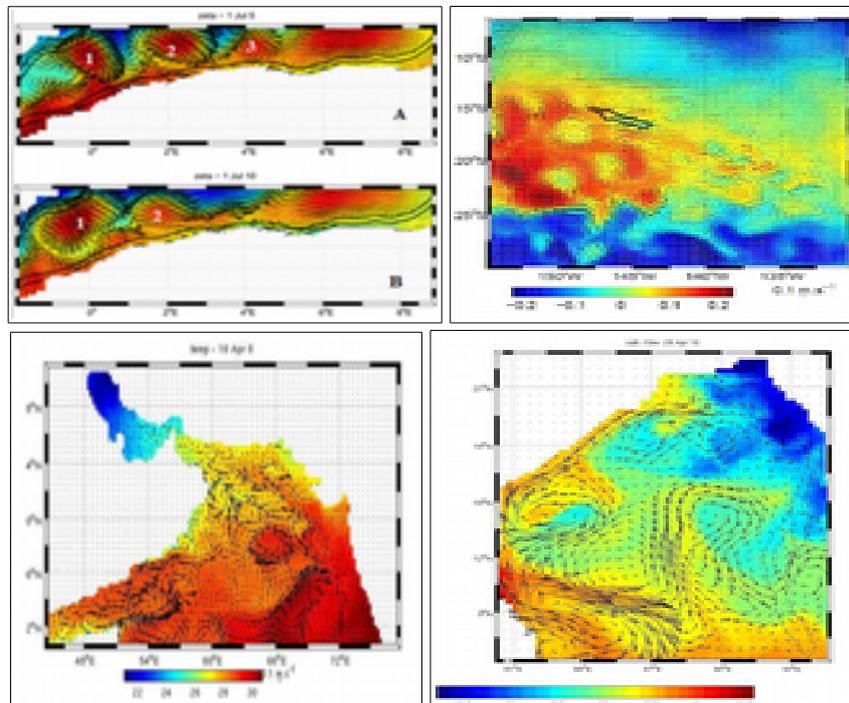


Andrea M. Doglioli
Camille Mazoyer

Notes de Cours et Travaux Dirigés de
Modélisation 3D Océanique



dernière révision 11 mars 2021

Remerciements

Je désire remercier tous mes étudiants et mes collègues pour leurs commentaires, questions, corrections et suggestions .

En particulier cet ouvrage bénéficie des contributions de M. Arancio, C. Assassi, J.M. Beckers, A.C. Blaizot, R. Campbell, N. Daniault, G. Dirberg, C. Dufau-Julliand, J. Gatti, Z. Hu, Y. José, M. Kersalé, S. Morrisset, A. Petrenko, L. Perrot, R. Rainaud, M. Simon, M. Supplien, S. Zemenzer.

Un remerciement particulier à R.Rolland pour sa relecture attentive et ses corrections.

Les travaux dirigés de ce cours ne seraient pas possible sans la distribution gratuite sur le web du modèle *ROMS* et des *ROMS_tools*, mes remerciements à toute la communauté *ROMS* et, en particulier, à G. Cambon, P. Penven et P. Marchesiello.

Doglioli, A. M., Mazoyer, C. (2021), *Notes de Cours et Travaux Dirigés de Modélisation 3D Océanique*, Université d'Aix-Marseille, Marseille, France.

www.mio.univ-amu.fr/~doglioli/Doglioli_NotesCoursTD_Modelisation3DOceanique.pdf

Ce matériel est distribué selon la licence Créative Commons [<http://creativecommons.org/>]

Vous êtes libres :

- * de reproduire, distribuer et communiquer cette création au public
- * de modifier cette création

Selon les conditions suivantes :

- * Paternité. Vous devez citer le nom de l'auteur original de la manière indiquée par l'auteur de l'oeuvre ou le titulaire des droits qui vous confère cette autorisation (mais pas d'une manière qui suggérerait qu'ils vous soutiennent ou approuvent votre utilisation de l'oeuvre).
- * Pas d'Utilisation Commerciale. Vous n'avez pas le droit d'utiliser cette création à des fins commerciales.
- * Partage des Conditions Initiales à l'Identique. Si vous modifiez, transformez ou adaptez cette création, vous n'avez le droit de distribuer la création qui en résulte que sous un contrat identique à celui-ci.



Cet ouvrage a été réalisé avec le logiciel libre LibreOffice <http://www.libreoffice.org>

Table des matières

Notes de Cours	6
Introduction.....	7
Fondements.....	17
Les équations primitives.....	17
L'approximation de Boussinesq.....	18
Les équations en eaux peu profondes.....	19
Équations de conservation de la chaleur et du sel.....	20
La « densité ».....	20
La « fermeture » de la turbulence.....	21
Les conditions aux limites.....	34
Les grilles numériques.....	41
Les méthodes explicites et implicites.....	42
Grilles décentrées.....	44
Le critère CFL.....	47
Coordonnées horizontales et transformation des grilles horizontales.....	52
Coordonnées et grilles verticales.....	57
Les schémas d'advection.....	61
Les conditions initiales et aux frontières ouvertes.....	65
Classification des équations aux dérivées partielles.....	65
Les modèles avec frontières ouvertes.....	66
Les méthodes pratiques de calcul des conditions initiales.....	68
Conditions aux frontières ouvertes pour les modèles résolvant les équations primitives.....	73
Travaux Dirigés	75
TD 1 (2h) : Inscription comme utilisateur de ROMS et des ROMS_tools et téléchargement.....	77
TD 2 (2h) : Décompression et tests de compilation.....	78
TD 3 (2h) : <i>Benguela example</i> : préparation de la grille	84
TD 4 (2h) : <i>Benguela example</i> : forçages et conditions aux frontières.....	85
TD 5 (2h) : <i>Benguela example</i> : simulations et exploitation graphique des résultats.....	86
TD 6 (2h) : <i>Benguela example</i> : simulations pluriannuelles et instruments de diagnostic.....	87
TD 7 (4h) : Implémentation d'un nouveau modèle pour une région océanique choisie.....	88
TD 8 (6h) : Mise en ligne des résultats du nouveau modèle.....	89
TD 9 (4h) : Rédaction du rapport et de la présentation.....	90
Sujets d'examen des années précédentes	91
Liste des projets des années précédentes	95

Bibliographie et Liens Utiles

Jean-Marie Beckers et collègues, **Notes et diapositive des cours à l'Université de Liège**
<http://modb.oce.ulg.ac.be/courses.html>

J. Coiffier (2000), **Un demi siècle de prévision numérique du temps**. La Météorologie, 8^e série, 30, 11-31.
<http://www.smf.asso.fr/Ressources/Coiffier30.pdf>

Ocean Models (web book)
http://www.phy.ornl.gov/csep/CSEP/PS_FILES/OM.PS

N. Daniault (2005) **Océanographie Physique pour l'École Navale**. Cours en ligne, LPO - Université de Bretagne Occidentale, Brest.
http://stockage.univ-brest.fr/~daniault/oceano_physique.pdf

P. Penven, G. Cambon, T.-A. Tan, P. Marchesiello and L. Debreu (2010), **ROMS_AGRIF / ROMTOOLS User's guide**, IRD technical report, Marseille, France.
http://roms.mpl.ird.fr/user_manual/doc_roms_agrif_v2.1_19_07_2010.pdf

