source et le puit.

Lorsqu'il n'y a pas de source ni de puit, $\xi=0$, une solution possible de l'équation de diffusion est :

$$\boxed{K(x,t) = \frac{1}{(4.\pi.ks.t)^{1/2}} \exp^{-r^2/(4.ks.t)}} \quad \textbf{(1)}$$

Où $r^2=x^2$ (pour un espace à 1 dimensions)

Cette solution représente une gaussienne tridimensionnelle de variance $\boxed{\sigma^2 = 2.ks.t}$

L'écart-type σ est proportionnel à la racine carrée du temps, fonction dont la croissance est très forte avant de devenir quasi nulle. Au cours du temps, l'écart type va augmenter rapidement, c'est ce qui va faire diffuser notre goutte d'encre. L'écart-type augmente de moins en moins rapidement d'où une diffusion de plus en plus lente. En remplaçant le terme 2.ks.t par σÂ² dans l'équation 1, nous obtenons une gaussienne de formule :

$$\boxed{f_x = \frac{1}{\sqrt{2 \,.\, \pi \,.\, \sigma^2}} \,.\, \exp\left(-\frac{r^2}{2 \,.\, \sigma^2}\right)} \quad \textbf{(2)}$$

Les courbes de la figure 6 permettent de comparer la densité des particules le long de l'axe horizontal et vertical de la boite avec la distribution théorique que l'on souhaite observée, à partir de l'équation gaussienne (2) (en prenant rÂ²=(x-50)Â² pour centrer la gaussienne en 50).

Maintenant on se focalise sur la partie d'advection.
L'équation qu'il faut résoudre numériquement pour un modèle lagrangien à 1 seule particule est

$$\frac{dX}{dt}=V_a(X,t)+V_d(X,t)$$

avec X position de la particule, Va vitesse d'advection et Vd vitesse stocastique liée à la turbulence.
En considerant manitenant V=Va+Vd et en mettant l'équation en forme intégrale on a

$$X(t^{n+1})=X(t^n)+\int_{t^n}^{t^{n+1}} V(X,t)\,dt \quad (1)$$

plusieurs methodes peuvent être utilisée pour résoudre cette équation.
Here Δt is the time step with $\Delta t=t^{n+1}-t^n$ and n is the time index such that $t^n=n\Delta t$

Methode d'Euler

Cette methode est largement utilisé car très simple à coder. En générale on écrit le schéma numérique dans la forme

$$X^{n+1}=X^n+V(X^n,t^{n+1})\Delta t$$

Un avantage de cette méthode est que on a besoin d'un seul champs de vitesse (la vitesse a un instant donné), i.e. $V(X,t^{n+1})$.
En pratique pour une particule qui se trouve dans une certaine position il faut interpoler le champ de vitesse des quatre points de grille qui l'entourent.

Une méthode est celle de effectuer une moyenne pesée par rapport à la distance entre la particule et les points de grille.

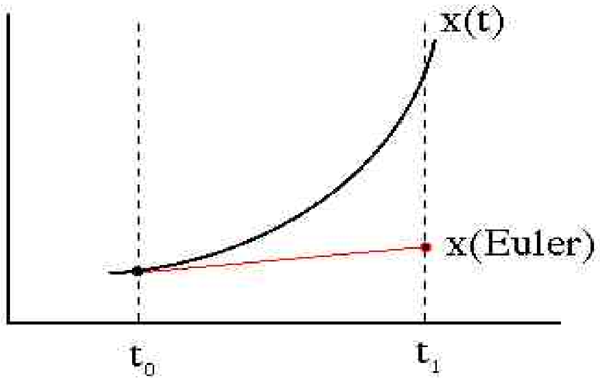
Le coefficients, ou poids (*weight*), sont proportionels à l'inverse de la distance et peuvent être calculé avec la formule suivante

$$v_{det}=w_1\, v_{i,j}^{mike}+w_2\, v_{i+1,j}^{mike}+w_3\, v_{i+1,j+1}^{mike}+w_4\, v_{i,j+1}^{mike}\,,$$

I pesi w_k $(k=1,2,3,4)$, inversamente proporzionali alla distanza d_k dai corrispondenti punti di griglia, vengono calcolati mediante la formula numerica

$$w_k=\frac{d_1d_2d_3d_4}{d_k(d_1d_2d_3+d_1d_3d_4+d_1d_2d_4+d_2d_3d_4)} \qquad \text{con } k=1,2,3,4\,.$$

Le defaut principal de la methode d'Euler est sa faible precision (ordre 1) qui fait que les trajectoires peuvent s'ecarter rapidement de la solution exacte si le pas de temps n'est pas assez petit.



$$\begin{aligned} v_{x,n+1} &= v_{x,n} + \Delta t \; a_x(x_n, y_n, t) \\ x_{n+1} &= x_n + \Delta t \; v_{x,n} \end{aligned}$$

http://rainman.astro.uiuc.edu/ddr/ddr-galaxy/parameters.html

La methode de Runge-Kutta

Les méthodes de Runge-Kutta sont des méthodes d'analyse numérique d'approximation de solutions d'équations différentielles. Elles ont été nommées ainsi en l'honneur des mathématiciens Carl Runge et Martin Wilhelm Kutta lesquels élaborèrent la méthode en 1901.
Ces méthodes reposent sur le principe de l'itération, c'est-à-dire qu'une première estimation de la solution est utilisée pour calculer une seconde estimation, plus précise, et ainsi de suite.
Selon le nombre d'itérations on parle d'ordre différent. La méthode de Runge-Kutta d'ordre 1 (RK1) est équivalente à la méthode d'Euler.
La méthode de Runge-Kutta classique d'ordre quatre est un cas particulier d'usage très fréquent. Dénoté RK4, il peut être écrit de la façon suivante :

$$X^{n+1} = X^n + \frac{1}{6}(a + 2b + 2c + d)$$

avec

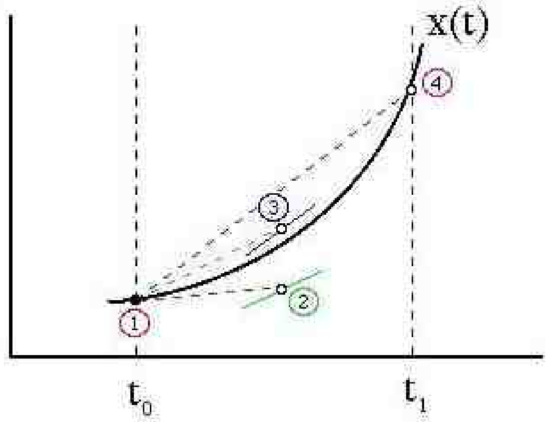
$$\begin{aligned} a &= \Delta t \left[V(X^n, t^n) \right] \\ b &= \Delta t \left[V\left(X^n + \frac{1}{2} a, t^{\frac{n+1}{2}}\right) \right] \\ c &= \Delta t \left[V\left(X^n + \frac{1}{2} b, t^{\frac{n+1}{2}}\right) \right] \\ d &= \Delta t \left[V(X^n + c, t^{n+1}) \right] \end{aligned}$$

L'idée est que la valeur suivante (Xn+1) est approchée par la somme de la valeur actuelle (Xn) et du produit de la taille de l'intervalle Δt par la pente estimée (i.e. la vitesse, qui est la dérivée de la position). La pente est obtenue par une moyenne pondérée de différentes pentes :

a est le déplacement basé sur la pente au début de l'intervalle ;
b est le déplacement basé sur la pente au milieu de l'intervalle de temps et au point au milieu du déplacement *a* calculé par le biais de la méthode d'Euler ;
c est de nouveau le déplacement basé sur la pente au milieu de l'intervalle de temps, mais au point obtenu cette fois en utilisant le déplacement *b*;
d est le déplacement à la fin de l'intervalle basé sur la pente au milieu de l'intervalle de temps et au point au milieu du déplacement *c*.

Dans la moyenne des quatre pentes, un poids plus grand est donné aux pentes au point milieu.

pente = (a + 2b + 2c + d)/6.



$$
\begin{aligned}
dx1 &= \Delta t\, v_{x,n} \\
dv_x1 &= \Delta t\, a_x(x_n, y_n, t) \\
dx2 &= \Delta t\, (v_{x,n} + \frac{dv_x1}{2}) \\
dv_x2 &= \Delta t\, a_x(x_n + \frac{dx1}{2}, y_n + \frac{dy1}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}) \\
dx3 &= \Delta t\, (v_{x,n} + \frac{dv_x2}{2}) \\
dv_x3 &= \Delta t\, a_x(x_n + \frac{dx2}{2}, y_n + \frac{dy2}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}) \\
dx4 &= \Delta t\, (v_{x,n} + dv_x3) \\
dv_x4 &= \Delta t\, a_x(x_n + dx3, y_n + dy3, t + \Delta t) \\
x_{n+1} &= y_n + \frac{dx1}{6} + \frac{dx2}{3} + \frac{dx3}{3} + \frac{dx4}{6} \\
v_{x,n+1} &= v_{x,n} + \frac{dv_x1}{6} + \frac{dv_x2}{3} + \frac{dv_x3}{3} + \frac{dv_x4}{4}
\end{aligned}
$$

http://rainman.astro.uiuc.edu/ddr/ddr-galaxy/parameters.html

La méthode RK4 est une méthode d'ordre 4, ce qui signifie que l'erreur commise à chaque étape est de l'ordre de h5, alors que l'erreur totale accumulée est de l'ordre de h4.

Le problème est que cette méthode nécessite des vitesses au temps intermédiaires entre 2 pas temporels. Alors il faut ne pas seulement interpoler sur l'horizontale mais aussi dans le temps. L'interpolation dans le temps doit aussi assurer la même précision que celle de la méthode d'intégration . Alors une interpolation du 4eme ordre est

$$V^{\frac{n+1}{2}}(X) = \frac{5}{16} V^{n+1}(X) + \frac{5}{16} V^{n}(X) - \frac{5}{16} V^{n-1}(X) + \frac{1}{16} V^{n-2}(X)$$

Du pont de vu informatique cela implique que il faut garder aussi en mémoire plus d'information, pratiquement tout les quatre champs de vitesses pour la durée de la simulation, parce que on peut pas savoir a priori où ira la particule, et donc avoir plus de mémoire vive.

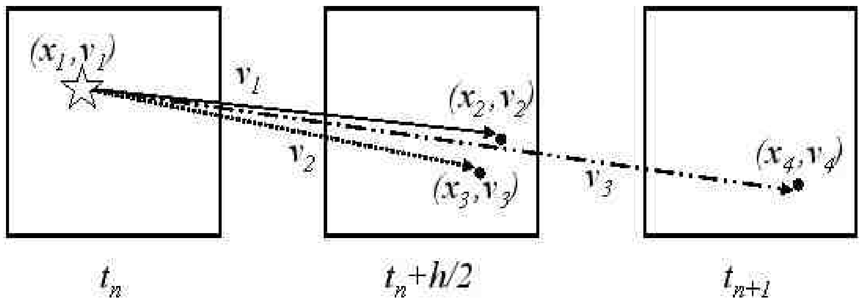


figure de M.Berta

La méthode de Adams-Bashford-Multon (ABM)

Cette méthode est basée sur 2 étapes : une partie prédictive (Adams-Bashfod method) et une partie corrective (Adams-Multon method).
La partie prédictive s'obtient en faisant une interpolation polynomiale de la variable *V(X,t)* à travers les points *Xn, Xn-1, Xn-2* et *Xn-3* et après en intégrant l'équation (1) entre *Xn* et *Xn+1*

$$\tilde{X}^{n+1} = X^{n} + \frac{\Delta t}{24}\left(55V^{n} - 59V^{n-1} + 37V^{n-2} - 9V^{n-3}\right) \qquad (6)$$

La partie corrective s'obtient en faisant une interpolation polynomiale de la variable *V(X,t)* à travers les points ~X*n+1* (que on vient de calculer), *Xn, Xn-1* et *Xn-2* et en intégrant l'eq(1) entre *Xn* et *Xn+1*

$$X^{n+1}=X^n+\frac{\Delta t}{24}\left(9\,\tilde{V}^{n+1}+19V^n-5V^{n-1}+V^{n-2}\right) \tag{7}$$

where $\tilde{V}^{n+1}=V\left(\tilde{X}^{n+1},t^{n+1}\right)$.

La méthode ABM est du 4 ordre et son erreur est donc du 5 ordre.
Avec l'expansion en série de Taylor on peut déduire les erreurs sur la partie prédictive

$$X\left(t^{n+1}\right)-\tilde{X}^{n+1}\approx\frac{251}{720}X^{(5)^n}\left(\Delta t\right)^5 \tag{8}$$

et sur la partie corrective

$$X\left(t^{n+1}\right)-X^{n+1}\approx-\frac{19}{720}X^{(5)^n}\left(\Delta t\right)^5 \tag{9}$$

avec X(tn+1) à indiquer le vrai valeur
En mettant ensemble les eq 8 et 9

$$X\left(t^{n+1}\right)=\frac{251}{270}X^{n+1}+\frac{19}{720}\tilde{X}^{n+1} \tag{10}$$

Combine Eq. (6), (7) and (10), we can finally derive the advanced ABM scheme.

$$X^{n+1}=\frac{1}{270}\left\{19\,\tilde{X}^{n+1}+251\left[X^n+\frac{\Delta t}{24}\left(9\,\tilde{V}^{n+1}+19V^n-5V^{n-1}+V^{n-2}\right)\right]\right\} \tag{11}$$

Here $\tilde{X}^{n+1}$ is computed using Eq. (6). Special attention should be concerned that the scheme is not self starting. Therefore the RK method is needed to initiate the sheme, i.e. the locations in the first four time step are computed using the RK method.

One velocity field $V\left(X,t^{n+1}\right)$, the previous particle position X^n and four previous particle velocities ($V\left(X^n,t^n\right)$, $V\left(X^{n-1},t^{n-1}\right)$, $V\left(X^{n-2},t^{n-2}\right)$ and $V\left(X^{n-3},t^{n-3}\right)$) are needed to calculate the new particle position. In a 3D flow field, the total internal memory usage for the advanced ABM scheme is as $\left(\mathrm{memory}\leq N_f+15N_p\mathrm{words}\right)$.

In general, the storage for the field information is much greater than the number of particles. Therefore, on memory considerations alone, the Euler scheme and the advanced ABM scheme are much less required than the RK scheme.

During one timestep particle integration, the Euler scheme only need to evaluate one new function, however, the RK scheme involves four velocity evaluations, and the advanced ABM scheme adds one velocity evaluation. Therefore, on numerical computation considerations alone, the Euler scheme is the most efficient scheme. And the advanced ABM scheme is efficiently faster than the RK scheme.

7.6 Modélisation couplée physique/biogéochimie

Le modèles à particules lagrangiennes couplés avec des modes de circulation sont très efficaces dans les études sur le rôle des différents processus physiques et leur intéractions dans le transport sur une large gamme d'échelles. En effet, la techniques Lagrangienne permet d'ajouter relativement facilement different processus. A partir de la simple advection, on peut ajouter linéarment la diffusion sous maille et le comportement biologique selon différent dégrées de complexité.

Comme souligné par Miller_07 dans un paper de révision sur les application des modèles IBM

Individual Based Models à des étude sur le recrutement des poisson ces modèles snt souvent défini comme *coupled physical–biological models*, mais, mis à part quelque cas (e.g. Hinckley96, Mullon03, Guizen06), le couplage des simulation numérique est typiquement en mode *offline* pour des raison de cout computationel.

In this scheme, runs of the hydrodynamic model are completed and output is stored at set intervals. Then the IBM uses stored velocity data to move and track individual eggs and larvae throughout the model domain.

Adopting this approach it becomes crucial to provide subgrid-scale resolution of fluid flows. Indeed the horizontal and vertical spatial resolution of the hydrodynamic models are several orders of magnitude larger than the length scales of larvae.

Early models used a simple scheme that updates the position of tracked particles based on spatially interpolated model velocities with small random components.

As the field has developed, the particle tracking algorithms have became more sophisticated, with increasing attention being paid to the statistical aspects of the subgrid-scale motion. The stochasticity at subgrid scales creates an ensemble of trajectories for each starting location depending on the small-scale features of the flow critical for eggs and larva.

Then, individual particle movements are tracked offline with Lagrangian Statistical Models (LSM), assuming that the evolution of particle velocity and position in non-homogeneous, non-stationary turbulence can be represented as a Markovian process (e.g. Griffa 1996).

Generally a zero order Markovian process is adopted, also if recently some authors choose higher order (e.g. Paris et al. 07), to take into account the rotation of trajectories driven by submesoscale coherent vortices .

The Lagrangian single-particle tracking algorithms for a zero order Markovian process, are based on the following equation:

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{u}+\vec{u}'+\vec{u}_{larva} \quad (1)$$

where $\vec{x} \equiv (x, y, z)$ *is the 3D location,* t *is the time,* $\vec{u} \equiv \vec{u}(\vec{x}, t)$ *is the flow velocity at the resolved scale,* $\vec{u}' \equiv \vec{u}'(\vec{x}, t)$ *is the subgrid-scale fluctuating turbulent component of the velocity field and* $\vec{u}_{larva} \equiv \vec{u}_{larva}(\vec{x}, t)$ *is the individual larva's velocity.*

In the following we present a review of several papers to compare the different approaches to solve (1), as schematically presented in Table 4.1

The deterministic resolved-scale velocity $\vec{u}\equiv\vec{u}(\vec{x},t)$ *is generally provided by an Eulerian model also if some authors obtained it directly from in situ data (Heat et al., 94). In both case, an interpolation of these data is necessary to obtain a value in each particle position from gridded data* *at each Lagrangian timestep.*

Regarding horizontal interpolation, generally a linear one is done.

For example, Miller (98) interpolated from a finite triangular elements grid, while more frequently is performed an interpolation from a orthogonal curvilinear grid such as the one of ROMS model (e.g. Carr et al., Lett et al.) or SYMPHONIE model (Cianelli et al.). Moreover, Peliz et al (04) adapted AGRIF package (http://www-lmc.imag.fr/MOISE/AGRIF/) to manage the communication of floats through the different nested model domains.

In the vertical an interpolation is necessary too, in particular from terrain-following coordinate Eulerian models. Again a linear interpolation is generally adopted (e.g. Lett07, Cianelli07) .

In temporal dimension, some author proposed a linear interpolation when the time interval of the Lagrangian module is shorter than Eulerian model one (Miller98) but frequently the interpolation in not performed (Speirs, Lett, Cianelli, Paris) .

In this case, as pointed out by Guizen, the Lagrangian-model integration timestep is constrained by 2 factors.

Table 4.1

First, it depends on Stokes number, i.e. the ratio of the particle to fluid response times.

Second, fluctuating velocities should be updated every time a larva encounters a new eddy. This particle-eddy interaction time can be defined as the minimum between the eddy life time and the eddy transit time through a cell. The authors estimate that the particle-eddy interaction time is the transit time of fast moving surface waves through a cell, i.e. close to the barotropic mode timestep of the 3D eulerian model. Then, theoretically the integration timestep for Eq. (1) should be lower than this particle-eddy interaction time. At the same time, several studies in physical oceanography suggest methods to evaluate error and sensitivity to time sampling for off line lagrangian particles, using for example Finite Liapunov Exponents ({{:Iudicone_etal_OceanModel02_SensitivityNumericalTracerTrajectories.pdf) or the ensemble-averaged position deviations from a reference case {{:Valdivieso_Blanke_OceanModel04_lagrangianmethodsClimatologyTrajectoryError.pdf).

In practice, Guizen06 integrated Eq.(1) over the baroclinic timestep, considering that however i) the circulation flow velocity and the larva's own velocity vary slowly and ii) the turbulent velocities provided by the Eulerian model are averaged over the baroclinic timestep.

The subgrid-scale fluctuating turbulent component of the velocity field $\vec{u}' \equiv \vec{u}'(\vec{x}, t)$ *is sometime completely neglected in zooplankton studies and Lagrangian particles treated as purely passive particles (Lett07, Allain03, Cianelli07). Other authors simulate the horizontal subgrid turbulence as a white noise (Speirs06). In Guizen06 the turbulent velocity both in horizontal and vertical is* *obtained by randomly sampling a Gaussian distribution with standard deviation* $\sqrt{2k/3}$ *where k is the Turbulent Kinetic Energy provided by the eulerian model (in this specific case by the Gaspar et al, 1990, turbulence closure submodel).*

A more sophisticated model is developed by Peliz04, and successively adopted by Lett08, as regarding the horizontal diffusion. Indeed, horizontal diffusion is based on a random component introduced to the horizontal velocity vector using

$$|\vec{u}'| = \delta\sqrt{2K_h/\Delta t}$$

where $\delta \in [-1,1]$ *is a real uniform random number and* K_h *is the imposed explicit Lagrangian horizontal diffusion of the form* $K_h = \epsilon^{1/3} l^{4/3}$ *where* l *is the unresolved subgrid scale (taken as the cell size) and* $\epsilon = 10^{-9}\,\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-3}$ *is the turbulent dissipation rate (e.g., Monin and Ozmidov, 1981).*

In the vertical Peliz04 compute the random fluctuation associated with unresolved vertical turbulent fluxes:

$$w' = \delta\sqrt{\frac{2K}{1/3\Delta t} + \frac{dK}{dz}}$$

where K is the vertical heat turbulent diffusivity taken from the KPP (Large et al., 1991) turbulent closure submodel. According to Ross and Sharples (2004) a correct implementation of this equation requires a timestep constraint $\Delta t \ll min\left(1/\frac{|d^2 K|}{dz^2}\right)$ *. This implies that the Lagrangian model has to be implemented in a sub-timestep relative to the main baroclinic model timestep.*

In the vertical Lett08 implemented a so-called "no-naive" random walk (Visser97) where with respect to classical random walk model a correction term to make the random walk consistent with the physical description of non-uniform diffusivity.

$$z_{n+1} = z_n + K'(z_n)\delta t + R\{2r^{-1}K[z_n + {}^1\!/_2\, K'(z_n)\delta t]\delta t\}^{1/2}$$

where $K' = \delta K/\delta z$ *represent the gradient of diffusivity.*

Concerning the individual larva's velocity $\vec{u}_{larva} \equiv \vec{u}_{larva}(\vec{x}, t)$ *, the reader is referred to the previous paragraph?????*

In order to solve numerically eq.1, several numerical schemes are used. The three widely used schemes are the Euler method (Parada et al, Guizien et al., 2006; Lett et al., 2007), the Runge-Kutta (RK) method (Batchelder et al., 2002; Oliveira et al., 2002; Tittensor et al., 2003) and the Adams-Bashfold-Moulton (ABM) method (Peliz et al., 2007; Carr et al., 2008; Qiu et al., 2008).

An advantage of the Euler scheme is that only one velocity field is needed to calculate the particle velocity at the new particle position, assuring a saving of computer memory.

$$X^{n+1}=X^{n}+\vec{V}(X^{n},t^{n})\Delta t \qquad (3)$$

The main drawback of this method is that it is only first order accurate and therefore particle trajectories may diverge from the real ones as the time advances unless the timestep is very small (Bennett and Clites, 1987).

The Runge-Kutta scheme is based on iterative method of estimation of solutions. Generally the order 4 scheme is adopted which requires more calculations but it has a fourth order accuracy.

$$X^{n+1}=X^{n}+\frac{\Delta t}{6}(a+2b+2c+d) \qquad (4)$$

where

$$a=\vec{V}(X^{n},t^{n})$$
$$b=\vec{V}\left(X^{n}+\frac{\Delta t}{2}a,t^{\frac{n+1}{2}}\right)$$
$$c=\vec{V}\left(X^{n}+\frac{\Delta t}{2}b,t^{\frac{n+1}{2}}\right)$$
$$d=\vec{V}(X^{n}+c\Delta t,t^{n+1})$$

The advanced ABM method is a predictor-corrector method, combining the Adams-Bashford method (the predictor step) and the advanced Adams-Moulton method (the corrector step).

$$\tilde{X}^{n+1}=X^{n}+\frac{\Delta t}{24}(55\vec{V}^{n}-59\vec{V}^{n-1}+37\vec{V}^{n-2}-9\vec{V}^{n-3}) \qquad (6)$$

$$X^{n+1}=\frac{1}{270}\left\{19\tilde{X}^{n+1}+251\left[X^{n}+\frac{\Delta t}{24}(9\tilde{V}^{n+1}+19\vec{V}^{n}-5\vec{V}^{n-1}+\vec{V}^{n-2})\right]\right\} \qquad (7)$$

where $\tilde{V}^{n+1}=\vec{V}(\tilde{X}^{n+1},t^{n+1})$.

Different numerical schemes have different impacts on the accuracy, efficiency and memory requirements of the particle integration. Indeed Darmofal and Haimes (1996) found that multistage schemes required at least three times more internal data storage than multistep schemes of equal order and for timesteps within the stability bounds, multistage schemes were generally more accurate. Garcia et al. (1999) have also compared the Euler method and the RK method by using simple numerical experiments.

Finally, in more advanced IBM where larval behavior depends on thermodynamics, coupling between Lagrangian and Eulerian model is also activated for temperature and salinity fields, with generally trilinear interpolation in the particle position (Lett07, Lett08, Hinckley96, Mullon03).

****

REFERENCES

Miller_etal_FishOceanogr98_CouplingIBMCirculationModelGeorgesBank.pdf
Heath_etal_FishOceanogr98_DispersalLarvalJapaneseSardine.pdf
Guizen_etal_MarEcolProgSer06_DispersalOweniaWinddrivenCurrents.pdf
Speirs_etal_MarEcolProgSer06_OceanScaleModellingCalanus.pdf
Lett_etal_MarEcolProgSer07_AssessmentBarrierIchthyoPlanktonBenguela.pdf
Lett_etal_EnvironModellSoftw08_Ichthyop.pdf
Peliz_etal_JMarineSyst07_CrabLarvaeDispersalWesternIberianShelf.pdf
Hinckley_etal96_DevelopmentSpatiallyExplicitIBM.pdf
Mullon_etal_FishOceanogr03_FromParticlesToIndividualsAnchovy.pdf
Carr_Capet_et_al_FishOc06_VerticalMigrationZooplanktonTransportRecruitmentCoupledBehavioralPhysicalModel.pdf
Allain_etal_FishOceanogr03_AnchovyBiscayLagrangianSimulations.pdf
Paris_etal_MarEcolProgSer07_SurfingSpinningDivingPopulationConnectivity.pdf
Iudicone_etal_OceanModel02_SensitivityNumericalTracerTrajectories.pdf
Valdivieso_Blanke_OceanModel04_lagrangianmethodsClimatologyTrajectoryError.pdf.

7.7 Exemple : dispersion de copepodes et des meduse en Méditerranée Nord Occidentale

We performed a convergence test where all 1 000 particles were tracked for 5 h using the three schemes, with different time steps. The errors were computed using Eq.10 and are presented in Fig.3. The RK scheme and the advanced ABM scheme can attain very high precision. For example the errors were 3.6E-06 and 5.0E-05 with dt=100 s, respectively. Note that to reach an error of 0.025,

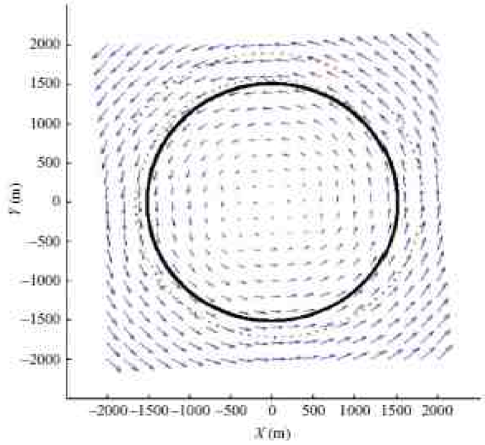


Fig.1 Circular flow field given by Eq.8 for (a=0, b=0.001) and the trajectories of the 1 000 particles starting in a 10 m diameter circular cluster centered at the point (1 500, 0)

The simulations with dt=60 s of the Euler method and the advanced Adams-Bashfold-Moulton scheme are marked in red and black, respectively

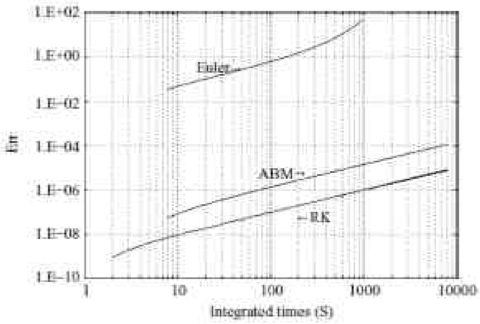


Fig.2 Error evaluations for the Euler method, the Runge-Kutta scheme and the advanced Admas-Bashfold-Moulton scheme simulated with the time step dt=60 s

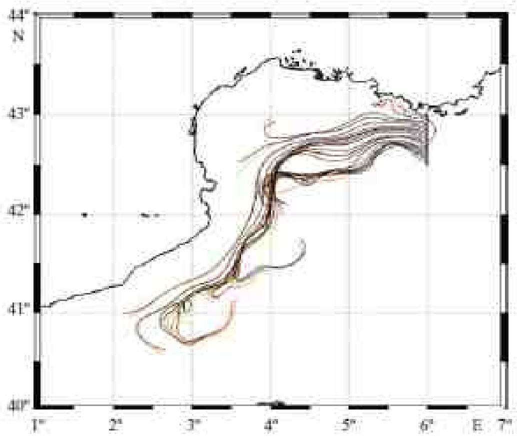


Fig.4 Trajectories of the 21 particles tracked 15 days with three different time steps

The initial locations are marked in black circulations and lines in black, green and red represent the trajectories of particles simulated with time steps dt=60 s, dt=300 s and dt=900 s, respectively

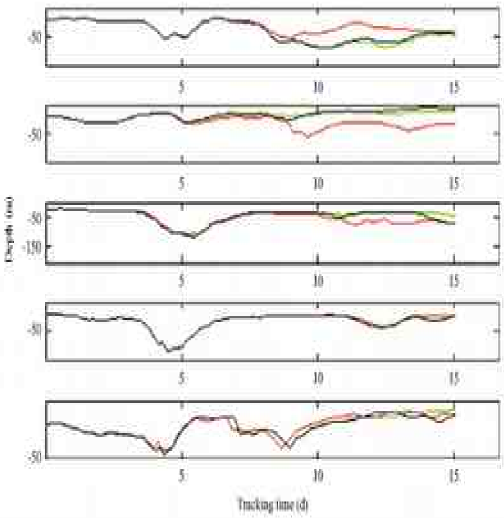
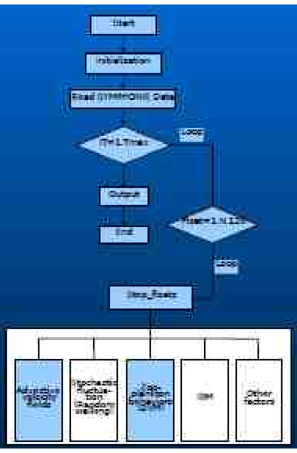


Fig.5 Depth variations of the 5 particles (of total 21) simulated with three different time steps

The lines in black, green and red represent the depth variations of the particles simulated with time steps dt=60 s, dt=300 s and dt=900 s, respectively

Flow chart



Lagrangian Model

We use a Lagrangian particle-tracking code based on the ROMS Offline Floats (ROFF, introduced in details by Carr et al. 2007)

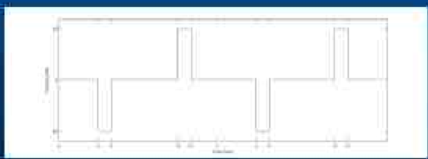
- an advanced fourth-order accurate Adams-Bashford-Moulton predictor-corrector scheme is used for the tracking algorithm

$$d\vec{x}/dt = \vec{u}(\vec{x},t)$$
$$\vec{u}(\vec{x},t) = \vec{u}_{sym} + \vec{u}_{DVM}$$

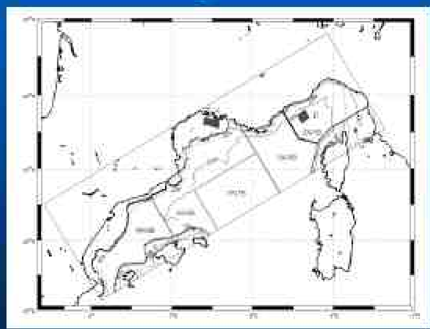
- $\vec{u}_{sym}$ are linearly interpolated from the velocity values of the 8 nearest grid cells, which are daily averaged simulations of the SYMPHONIE model, provided every 24 hours.

DVM scheme

- if upper than -50m on 06:00, swim down with the velocity 50 m/h from 06:00 to 08:00
- otherwise the zooplankton transport processes are only determined by the velocity fields of the model circulation
- from 18:00 to 20:00, swim up from deeper depth to near-surface depth with the velocity 50 m/h.



Study Area

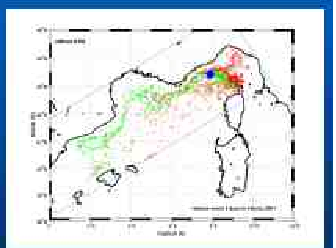


Model Approach

- **Time step**: 300s
- **SYMPHONIE data**: spatial resolution of 3KM
- **Starting time**:
  March 1 ~ August 31,2001,every 3 days
- **Simulating time**: 40 days
- **Particles release information**:
  Location: R(Rhone river plume), D(Dyfamed station)
  Number: 200 particles each location
  Depth: -5m and -20m (R) -5m and -100m(D)
- **Zooplankton behaviour**: passive drift and with DVM

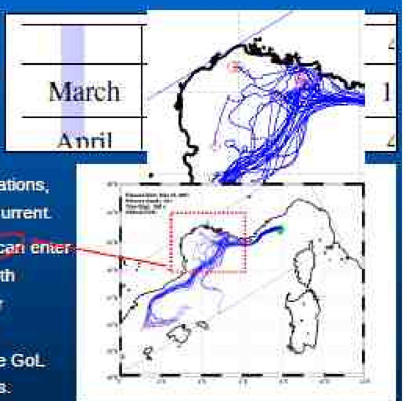
Particles release at D

- After being transported for 40 days, the particles could launch almost anywhere in the NWMS.
- With the influence of the vertical variability of the currents, the final distributions are different with the particles released at different depths.



Blue square: release locations
Red circles: final positions of particles released at -5m
Green points: final positions of particles released at -100m

- Strong seasonal patterns appear in the final distributions of the particles, which dues to the seasonal variability of the circulations, especially the North Current.
- Very few particles can enter into the GoL. The North Current is a barrier for particles entering the continental shelf in the GoL from the offshore seas.



Particles release at R

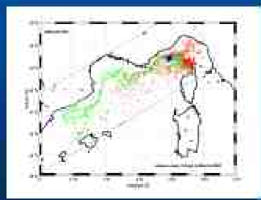
- Final distributions are separated into two parts: one remains in the GoL and the other goes out to scatter in the path of the North Current and in the Catalan Sea.

	1	2	3
March	24	3	5
April	47	1	1

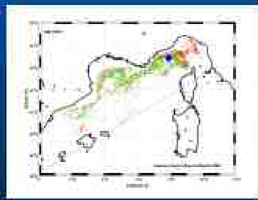
- After 40 days, 1/4~1/2 particles remain in the GoL. The GoL could be considered as a retention area for the zooplankton transport and distributions.
- Weak seasonal patterns appear in the final distributions of the particles. No one particle enters into the Ligurian Sea during the simulations.

With DVM

- Final distributions of the particles released at D are mainly similar as the particles simulated without DVM, however more concentrated at the path of the main currents



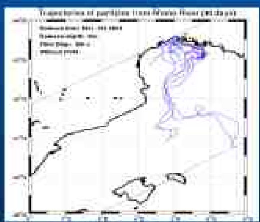
without DVM



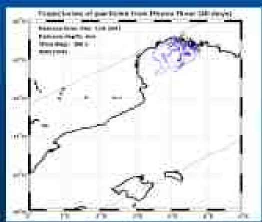
with DVM

DVM discuss

In an upwelling region, there are often offshore currents at the surface and onshore currents at deeper depths. Consequently DVM reduces the transport of the particles away from the region, compared to the particles transport passively at the surface.



without DVM



with DVM

Conclusion

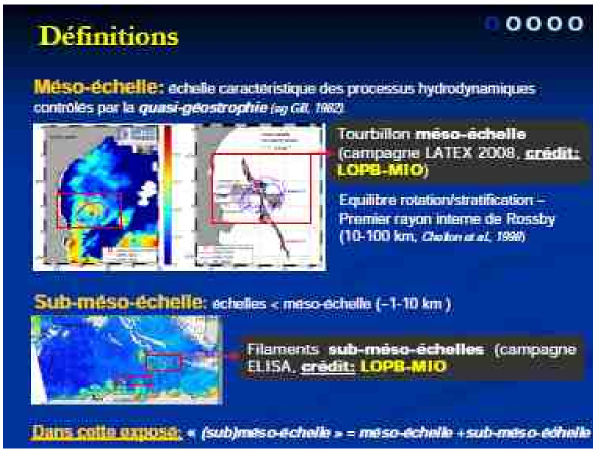
- A Lagrangian module has been developed to simulate the transport and distributions of zooplankton individuals coupling with SYMPHONIE
- Strong seasonal patterns appear in the distributions of the individuals released at DYFAMED sampling station. Individuals could be spread all over the NWMS basin after 40 days but different patterns occurs following the season, the depth of release of the individuals, and the capacity of DVM or not.

- An offshore-shelf transport only occur in April to June. In the other months, the North Current can be properly considered as a barrier for particles entering into the GoL from the offshore sea.
- At the end of the 40 days, passive individuals released in the plume of the Rhone River are spread on the GoL shelf or in the Catalan sea. Following the season between a quarter to a half of the initial released individuals stay in the Gulf. Simple DVM behavior does not increase the retention on the shelf.

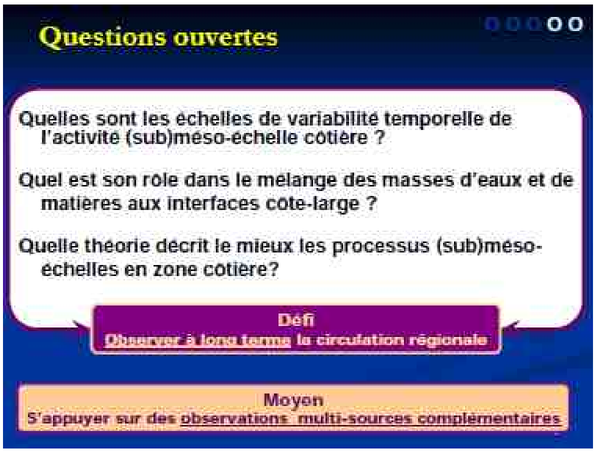
Next Step

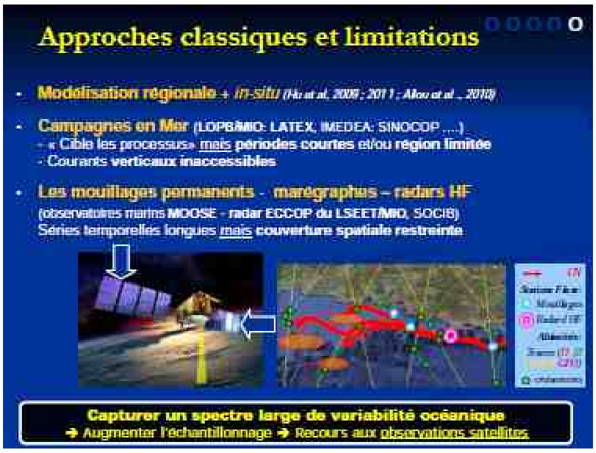
- Random Walk Scheme
- Nest codes
- Individual Based Model
- …

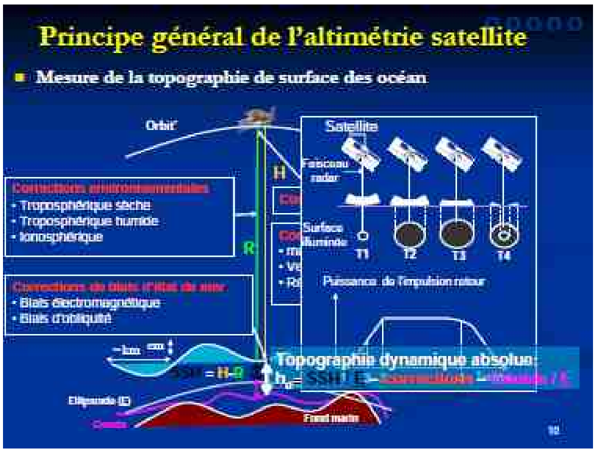

LOPB
Jérôme Bouffard (LOPB-MIO, Marseille)
Séminaire M2
CNRS
Partie 1: Préambule
Apport de l'altimétrie pour l'observation de surface de la dynamique méso-échelle et sub mésoéchelle régionale

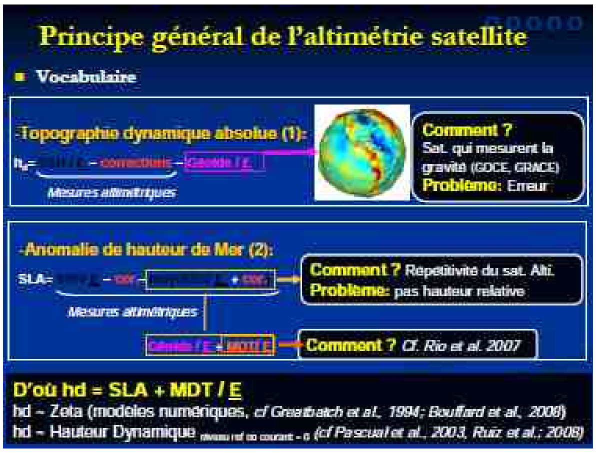

Définitions
Méso-échelle: échelle caractéristique des processus hydrodynamiques contrôlés par la quasi-géostrophie (eg Gill, 1982)
Tourbillon méso-échelle (campagne LATEX 2008, crédit: LOPB-MIO)
Equilibre rotation/stratification – Premier rayon interne de Rossby (10-100 km, Chelton et al., 1998)
Sub-méso-échelle: échelles < méso-échelle (~1-10 km)
Filaments sub-méso-échelles (campagne ELISA, crédit: LOPB-MIO
Dans cette exposé: « (sub)méso-échelle » = méso-échelle + sub-méso-échelle


Enjeux scientifiques et sociétaux
Au niveau global
- La (sub)méso-échelle influe sur le système climatique terrestre et les budgets de productivité primaire (Lévy, 2008)
- Essentiel des études dans l'océan ouvert à partir de simulations numériques (Klein et al. 2008)
Aux échelles régionales et côtières ?
- Peu d'études pourtant 95% des enjeux socio-économiques localisés dans les régions côtières (Cohen et al. 1997)
- Moitié des côtes méditerranéennes urbanisées d'ici 2025 (Bargamenti et Vaudin, 2008)
- Scénario en Méditerranée (GIEC 2007) Oligotrophisation de l'océan ouvert et Eutrophisation en zone côtière
Etudier les facteurs physiques qui contrôlent les réponses des écosystèmes côtiers


Questions ouvertes
Quelles sont les échelles de variabilité temporelle de l'activité (sub)méso-échelle côtière ?
Quel est son rôle dans le mélange des masses d'eaux et de matières aux interfaces côte-large ?
Quelle théorie décrit le mieux les processus (sub)méso-échelles en zone côtière?
Défi
Observer à long terme la circulation régionale
Moyen
S'appuyer sur des observations multi-sources complémentaires

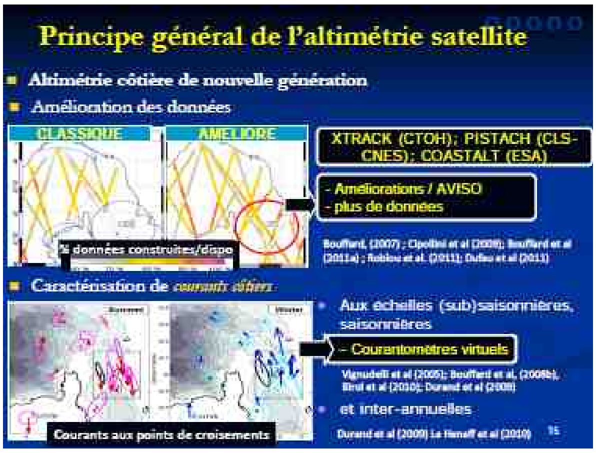

Approches classiques et limitations
Modélisation régionale + in-situ (Hu et al. 2009 ; 2011 ; Allou et al., 2010)
Campagnes en Mer (LOPB/MIO: LATEX, IMEDEA: SINOCOP ....)
- « Cible les processus» mais périodes courtes et/ou région limitée
- Courants verticaux inaccessibles
Les mouillages permanents - marégraphes – radars HF
(observatoires marins MOOSE - radar ECCOP du LSEET/MIO, SOCIB)
Séries temporelles longues mais couverture spatiale restreinte
Capturer un spectre large de variabilité océanique
➔ Augmenter l'échantillonnage ➔ Recours aux observations satellites

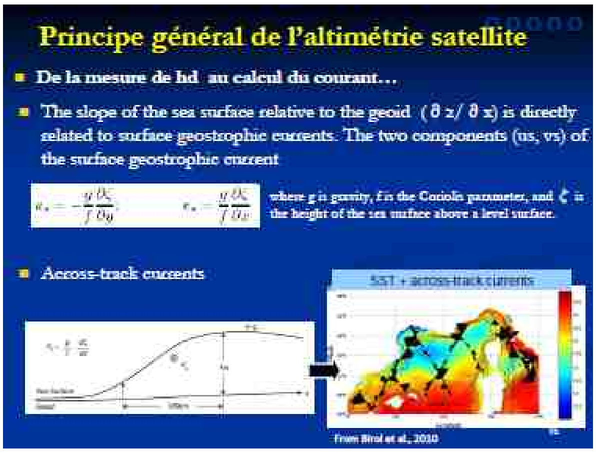

Principe général de l'altimétrie satellite
Mesure de la topographie de surface des océan
Orbit
Satellite
Faisceau radar
Corrections environnementales
• Troposphérique sèche
• Troposphérique humide
• Ionosphérique
Surface illuminée
T1
T2
T3
T4
Puissance de l'impulsion retour
Corrections de biais d'état de mer
• Biais électromagnétique
• Biais d'obliquité
H
R
Topographie dynamique absolue:
SSH = H-R
Ellipsoïde (E)
Géoide
Fond marin
10

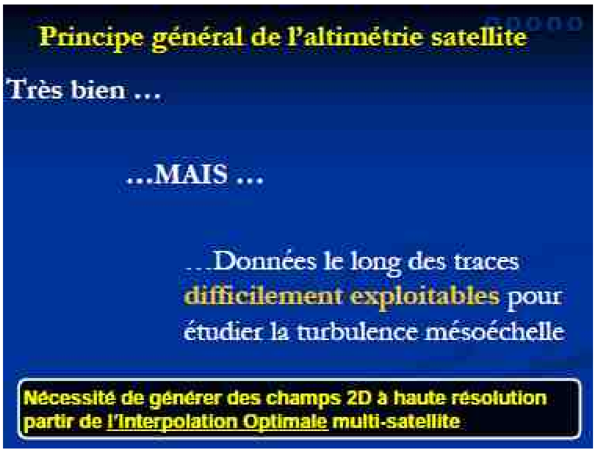

Principe général de l'altimétrie satellite
Vocabulaire
-Topographie dynamique absolue (1):
Mesures altimétriques
Comment ? Sat. qui mesurent la gravité (GOCE, GRACE)
Problème: Erreur
-Anomalie de hauteur de Mer (2):
SLA=
Mesures altimétriques
Comment ? Répétitivité du sat. Alti.
Problème: pas hauteur relative
Comment ? Cf. Rio et al. 2007
D'où hd = SLA + MDT / E
hd ~ Zeta (modèles numériques, cf Greatbatch et al., 1994; Bouffard et al., 2008)
hd ~ Hauteur Dynamique (cf Pascual et al., 2003, Ruiz et al.; 2008)

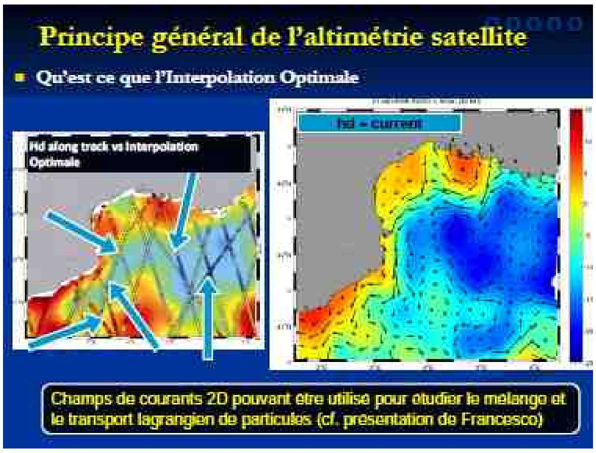

Principe général de l'altimétrie satellite
Principe simplifié de l'altimétrie
Traces altimétriques et marégraphes
Orbite
Ellipsoïde
L'altimétrie satellite adaptée pour l'étude de la dynamique hauturière (El Nino, La Nina, Gulf Stream …)
… mais inadaptée pour les études aux échelles régionales et côtières
11