G. L. Mellor (2004), **POM user guide**.
<http://www.aos.princeton.edu/WWWPUBLIC/htdocs/pom/>

A Semtner (1995), **Modeling Ocean Circulation**, Science, 269,5229,1379-1385
<http://www.mbari.org/staff/braccio/Science/semtner.html>

ROMS Group, **User's Manual for the Regional Ocean Modeling System and the Terrain - following Ocean Modeling System (ROMS/TOMS)**
<http://www.myroms.org/documentation/>

Copin-Montégut G., **Le Courant Géostrophique**.
<http://www.obs-vlfr.fr/Enseignement/enseignants/copin/Geostro.pdf>

E.Blayo **Nesting Ocean Models** présentation à l'école d'été GODAE
http://www-meom.hmg.inpg.fr/Web/GODAE_school/Pdf/E.Blayo.pdf

Steven K. Baum, « **Ocean circulation models** » **Census Web Page**
http://stommel.tamu.edu/~baum/ocean_models.html

A. Delcros (1998) **Les commandes fondamentales de Linux**
<http://www.linux-france.org/article/debutant/debutant-linux.html>

How to create a web page
<http://www.make-a-web-site.com>

Wikipedia
<http://fr.wikipedia.org/wiki/Accueil>

Notes de Cours

Introduction

La modélisation numérique de la circulation océanique est une discipline très jeune puisqu'elle s'est essentiellement développée au cours de la seconde moitié du XX^e siècle, bénéficiant de façon continue des progrès en matière d'outils de calcul automatique et s'appuyant, particulièrement au début, sur les développements de la prévision numérique du temps en météorologie. En effet les équations qui décrivent le comportement de l'océan et de l'atmosphère sont très similaires.

Avant 1900, la météorologie et l'océanographie sont essentiellement descriptives.

Cette première carte du Gulf Stream, imprimée en 1769-1770, re-découverte par P. Richardson (1980) et remarquablement précise, a été dessinée par B. Franklin pour la poste anglaise sur la base des informations fournies par le capitaine de baleinières Timoty Folger.



Image tirée du papier de R. Peterson et al. (1996) dans Progress in Oceanography.

http://sam.ucsd.edu/sio210/gifimages/Franklin_folger.gif

Coiffier (2000) présente un très intéressant aperçu historique des techniques qui ont servi à la construction des modèles de prévision numérique du temps basée sur la résolution numérique de ces équations, c'est-à-dire de déterminer les valeurs futures de ses grandeurs caractéristiques en partant de valeurs initiales connues grâce aux observations. Les modèles numériques d'atmosphère construits sur ce principe sont ainsi devenus les outils indispensables de la prévision du temps, supplantant progressivement les méthodes fondées sur l'application de règles de déplacement et d'évolution de structures atmosphériques identifiables (les centres d'action et les fronts).

« Les équations utilisées sont les équations générales de la mécanique des fluides, bien établies déjà au début du XX^e siècle, auxquelles on applique un certain nombre de simplifications qui se justifient par l'analyse des ordres de grandeur des divers termes dans le cas particulier de l'atmosphère terrestre et selon les échelles à décrire. Le recours au calcul numérique est indispensable pour résoudre ces systèmes d'**équations non linéaires** dont les solutions ne peuvent pas être déterminées analytiquement dans le cas général.

La construction d'un modèle numérique d'atmosphère et d'océan comprend deux étapes distinctes : la première consiste à établir un système d'équations, alors que la seconde, dite « numérisation », consiste à remplacer les équations portant sur des variables continues par des équations portant sur des variables discrètes et dont les solutions sont obtenues au moyen d'un algorithme approprié. Les résultats d'une prévision numérique dépendent donc des propriétés générales des solutions des équations, qui relèvent de la météorologie dynamique, ainsi que des effets de la numérisation adoptée, qui doivent être examinés de façon détaillée.

La mise en œuvre de l'algorithme implique de disposer d'un outil de calcul qui soit suffisamment puissant, tout en restant simple d'utilisation. C'est la raison pour laquelle les progrès de la prévision

numérique du temps ont été étroitement liés au fantastique développement des ordinateurs, depuis leur naissance à la fin de la deuxième guerre mondiale. » Coiffer (2000).

Au XX^e siècle, la modélisation devient une branche de la physique mathématique.

Les premiers modèles conceptuels :

- 1904 Bjerknès : prévoir le temps à partir de conditions initiales et de lois physiques
- 1908 Poincaré : difficultés liées aux non-linéarités, notion de fenêtre spectrale
- 1914 Bjerknès : identification du problème pratique du calcul numérique
- 1922 Richardson : simplification du problème mathématique par approximations physiques

Dès 1904, le Norvégien Vilhelm Bjerknes reconnaît que la prévision du temps est fondamentalement un problème déterministe à valeurs initiales au sens mathématique du terme (Bjerknes, 1904) : « Si, comme le pense chaque homme raisonnant scientifiquement, les phénomènes atmosphériques se développent à partir de ceux qui les précèdent suivant des lois précises, on peut en déduire que les conditions nécessaires et suffisantes pour une solution rationnelle de la prévision en météorologie sont les suivantes :

- on doit connaître avec une précision suffisante l'état de l'atmosphère à un instant donné ;
- on doit connaître avec une précision suffisante les lois selon lesquelles un état de l'atmosphère se développe à partir de l'état précédent. »

Cependant, Bjerknes réalise que la difficulté du problème vient de la nécessité de résoudre un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires pour lesquelles on ne dispose pas, dans le cas général, de solutions analytiques.

Richardson essaya donc de montrer que le calcul permettait effectivement d'effectuer des prévisions météorologiques à une époque où les calculateurs électroniques n'existaient pas encore. Il publia sa méthode en 1922 dans un livre intitulé *Weather Prediction by Numerical Process*.

Richardson préconisait des techniques de calcul permettant de simplifier les équations et indiquait qu'il était nécessaire de partir d'une situation météorologique avec un nombre important de données terrestres et d'altitude sur l'ensemble du globe.



http://fr.wikipedia.org/wiki/Lewis_Fry_Richardson

À l'aide de formulaires standardisés, pour accélérer le calcul en divisant le travail, il avait estimé que 64000 personnes étaient nécessaires pour que la prévision soit émise en avance sur les événements.

Richardson découpait le globe en une grille rectangulaire de 230 km (en latitude) sur 200 km (en longitude), ce qui donnait 3200 colonnes verticales autour de la Terre. De plus, il divisait l'atmosphère en tranche à 4, 7 et 12 km d'altitude et il proposait des calculs par pas de temps de 3 heures.

Cet immense système a été baptisé "**l'usine à prévoir le temps**".