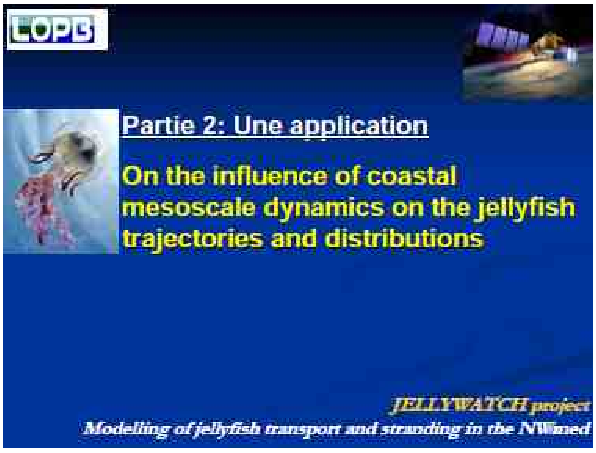

Principe général de l'altimétrie satellite
Altimétrie côtière de nouvelle génération
Nouvelles méthodologies développées afin d'améliorer les mesures côtières (Vignudelli et al., 2005; Bouffard, 2007; Roblou et al., 2011; Cipolini et al., 2010)
Leur exploitation scientifique a permis de caractériser des structures fine (R~20km) jusque là inaccessible
(courant ouest Corse: Bouffard et al., 2008b; CN: Bouffard, 2007; Birol et al., 2010; Bouffard et al.,2011)
L'utilisation conjointe avec la modélisation et les mesures in-situ a permis de mieux appréhender l'origine, les mécanismes et les structures verticales associées
(Bouffard et al., 2008a; Hermann et al., 2009; Bouffard et al., 2012)
14

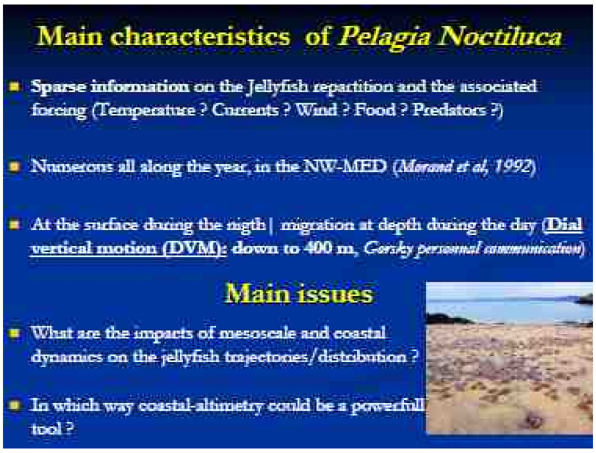

Principe général de l'altimétrie satellite
Altimétrie côtière de nouvelle génération
Amélioration des données
CLASSIQUE
AMELIORE
% données construites/dispo
XTRACK (CTOH); PISTACH (CLS-CNES); COASTALT (ESA)
- Améliorations / AVISO
- plus de données
Caractérisation de courants côtiers
Aux échelles (sub)saisonnières, saisonnières
- Courantomètres virtuels
et inter-annuelles
Courants aux points de croisements
15

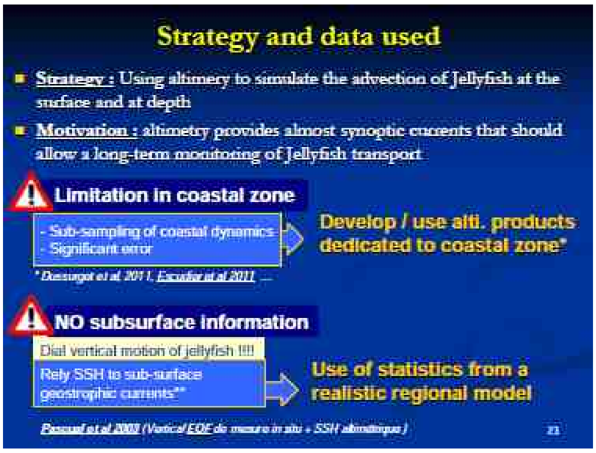

Principe général de l'altimétrie satellite
De la mesure de hd au calcul du courant…
The slope of the sea surface relative to the geoid (∂z/∂x) is directly related to surface geostrophic currents. The two components (us, vs) of the surface geostrophic current
where g is gravity, f is the Coriolis parameter, and ζ is the height of the sea surface above a level surface.
Across-track currents
SST + across-track currents
From Birol et al., 2010

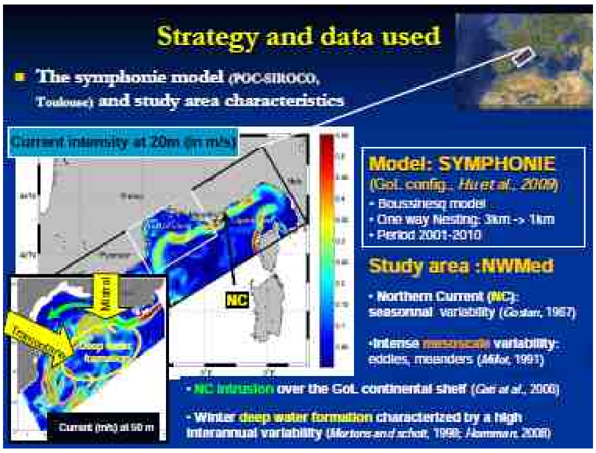

Principe général de l'altimétrie satellite
Très bien …
…MAIS …
…Données le long des traces difficilement exploitables pour étudier la turbulence mésoéchelle
Nécessité de générer des champs 2D à haute résolution partir de l'Interpolation Optimale multi-satellite

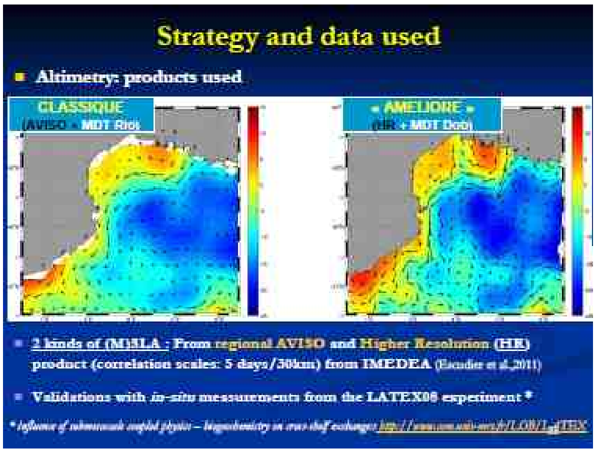

Principe général de l'altimétrie satellite
Qu'est ce que l'Interpolation Optimale
Hd along track vs Interpolation Optimale
hd + current
Champs de courants 2D pouvant être utilisé pour étudier le mélange et le transport lagrangien de particules (cf. présentation de Francesco)

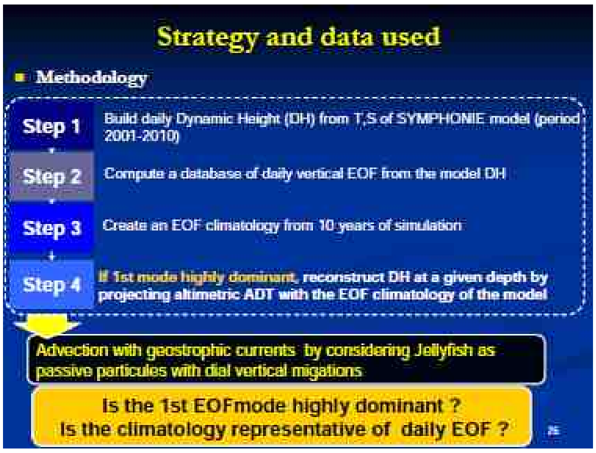

LOPB
Partie 2: Une application
On the influence of coastal mesoscale dynamics on the jellyfish trajectories and distributions
JELLYWATCH project
Modelling of jellyfish transport and stranding in the NWmed

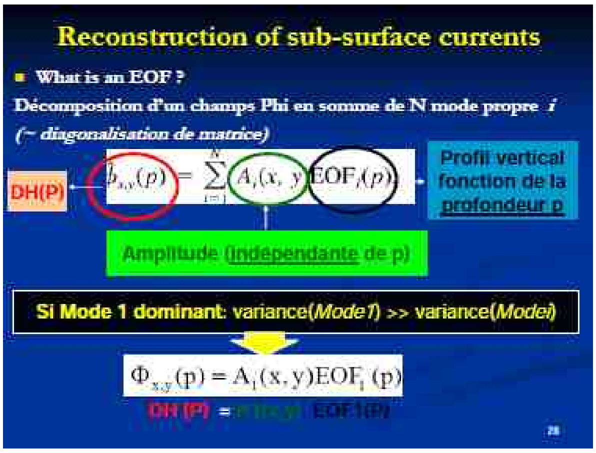

Main characteristics of Pelagia Noctiluca
Sparse information on the Jellyfish repartition and the associated forcing (Temperature ? Currents ? Wind ? Food ? Predators ?)
Numerous all along the year, in the NW-MED (Morand et al, 1992)
At the surface during the night / migration at depth during the day (Dial vertical motion (DVM): down to 400 m, Gorsky personnal communication)
Main issues
What are the impacts of mesoscale and coastal dynamics on the jellyfish trajectories/distribution ?
In which way coastal-altimetry could be a powerfull tool ?

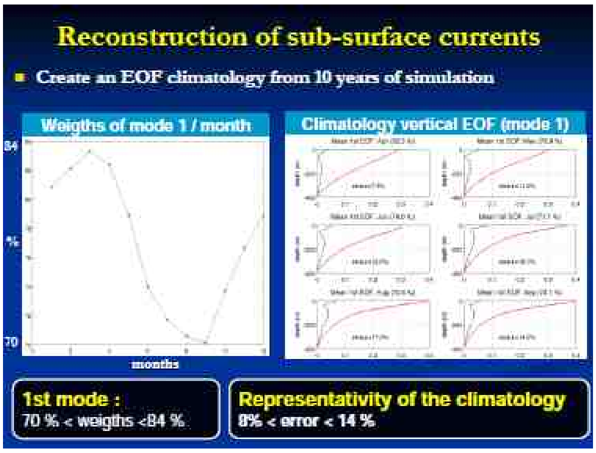

Strategy and data used
Strategy : Using altimetry to simulate the advection of Jellyfish at the surface and at depth
Motivation : altimetry provides almost synoptic currents that should allow a long-term monitoring of Jellyfish transport
Limitation in coastal zone
- Sub-sampling of coastal dynamics
- Significant error
Develop / use alti. products dedicated to coastal zone*
NO subsurface information
Dial vertical motion of jellyfish !!!!
Rely SSH to sub-surface geostrophic currents**
Use of statistics from a realistic regional model
21

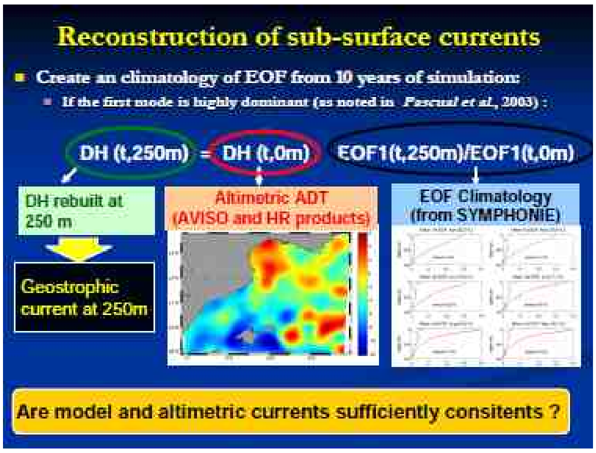

Strategy and data used
The symphonie model (POC-SIROCO, Toulouse) and study area characteristics
Current intensity at 20m (in m/s)
Model: SYMPHONIE
(GoL config., Hu et al., 2009)
• Boussinesq model
• One way Nesting: 3km -> 1km
• Period 2001-2010
Study area :NWMed
• Northern Current (NC): seasonnal variability (Gostan, 1967)
•Intense mesoscale variability: eddies, meanders (Millot, 1991)
• NC intrusion over the GoL continental shelf (Gatti et al., 2006)
• Winter deep water formation characterized by a high interannual variability (Mertens and schott, 1998; Hamman, 2008)
Mistral
Tramontane
Deep water formation
NC
Current (m/s) at 50 m

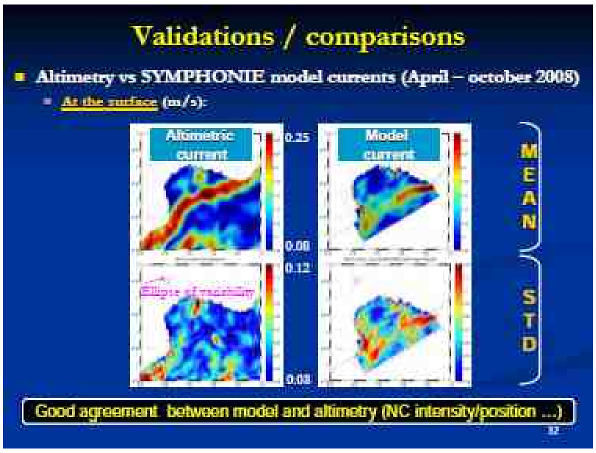

Strategy and data used
Altimetry: products used
CLASSIQUE
(AVISO + MDT Rio)
« AMELIORE »
(HR + MDT Dobj)
2 kinds of (M)SLA : From regional AVISO and Higher Resolution (HR) product (correlation scales: 5 days/30km) from IMEDEA (Escudier et al.,2011)
Validations with in-situ measurements from the LATEX08 experiment *

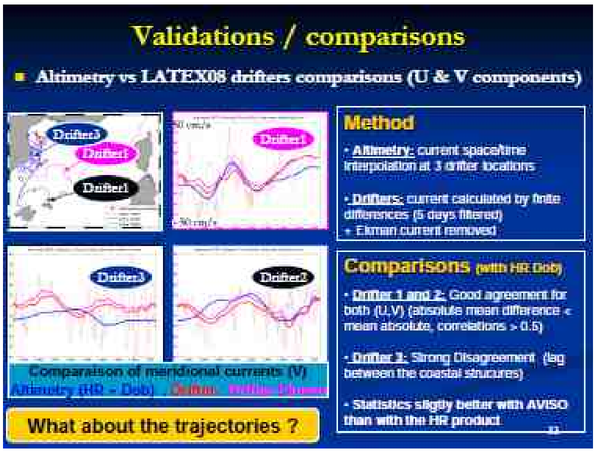

Strategy and data used
Methodology
Step 1
Build daily Dynamic Height (DH) from T,S of SYMPHONIE model (period 2001-2010)
Step 2
Compute a database of daily vertical EOF from the model DH
Step 3
Create an EOF climatology from 10 years of simulation
Step 4
If 1st mode highly dominant, reconstruct DH at a given depth by projecting altimetric ADT with the EOF climatology of the model
Advection with geostrophic currents by considering Jellyfish as passive particules with dial vertical migations
Is the 1st EOFmode highly dominant ?
Is the climatology representative of daily EOF ?

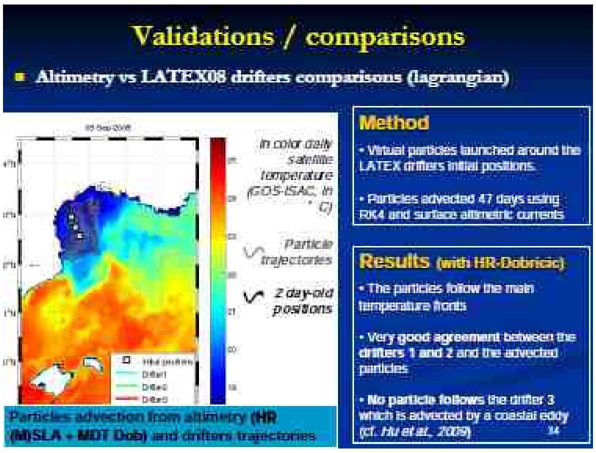

Reconstruction of sub-surface currents
What is an EOF ?
Décomposition d'un champs Phi en somme de N mode propre i
(~ diagonalisation de matrice)
DH(P)
$\Phi_{x,y}(p) = \sum_{i=1}^{N} A_i(x,y) EOF_i(p)$
Profil vertical fonction de la profondeur p
Amplitude (indépendante de p)
Si Mode 1 dominant: variance(Mode1) >> variance(Model)
$\Phi_{x,y}(p) = A_1(x,y) EOF_1(p)$
DH (P) = A (x,y) EOF1(P)


Reconstruction of sub-surface currents
Create an EOF climatology from 10 years of simulation
Weigths of mode 1 / month
Climatology vertical EOF (mode 1)
months
1st mode :
70 % < weigths <84 %
Representativity of the climatology
8% < error < 14 %

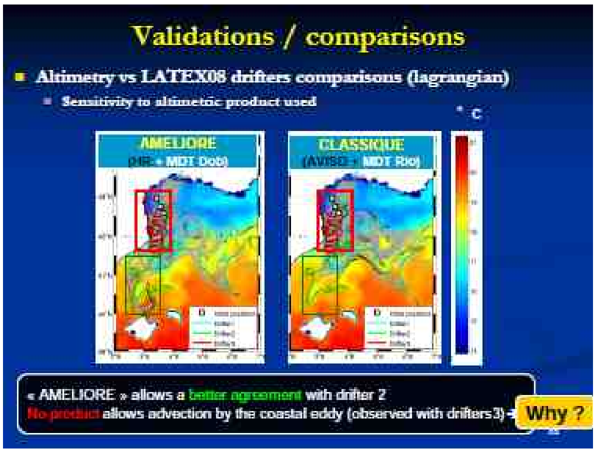

Reconstruction of sub-surface currents
Create an climatology of EOF from 10 years of simulation:
If the first mode is highly dominant (as noted in Pascual et al., 2003) :
DH (t,250m) = DH (t,0m) EOF1(t,250m)/EOF1(t,0m)
DH rebuilt at 250 m
Altimetric ADT (AVISO and HR products)
EOF Climatology (from SYMPHONIE)
Geostrophic current at 250m
Are model and altimetric currents sufficiently consitents ?


Validations / comparisons
Altimetry vs SYMPHONIE model currents (April – october 2008)
At the surface (m/s):
Altimetric current
Model current
MEAN
STD
Ellipse of variability
Good agreement between model and altimetry (NC intensity/position ...)

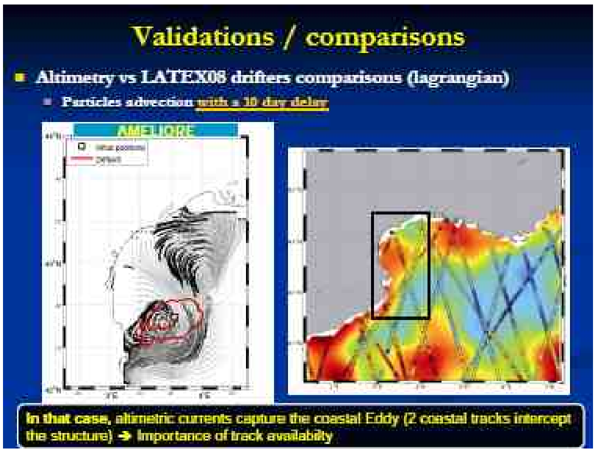

Validations / comparisons
Altimetry vs LATEX08 drifters comparisons (U & V components)
Drifter3
Drifter1
Drifter2
Method
• Altimetry: current space/time interpolation at 3 drifter locations
• Drifters: current calculated by finite differences (5 days filtered)
• Ekman current removed
Comparisons (with HR Dobj)
• Drifter 1 and 2: Good agreement for both (U,V) (absolute mean difference < mean absolute, correlations > 0.5)
• Drifter 3: Strong Disagreement (lag between the coastal structures)
• Statistics sligtly better with AVISO than with the HR product
Comparaison of meridional currents (V)
What about the trajectories ?



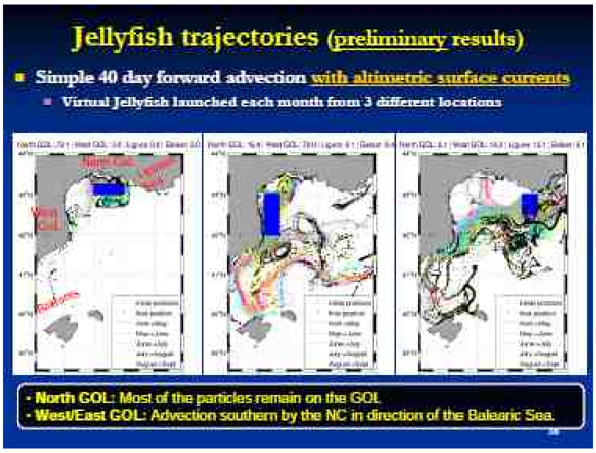
Validations / comparisons
Altimetry vs LATEX08 drifters comparisons (lagrangian)
In color daily satellite temperature (GOS-ISAC, in °C)
Particle trajectories
2 day-old positions
Particles advection from altimetry (HR (M)SLA + MDT Dob) and drifters trajectories
Method
• Virtual particles launched around the LATEX drifters initial positions.
• Particles advected 47 days using RK4 and surface altimetric currents
Results (with HR-Dobricic)
• The particles follow the main temperature fronts
• Very good agreement between the drifters 1 and 2 and the advected particles
• No particle follows the drifter 3 which is advected by a coastal eddy (cf. Hu et al., 2009)



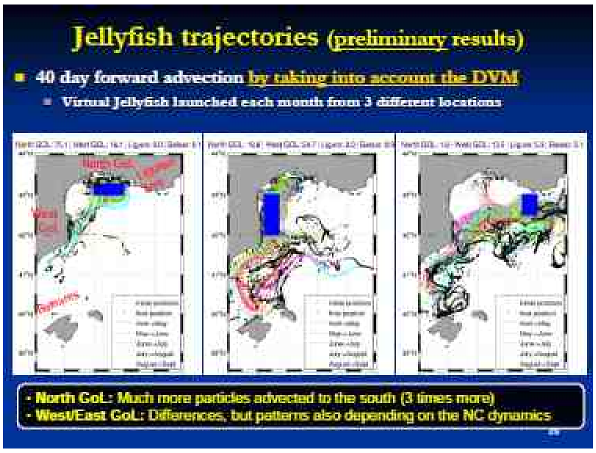
Validations / comparisons
Altimetry vs LATEX08 drifters comparisons (lagrangian)
Sensitivity to altimetric product used
AMELIORE (HR + MDT Dob)
CLASSIQUE (AVISO + MDT Rio)
« AMELIORE » allows a better agreement with drifter 2
No product allows advection by the coastal eddy (observed with drifters3)
Why ?



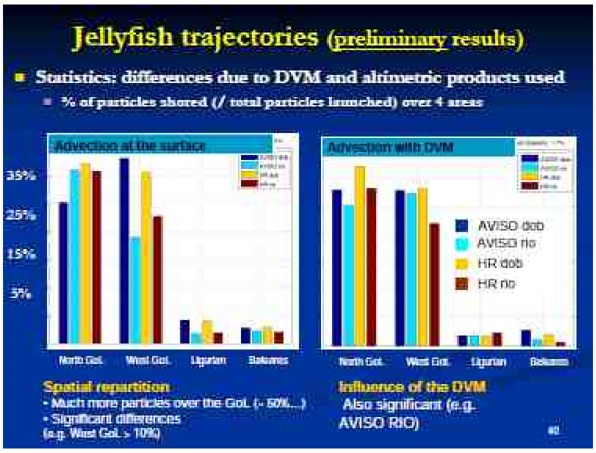
Validations / comparisons
Altimetry vs LATEX08 drifters comparisons (lagrangian)
Particles advection with a 10 day delay
AMELIORE
In that case, altimetric currents capture the coastal Eddy (2 coastal tracks intercept the structure) → Importance of track availabilty



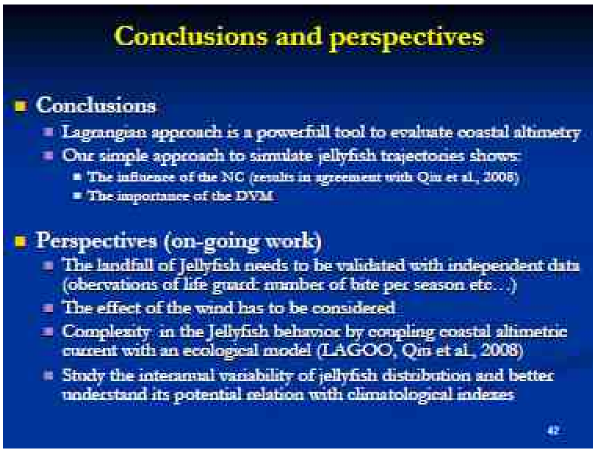
Jellyfish trajectories (preliminary results)
Simple 40 day forward advection with altimetric surface currents
Virtual Jellyfish launched each month from 3 different locations
• North GOL: Most of the particles remain on the GOL
• West/East GOL: Advection southern by the NC in direction of the Balearic Sea.



Jellyfish trajectories (preliminary results)
40 day forward advection by taking into account the DVM
Virtual Jellyfish launched each month from 3 different locations
• North GoL: Much more particles advected to the south (3 times more)
• West/East GoL: Differences, but patterns also depending on the NC dynamics



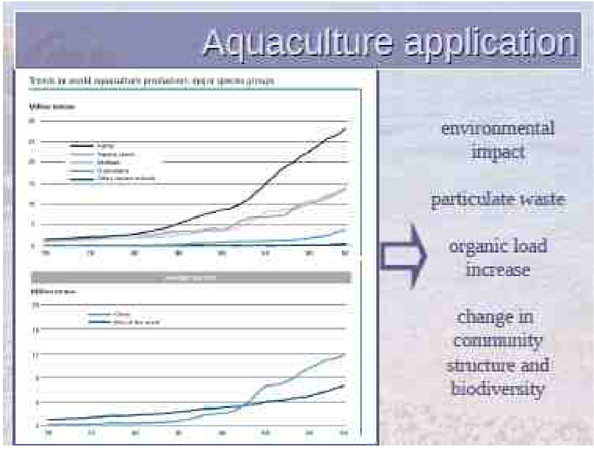
Jellyfish trajectories (preliminary results)
Statistics: differences due to DVM and altimetric products used
% of particles shored (/ total particles launched) over 4 areas
Advection at the surface
Advection with DVM
35%
25%
15%
5%
AVISO dob
AVISO rio
HR dob
HR rio
North GoL
West GoL
Ligurian
Baleares
Spatial repartition
• Much more particles over the GoL (~ 50%...)
• Significant differences (e.g. West GoL > 10%)
Influence of the DVM
Also significant (e.g. AVISO RIO)

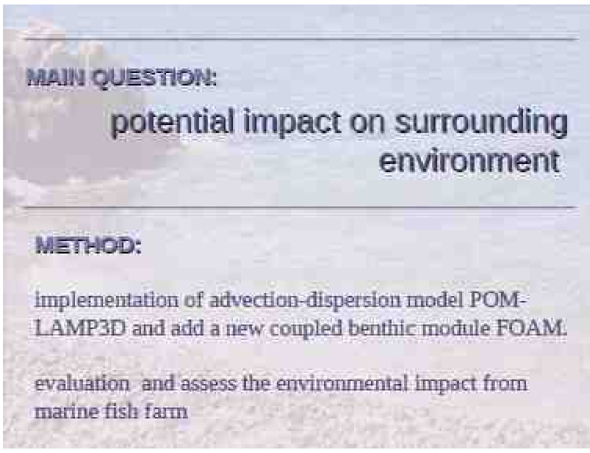


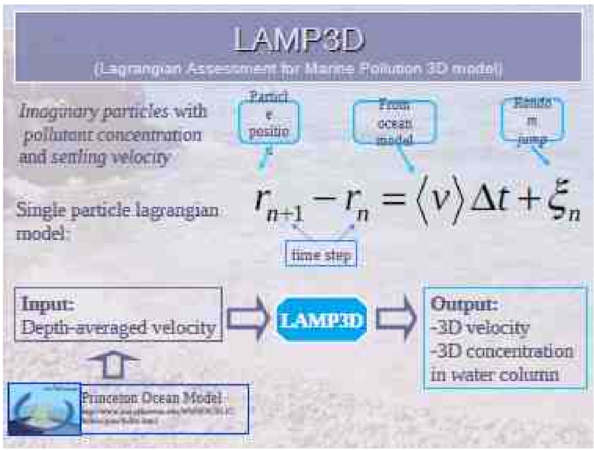
Conclusions and perspectives
Conclusions
Lagrangian approach is a powerfull tool to evaluate coastal altimetry
Our simple approach to simulate jellyfish trajectories shows:
The influence of the NC (results in agreement with Qiu et al., 2008)
The importance of the DVM
Perspectives (on-going work)
The landfall of Jellyfish needs to be validated with independent data (obervations of life guard: number of bite per season etc…)
The effect of the wind has to be considered
Complexity in the Jellyfish behavior by coupling coastal altimetric current with an ecological model (LAGOO, Qiu et al, 2008)
Study the interannual variability of jellyfish distribution and better understand its potential relation with climatological indexes

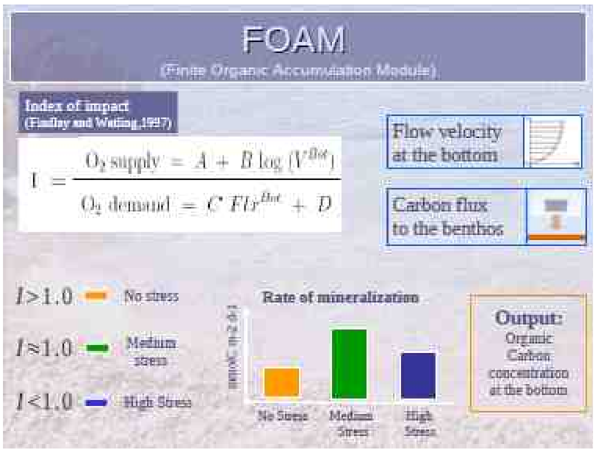
7.8 Exemple : dispersion des rejets d'une ferme acquicole

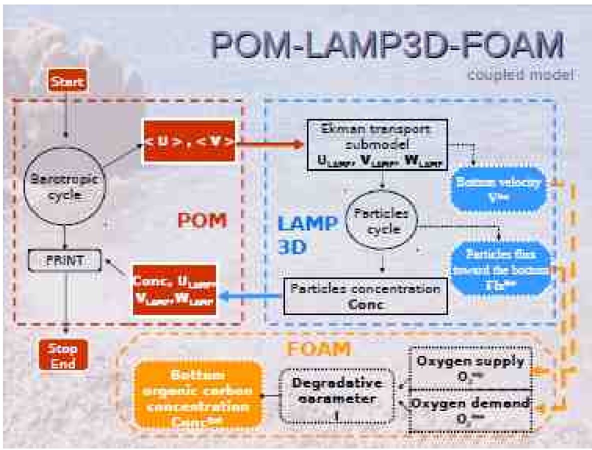
A new numerical benthic degradative module FOAM (Finite Organic Accumulation Module) has been coupled with the advection-dispersion model POM-LAMP3D in order to improve the prediction of the potential impact of marine fish farms. Moreover real historic current-meter data are employed to force the hydrodynamic and dispersion simulations and recent measurements of settling velocity values specifically targeting Mediterranean fish species are considered.
FOAM uses the output of the other functional units of the modeling framework to calculate the organic load on the seabed. It considers the natural capability of the seafloor in absorbing part of the organic load. Different remineralization rates reflect the sediment stress levels and are used to compute the organic carbon concentration remaining on the seabed after degradation. Two sampling campaigns have been performed in a typical Mediterranean fish farm in the warm and cold season in 2006 in order to measure the benthic response to the organic load and the mineralization rates in the Mediterranean conditions. Organic degradation for both uneaten feed and faeces is evaluated by changing release modality (continuous and periodical) and by varying the settling velocities. The results show that in the Mediterranean conditions, the benthic response to the organic enrichment of the bottom depends on water temperature.
We find that the introduced modeling framework successfully improves capability predictions. It can therefore represent an important tool in decision making processes, for planning and monitoring purposes.

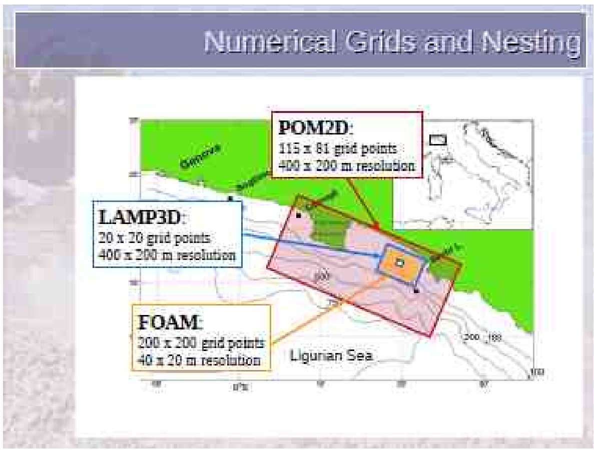

Aquaculture application
environmental impact
particulate waste
organic load increase
change in community structure and biodiversity

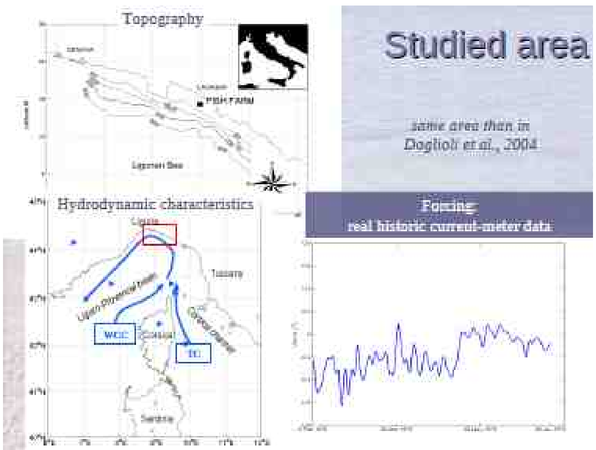

MAIN QUESTION:
potential impact on surrounding environment
METHOD:
implementation of advection-dispersion model POM-LAMP3D and add a new coupled benthic module FOAM.
evaluation and assess the environmental impact from marine fish farm

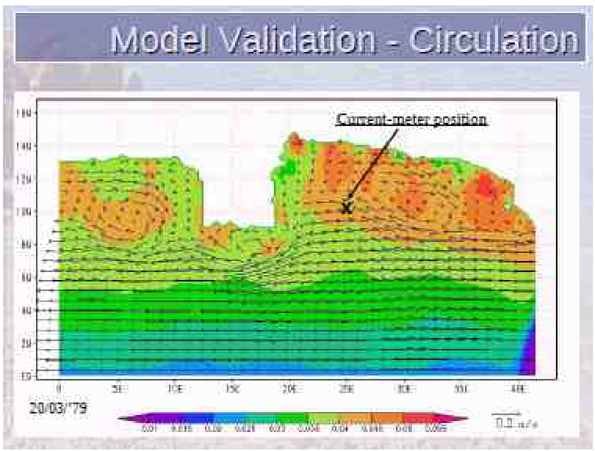

LAMP3D
(Lagrangian Assessment for Marine Pollution 3D model)
Imaginary particles with pollutant concentration and settling velocity
Single particle lagrangian model:
time step
Input:
Depth-averaged velocity
LAMP3D
Output:
-3D velocity
-3D concentration in water column
Princeton Ocean Model


FOAM
(Finite Organic Accumulation Module)
Index of impact
(Findlay and Watling,1997)
Flow velocity at the bottom
Carbon flux to the benthos
No stress
Medium stress
High Stress
Rate of mineralization
Output:
Organic Carbon concentration at the bottom


POM-LAMP3D-FOAM
coupled model
Start
Barotropic cycle
POM
PRINT
Stop End
Ekman transport submodel
LAMP 3D
Particles cycle
Particles concentration Conc
Bottom velocity
Particles flux toward the bottom
FOAM
Oxygen supply
Degradative parameter
Oxygen demand
Bottom organic carbon concentration


Numerical Grids and Nesting
POM2D:
115 x 81 grid points
400 x 200 m resolution
LAMP3D:
20 x 20 grid points
400 x 200 m resolution
FOAM:
200 x 200 grid points
40 x 20 m resolution
Ligurian Sea


Topography
Studied area
same area than in Doglioli et al., 2004
Hydrodynamic characteristics
Forcing:
real historic current-meter data


Model Validation - Circulation
Current-meter position
20/03/'79

Model Validation - Circulation

Current measurements

Winter average (m/s)	Spring average (m/s)	Summer average (m/s)	Autumn average (m/s)	Annual average (m/s)
0.065 (0.057)	0.073 (0.065)	0.062 (0.052)	0.070 (0.052)	0.069 (0.057)

Model output

	Winter average (m/s)	Spring average (m/s)	Summer average (m/s)	Autumn average (m/s)	Overall average (m/s)
1st cycle	0.076 (0.053)	0.103 (0.094)	-	-	0.089 (0.087)
4th cycle	0.060 (0.034)	0.082 (0.060)	-	-	0.057 (0.034)
3th → 7th cycles	0.064 (0.042)	0.079 (0.050)	-	-	0.063 (0.051)

neglect the first 2 cycles to reduce the sensitivity to initial conditions

AQUA fish farm

Productive target:
200 ton year⁻¹

Reared species:
Sparus aurata and *Dicentrarchus labrax*

Wastes Particles

	620000 Numerical particle released	
	Uneaten feed *Feed conversion factor =1.3 kg pellets/kg fish* *% of feed supplied = 5%*	**Faecal matter** *Faecal production = 1.9 g/kg fish*
C	*% in feed = 45%* **1 particles = 306.6 mmol C**	*% organic carbon= 28%* **1 particles = 5.8 mmol C**
N	*% in feed = 6.6%* **1 particles = 167.8 mmol N**	*% particulated = 22%* **1 particles = 66.4 mmol N**

Settling velocity

uneaten feed and faeces values specifically targeting Mediterranean fish

Vassallo et al, 2006 Food pellets		Magill et al, 2006 Faecal pellets	
Diameter (mm)	V_{sed} (m s^{-1})	Fish species [size (g)]	V_{sed} (m s^{-1})
3	0.087	*S. Aurata* [380]	0.004
3.5	0.118	*S. Aurata* [60]	0.002
4.5	0.103	*D. Labrax* [200]	0.006
5	0.144	*D. Labrax* [80]	0.007
6	0.098		

Model Set Up

Different scenarios

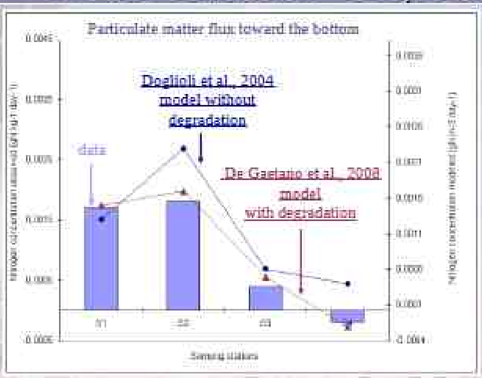
- waste typology: feed / faeces
- settling velocity: slowly sinking / quickly sinking
- release conditions: continuous / periodical

Indicators

Impacted area extension
Barycenter positions
I parameter
Organic Carbon concentration

Model Validation - Dispersion

Model Validation - Dispersion



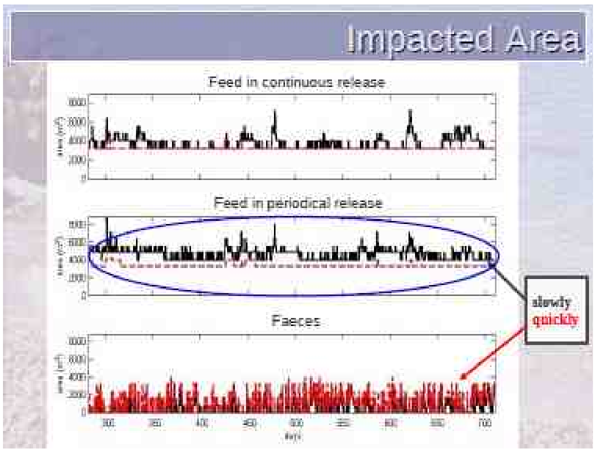
Impacted Area

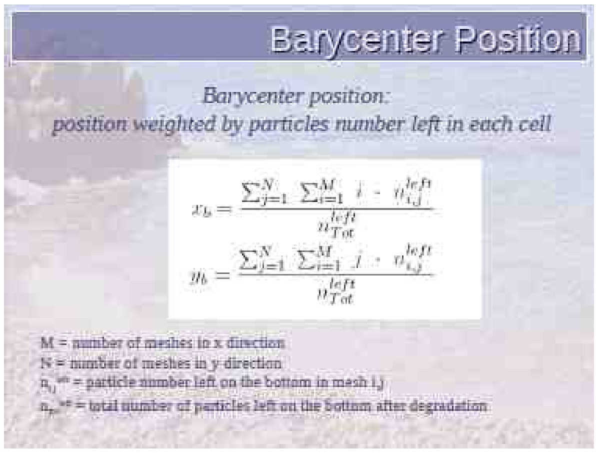
Impacted Area
sum of the grid meshed areas where particles are still present after the degradation.

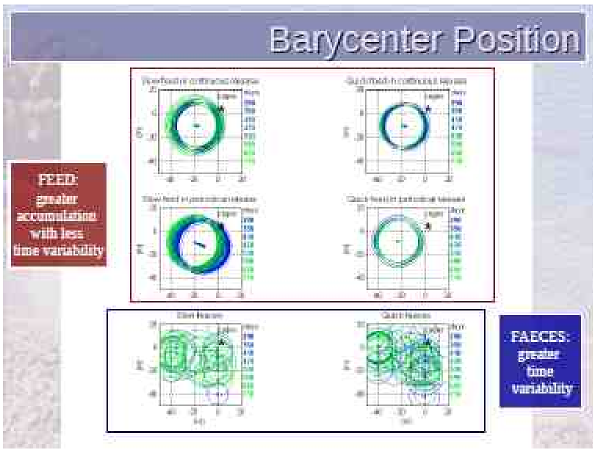
$$Area = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{M} \phi(Conc_{i,j}^{Bot}) \; \Delta x_i \; \Delta y_j$$

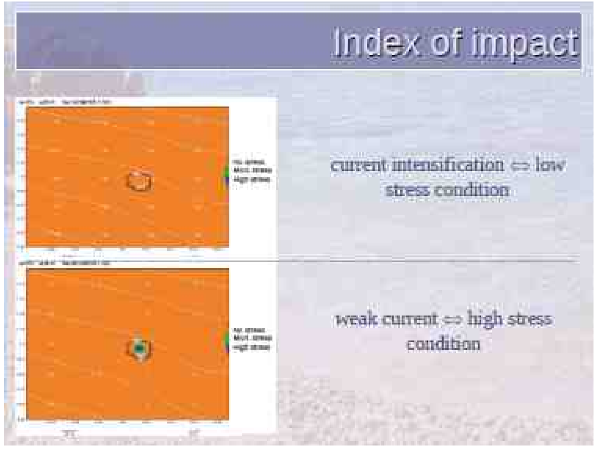
$$\phi(\xi) = \begin{cases} 1 \; if \; \xi > 0 \\ 0 \; if \; \xi = 0 \end{cases}$$

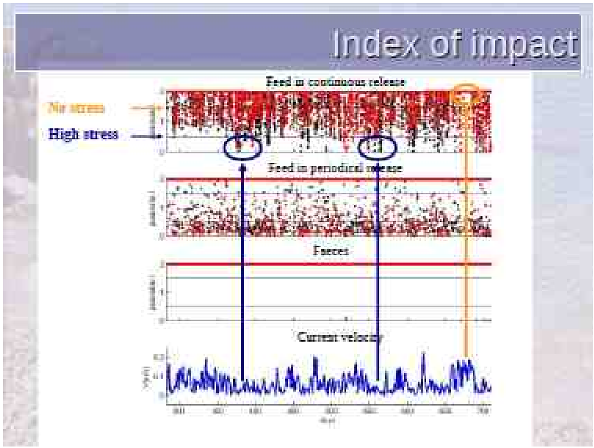
M = mesh number in x direction
N = mesh number in y direction
Δx = mesh grid length in x direction (m)
Δy = mesh grid length in y direction (m)
$Conc^{Bot}$ = organic carbon concentration remaining of the bottom after degradation

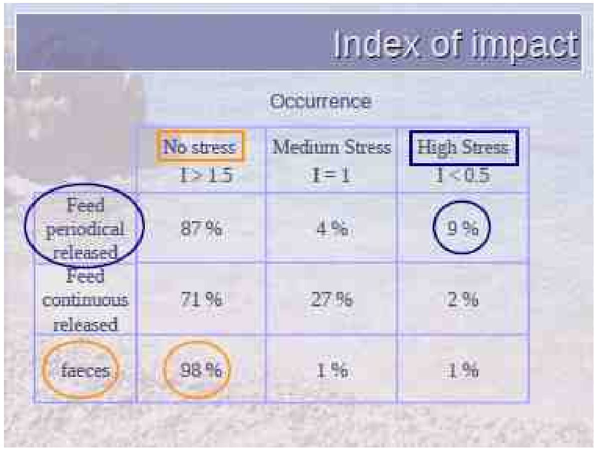




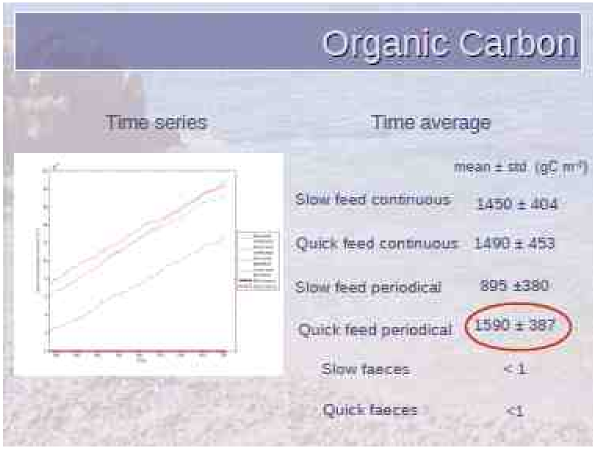


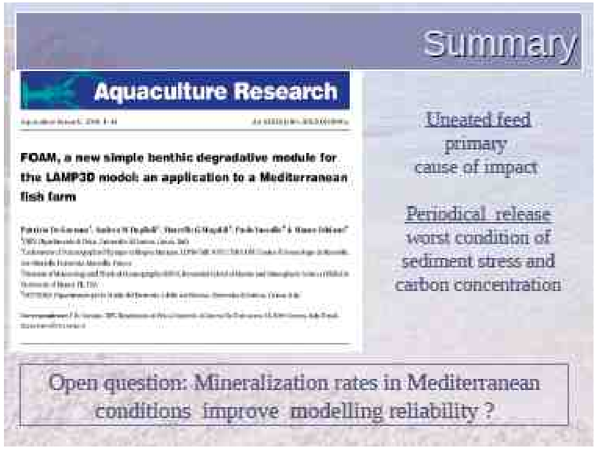


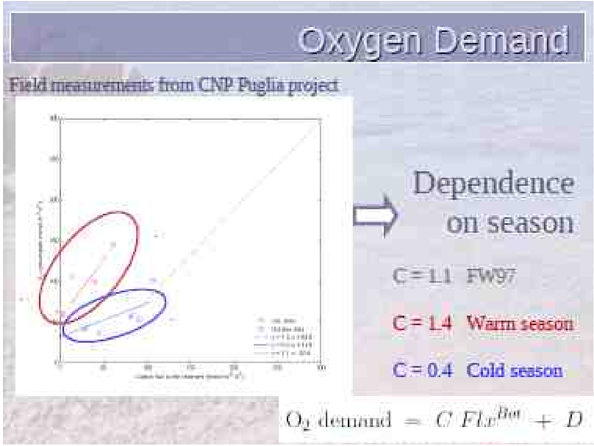


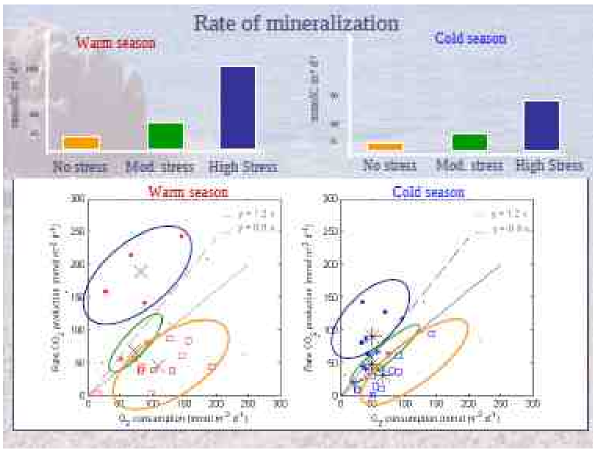


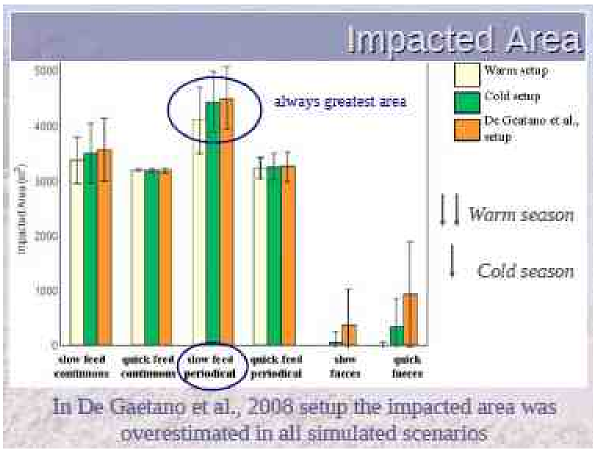
	No stress I > 1.5	Medium Stress I = 1	High Stress I < 0.5
Feed periodical released	87 %	4 %	9 %
Feed continuous released	71 %	27 %	2 %
faeces	98 %	1 %	1 %