Citation, Richardson 1922

Il m'a fallu une bonne partie de six semaines pour remplir les formulaires de calcul et établir la nouvelle distribution dans deux colonnes verticales, pour la première fois. Mon bureau était un tas de foin dans un froid cantonnement en retrait. Avec de l'entraînement, le travail d'un calculateur moyen pourrait aller sans doute dix fois plus vite. Avec un pas de temps de trois heures, alors trente-deux personnes pourraient calculer exactement deux points de façon à avancer à la même vitesse que le temps, sans tenir compte du très grand gain de vitesse que l'on constate invariablement quand une opération complexe est divisée en parties plus simples, sur lesquelles des individus se spécialisent. Si les dimensions des carreaux de l'échiquier sont de 200 kilomètres sur l'horizontale, il y aurait 3 200 colonnes sur la Terre entière. Comme dans les régions tropicales le temps est souvent connu à l'avance, on peut considérer qu'il y a 2 000 colonnes actives. De cette façon, $32 \times 2\,000 = 64\,000$ calculateurs seraient nécessaires pour faire la course avec le temps sur la Terre entière. C'est un nombre plutôt considérable. Sans doute, dans quelques années, sera-t-il possible de simplifier le schéma de calcul. Mais, de toute façon, l'organisation qui est proposée est celle d'une fabrique de prévisions centralisée pour l'ensemble de la Terre, ou pour des parties limitées par des frontières où le temps est invariable, avec des calculateurs humains spécialisés sur des équations différentes.

Espérons pour eux qu'ils seront régulièrement affectés à de nouvelles opérations.

Après un raisonnement aussi difficile, on peut sans doute avoir un peu de fantaisie.

Imaginons un immense hall en forme de théâtre, sauf que les galeries et balcons y feraient un tour complet, occupant ainsi la place dévolue à la scène. Les murs de cet espace seraient peints pour représenter une carte de la Terre. Le plafond représenterait les régions polaires septentrionales, l'Angleterre serait dans les balcons, les tropiques dans les baignoires du haut, l'Australie au niveau des corbeilles et l'Antarctique dans la fosse. Une myriade de calculateurs humains sont au travail sur le temps de la partie de la carte où ils siègent, mais chacun ne s'occupe que d'une équation ou d'une partie d'équation. Le travail de chaque région est coordonné par un employé de haut rang.



Le modèle de Richardson, 1922

Imagination d'un système de calcul humain (64000 personnes) automatisé et parallèle avec une puissance de calcul de 1 Flops (Floating point operations per second).

Dessin d'Alf Lannerbaeck, publié par le journal suédois *Dagens Nyheter* le 22 septembre 1984.

De nombreux petits tableaux affichent les valeurs instantanées de façon à ce que les calculateurs voisins puissent les lire. Chaque nombre est ainsi affiché dans trois niveaux adjacents, de façon à maintenir les communications avec le nord et le sud sur la carte. Du plancher de la fosse s'élève une haute tour qui atteint la moitié de la hauteur du théâtre. Elle porte une chaire sur son sommet : le responsable de l'ensemble y est assis, entouré de plusieurs assistants et messagers. Une de ses tâches consiste à maintenir une vitesse de progression constante dans toutes les parties du globe. De ce point de vue, il ressemble au chef d'un orchestre dont les instruments seraient des règles à calcul et des machines à calculer. Mais au lieu d'agiter une baguette, il pointe un rayon lumineux rose en direction des régions en avance sur les autres et un rayon bleu vers celles qui sont à la traîne. Quatre employés de haut niveau collectent le temps au fur et à mesure qu'il est calculé, et l'expédient à l'aide d'une messagerie pneumatique vers une salle calme. De là, il sera codé et téléphoné vers la station d'émission radio. Des messagers transportent les piles de formulaires de calcul usagés vers un local d'archivage au sous-sol.

Dans un bâtiment voisin, un service de recherche est installé qui invente des améliorations. Mais il est nécessaire de faire des essais à petite échelle avant de procéder à des changements dans les algorithmes utilisés dans le théâtre de calcul. Dans le sous-sol, un enthousiaste passe son temps à observer des tourbillons dans le liquide qui remplit un bassin en rotation, mais jusqu'à présent la méthode numérique donne de meilleurs résultats. Dans un autre bâtiment sont installés les services financier, courrier et administratif habituels. À l'extérieur se trouvent des terrains de jeux, des habitations, des montagnes et des lacs, car on a pensé que ceux qui calculent le temps devraient pouvoir le respirer librement.

Cependant, un petit essai de prévision d'évolution de la pression atmosphérique selon cette méthode, mais sans tout le personnel, donna un résultat très décevant :

la variation calculée était de 145 hPa en 6 heures, une valeur tout à fait impossible quand on pense qu'une variation de 20 hPa est considérée comme une variation extrême pour ce même temps.

En fait, la variation réelle a été presque nulle.

L'erreur de Richardson a été de discrétiser les dérivées des équations primitives atmosphériques sans tenir compte de la variabilité expérimentale des données.

Ces dérivées impliquent des divisions de nombres qui sont très proches l'un de l'autre (ex. variation de la pression ou de la température avec le temps). Or la variation des variables météorologiques peut être de l'ordre de l'erreur de leur mesure, et peut être instantanément grande sans pour autant durer. Il faut donc utiliser des valeurs lissées sur une certaine période pour obtenir des résultats réalistes. On sait maintenant que le pas de temps n'aurait pas dû excéder une demi-heure dans les calculs et que les données initiales, n'ayant pas subi de contrôle de qualité, introduisirent des instabilités de calcul.

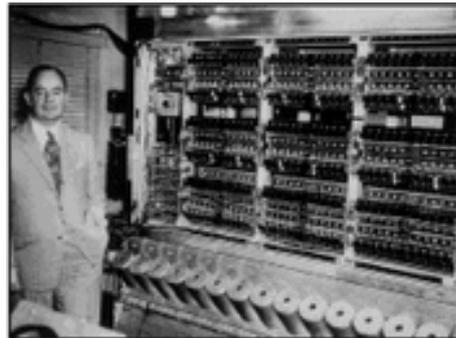
Richardson a cependant démontré l'idée que la prévision du temps par calcul était possible, et les problèmes de logistique humaine et financière ont été résolus plus tard par l'avènement des ordinateurs.

En 1928, les mathématiciens allemands Courant, Friedrichs et Levy étudient de façon systématique la manière de résoudre les équations aux dérivées partielles à l'aide des « différences finies » et précisent les contraintes à respecter lors de la numérisation (Courant et al., 1928).

En 1939, le suédois Carl-Gustav Rossby montre que l'équation de conservation du tourbillon absolu permet d'interpréter correctement le déplacement observé des centres d'action atmosphériques (Rossby et al., 1939).

Apparition de calculateurs électroniques

En 1946, le premier ordinateur électronique, l'Eniac (*Electronic Numerical Integrator Analyser and Computer*), voit le jour à l'université de Pennsylvanie située à Philadelphie (États-Unis), grâce à l'impulsion déterminante du mathématicien américain d'origine hongroise John von Neumann, qui propose de l'utiliser aussi pour la prévision météo.



En 1948, l'Américain Jules Charney propose une simplification du système général d'équations, connue sous le nom d'«approximation quasi géostrophique», et retrouve comme cas particulier l'équation étudiée par Rossby (Charney, 1948).

Enfin, en 1950, J. Charney, le norvégien R. Fjörtoft et J. von Neumann réalisent la première prévision numérique du temps (Charney et al., 1950) : ils utilisent pour cette expérience l'équation de conservation du tourbillon absolu et effectuent les calculs numériques sur le calculateur électronique Eniac, installé à Aberdeen (Maryland, États-Unis). Les résultats obtenus pour la prévision de l'altitude géopotentielle de la surface isobare 500 hPa, caractéristique de l'atmosphère moyenne, sont tout à fait encourageants et cette expérience historique marque ainsi le point de départ de la prévision numérique moderne (Platzmann, 1979). En réponse à Charney, qui lui avait fait parvenir l'article décrivant l'expérience, Richardson écrit en 1952 : «*Permettez-moi de vous féliciter ainsi que vos collaborateurs pour le remarquable succès que vous avez obtenu à Princeton et pour les perspectives d'amélioration que vous indiquez*» (Ashford, 1985).