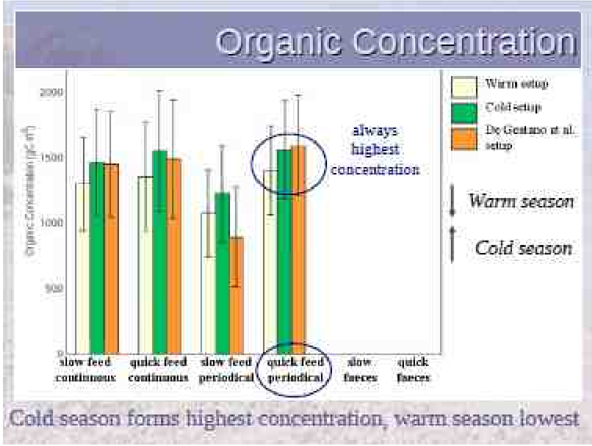


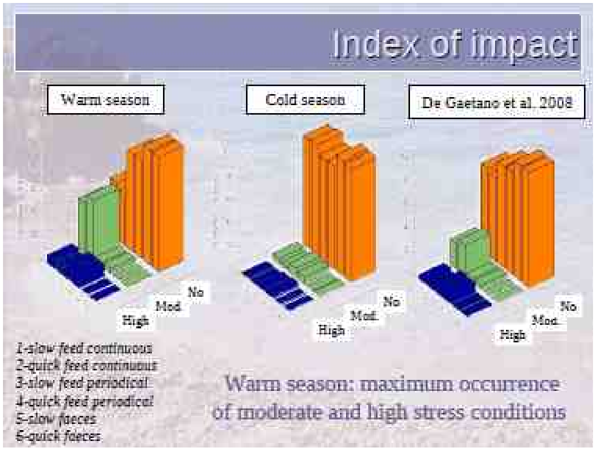


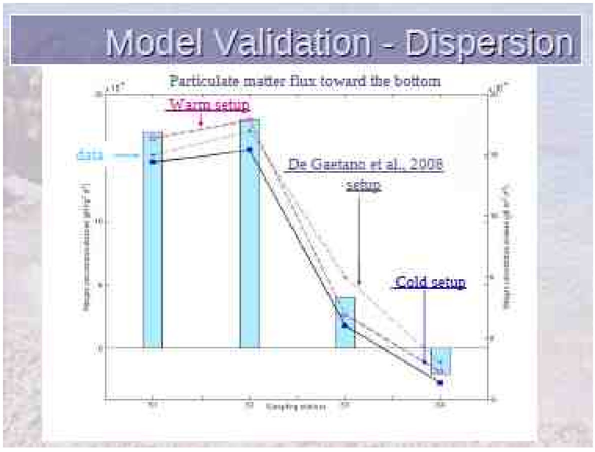

Oxygen Demand
Field measurements from CNP Puglia project
Dependence on season
C = 1.1 FW97
C = 1.4 Warm season
C = 0.4 Cold season
O_2 demand = $C\ Flx^{Bet}$ + D

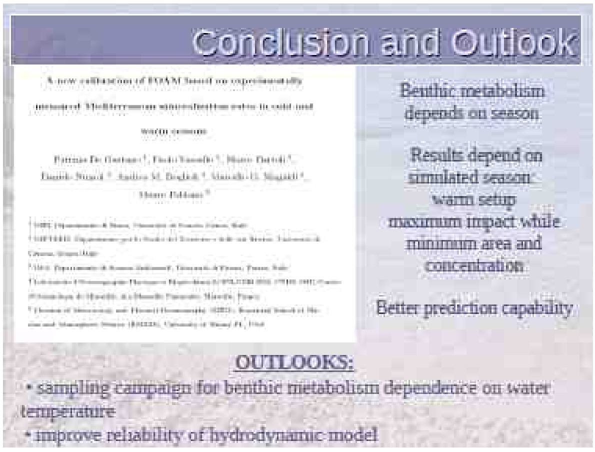

Rate of mineralization
Warm season
Cold season
No stress
Mod. stress
High Stress
Warm season
Cold season


Impacted Area
always greatest area
Warm setup
Cold setup
De Gaetano et al., setup
Warm season
Cold season
slow feed continuous
quick feed continuous
slow feed periodical
quick feed periodical
slow faeces
quick faeces
In De Gaetano et al., 2008 setup the impacted area was overestimated in all simulated scenarios

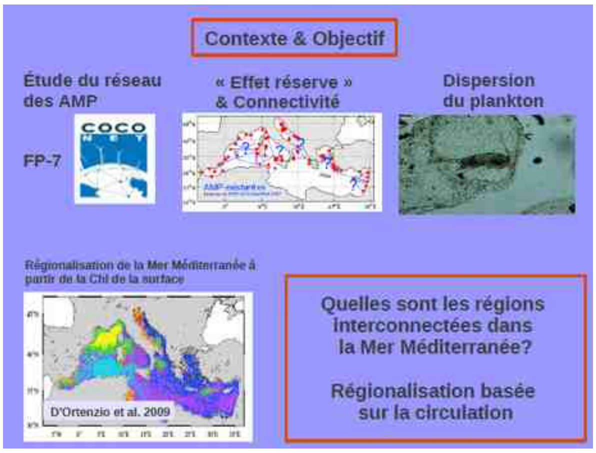

Organic Concentration
always highest concentration
Warm setup
Cold setup
De Gaetano et al. setup
Warm season
Cold season
slow feed continuous
quick feed continuous
slow feed periodical
quick feed periodical
slow faeces
quick faeces
Cold season forms highest concentration, warm season lowest

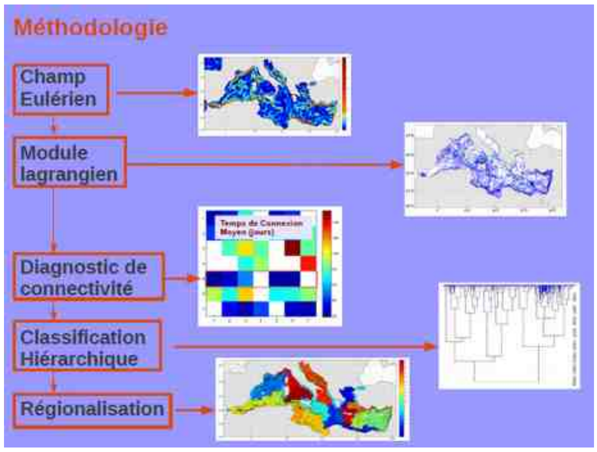

Index of impact
Warm season
Cold season
De Gaetano et al. 2008
No
Mod.
High
1-slow feed continuous
2-quick feed continuous
3-slow feed periodical
4-quick feed periodical
5-slow faeces
6-quick faeces
Warm season: maximum occurrence of moderate and high stress conditions

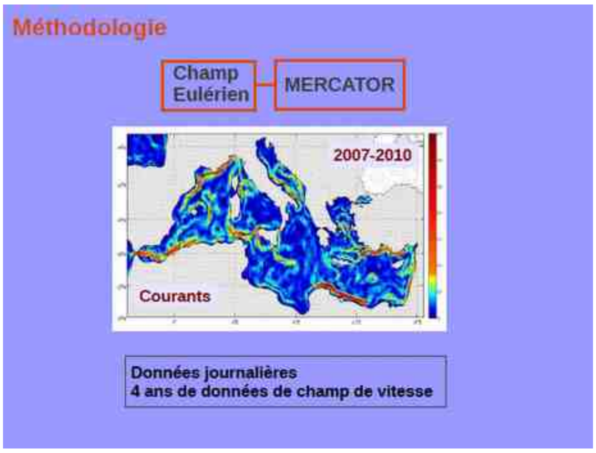

Model Validation - Dispersion
Particulate matter flux toward the bottom
Warm setup
data
De Gaetano et al., 2008 setup
Cold setup

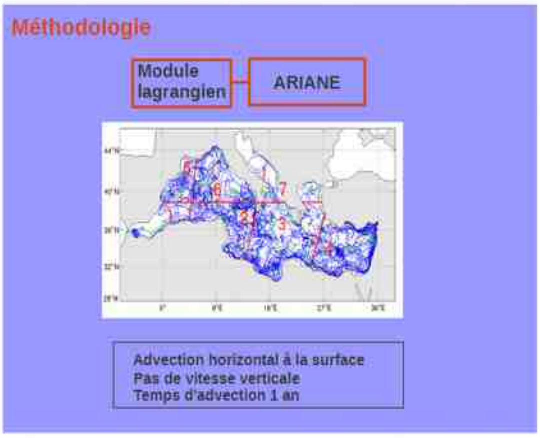

Conclusion and Outlook
Benthic metabolism depends on season
Results depend on simulated season: warm setup maximum impact while minimum area and concentration
Better prediction capability
OUTLOOKS:
• sampling campaign for benthic metabolism dependence on water temperature
• improve reliability of hydrodynamic model

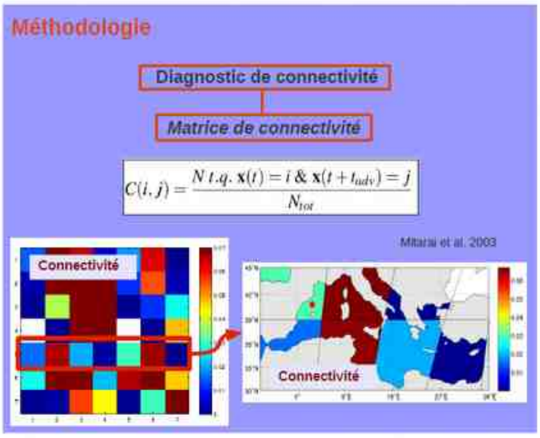
7.9 Exemple : étude lagrangien de la connectivité en mer Méditerranée

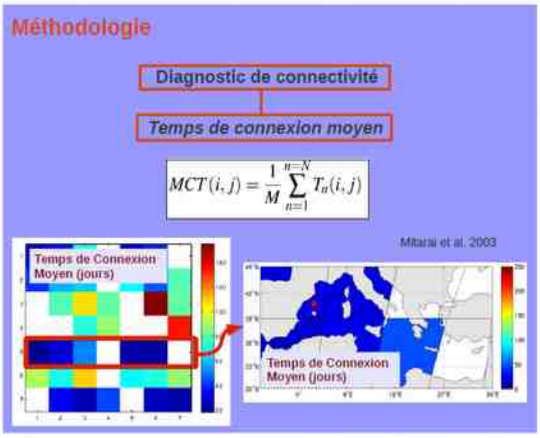


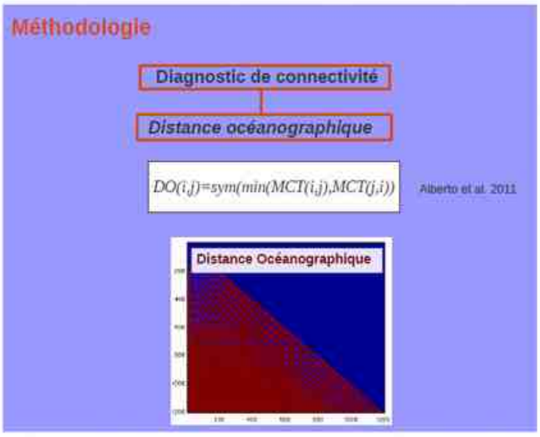


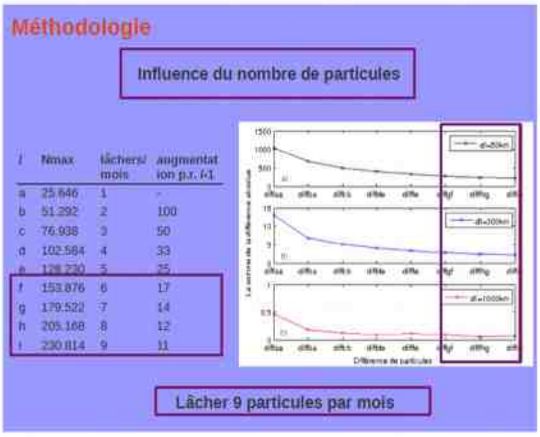




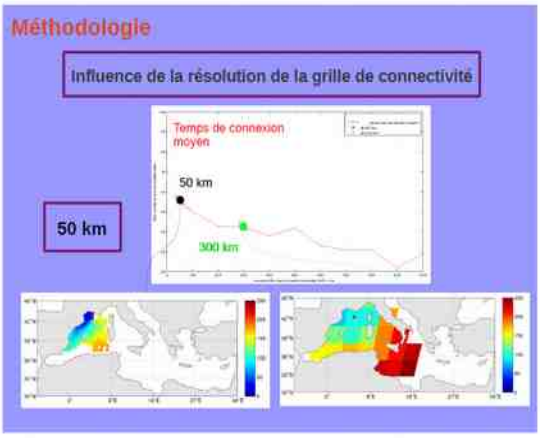


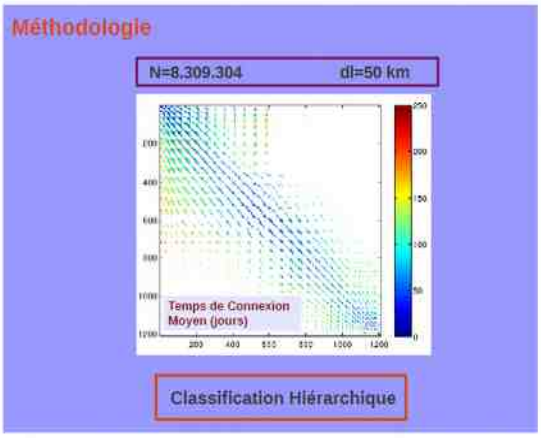


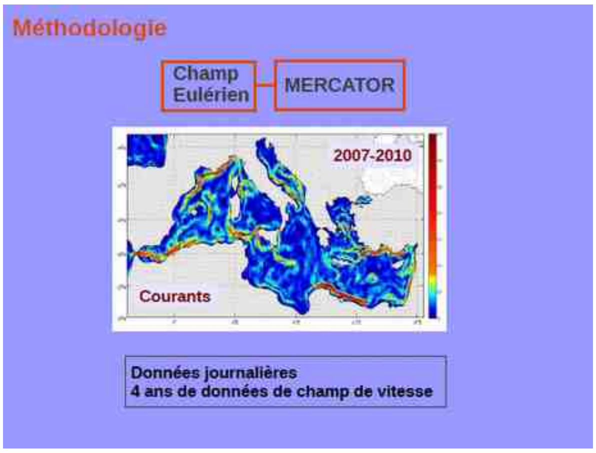


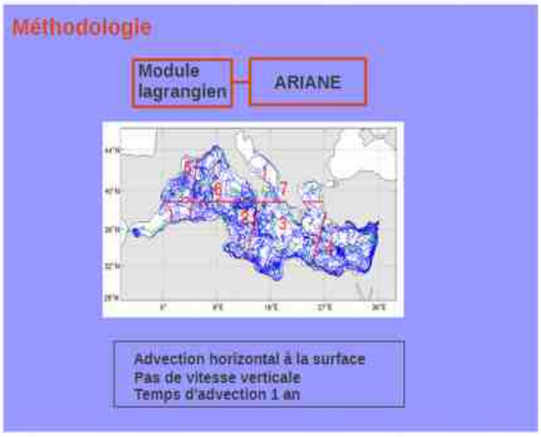


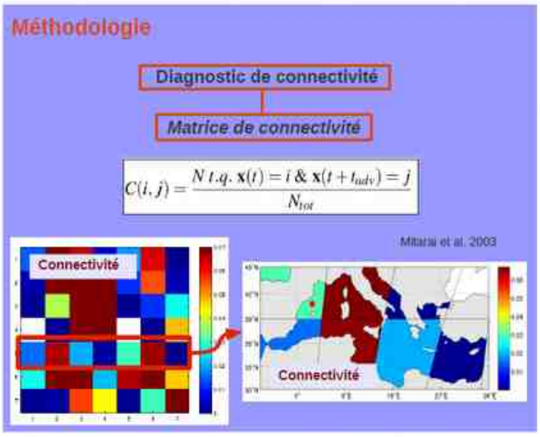
i	Nmax	lâchers/mois	augmentation p.r. i-1
a	25 646	1	-
b	51 292	2	100
c	76 938	3	50
d	102 584	4	33
e	128 230	5	25
f	153 876	6	17
g	179 522	7	14
h	205 168	8	12
i	230 814	9	11

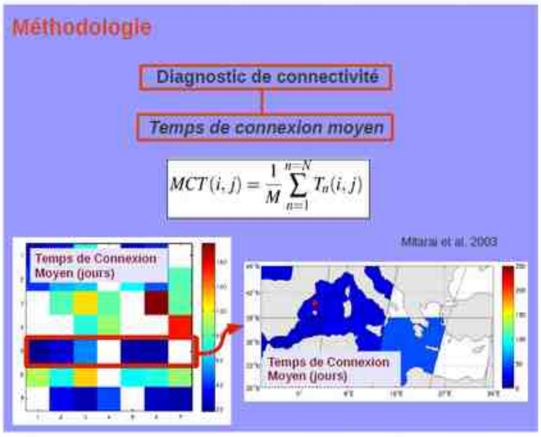

Méthodologie
Influence de la résolution de la grille de connectivité
50 km
Temps de connexion moyen
50 km
300 km

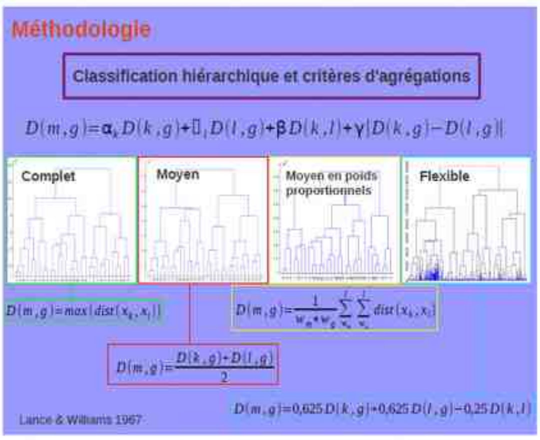

Méthodologie
N=8.309.304
dl=50 km
Temps de Connexion Moyen (jours)
Classification Hiérarchique

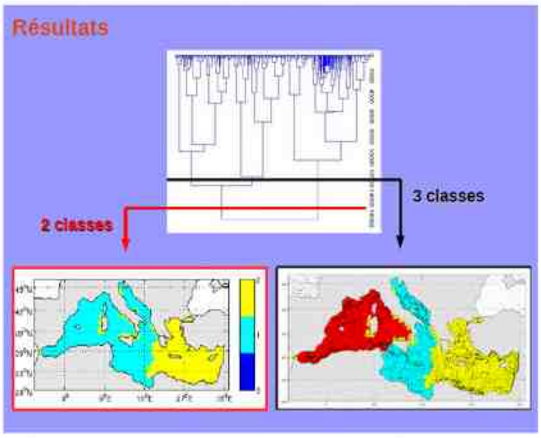

Méthodologie
Champ Eulérien
MERCATOR
2007-2010
Courants
Données journalières
4 ans de données de champ de vitesse

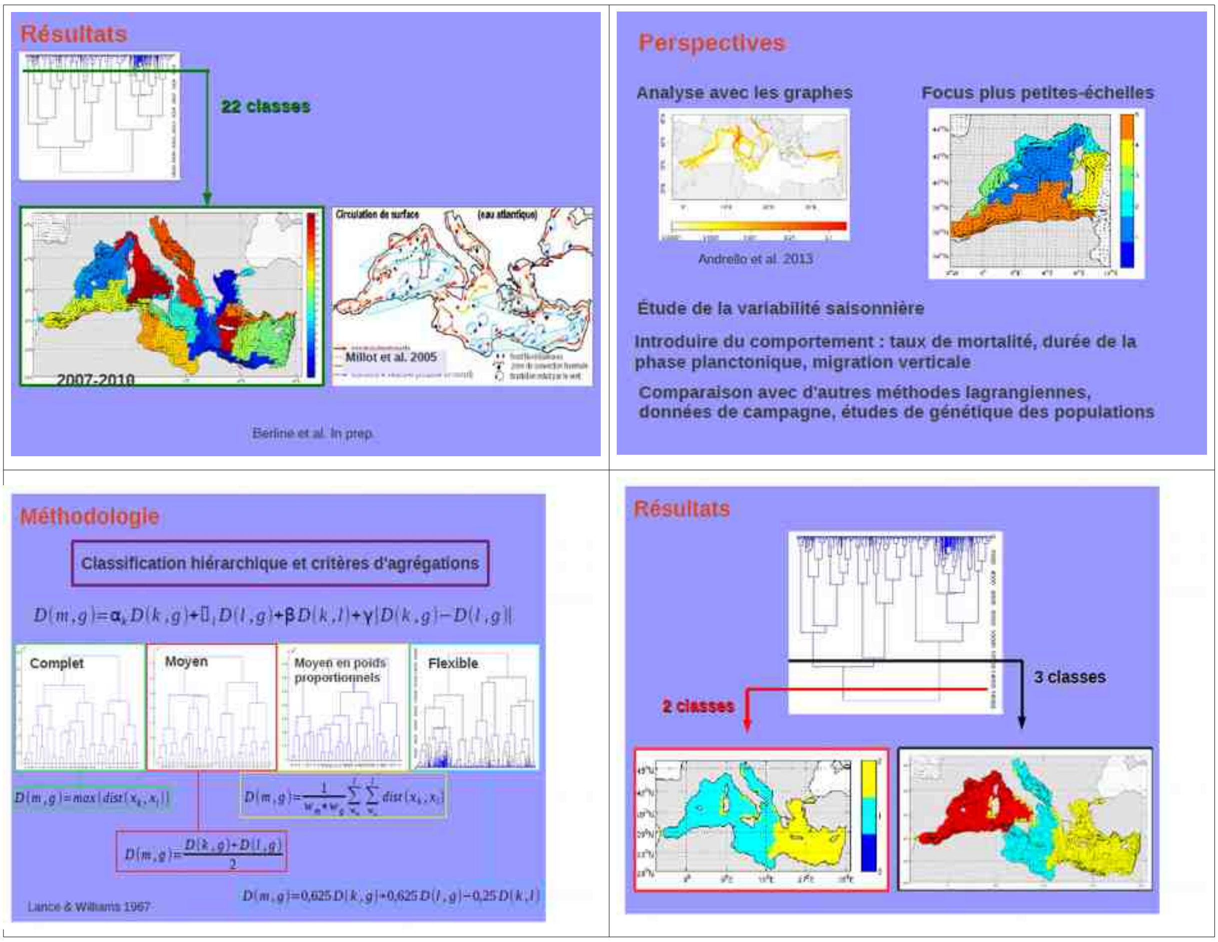

Méthodologie
Module lagrangien
ARIANE
Advection horizontal à la surface
Pas de vitesse verticale
Temps d'advection 1 an


Méthodologie
Diagnostic de connectivité
Matrice de connectivité
$C(i,j) = \frac{N\, t.q.\ \mathbf{x}(t) = i \ \&\ \mathbf{x}(t + t_{adv}) = j}{N_{tot}}$
Mitarai et al. 2003
Connectivité
Connectivité


Méthodologie
Diagnostic de connectivité
Temps de connexion moyen
$MCT(i,j) = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^{n=N} T_n(i,j)$
Mitarai et al. 2003
Temps de Connexion Moyen (jours)
Temps de Connexion Moyen (jours)


Méthodologie
Classification hiérarchique et critères d'agrégations
$D(m,g) = \alpha_k D(k,g) + \alpha_l D(l,g) + \beta D(k,l) + \gamma |D(k,g) - D(l,g)|$
Complet
Moyen
Moyen en poids proportionnels
Flexible
$D(m,g) = max(dist(x_k, x_l))$
$D(m,g) = \frac{1}{w_m * w_g} \sum_{x_k} \sum_{x_l} dist(x_k, x_l)$
$D(m,g) = \frac{D(k,g) + D(l,g)}{2}$
Lance & Williams 1967
$D(m,g) = 0{,}625\, D(k,g) + 0{,}625\, D(l,g) - 0{,}25\, D(k,l)$


Résultats
3 classes
2 classes



7.10 Structures lagrangiennes cohérentes et exposants de Lyapunov

Traduction de http://en.wikipedia.org/wiki/Lyapunov_exponent

En math, l'exposant de Lyapunov ou (exposant caractéristique de Lyapunov) d'un système dynamique est une quantité qui caractérise le taux de séparation dans le temps de deux trajectoires.

Si $\delta Z \equiv \delta Z(t)$ représente la distance entre ces trajectoires, son évolution temporale sera de type exponentiel,

$$|\delta Z(t)| = e^{\lambda t} |\delta Z_o(t)| \quad \text{avec} \quad \delta Z_o = \delta Z(t=0)$$

et λ est l'exposant de Lyapunov.

Cela est typiquement étudié dans l'espace des phases, mais on peut aussi penser aux trajectoires de 2 particules d'eau dans l'océan en mouvement turbulent, qui est un système dynamique.

L'**espace des phases** est un espace abstrait dont les coordonnées sont les variables dynamiques, les dégree de liberté ou les paramètres du système étudié.