Amélioration des performances

- 1955 modèle barocline de Charney sur IBM701 (10000 Flops)
- Mais jusqu'en 1962 c'est le modèle barotrope qui fait les prévisions sur 3 jours (32 x 23 points de calcul)
- Identification des problèmes d'instabilités numériques

Nouveaux concepts par les modèles

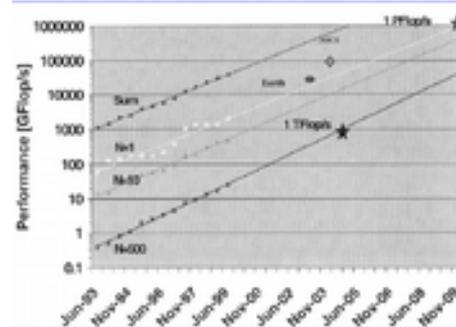
- 1956 Phillips: vérifications numériques de validité d'hypothèses physiques simplificatrices : Modèle quasi-géostrophique non-linéaire vérifiant qu'un modèle analytique linéaire est valable dans une plage de paramètres donnée
- Instabilités numériques linéaires et non-linéaires
- Débats sur les avantages des schémas robustes vs schémas précis
- 1966 Arakawa : discrétisations conservant des propriétés non-linéaires

Ressources disponibles

- Augmentation des ressources informatiques surtout utilisée pour assurer des résolutions plus fines

Puissances de calcul

- Croissance exponentielle : Loi de Moore : doublement des capacités tous les 18 mois
- Le PC banal de 2001 était le superordinateur coûtant 1M€ en 1992
- Limitations à prévoir ?
 - 1GHertz limite distances à 30cm (vitesse de la lumière)
 - Traçage des circuits par rayons lumineux limité par longueur d'onde du visible
 - Échauffements



Architectures nouvelles

- SISD single instruction, single data : processeur classique
- SIMD single instruction, multiple data : processeur vectoriel
- MIMD multiple instruction, multiple data : processeur parallèle
 - mémoire partagée : typiquement 16 processeurs exploités efficacement
 - mémoire distribuée : massivement parallèle mais recodage (1024 processeurs)

Programmation toujours en FORTRAN ...

Apparition de modèles océanographiques

- 1963 Bryan : modèle barotrope
- 1969 Bryan : modèle barocline incluant effets topographiques et fermeture turbulente
- En météorologie, les modèles aux équations primitives 3D existent depuis 1963 (Smagorinsky).

Et depuis ?

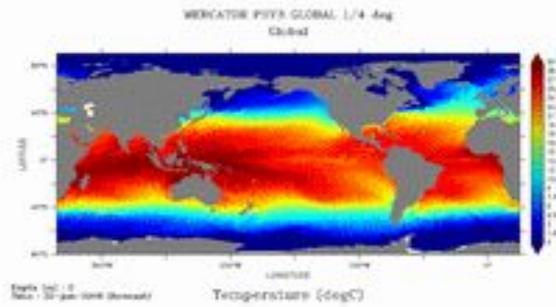
- Le modèle de Bryan (GFDL, MOM) est presque inchangé et reste le plus utilisé
- Les nouveaux développements viennent généralement des modèles météorologiques (assimilation, fermetures, méthodes spectrales, semi-lagrangiennes)
- Refaire complètement un modèle est un investissement majeur
- Ajouts aux modèles : assimilation de données, meilleurs schémas numériques, fermetures plus complexes

Exemples de modèles océaniques opérationnels

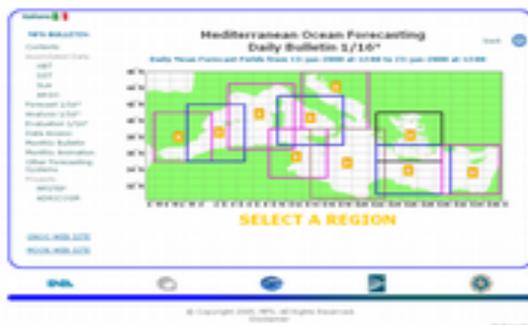
MERCATOR OCEAN



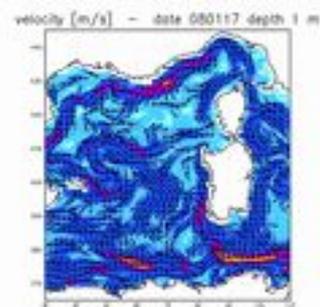
http://bulletin.mercator-ocean.fr/html/welcome_en.jsp



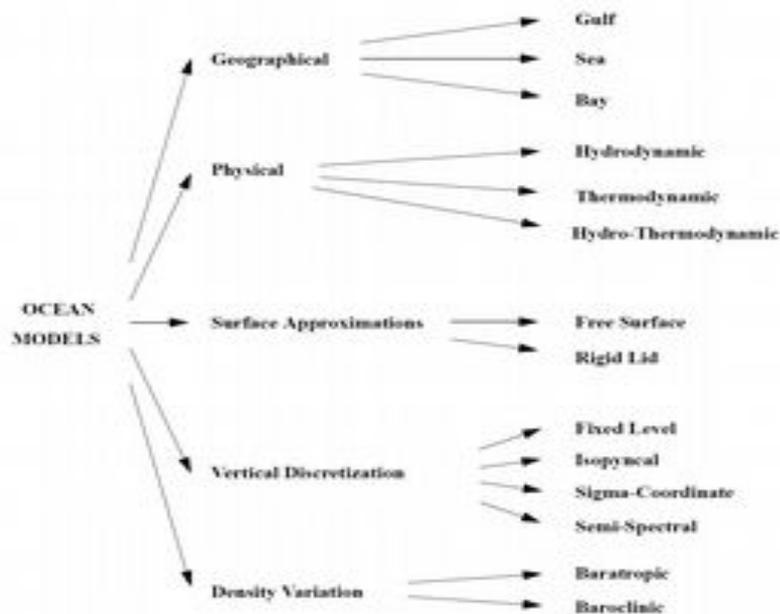
MFS



<http://www.bo.ingv.it/mfs/>



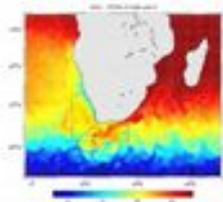
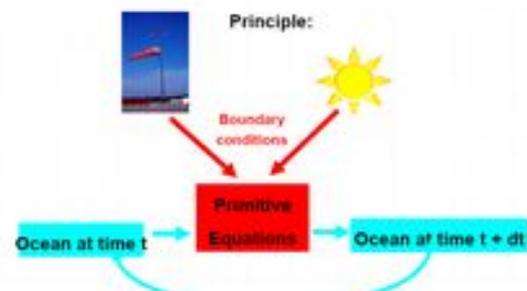
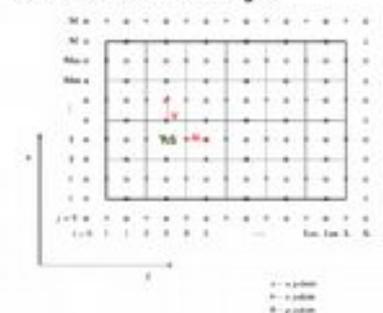
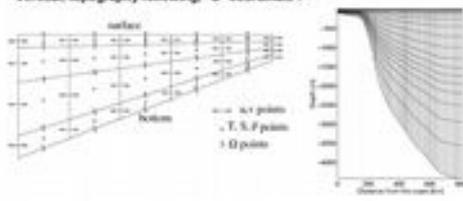
Tentative de classification des modèles



Ocean Models (web book)

http://www.phy.ornl.gov/csep/CSEP/PS_FILES/OM.PS

Présentation de P.Penven à l'École d'été de l'Université de Toulon sur la modélisation en 2006 http://lseet.univ-tln.fr/ecolette/Documents/ROMS_TOOLS.pdf

<p>Introduction to ROMSTOOLS TOULON – September 2006</p>  <p>Patrick.Penven@ird.fr</p>	<p>2.1- Introduction: ROMS</p> <p>Equations to solve : the primitive equations (PE)</p> $\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u - fv = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} + A_h \nabla_h^2 u + A_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ $\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \nabla v + fu = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} + A_h \nabla_h^2 v + A_v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ $0 = \frac{\partial P}{\partial z} + \rho g$ $0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ $\frac{\partial T}{\partial t} + u \cdot \nabla T = K_h \nabla_h^2 T + K_v \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ $\frac{\partial S}{\partial t} + u \cdot \nabla S = K_h \nabla_h^2 S + K_v \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}$ $\rho = \rho(T, S, z)$
<p>+ Boundary conditions:</p> <p>Surface boundary conditions (z=0):</p> $\frac{dw}{dt} = w$ $A_r \frac{\partial u}{\partial z} = \tau_x$ $A_r \frac{\partial v}{\partial z} = \tau_y$ $K_v \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{Q}{\rho_0 c_p}$ $K_v \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{S(E-P)}{\rho_0}$ <p>Wind stress Heat flux Evaporation – Rain : Salt flux</p> <p>Bottom boundary conditions (z=H):</p> $w = -u \cdot \nabla H$ $A_b \frac{\partial u}{\partial z} = -r_u$ $A_b \frac{\partial v}{\partial z} = -r_v$ $K_v \frac{\partial T}{\partial z} = 0$ $K_v \frac{\partial S}{\partial z} = 0$ <p>Bottom friction</p>	<p>Principle:</p>  <p>Ocean at time t → Primitive Equations → Ocean at time t + dt</p>
<p>Discretization : horizontal grid</p> 	<p>Horizontal Arakawa "C" grid:</p>  <p>Vertical, topography following, "S" coordinate :</p> 

Regional Ocean Modeling System (ROMS), 3 versions :

- Rutgers University : <http://marine.rutgers.edu/po/index.php?page=&model=roms>
- UCLA : http://www.atmos.ucla.edu/cesr/ROMS_page.html
- IRD : http://www.brest.ird.fr/Roms_tools/

ROMS

- Solves the **Primitive Equations: Boussinesq approximation** + **hydrostatic** vertical momentum balance.
- Discretized in coastline- and **terrain-following curvilinear coordinates**.
- Split-explicit, **free-surface** oceanic model: short time steps to advance the barotropic momentum equations, and a much larger time step for temperature, salinity, and baroclinic momentum.
- Special 2-way time-averaging procedure for the barotropic mode, which satisfies the 3D continuity equation.
- Baroclinic mode discretized using a **third-order accurate** predictor (Leap-Frog) and corrector (Adams-Molton) time-stepping algorithm: substantial increase in the permissible time-step size.
- Designed to be optimized on shared-memory **parallel computer** architectures.
- Parallelization by two-dimensional subdomain partitioning.
- Multiple subdomains can be assigned to each processor to optimize the use of processor cache memory.
- Super-linear scaling: performance growth even faster than the number of CPUs.
- Ported successfully to distributed-memory platforms (clusters, earth simulator)
- **Third-order, upstream-biased advection scheme**: allows the generation of steep gradients.
- Improved calculation of the horizontal pressure gradients.
- Subgrid-scale vertical mixing processes: **K-Profile Parameterization (KPP) boundary-layer scheme**.
- **Open boundaries**: active, implicit, upstream-biased radiation conditions.
- **Nesting capability**: AGRIF (Adaptive Grid Refinement in Fortran) library. Arbitrary number of fixed grids.

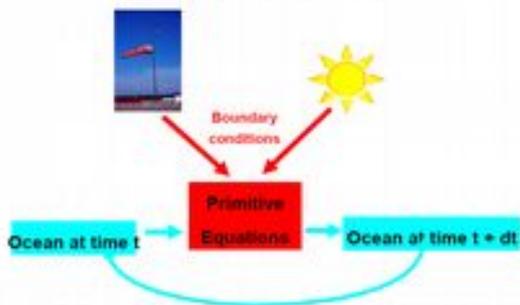
- Sediment module.
- Biogeochemical module.
- Float tracking module.

- ROMSTOOLS: matlab scripts to help the generation and visualization of ROMS configurations.

ROMS References:

- Shchepetkin, A., and J.C. McWilliams, 1998: Quasi-monotone advection schemes based on explicit locally adaptive dissipation. Monthly Weather Review, 126, 1541-1580.
- Haidvogel D. B., H. Arango, K. Hedstrom, A. Beckman, P. Malanotte-Rizzoli, and A. Shchepetkin, 2000: Model evaluation experiments in the North Atlantic basin: simulations in nonlinear terrain following coordinates. Dyn. Atmos. Oceans, 32, 239-281.
- Marchesiello, P., J.C. McWilliams, and A. Shchepetkin, 2001: Open boundary conditions for long-term integration of regional oceanic models. Ocean Modelling, 3, 1-20.
- Ezer, T., H.G. Arango and A.F. Shchepetkin, 2002: Developments in terrain-following ocean models: intercomparisons of numerical aspects, Ocean Modelling, 4, 249-267
- Marchesiello P., J.C. McWilliams, and A. Shchepetkin, 2003: Equilibrium structure and dynamics of the California Current System. Journal of Physical Oceanography, 33, 753-783.
- Shchepetkin, A.F., and J.C. McWilliams, 2003: A method for computing horizontal pressure-gradient force in an ocean model with a non-aligned vertical coordinate. J. Geophys. Res., 108, C3, 3090, doi:10.1029/2001JC001047.
- Shchepetkin, A., and J.C. McWilliams, 2005: The Regional Oceanic Modeling System: A split-explicit, free-surface, topography-following-coordinate ocean model. Ocean Modelling, 9, 347-404.
- Penven P., L. Debreu, P. Marchesiello, and J.C. McWilliams, 2006: Evaluation and application of the ROMS 1-way embedding procedure to the central california upwelling system. Ocean Modelling, 12, 157-187.

2.2 - Why ROMSTOOLS ?



What do we need to run an experiment ?

What do we need to run an experiment ?

A computer with the model on it + data (netcdf files) to run the model.