Un **système dynamique** est un système *classique*[1] qui évolue au cours du temps de façon à la fois :

causale, c'est-à-dire que son avenir ne dépend que de phénomènes du passé ou du présent ;

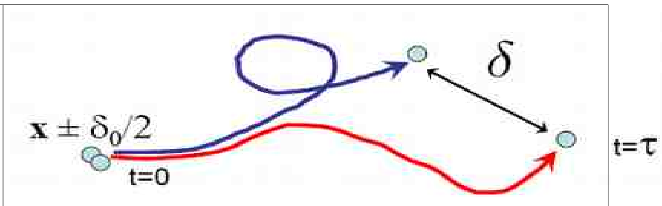
déterministe, c'est-à-dire qu'à une « condition initiale » donnée à l'instant « présent » va correspondre à chaque instant ultérieur *un et un seul* état « futur » possible.

On exclut donc ici conventionnellement les systèmes « bruités » intrinsèquement stochastiques, qui relèvent de la théorie des probabilités.

Ex. pendule http://www.mcasco.com/pend1.html

Le taux de séparation peut être différent pour des orientations différentes du vecteur séparation initiale. Alors il y a un spectre entier d'exposants de Lyapunov, dont le nombre sera égale au nombre n de dimensions de l'entier spectre de λ_n. Généralement on fait référence au plus grand des λ_n, the **Maximal Lyapunov exponent** (**MLE**), parce qu'il fournit une information sur la predicibilité du système dynamique étudié.

En particulier un MLE > 0 suggère que le système soit chaotique. Il faut noter que n'importe quel vecteur de séparation initiale contiendra une quelque composante dans la direction du MLE, mais à cause de la croissance exponentielle seulement le MLE sera important tandis que dans le temps les effets des autres plus petits sera vite oublié.



Définition du MLE

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\delta \mathbf{Z}(t)|}{|\delta \mathbf{Z}_0|}.$$

ou bien $\lambda = \lim_{t\to\infty} \lambda(t)$ Lyapunov exponent

avec

$$\lambda(t) = \lim_{\|\delta(0)\|\to 0} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta(t)\|}{\|\delta(0)\|}$$ Finite-time Lyapunov exponent

tandis que

$$\lambda(\delta_0, \delta_f) \equiv \frac{1}{\tau} \log \frac{\delta_f}{\delta_0}$$ **Finite-size Lyapunov exponent FSLE**

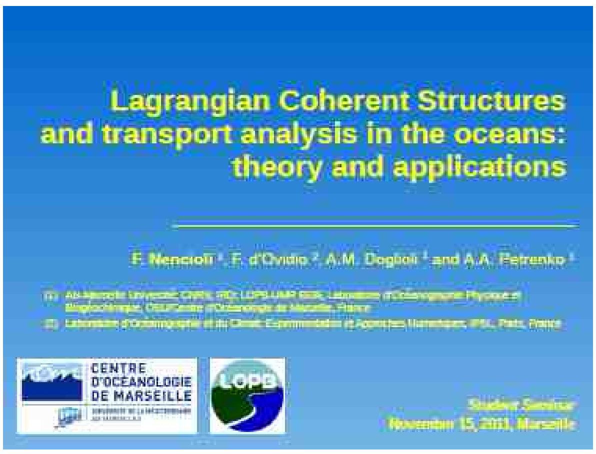
All the quantities are also functions of the initial position and time: $\lambda(\mathbf{x}, t, \delta_0, \delta_f)$

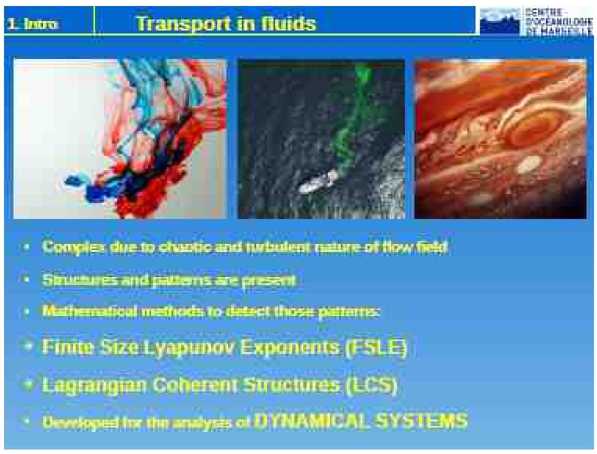
Les FSLE sont inversement proportionnels au temps nécessaire à 2 traceurs de rejoindre une certaine séparation.

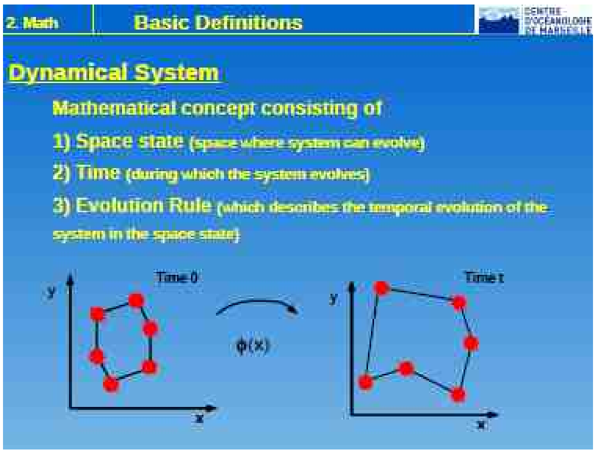
$\lambda(\mathbf{x}, t, \delta_0, \delta_f)$, the FSLE at position $\mathbf{x}$ and time t, is computed from the time τ it takes for a trajectory starting at time t at a distance δ_0 from $\mathbf{x}$ to reach a separation δ_f from the reference trajectory that started at $\mathbf{x}$:

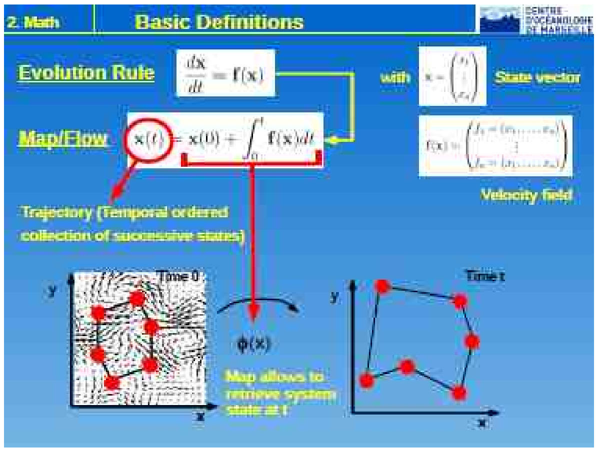
$$\lambda(\mathbf{x}, t, \delta_0, \delta_f) \equiv \frac{1}{\tau} \log \frac{\delta_f}{\delta_0}. \qquad (1)$$

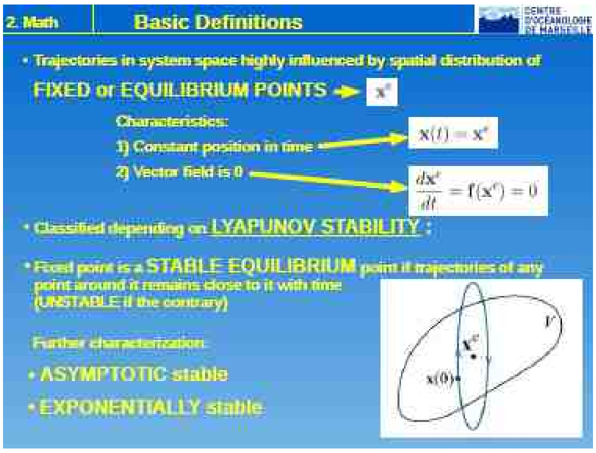
7.10 Exemple : observation in situ d'un point hyperbolique dans le Golfe du Lion (LATEX10)

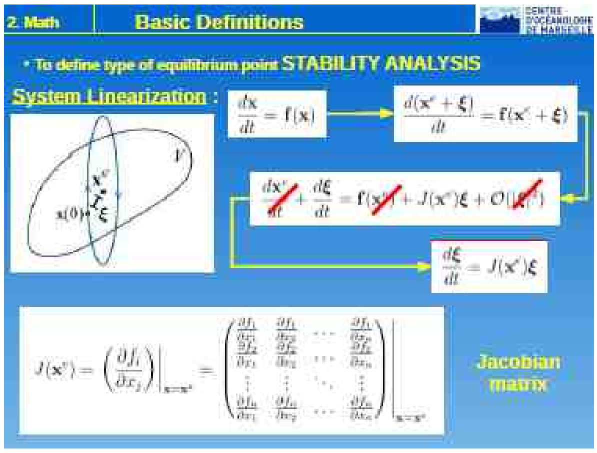


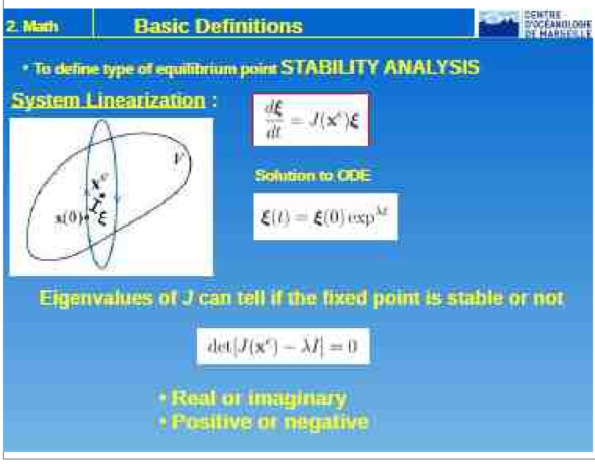


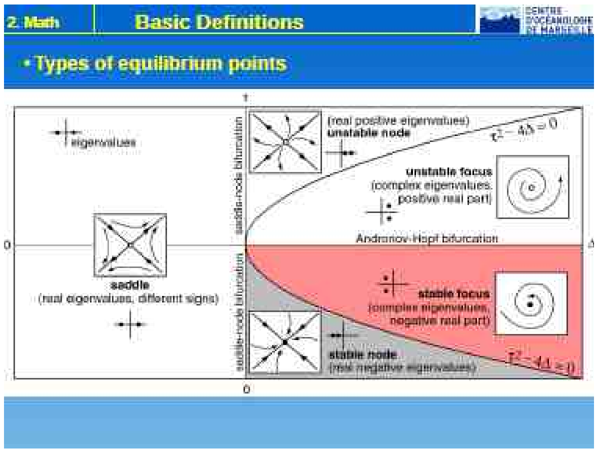

2. Math
Basic Definitions
CENTRE D'OCÉANOLOGIE DE MARSEILLE
Dynamical System
Mathematical concept consisting of
1) Space state (space where system can evolve)
2) Time (during which the system evolves)
3) Evolution Rule (which describes the temporal evolution of the system in the space state)
Time 0
Time t
$\phi(x)$
y
x
y
x

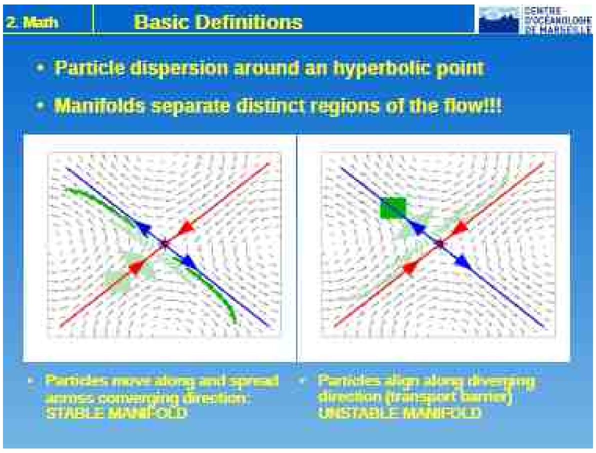

2. Math
Basic Definitions
CENTRE D'OCÉANOLOGIE DE MARSEILLE
Evolution Rule
$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$
with
State vector
Map/Flow
$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{x})dt$
Velocity field
Trajectory (Temporal ordered collection of successive states)
Time 0
Time t
$\phi(x)$
Map allows to retrieve system state at t
y
x
y
x


2. Math
Basic Definitions
CENTRE D'OCÉANOLOGIE DE MARSEILLE
• Trajectories in system space highly influenced by spatial distribution of
FIXED or EQUILIBRIUM POINTS
$\mathbf{x}^e$
Characteristics:
1) Constant position in time
$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^e$
2) Vector field is 0
$\frac{d\mathbf{x}^e}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^e) = 0$
• Classified depending on LYAPUNOV STABILITY :
• Fixed point is a STABLE EQUILIBRIUM point if trajectories of any point around it remains close to it with time (UNSTABLE if the contrary)
Further characterization:
• ASYMPTOTIC stable
• EXPONENTIALLY stable
V
$\mathbf{x}^e$
$\mathbf{x}(0)$

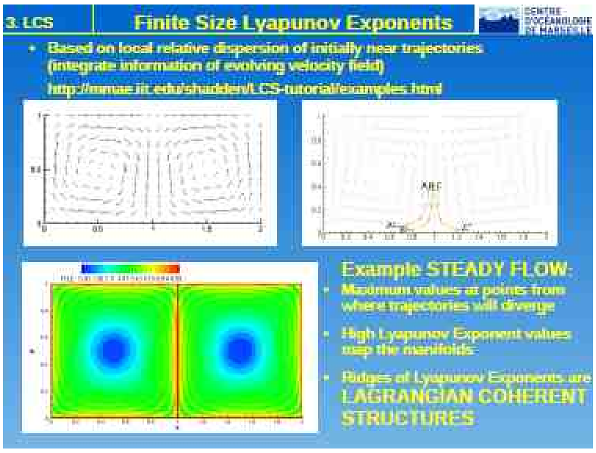

2. Math
Basic Definitions
CENTRE D'OCÉANOLOGIE DE MARSEILLE
• To define type of equilibrium point STABILITY ANALYSIS
System Linearization :
$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$
$\frac{d(\mathbf{x}^e + \boldsymbol{\xi})}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^e + \boldsymbol{\xi})$
$\cancel{\frac{d\mathbf{x}^e}{dt}} + \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \cancel{\mathbf{f}(\mathbf{x}^e)} + J(\mathbf{x}^e)\boldsymbol{\xi} + \mathcal{O}(\cancel{\boldsymbol{\xi}^2})$
$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = J(\mathbf{x}^e)\boldsymbol{\xi}$
$J(\mathbf{x}^e) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^e} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}\Bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^e}$
Jacobian matrix
V
$\mathbf{x}^e$
$\mathbf{x}(0)$
$\boldsymbol{\xi}$

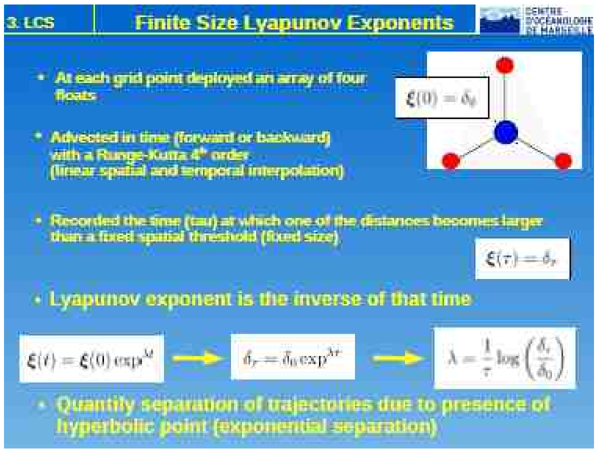

2. Math
Basic Definitions
CENTRE D'OCÉANOLOGIE DE MARSEILLE
• To define type of equilibrium point STABILITY ANALYSIS
System Linearization :
$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = J(\mathbf{x}^e)\boldsymbol{\xi}$
Solution to ODE
$\boldsymbol{\xi}(t) = \boldsymbol{\xi}(0)\exp^{\lambda t}$
Eigenvalues of J can tell if the fixed point is stable or not
$\det[J(\mathbf{x}^e) - \lambda I] = 0$
• Real or imaginary
• Positive or negative
V
$\mathbf{x}^e$
$\mathbf{x}(0)$
$\boldsymbol{\xi}$

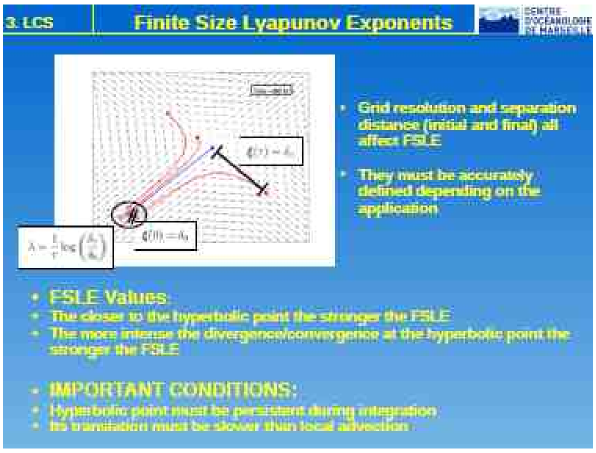

2. Math
Basic Definitions
CENTRE D'OCÉANOLOGIE DE MARSEILLE
• Types of equilibrium points
eigenvalues
(real positive eigenvalues)
unstable node
$\tau^2 - 4\Delta = 0$
unstable focus
(complex eigenvalues, positive real part)
Andronov-Hopf bifurcation
saddle
(real eigenvalues, different signs)
stable focus
(complex eigenvalues, negative real part)
stable node
(real negative eigenvalues)
$\tau^2 - 4\Delta = 0$
saddle-node bifurcation
saddle-node bifurcation
0
0

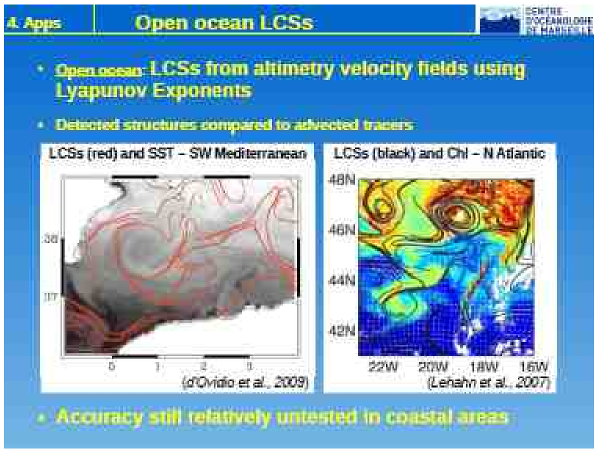

2. Math
Basic Definitions
CENTRE D'OCÉANOLOGIE DE MARSEILLE
Particle dispersion around an hyperbolic point
Manifolds separate distinct regions of the flow!!!
Particles move along and spread across converging direction: STABLE MANIFOLD
Particles align along diverging direction (transport barrier) UNSTABLE MANIFOLD

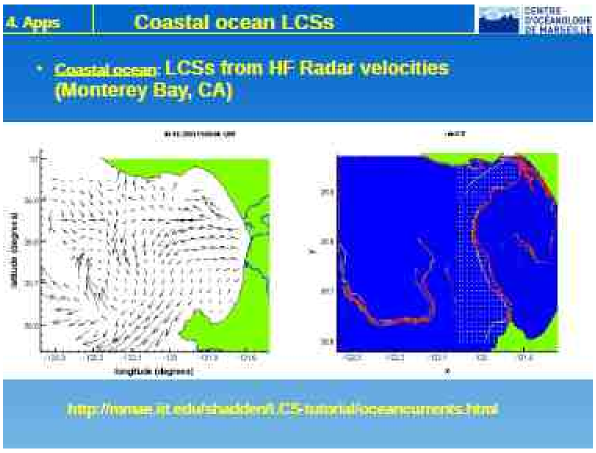

3. LCS
Finite Size Lyapunov Exponents
CENTRE D'OCÉANOLOGIE DE MARSEILLE
Theory for manifold analysis developed by Alexandr Lyapunov (June 6 1857 – November 3 1918)
Lyapunov exponents introduced at the end of 1800
Based on the rate of separation of initially close trajectories
Assumes infinite temporal evolution and permanent equilibrium points
Problem of applications with measured data:
1) Temporally finite time series
2) Time varying velocity field
3) Only transient Hyperbolic points and Manifolds
Finite Size/Time Lyapunov Exponent techniques developed in the late '80s to apply Lyapunov analysis to measured (temporally finite) velocity fields

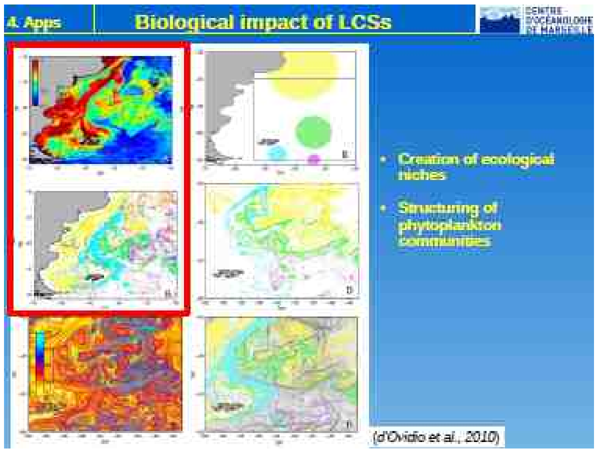

3. LCS
Finite Size Lyapunov Exponents
CENTRE D'OCÉANOLOGIE DE MARSEILLE
Based on local relative dispersion of initially near trajectories (integrate information of evolving velocity field)
http://mmae.iit.edu/shadden/LCS-tutorial/examples.html
Example STEADY FLOW:
Maximum values at points from where trajectories will diverge
High Lyapunov Exponent values map the manifolds
Ridges of Lyapunov Exponents are LAGRANGIAN COHERENT STRUCTURES

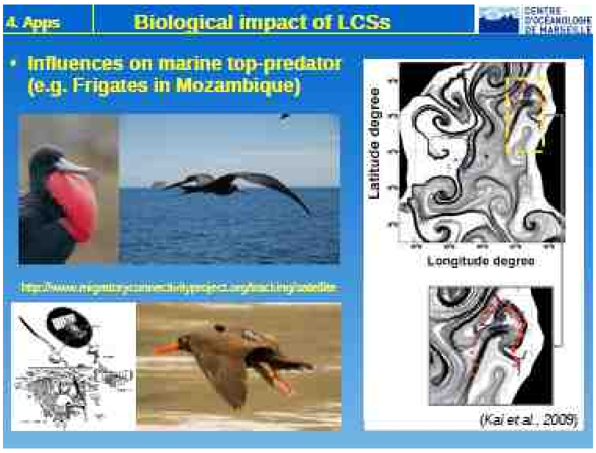

3. LCS
Finite Size Lyapunov Exponents
CENTRE D'OCÉANOLOGIE DE MARSEILLE
At each grid point deployed an array of four floats
$\xi(0) = \delta_0$
Advected in time (forward or backward) with a Runge-Kutta 4th order (linear spatial and temporal interpolation)
Recorded the time (tau) at which one of the distances becomes larger than a fixed spatial threshold (fixed size)
$\xi(\tau) = \delta_r$
Lyapunov exponent is the inverse of that time
$\xi(t) = \xi(0)\exp^{\lambda t}$
$\delta_r = \delta_0 \exp^{\lambda\tau}$
$\lambda = \frac{1}{\tau}\log\left(\frac{\delta_r}{\delta_0}\right)$
Quantify separation of trajectories due to presence of hyperbolic point (exponential separation)


3. LCS
Finite Size Lyapunov Exponents
CENTRE D'OCÉANOLOGIE DE MARSEILLE
$\xi(\tau) = \delta_r$
$\xi(0) = \delta_0$
$\lambda = \frac{1}{\tau}\log\left(\frac{\delta_r}{\delta_0}\right)$
Grid resolution and separation distance (initial and final) all affect FSLE
They must be accurately defined depending on the application
FSLE Values:
The closer to the hyperbolic point the stronger the FSLE
The more intense the divergence/convergence at the hyperbolic point the stronger the FSLE
IMPORTANT CONDITIONS:
Hyperbolic point must be persistent during integration
Its translation must be slower than local advection

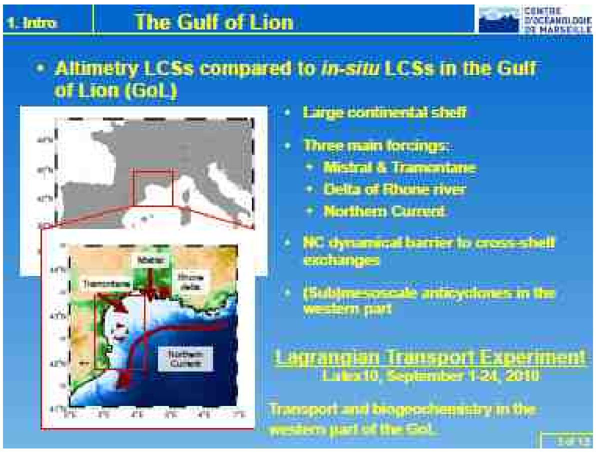

4. Apps
Open ocean LCSs
CENTRE D'OCÉANOLOGIE DE MARSEILLE
Open ocean: LCSs from altimetry velocity fields using Lyapunov Exponents
Detected structures compared to advected tracers
LCSs (red) and SST – SW Mediterranean
(d'Ovidio et al., 2009)
LCSs (black) and Chl – N Atlantic
48N
46N
44N
42N
22W 20W 18W 16W
(Lehahn et al., 2007)
Accuracy still relatively untested in coastal areas