Necessary data:

Grid data (roms_gnd.nc):

- positions of the grid points.
- size of the grid cells.
- bottom topography.
- land mask.

Surface forcing data (roms_for.nc):

- wind stress.
- surface heat flux.
- surface freshwater flux.

Initial conditions (roms_ini.nc):

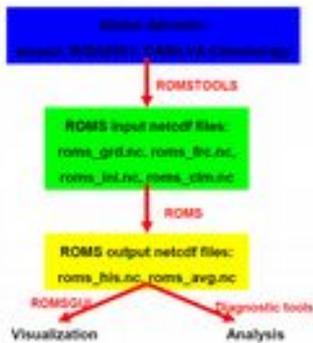
- Temperature, Salinity, Currents, Sea surface elevation.

Lateral boundary conditions (roms_clm.nc):

- Temperature, Salinity, Currents, Sea surface elevation.

Provided by ROMSTOOLS

Strategy:



2.3 - System

UNIX or LINUX !!!

ROMS: FORTRAN programme (~55,000 lines of FORTRAN code!).
ROMSTOOLS: Matlab scripts + datasets to prepare the files for ROMS.

PC configuration:

Minimum hardware: 2GB RAM, FS, 2 G of free disk space.
Operating system: Linux (Good success with Mandriva and Fedora).
Fortran compiler: g77 or Intel Fortran Compiler.
<http://www.intel.com/software/products/compilers/for/index.htm>
Matlab for Linux.

2.4 - How to get the tools ?



Fondements

Les équations résolues par ROMS, SYMPHONIE, POM et autres modèles sont dites équations primitives.

Les équations primitives

Les équations primitives sont décrites dans un système de coordonnées cartésiennes (O, x, y, z) , l'axe Ox étant orienté positivement vers l'est, l'axe Oy vers le nord et l'axe Oz vers le Zénith. L'origine O se situe au niveau de repos de la surface de la mer.

Les équations du mouvement

L'évolution de la vitesse horizontale moyenne (au sens de la turbulence) des particules du fluide géophysique est décrite par les équations de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P}{\partial x} + f v - \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P}{\partial y} - f u - \frac{\partial \overline{v'u'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \end{aligned}$$

u, v et w sont les composantes horizontales et verticale non turbulentes ou « moyennes » de la vitesse du mouvement ;

u', v' et w' sont les composantes turbulentes de la vitesse du mouvement ;

f est le paramètre de Coriolis ;

P est la pression ;

ρ_o est la densité de référence de l'eau de mer au sens de l'hypothèse de Boussinesq.

Le premier terme correspond à la variation locale de la vitesse en fonction du temps. Dans le deuxième, troisième et quatrième terme sont représentées les advections horizontales et verticale. Le cinquième terme est le gradient de pression.

Le sixième terme est le terme de Coriolis, qui rend compte de l'influence de la rotation de la Terre. Si les écoulements sont à une échelle suffisamment réduite, on peut approcher la surface terrestre par son plan tangent et considérer la force de Coriolis i) constante : approximation de plan- f , $f = f_o$, dynamique côtière ; ii) variant linéairement avec la coordonnée méridienne : approximation de plan- β , $f = f_o + \beta y$, dynamique régionale, mais aussi grande échelle.

Les trois derniers termes sont les termes turbulents. Dans la suite on verra dans le détail quelques exemples des théories dites de fermeture de la turbulence (i.e. écrire ces termes qui contiennent les composantes turbulentes u', v', w' en fonction de composantes moyennes afin d'éviter l'ajout de nouvelles variables dont on ne connaît pas les équations). À la base de ces théories il y a la théorie dite de la « fermeture Newtonienne », qui dit que, comme pour la viscosité moléculaire, on peut introduire des coefficients de viscosité turbulente et réécrire les moyennes des produits des composantes turbulentes de la vitesse en terme de vitesses moyennes :

$$\begin{aligned} \overline{u'u'} &= -A_x \frac{\partial u}{\partial x} ; & \overline{u'v'} &= -A_y \frac{\partial u}{\partial y} ; & \overline{u'w'} &= -A_z \frac{\partial u}{\partial z} ; \\ \overline{v'u'} &= -A_x \frac{\partial v}{\partial x} ; & \overline{v'v'} &= -A_y \frac{\partial v}{\partial y} ; & \overline{v'w'} &= -A_z \frac{\partial v}{\partial z} . \end{aligned}$$

Pour les échelles typiques de la plupart des mouvements océaniques, l'équation pour la composante verticale de la vitesse est réduite à l'équation de l'hydrostatique, qui traduit l'équilibre entre la force de pression et la force de pesanteur. Elle fournit l'équation de la pression :

$$P(z) = P_a + g \int_z^\eta \rho \cdot dz$$

où P_a est la pression atmosphérique, g est l'accélération de la gravité et η l'élévation de la surface par rapport au zéro de l'axe Oz . $z = \eta(x, y, t)$ constitue ainsi la surface libre de l'océan tandis que $z = -h(x, y)$ repère le fond. ρ est la masse volumique.

L'approximation de Boussinesq

Les variations verticales de masse volumique dans l'océan sont de l'ordre de un sur mille, on peut donc substituer ρ avec une densité de référence ρ_0 sans introduire d'erreurs trop importantes. Par contre les échelles horizontales de variation de masse volumique ($\partial \rho / \partial x_i$) ne sont pas négligeables. Boussinesq a alors suggéré d'écrire la masse volumique comme

$$\rho \equiv \rho_0 + \rho'(x, y, z, t) \text{ avec } \rho' \ll \rho_0 \quad O(10^{-3})$$

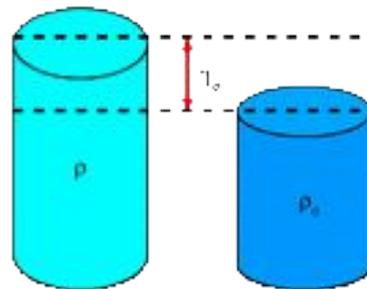
et de retenir dans le terme de *buoyancy* (flottabilité, poussée d'Archimède) seulement les quantités qui ont cet ordre de grandeur.

Les dérivées horizontales deviennent alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_a}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{g}{\rho_0} \int_z^\eta \frac{\partial \rho'}{\partial x} dz \\ \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_a}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{g}{\rho_0} \int_z^\eta \frac{\partial \rho'}{\partial y} dz \end{aligned}$$

Le deuxième et le troisième terme de droite des équations ci-dessus sont respectivement les contributions barotrope et barocline du gradient de pression.

Le dernier terme est souvent écrit η_d , en effet c'est une longueur et il correspond à la différence de hauteur entre une colonne d'eau de densité ρ_0 et une à la « vraie » densité ρ . En résumé, l'approximation de Boussinesq permet de remplacer la densité exacte par sa valeur de référence ρ_0 partout sauf dans le terme de l'accélération de la pesanteur. Dans les termes de pression ne restent également plus que la part due à ε qui est appelée hauteur dynamique, car c'est le principal moteur de l'écoulement.



Souvent on prend comme densité de référence la densité la plus grande, ainsi la hauteur dynamique est nulle ou positive.