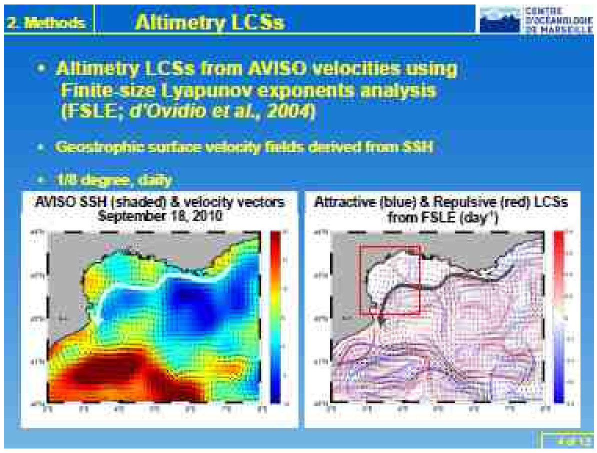

4. Apps
Coastal ocean LCSs
CENTRE D'OCÉANOLOGIE DE MARSEILLE
Coastal ocean: LCSs from HF Radar velocities (Monterey Bay, CA)
http://mmae.iit.edu/shadden/LCS-tutorial/oceancurrents.html


4. Apps
Biological impact of LCSs
CENTRE D'OCÉANOLOGIE DE MARSEILLE
Creation of ecological niches
Structuring of phytoplankton communities
(d'Ovidio et al., 2010)

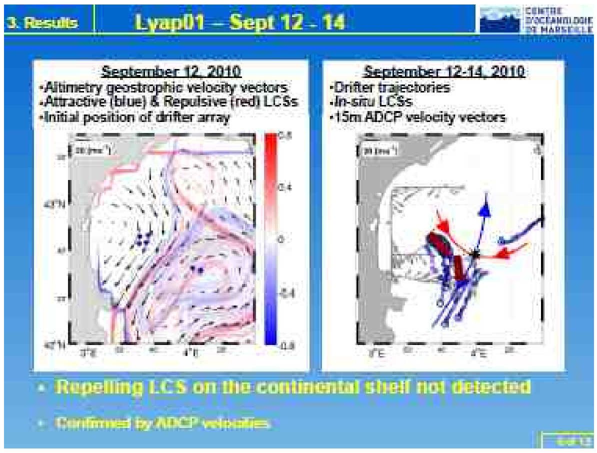

4. Apps
Biological impact of LCSs
CENTRE D'OCÉANOLOGIE DE MARSEILLE
• Influences on marine top-predator (e.g. Frigates in Mozambique)
Latitude degree
Longitude degree
(Kai et al., 2009)

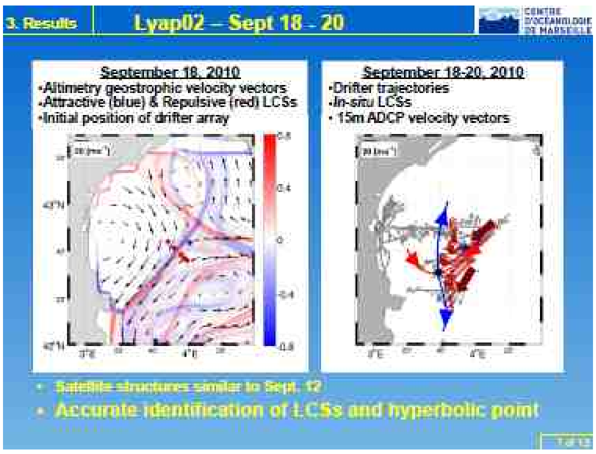

Real-time in-situ tracking of Lagrangian coherent structures in a coastal region
F. Nencioli [1], F. d'Ovidio [2], A.M. Doglioli [1] and A.A. Petrenko [1]
(1) Aix-Marseille Université; CNRS; IRD; LOPB-UMR 6535, Laboratoire d'Océanographie Physique et Biogéochimique, OSU/Centre d'Océanologie de Marseille, France
(2) Laboratoire d'Océanographie et du Climat: Expérimentation et Approches Numériques, IPSL, Paris, France
CENTRE D'OCÉANOLOGIE DE MARSEILLE
LOPB
EGU General Assembly 2011
April 8, 2011, Vienna

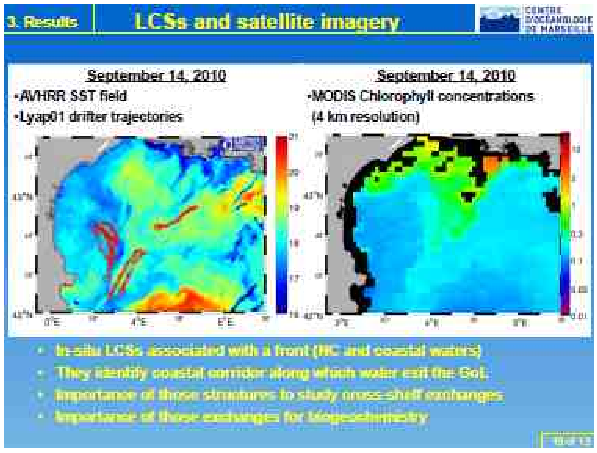

1. Intro
The Gulf of Lion
• Altimetry LCSs compared to in-situ LCSs in the Gulf of Lion (GoL)
• Large continental shelf
• Three main forcings:
• Mistral & Tramontane
• Delta of Rhone river
• Northern Current
• NC dynamical barrier to cross-shelf exchanges
• (Sub)mesoscale anticyclones in the western part
Lagrangian Transport Experiment
Latex10, September 1-24, 2010
Transport and biogeochemistry in the western part of the GoL
Mistral
Tramontane
Rhone delta
Northern Current

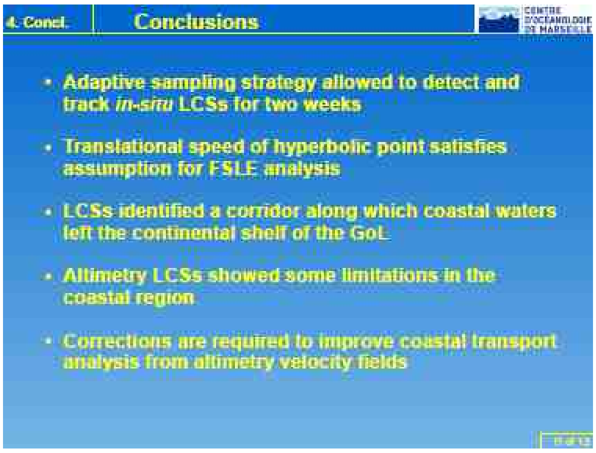

2. Methods
Altimetry LCSs
• Altimetry LCSs from AVISO velocities using Finite-size Lyapunov exponents analysis (FSLE; d'Ovidio et al., 2004)
• Geostrophic surface velocity fields derived from SSH
• 1/8 degree, daily
AVISO SSH (shaded) & velocity vectors September 18, 2010
Attractive (blue) & Repulsive (red) LCSs from FSLE (day⁻¹)

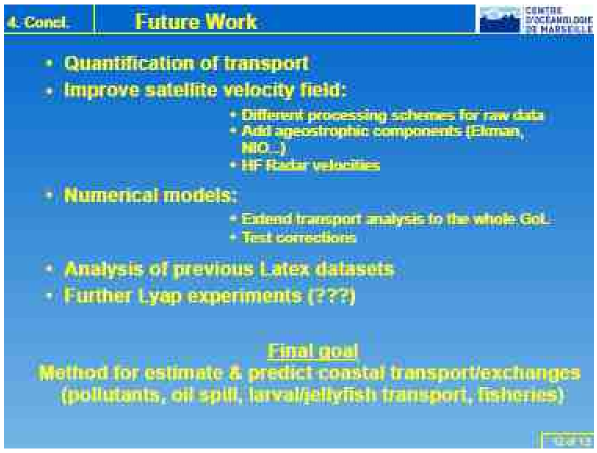

2. Methods
In-situ LCSs
Latex10 Adaptive Sampling Strategy for detection of in-situ LCSs:
1. Position of large scale LCSs estimated from altimetry derived FSLE
2. In-situ deployment of drifters
3. Mapping of in-situ velocities (hull mounted ADCP)
Deployment of 3 drifter arrays:
→ Lyap01 (September 12)
→ Lyap02 (September 18)
→ Lyap03 (September 21)


3. Results
Lyap01 – Sept 12 - 14
September 12, 2010
•Altimetry geostrophic velocity vectors
•Attractive (blue) & Repulsive (red) LCSs
•Initial position of drifter array
September 12-14, 2010
•Drifter trajectories
•In-situ LCSs
•15m ADCP velocity vectors
• Repelling LCS on the continental shelf not detected
• Confirmed by ADCP velocities

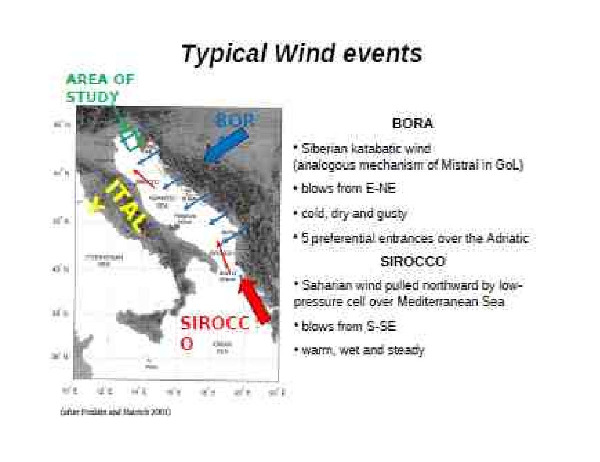

3. Results
Lyap02 – Sept 18 - 20
September 18, 2010
•Altimetry geostrophic velocity vectors
•Attractive (blue) & Repulsive (red) LCSs
•Initial position of drifter array
September 18-20, 2010
•Drifter trajectories
•In-situ LCSs
• 15m ADCP velocity vectors
• Satellite structures similar to Sept. 12
• Accurate identification of LCSs and hyperbolic point

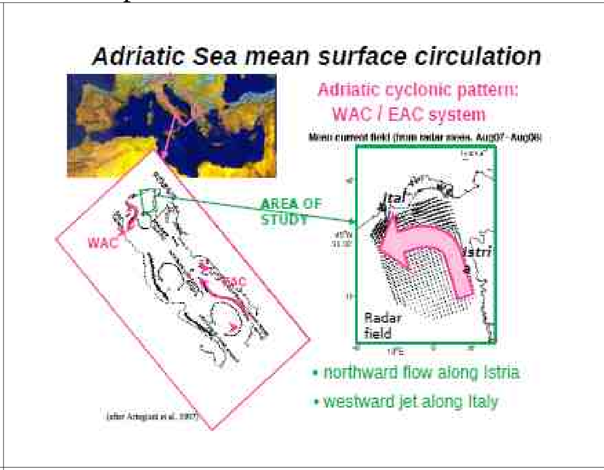

3. Results
LCSs and satellite imagery
CENTRE D'OCEANOLOGIE DE MARSEILLE
September 14, 2010
•AVHRR SST field
•Lyap01 drifter trajectories
September 14, 2010
•MODIS Chlorophyll concentrations
(4 km resolution)
In-situ LCSs associated with a front (NC and coastal waters)
They identify coastal corridor along which water exit the GoL
Importance of those structures to study cross-shelf exchanges
Importance of those exchanges for biogeochemistry

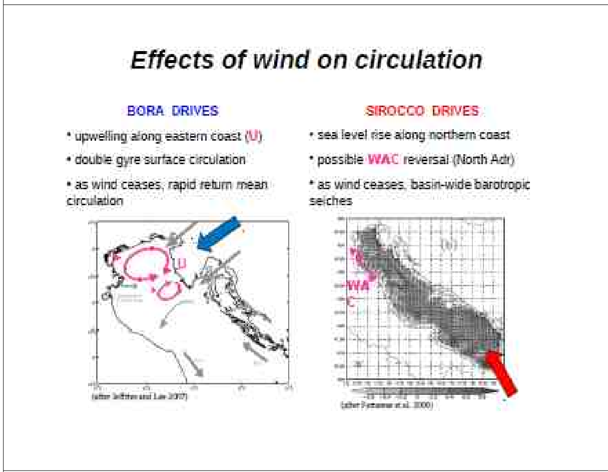

4. Concl.
Conclusions
CENTRE D'OCEANOLOGIE DE MARSEILLE
Adaptive sampling strategy allowed to detect and track in-situ LCSs for two weeks
Translational speed of hyperbolic point satisfies assumption for FSLE analysis
LCSs identified a corridor along which coastal waters left the continental shelf of the GoL
Altimetry LCSs showed some limitations in the coastal region
Corrections are required to improve coastal transport analysis from altimetry velocity fields
11 of 13

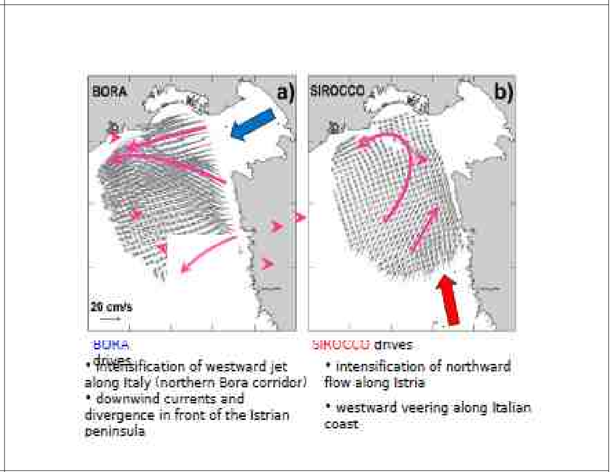

4. Concl.
Future Work
CENTRE D'OCEANOLOGIE DE MARSEILLE
Quantification of transport
Improve satellite velocity field:
Different processing schemes for raw data
Add ageostrophic components (Ekman, NIO...)
HF Radar velocities
Numerical models:
Extend transport analysis to the whole GoL
Test corrections
Analysis of previous Latex datasets
Further Lyap experiments (???)
Final goal
Method for estimate & predict coastal transport/exchanges
(pollutants, oil spill, larval/jellyfish transport, fisheries)
12 of 13

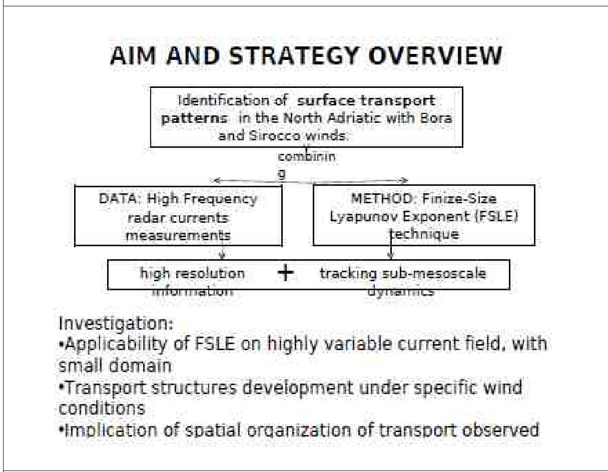
7.11 Exemple : etude des FSLE dans le Golfe de Trieste par mesure radar

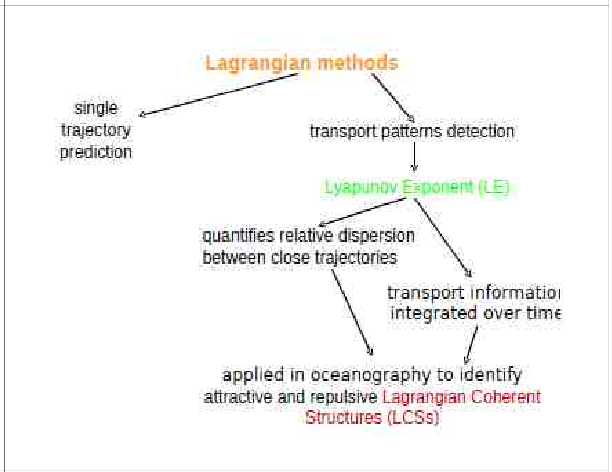


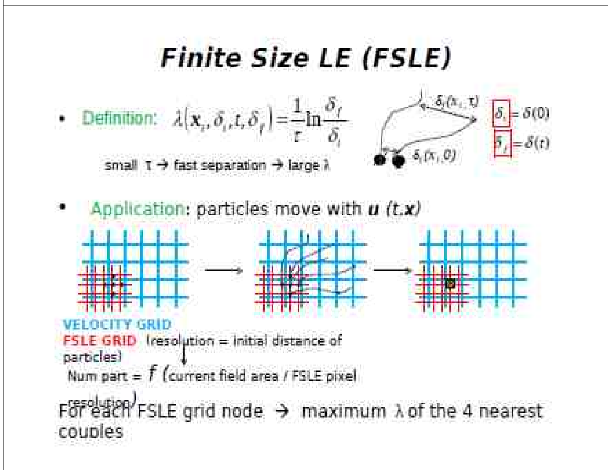


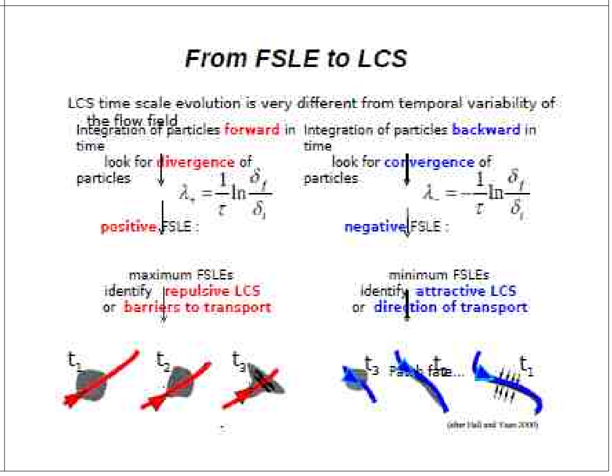








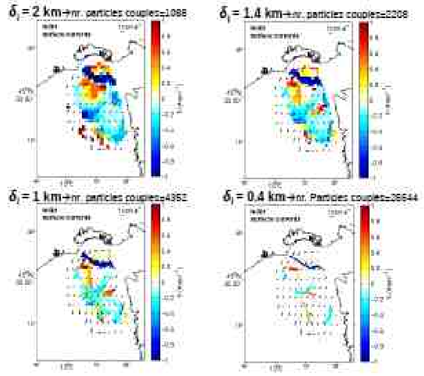




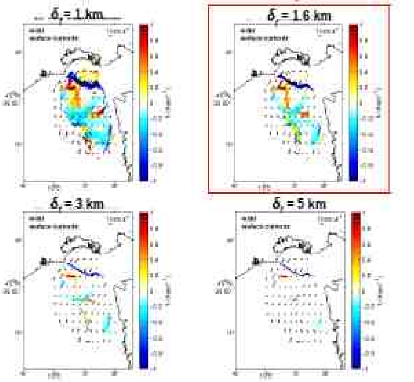
Algorithm and settings

- Trajectories evolution $\rightarrow \frac{dx}{dt} = \mathbf{u}(t, x) \rightarrow$ Integration in time: 4th order Runge-Kutta; Interpolation in space: bilinear (4 points)
- Choice of δ_i and δ_f $\rightarrow$ Depends on currents features, length scale of structures and details requirements in stuctures identification.
- Independent runs $\rightarrow$ Forward FSLE (looking for divergence); Backward FSLE (looking for convergence)
- Graphical superposition of forward and backward FSLE

Sensitivity parameters test changing δ_i (with δ_f = 3 km)

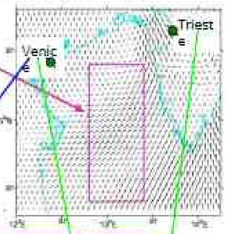


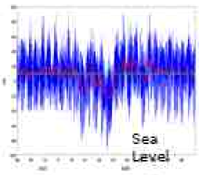
Sensitivity parameters test changing δ_f (with δ_i = 0.4 km)



Meteo-mareographic dataset

- ALADIN model wind field
- Trieste: wind time series
- Venice: wind & sea level series





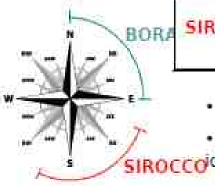
ISPRA

Wind episodes selection

CRITERIA :

- INTENSITY
- DIRECTION

	ALADIN MODEL	TRIESTE STATION	VENICE STATION
CALM WIND	Persistence ≥ 7 days Speed < 3m/s		
BORA	Persistence ≥ 3 days Speed ≥ 5m/s		
SIROCCO	Persistence ≥ 2 days Speed ≥ 5m/s		Low pass filtered Sea Level>20cm

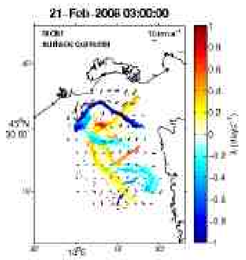


- Trieste: ideal for Bora identification
- Venice: ideal for Sirocco identification

FSLE during calm wind (case 1)

17-Feb-2008 29-Feb-2008

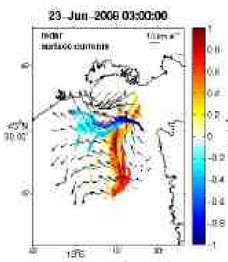
- Current field rich in transport structures
- Evolution of transport structures slower that currents variability
- Attractive transport line detached from the Italian coast



FSLE during calm wind (case 2)

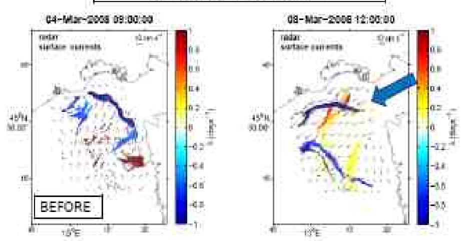
17-Jun-2008 30-Jun-2008

- Current field rich in transport structures
- Evolution of transport structures slower that currents variability
- Attractive transport line detached from the Italian coast



FSLE during Bora (case 1)

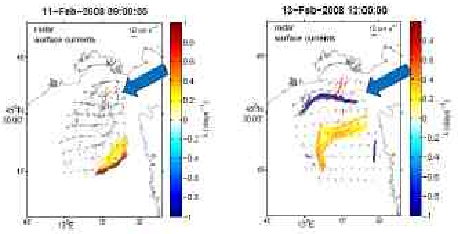
04-Mar-2008 08-Mar-2008



- Bora drives significant spatial variability in surface currents
- new structures develop and pre-existent ones change spatial configuration
- transport structures configuration evolves slower that the current field

FSLE during Bora (case 2)

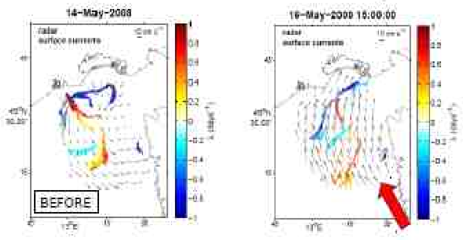
06-Feb-2008 13-Feb-2008



- Reduced coverage does not allow to identify attractive LCS at the beginning
- Development of repulsive LCS in front of the Istrian coast and northward propagation
- At the end of the event appearance of attractive structure

FSLE during Sirocco (case 1)

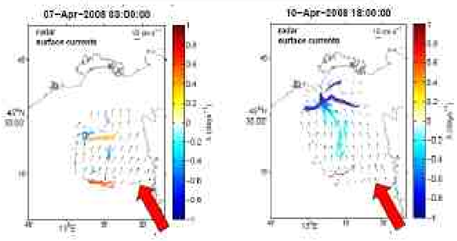
16-May-2008 19-May-2008



- Sirocco drives coherent surface velocities
- lines of transport align perpendicularly to dominant wind direction
- local transport reversed from "mean condition": particles

FSLE during Sirocco (case 2)

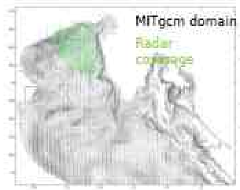
09-Apr-2008 11-Apr-2008



- At the beginning reduced radar coverage to identify any structures
- At the end of the event, the transport line along Italy comes out

*Model: MITgcm**

* General Circulation Model



- Simulates physical variables (velocity, temperature and salinity)
- non hydrostatic ,
- finite volume,
- free surface
- 1/64 ° spatial res. , 1h temporal res.
- Z- levels (surface - 40m depth)
- forced by ALADIN wind field (also used for wind events identification)

FSLE evaluation:

- Particles: same radar launch grid, but evolution all over MITgcm domain
- δ_i = 0.4 km, δ_f = 1.6 km (same radar parameters)
- Maximum evolution time (forward and backward): 6 days

http://mitgcm.org MITgcm

SIMILARITIES AND DIFFERENCES

Model currents forced by ALADIN wind (more homogeneous and less intense than actual wind)

↓

Long-lived structures

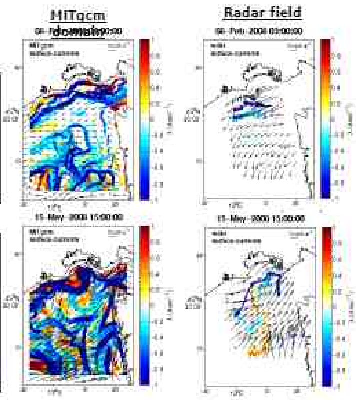
Model domain wider

↓

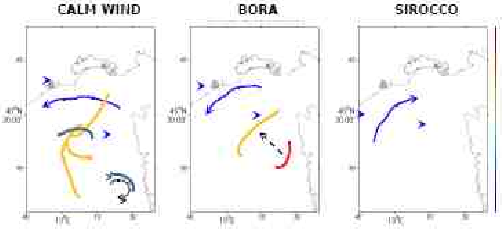
Particles have higher chance to satisfy the final distance criteria

↓

Tangle of structures



SUMMING-UP...