Si le gradient de pression $-\partial p / \partial x_i$ disparaît à partir d'un certain niveau suffisamment profond $z = -h$, l'équation (1.12) devient

$$(1.13) \quad \eta = \eta_d(-h)$$

en négligeant la constante d'intégration, i.e. en choisissant astucieusement le niveau zéro de la surface libre. Dans ce cas la topographie du niveau de la mer peut être déterminée directement de la distribution de la densité (Sverdrup 1942).

Dans les modèles numériques, le calcul de la hauteur dynamique n'est pas vraiment intéressant car nous pouvons maintenant (Sverdrup n'avait pas d'ordinateur!) résoudre numériquement les équations complètes. Toutefois l'utilisation de l'approximation de Boussinesq permet d'augmenter la précision des calculs dans les termes baroclines.

À titre d'exemple, on peut voir ce terme dans les équations du modèle POM écrites dans un système de référence x, y, σ (voir G.L. Mellor (2004), **POM user guide**) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial UD}{\partial t} + \frac{\partial U^2 D}{\partial x} + \frac{\partial UVD}{\partial y} + \frac{\partial U\omega}{\partial \sigma} - fVD + gD \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ + \frac{gD^2}{\rho_o} \int_{\sigma}^{\sigma'} \left[\frac{\partial \rho'}{\partial x} - \frac{\sigma'}{D} \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial \rho'}{\partial \sigma'} \right] d\sigma' = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{K_M}{D} \frac{\partial U}{\partial \sigma} \right] + F_x \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial VD}{\partial t} + \frac{\partial UVD}{\partial x} + \frac{\partial V^2 D}{\partial y} + \frac{\partial V\omega}{\partial \sigma} + fUD + gD \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ + \frac{gD^2}{\rho_o} \int_{\sigma}^{\sigma'} \left[\frac{\partial \rho'}{\partial y} - \frac{\sigma'}{D} \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial \rho'}{\partial \sigma'} \right] d\sigma' = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{K_M}{D} \frac{\partial V}{\partial \sigma} \right] + F_y \end{aligned} \quad (4)$$

Les équations en eaux peu profondes

Si on néglige la contribution barocline et celle de la pression atmosphérique, le gradient horizontal de pression pourra alors s'exprimer : $\nabla_H P = \rho_o g \nabla_H \eta$

Cette équation dit que les forces qui agissent dans le fluide sont purement horizontales, on peut donc supposer que les composantes horizontales de la vitesse seront indépendantes de z . Ainsi les quatrièmes termes dans les équations de Navier-Stokes sont nuls et le terme de viscosité turbulente verticale est remplacé par les conditions aux bords qui représentent les forçages dus au vent $\vec{F} \equiv (F_x, F_y)$ et au fond $\vec{B} \equiv (B_x, B_y)$.

Les équations du mouvement deviennent

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + f v + A_h \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + F_x + B_x \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - f u + A_h \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + F_y + B_y \quad (2)$$

Notez qu'on a maintenant deux équations pour trois inconnues (les deux composantes de la vitesse et la surélévation de la surface libre).

Il faut ajouter une équation, laquelle ? L'équation de continuité écrite en fonction de ces trois variables.

On prend alors l'équation de continuité pour un fluide incompressible :

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial w}{\partial z} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

en intégrant du fond à la surface libre, vu que les vitesses et leur dérivée sont indépendantes de z on obtient :

$$w_{z=\eta} - w_{z=-h} + (h+\eta) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 .$$

À la surface

$$w_{z=\eta} = \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} .$$

Au fond, en considérant que la bathymétrie ne varie pas dans le temps

$$w_{z=-h} = -\frac{dh}{dt} = -u \frac{\partial h}{\partial x} - v \frac{\partial h}{\partial y} .$$

En substituant, on obtient :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(Hu)}{\partial x} + \frac{\partial(Hv)}{\partial y} = 0 \quad \text{avec } H=h+\eta \quad (3)$$

L'ensemble des trois équations (1-3) constitue les équations en eaux peu profondes (e. p. p. ou *shallow water equations*). Elles sont valables, comme pour l'approximation hydrostatique, quand la hauteur d'eau est très faible par rapport aux échelles horizontales que l'on veut étudier.

On verra ensuite comment ces équations sont utilisées par un modèle 3D qui adopte la technique dite de séparation du pas de temps (*mode splitting*).

Équations de conservation de la chaleur et du sel

Elles concernent le transport de la température T et de la salinité S :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = -\frac{\partial(\overline{T'u'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{T'v'})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{T'w'})}{\partial z} + \frac{H_c}{\rho_o C_p} \frac{\partial I}{\partial z}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} S = -\frac{\partial(\overline{S'u'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{S'v'})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{S'w'})}{\partial z}$$

On verra dans la suite que les flux turbulents de chaleur et de sel (premier, deuxième et troisième termes du membre de droite) sont modélisés à l'aide du concept de diffusivité turbulente.

H_c est le flux solaire incident.

C_p est le coefficient de chaleur massique : $C_p = 3950 \text{ J/kg.K}$

$I(z)$ est la fraction de ce flux qui parvient au niveau z : $I(z) = \exp(-\lambda z)$ avec $\lambda = 0.05 \text{ m}^{-1}$, le coefficient d'atténuation, choisi à partir des tables de Jerlov (1976) en eau claire.

La « densité »

La densité est le paramètre fondamental pour l'étude dynamique des océans. De faibles variations horizontales de densité (générées par exemple par des différences de rayonnement solaire) peuvent produire des courants importants. En toute rigueur,

$$\text{densité} = (\text{masse } 1 \text{ m}^3 \text{ d'eau de mer}) / (\text{masse } 1 \text{ m}^3 \text{ d'eau distillée à } 4^\circ\text{C}) \text{ [pas d'unité]} .$$

IES80 : équation d'état de l'eau de mer (International Equation of State of Seawater)

$$\rho(S, t, p) = \rho(S, t, 0) \left[1 - p/K(S, t, p) \right]$$

avec

$$\begin{aligned} \rho(S, t, 0) = & 999.842594 + 6.793952 \times 10^{-3}t - 9.095290 \times 10^{-3}t^2 + 1.001685 \times 10^{-4}t^3 - 1.120083 \times 10^{-6}t^4 \\ & + 6.536332 \times 10^{-9}t^5 + 8.24493 \times 10^{-1}S - 4.0899 \times 10^{-2}tS + 7.6438 \times 10^{-3}t^2S - 8.2467 \times 10^{-2}t^3S \\ & + 5.3875 \times 10^{-3}t^4S - 5.72466 \times 10^{-2}S^2 + 1.0227 \times 10^{-4}tS^2 - 1.6546 \times 10^{-4}t^2S^2 \\ & + 4.8314 \times 10^{-4}S^3 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} K(S, t, p) = & 19652.21 + 148.4206t - 2.327105t^2 + 1.360447 \times 10^{-1}t^3 - 5.155288 \times 10^{-2}t^4 + 3.239908p \\ & + 1.43713 \times 10^{-2}tp + 1.16092 \times 10^{-4}t^2p - 5.77905 \times 10^{-3}t^3p + 8.50935 \times 10^{-5} \times p^2 \\ & - 6.12293 \times 10^{-6}tp^2 + 5.2787 \times 10^{-2}t^2p^2 + 54.6746S - 0.603459tS + 1.09987 \times 10^{-2}t^2S \\ & - 6.1670 \times 10^{-3}t^3S + 7.944 \times 10^{-3}S^2 + 1.6483 \times 10^{-3}tS^2 - 5.3009 \times 10^{-4}t^2S^2 + 2.2838 \times 10^{-2}pS \\ & - 1.0981 \times 10^{-2}tpS - 1.6078 \times 10^{-4} \times t^2pS + 1.91075 \times 10^{-4}pS^2 - 9.9348 \times 10^{-2}p^2S \\ & + 2.0816 \times 10^{-2}tp^2S + 9.1697 \times 10^{-10}t^2p^2S \end{aligned}$$