- High variability (spatial and temporal) of the velocity field affects structures configuration and persistence
- Line of transport along the Italian coast: different meandering and detachment from coastline according to wind conditions
- Greater variability of transport structures in the southern part of the domain, due to close orographic influence on winds.

COMMENTS

- The "optimum scenario" for FSLE application would be:
  - extended flow field (size>>length scale of the structures to be identified)
  - evolution of flow field slower than advective time scale (frozen field Hp)
- In oceanography FSLE is usually applied over current fields derived from satellite altimetry or model output:
  - Size of the domain larger than radar coverage
  - Slower variability of the velocity field with respect to radar measurements
- One of the first FSLE application on HF radar current field :
  (see also Haza et al. 2010 for application on VHF radars)
  - High resolution, but small domain
  - Transport structures evolve faster than their translational velocity

Through an accurate setting of initial and final separation between

PERSPECTIVES...

- Application of FSLE method both on modeled and radar currents: <u>combination of the surface dynamics information from model and radar field</u>
- FSLE transport analysis on deeper layers of modeled currents can give important <u>information on water column dynamics.</u>
- FSLE method in association with <u>advection of clusters of drifters</u> (at the surface and deeper deployments) to compare trajectories with the transport structures identified from radar and model.

Programmes matlab

```
%% programme qui montre que le nombre sont PSUEDO-aléatoires
%% et non pas vraiment aléatoires

clear;close;
disp('PROGRAM TEST_RANDOM')
disp('*** without reset ***')

s = rand('state');
u1 = rand(10,1);
%rand('state',s);
u2 = rand(10,1); % contains exactly the same values as u1
[u1';u2']


disp('*** with reset ***')

%Save the current state, generate 10 values, reset the state, and repeat the sequence.
s = rand('state');
u1 = rand(10,1);
rand('state',s);
u2 = rand(10,1); % contains exactly the same values as u1
[u1';u2']
```

```
%% programme qui exrait des nombre pseudo-aléatoires
%% 1) entre 0 et 1 avec pdf uniforme
%% 2) entre -inf et +inf avec pdf gausienne à moyenne nulle

disp('PROGRAM HISTOGRAMS')
clear;close all;

imax=10000;

for i=1:imax
  r(i)=rand(1);
end

figure(1)
subplot(2,1,1)
intedge=0.1;
edges=[0:intedge:1];
N=histc(r,edges);
bar(edges,N./imax*100,'histc')
y(1:size(edges'))=intedge;
line(edges,y*100,'color','r')
ylabel('%')

pause(2)

devst=10;
for i=1:imax
 g=0;
 for ig=1:12
  r=rand(1);
  g=g+(r-0.5);
 end
 gg(i)=g.*devst;
end

subplot(2,1,2)
intedge=0.25;
edges=[-100:intedge:100];
N=histc(gg,edges);
bar(edges,N./imax*100,'histc')
var=devst^2;
y=1/sqrt(2*pi*var).*exp(-(edges).^2/(2*var));
line(edges,y.*intedge*100,'color','r')
ylabel('%')
```

```
%% programme qui exarit des nombre pseudo-aléatoires
%% 1) entre 0 et 1 avec pdf uniforme
%% 2) entre -inf et +inf avec pdf gausienne à moyenne nulle
```

```
disp('PROGRAM HISTOGRAMS')
clear;close all;

imax=10000;

for i=1:imax
  r(i)=rand(1);
end

figure(1)
subplot(2,1,1)
intedge=0.1;
edges=[0:intedge:1];
N=histc(r,edges);
bar(edges,N./imax*100,'histc')
y(1:size(edges'))=intedge;
line(edges,y*100,'color','r')
ylabel('%')

pause(2)

devst=10;
for i=1:imax
 g=0;
 for ig=1:12
  r=rand(1);
  g=g+(r-0.5);
 end
 gg(i)=g.*devst;
end

subplot(2,1,2)
intedge=0.25;
edges=[-100:intedge:100];
N=histc(gg,edges);
bar(edges,N./imax*100,'histc')
var=devst^2;
y=1/sqrt(2*pi*var).*exp(-(edges).^2/(2*var));
line(edges,y.*intedge*100,'color','r')
ylabel('%')
```

```
%% programme pour la marche aléatoire de plusieurs particules
clear;close;

disp('PROGRAM RANDOM_WALK_NPART');

ipmax=10;%nombre de particules
itmax=100;%[s]
devst=1;%[m]


figure(1);hold on;
axis([-50 50 -50 50])
text(-1,-1,'*','color','red','fontsize',20)
grid on;
xlabel('distance en direction x [m]');
ylabel('distance en direction y [m]');


for ip=1:ipmax

x(1)=0;
y(1)=0;

for it=2:itmax
 %extraction deplacement en direction x
 g=0;
 for ig=1:12
  r=rand(1);
  g=g+(r-0.5);
 end
 depx=g.*devst;
 %extraction deplacement en direction y
 g=0;
```

```
 for ig=1:12
  r=rand(1);
  g=g+(r-0.5);
 end
 depy=g.*devst;
 %assegnation nouvelle position
 x(it)=x(it-1)+depx;
 y(it)=y(it-1)+depy;

end%for it

line(x,y,'color',[ip/ipmax 0 1-ip/ipmax])
text(51,51-ip*4,num2str(ip),'color',[ip/ipmax 0 1-ip/ipmax])
end%for ip
hold off;
```

```
%% programme qui calcule la concentration de particule par maille de grille

clear;close all;
Xsource=5; %position en x initiale des particules
Ysource=5; %position en y initiale des particules
ipmax=5; %nbre de particules
itmax=100; %nbre de pas de temps en jour
imax=10; %taille de la matrice CONC en m (boite où sont enfermée les particules)
jmax=10; %taille de la matrice CONC en m
deltatime=50; %pas de temps (pour calculer et tracer CONC)
k=1.5*10^(-7); %coeff diffusion [m²/s]
xold(1:ipmax)=Xsource; %initial posisition
yold(1:ipmax)=Ysource;

 scrsz = get(0,'ScreenSize');
 figure('Position',[1 scrsz(4) scrsz(3) scrsz(4)]);

for it=1:itmax
devst=sqrt(2*k*3600*24); %ecart type (en m)
 %condition initiale de concentration nulle
 CONC=zeros(10,10);
 for ip=1:ipmax
  %extraction deplacement en direction x
  g=0;
  for ig=1:12
   r=rand(1);
   g=g+(r-0.5);
  end
  depx=g.*devst;
  %extraction deplacement en direction y
  g=0;
  for ig=1:12
   r=rand(1);
   g=g+(r-0.5);
  end
  depy=g.*devst;
  %assegnation nouvelle position
  xnew(ip)=xold(ip)+depx;
  ynew(ip)=yold(ip)+depy;
  %condition à la frontière: frontière fermée
  if(xnew(ip)<1 | xnew(ip)>100 | ynew(ip)<1 |  ynew(ip)>100)
   xnew(ip)=xold(ip);
   ynew(ip)=yold(ip);
  end%if
  %calcul de la concentration
  ii=fix(xnew(ip));
  jj=fix(ynew(ip));
  CONC(jj,ii)=CONC(jj,ii)+1;
  %sauvegarde de la position des particules pour comparaison
  xmem(ip)=xnew(ip);
  ymem(ip)=ynew(ip);
  xold(ip)=xnew(ip);
  yold(ip)=ynew(ip);
 end%for ip



 subplot(1,2,1);hold on;
 title(['it=',num2str(it)]);
 pcolor(CONC);
```

```
 colorbar;
 plot(xmem,ymem,'k+')
 axis([1 10 1 10])
 axis square
 xlabel('mesh index in x-direction');
 ylabel('mesh index in y-direction');

 subplot(1,2,2);hold on;
 axis([0 10 0 10])
 plot(xmem,ymem,'k+')
 contour(CONC)
 colorbar
 axis([1 10 1 10])
 axis square
 xlabel('mesh index in x-direction');
 ylabel('mesh index in y-direction');
  title([' CLICK ON THE FIGURE TO CONTINUE']);
waitforbuttonpress
 hold off; clf;
end %pour it
```

```
%% programme pour la diffusion d'une goutte d'encre dans un verre
%% contribution G.Ginoux

clear all;close all;scrsz = get(0,'ScreenSize');

disp('PROGRAM DIFFUSION')

Xsource=50; %position en x initiale des particules
Ysource=50; %position en y initiale des particules
ipmax=10000; %nbre de particules
itmax=1000; %nbre de pas de temps en jour
imax=100; %taille de la matrice CONC en m (boite où sont enfermée les particules)
jmax=100; %taille de la matrice CONC en m
deltatime=50; %pas de temps (pour calculer et tracer CONC)
k=10.5*10^(-7); %m²/s
devst=sqrt(2*k*3600*24); %ecart type (en m)
xold(1:ipmax)=Xsource; %initial posisition
yold(1:ipmax)=Ysource;

for it=1:itmax
 it
 for ip=1:ipmax
  g=0;
  for i=1:12
   r=rand;
   g=g+(r-0.5);
  end
  depx=g*devst;
  h=0;
  for i=1:12
   r=rand;
   h=h+(r-0.5);
  end
  depy=h*devst;
  X(ip)=xold(ip)+depx;
  Y(ip)=yold(ip)+depy;
  % condition à la frontiere
  if X(ip)<1 | X(ip)>100 | Y(ip)<1 | Y(ip)>100
   %frontière fermée
   X(ip)=xold(ip);
   Y(ip)=yold(ip);
  end
  xold(ip)=X(ip);
  yold(ip)=Y(ip);
 end %pour ip

 %Afin de n'afficher la figure que tous les 'deltatimes' pas de temps
 if rem(it,deltatime)==0
  CONC=zeros(jmax,imax);
  devst
  for ip=1:ipmax
   %Calcule le nombre de particules dans chaque maille
   ii=fix(X(ip));
   jj=fix(Y(ip));
```

```
   CONC(jj,ii)=CONC(jj,ii)+1;
  end

  close all
  figure('Position',[1 scrsz(4)/2 scrsz(3)/2 scrsz(4)/2]);
hold on;
  contourf(CONC(:,:)./ipmax,[0:1:20]./ipmax);shading flat;
  axis([-10 imax+10 -10 jmax+10])
  box on;
  colorbar;
  title('concentration specifique de particules par maille de grille');
   axis([1 100 1 100])
 axis square
 xlabel('mesh index in x-direction');
 ylabel('mesh index in y-direction');

  % Croix rouge (centée en 50,50)
  cf=repmat(50,1,100);
  cs=1:100;
  plot(cf,cs,'r-')
  plot(cs,cf,'r-')

  CONCf1=CONC(50,:)/sum(CONC(50,:));
  CONCf2=CONC(:,50)/sum(CONC(:,50));
  xx=[1:0.1:100];
  moy=50;
  yy=1/sqrt(2*pi*devst^2*it).*exp(-1/2*((xx-moy)./(devst.*sqrt(it))).^(2));

  figure('Position',[scrsz(3)/2 scrsz(4)/2 scrsz(3)/2 scrsz(4)/2]);
  subplot(1,2,1), plot(CONCf1); axis([40 60 0 0.3]); hold off;
  %Superposition de la gaussienne
  line(xx,yy,'color','r')
  xlabel('Concentration le long de la ligne horizontale');
  subplot(1,2,2), plot(CONCf2); axis([40 60 0 0.3]); hold off;
  %Superposition de la gaussienne
  line(xx,yy,'color','r')
  xlabel('Concentration le long de la ligne verticale');
  hold off;
    title([' CLICK ON THE FIGURE TO CONTINUE']);
  waitforbuttonpress;

 end %pour if

end %pour it
```

```
%% programme pour la advection diffusion d'une goutte d'encre
%% dans un champs de vitesse uniforme

clear all;close all;
figure(1)
disp('PROGRAM ADVECTION-DIFFUSION')

Xsource=50; %position en x initiale des particules
Ysource=50; %position en y initiale des particules
ipmax=10000; %nbre de particules
itmax=1000; %nbre de pas de temps en jour
imax=100; %taille de la matrice CONC en m (boite où sont enfermée les particules)
jmax=100; %taille de la matrice CONC en m
deltatime=50; %pas de temps (pour calculer et tracer CONC)
k=10.5*10^(-7); %m²/s
devst=sqrt(2*k*3600*24); %ecart type (en m)
xold(1:ipmax)=Xsource; %initial posisition
yold(1:ipmax)=Ysource;
U=0.1;%[m/s]
V=0;%[m/s]
deltaT=1;%[s]

for it=1:itmax
 it
 for ip=1:ipmax
  g=0;
  for i=1:12
   r=rand;
   g=g+(r-0.5);
  end
  depx=g*devst;
```

```
  h=0;
  for i=1:12
   r=rand;
   h=h+(r-0.5);
  end
  depy=h*devst;
  X(ip)=xold(ip)+depx+U*deltaT;
  Y(ip)=yold(ip)+depy+V*deltaT;
  % condition à la frontière
  if X(ip)<1 | X(ip)>100 | Y(ip)<1 | Y(ip)>100
   %frontière fermée
   X(ip)=xold(ip);
   Y(ip)=yold(ip);
  end
  xold(ip)=X(ip);
  yold(ip)=Y(ip);
 end %pour ip

 %Afin de n'afficher la figure que tous les 'deltatimes' pas de temps
 if rem(it,deltatime)==0
  CONC=zeros(jmax,imax);
  devst
  for ip=1:ipmax
   %Calcule le nombre de particules dans chaque maille
   ii=fix(X(ip));
   jj=fix(Y(ip));
   CONC(jj,ii)=CONC(jj,ii)+1;
  end
  figure(1);hold on;
  contourf(CONC(:,:)./ipmax,[0:1:20]./ipmax);shading flat;
  axis([-10 imax+10 -10 jmax+10])
  box on;
  colorbar;
  title('concentration specifique de particules par maille de grille');
  % Croix rouge (centée en 50,50)
  cf=repmat(50,1,100);
  cs=1:100;
  plot(cf,cs,'r-')
  plot(cs,cf,'r-')
pause(1)
hold off; clf reset
 end %pour if

end %pour it
```

```
%% programme pour la advection diffusion avec un source de particules
%% dans un champs de vitesse uniforme
clear all;close all;
figure(1)
disp('PROGRAM ADVECTION-DIFFUSION CONTINOUS RELEASE')

Xsource=50; %position en x initiale des particules
Ysource=50; %position en y initiale des particules
ipmax=5000000; %nbre de particules
iprelease=100;
itmax=ipmax/iprelease; %nbre de pas de temps en jour
imax=100; %taille de la matrice CONC en m (boite où sont enfermée les particules)
jmax=100; %taille de la matrice CONC en m
deltatime=50; %pas de temps (pour calculer et tracer CONC)
k=1.5*10^(-7); %m²/s
devst=sqrt(2*k*3600*24); %ecart type (en m)
U=0.1;%[m/s]
V=0;%[m/s]
deltaT=1;%[s]
activity(1:ipmax)=0;

for it=1:itmax
 it
 activity(it:it+9)=1;
 xold(it:it+iprelease-1)=Xsource;
 yold(it:it+iprelease-1)=Ysource;
 for ip=1:ipmax
     if activity(ip)==1;
  g=0;
  for i=1:12
   r=rand;
```

```
   g=g+(r-0.5);
  end
  depx=g*devst;
  h=0;
  for i=1:12
   r=rand;
   h=h+(r-0.5);
  end
  depy=h*devst;
  X(ip)=xold(ip)+depx+U*deltaT;
  Y(ip)=yold(ip)+depy+V*deltaT;
  % condition à la frontiere
  if X(ip)<1 | X(ip)>100 | Y(ip)<1 | Y(ip)>100
   %frontière fermée
   X(ip)=xold(ip);
   Y(ip)=yold(ip);
   %e particules sortantes (non plus actives)
   activity(ip)=0;
  end
  xold(ip)=X(ip);
  yold(ip)=Y(ip);
     end%if activity(ip)=1;

 end %pour ip

 %Afin de n'afficher la figure que tous les 'deltatimes' pas de temps
 if rem(it,deltatime)==0
  CONC=zeros(jmax,imax);
  devst
  for ip=1:ipmax
      if activity(ip)==1;
   %Calcule le nombre de particules dans chaque maille
   ii=fix(X(ip));
   jj=fix(Y(ip));
   CONC(jj,ii)=CONC(jj,ii)+1;
      end%if activity(ip)=1;
  end
  figure(1);hold on;
  contourf(CONC(:,:)./ipmax,[0:1:20]./ipmax);shading flat;
  axis([1 imax 1 jmax])
  box on;
  colorbar;
  title('concentration specifique de particules par maille de grille');
  % Croix rouge (centée en 50,50)
  cf=repmat(50,1,100);
  cs=1:100;
  plot(cf,cs,'r-')
  plot(cs,cf,'r-')
pause(1)
hold off; clf reset
 end %pour if

end %pour it
```

Textes d'examens des années précédentes

Examen Partiel

mercredi 5 novembre 2008

DURÉE : 2h

L'usage de tout document est interdit .
Chaque question vaut 4 points .
Les réponses doivent être le plus possible concises et précises .

1) Expliquer la linéarisation des équations horizontales de la quantité de mouvement .

2) Décrire l'équilibre dit *"wind setup"* .

3) Écrire et expliquer la solution analytique des équations du transport dans le cas de vent perpendiculaire à une cote rectiligne .

4) Décrire les ondes stationnaires .

5) Expliquer la différence entre ondes de Poincaré-Sverdrup et ondes de Kelvin .

Examen Partiel

mardi 10 novembre 2009

DURÉE : 2h

L'usage de tout document est interdit .
Chaque question vaut 4 points .
Les réponses doivent être le plus possible concises et précises .

1) Expliquer l'approximation hydrostatique et l'approximation de Boussinesq .

2) Décrire les oscillations d'inertie .

3) calculer la distance entre 2 nœuds consécutifs d'une onde stationnaire en terme de longueur d'onde .

4) Quels sont les limites du modèle d'onde unidimensionnel ?

5) Quels sont les effets sur la surélévation et le transport d'un vent qui souffle perpendiculaire à une cote rectiligne ?

Examen Partiel

mercredi 27 octobre 2010

DURÉE : 2h

L'usage de tout document est interdit .
Chaque question vaut 4 points .
Les réponses doivent être le plus possible concises et précises .

1) Écrire et expliquer l'équation de continuité et les approximations qu'on peut y apporter en zone côtière .

2) Comment peut-on modéliser les effets de la viscosité turbulente sur la circulation océanique en zone côtière ?

3) Décrire les ondes progressives .

4) Qu'est-ce qu'un point amphidromique ?

5) Dans quelles conditions de vent peut-on avoir formation d'un jet côtier ? Comment cela se produit ?

Examen Partiel

mercredi 1 décémbre 2010

DURÉE : 2h

L'usage de tout document est interdit .
Chaque question vaut 4 points .
Les réponses doivent être le plus possible concises et précises .

1) Expliquer la linéarisation des équations horizontales de la quantité de mouvement .

2) Décrire les oscillations d'inertie .

3) Expliquer la différence entre ondes de Poincaré-Sverdrup et ondes de Kelvin .

4) Qu'est-ce qu'un point amphidromique ?

5) Écrire et expliquer la solution analytique des équations du transport dans le cas de vent perpendiculaire à une cote rectiligne .

Examen Partiel

mercredi 9 novémbre 2011

DURÉE : 1h

L'usage de tout document est interdit .
Chaque question vaut 5 points .
Les réponses doivent être le plus possible concises et précises .

1) Expliquer comment sont modélisés les effets du frottement, à la surface et au fond, et ceux de la viscosité dans les équations en eaux peu profondes .

2) Décrire les effets d'un vent qui souffle perpendiculaire à la côte en termes de surélévation et de transport .

3) Expliquer la trajectoire d'une particule de fluide sous l'action d'une onde de Poincaré-Sverdrup .

4) Qu'est-ce qu'une onde stationnaire ?

2012/2013 A.Doglioli	**Master d'Océanographie** **Spécialité OPB** **Circulation et dispersion en eaux côtières**	1ère session Durée : 2 heures
Documents non autorisés		Calculatrice autorisée

Les réponses doivent être les plus concises et précises possible.

1) Qu'est-ce qu'une onde progressive ?

2) Quelle est la circulation induite par un vent soufflant perpendiculairement à une côte rectiligne ?

3) Décrire le processus qui amène à la formation de tourbillons en aval d'un cap .

4) Qu'est-ce qu'un modèle autoregressif ? Comment peut-il être utilisé pour modéliser la dispersion d'un polluant en mer ?

2013/2014 A.Doglioli	**Master d'Océanographie** **Spécialité OPB** **Circulation et dispersion en eaux côtières**		1ère session Durée : 2 heures
Documents non autorisés		Calculatrice autorisée	

Les réponses doivent être les plus concises et précises possible.

1) Qu'est-ce qu'une onde de gravité longue ?

2) Expliquer le processus de formation d'un *jet* côtier sous l'action du vent .

3) Décrire le processus du décollement de la couche limite en proximité d'un cape .

4) Qu'est-ce qu'un modèle *random walk* ? Comment peut-il être utilisé pour modéliser la dispersion du zooplankton ?

2014/2015 A.Doglioli	**Master d'Océanographie** **Spécialité OPB** **Circulation et dispersion en eaux côtières**	1ère session Durée : 2 heures

Documents non autorisés	Calculatrice autorisée

Les réponses doivent être les plus concises et précises possible.

1) Expliquer la trajectoire d'une particule de fluide sous l'action d'une onde de Kelvin .

2) Quel est le transport induit par un vent soufflant en direction perpendiculaire à une côte rectiligne? Qu'est-ce qui change selon le sens du vent (large-côte ou côte-large)? .

3) Décrire au moins une technique d'identification et de suivi des tourbillons océaniques .

4) Qu'est-ce que le mouvement brownien ? Comment peut-il être utilisé pour modéliser la dispersion ?

2014/2015 A.Doglioli	**Master d'Océanographie** **Spécialité OPB** **Circulation et dispersion en eaux côtières**	2ème session Durée : 2 heures
Documents non autorisés		Calculatrice autorisée

Les réponses doivent être les plus concises et précises possible.

1) Expliquer la trajectoire d'une particule de fluide sous l'action d'une onde de Sverdrup .

2) Quel est le transport induit par un vent soufflant en direction parallèlee à une côte rectiligne? Qu'est-ce qui change selon le sens du vent? .

3) Comment se forment les tourbillons océaniques ?

4) Comment peut-on modéliser la dispersion d'un polluant dans l'océan ?

2015/2016 A.Doglioli K.Schneider A.Perenko F.d'Ovidio M.Bosco	**Master d'Océanographie** **Spécialité OPB** **Circulation et dispersion en eaux côtières**	Durée : 2 heures
Documents non autorisés	Calculatrice autorisée	

Les réponses doivent être les plus concises et précises possible.

***** ATTENTION ! rédiger les réponses sur des feuilles séparées *****

Partie A.Doglioli

1) Quel est le transport induit par un vent soufflant en proximité d'une côte rectiligne? Qu'est-ce qui change selon la direction et le sens du vent?

Partie K.Schneider

2) Dans l'océan les écoulements sont typiquement turbulents et leur simulation numérique nécessite de la modélisation pour réduire le coût de calcul. Sur le marché il y a plusieurs approches disponibles:
i) le modèle RANS (*Reynolds Averaged Navier-Stokes*),
ii) le modèle LES (*Large Eddy Simulation* ou simulation des grandes échelles), et
iii) la DNS (*Direct Numerical Simulation* ou simulation numérique directe).
Discutez et expliquez les idées de chaque approche, ses avantages et ses limitations.

Partie A.Petrenko

3) Décrire les oscillations d'inertie.

Partie M.Bosco

4) Définir un fluide stratifié ainsi que la fréquence de Brunt-Väisälä. Expliquer comment la stratification modifie la dynamique du sillage d'un cylindre qui est bien connu pour un fluide homogène.