<http://lecalve.univ-tln.fr/oceano/ies80/index.html>

En océanographie, on lui donne une autre définition pour des raisons pratiques :

$$\text{densité} = \text{masse volumique [kg m}^{-3}\text{]} - 1000.$$

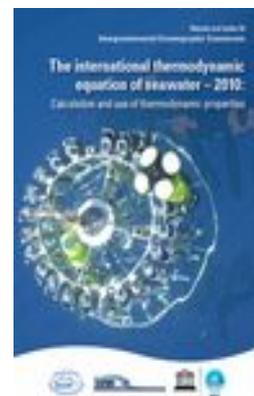
La masse volumique ρ de l'eau de mer dépend de la salinité S , de la température T et de la pression p .

La relation est l'équation d'état de l'eau de mer. Cette relation empirique est le résultat de nombreuses études en laboratoire. La première équation établie en 1902 par Knudsen et Ekman est aujourd'hui remplacée par l'« Équation Internationale d'État de l'Eau de Mer (1980) ».

Des formulations plus fines et récentes sont aussi présentes dans la littérature (Anati, 1999; Feistel 2003, 2005), ainsi que des formulations prenant en compte la variabilité géographique liée à la forme du géoïde (pour le concept de « *neutral density* » voir McDougall, 1987).

En juin 2009, la Commission Intergouvernementale Océanographique (IOC, «*Intergovernmental Oceanographic Commission*»), avec l'appui du Comité Scientifique de Recherche Océanographique (SCOR, «*Scientific Committee Oceanic Research*») et de l'Association Internationale des Sciences Physiques de l'Océan (IAPSO, «*International Association of the Physical Sciences of the Oceans*»), a adopté l'Équation Thermodynamique de l'eau de mer 2010 (TEOS-10, «*Thermodynamic Equation of Seawater – 2010*») comme définition officielle des propriétés de l'eau de mer et de la glace en science de l'océan.

Il est d'ores et déjà fortement conseillé aux océanographes d'utiliser les algorithmes et variables définis par TEOS-10 pour rapporter leurs résultats.



Les différences fondamentales de TEOS-10 par rapport à EOS-80 sont :

(1) l'utilisation de la Salinité Absolue (Absolute Salinity SA) pour décrire la salinité de l'eau de mer.

La Salinité Absolue prend en considération la variabilité spatiale de la composition de l'eau de mer. En pleine mer, l'usage de cette nouvelle salinité a un effet non trivial sur le gradient horizontal de masse volumique, et ainsi sur les vitesses calculées via l'équation du "vent thermique".

(2) L'utilisation de la Température Conservatrice (Conservative Temperature Q) pour remplacer l'utilisation de la température potentielle q . Ces deux températures sont des grandeurs déterminées à partir d'une expérience de pensée (à savoir, grandeurs ramenées à la pression de surface de manière adiabatique et isohaline). La Température Conservatrice présente l'avantage de mieux représenter la capacité calorifique de l'eau de mer, avec une précision supérieure de deux ordres de grandeur à celle de la température potentielle.

(3) Les propriétés de l'eau de mer définies par TEOS-10 découlent toutes mathématiquement d'une fonction de Gibbs (notamment par différenciation) et sont ainsi compatibles les unes avec les autres (contrairement à l'approche EOS-80 désormais obsolète, dans laquelle différents polynômes définissaient chaque variable thermodynamique et n'étaient pas mutuellement compatibles).

Pour permettre à tout océanographe d'utiliser le nouveau formalisme TEOS-10, deux logiciels sont disponibles :

- (i) La 'toolbox' océanographique Gibbs SeaWater (GSW) (pour MATLAB et FORTRAN) et,
- (ii) Sea-Ice-Air (SIA) (FORTRAN et Visual Basic).

Ces deux logiciels sont libres d'accès depuis le site internet suivant : <http://www.TEOS-10.org>.

Dans le cadre du cours, on peut toutefois apporter des simplifications.

On définit comme densité potentielle (« *potential density* ») la densité d'une particule qui a été déplacée adiabatiquement à une pression de référence, par exemple à la surface. Si les variations de pression sont petites, une dizaine d'atmosphères, cela correspond en pratique à négliger la contribution de la pression et adopter la relation plus simple :

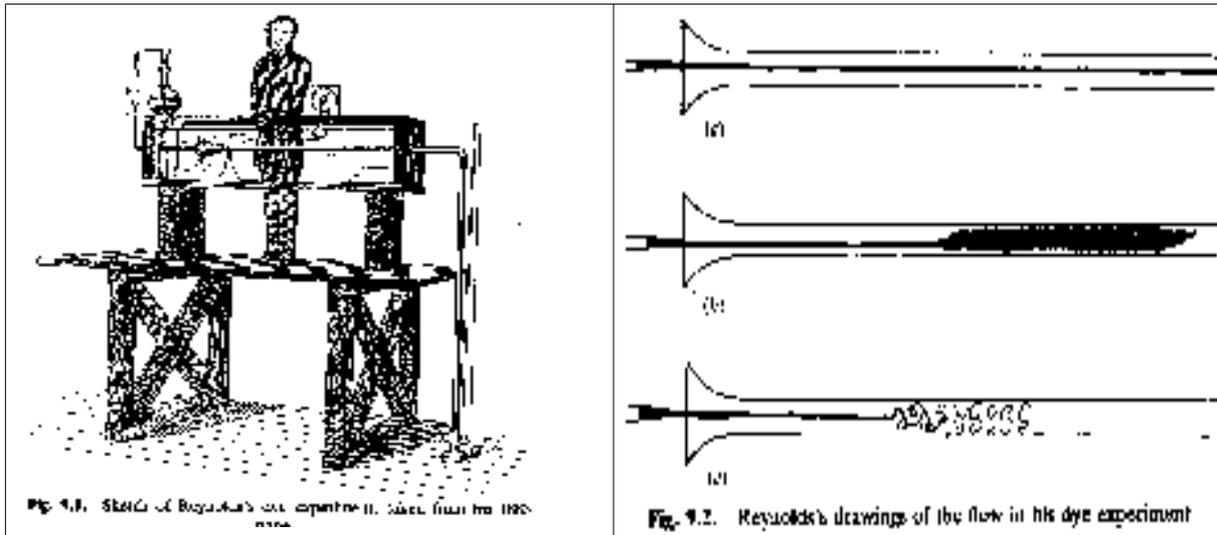
$$\rho = \rho(T, S)$$

Par exemple dans le modèle SYMPHONIE, la masse volumique s'obtient à partir de S et T par l'équation d'état diagnostique :

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0) + \beta(S - S_0)]$$

dans laquelle α et β sont les coefficients d'expansion thermique et de contraction saline. Ils valent respectivement $2.41 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ et $7.45 \cdot 10^{-4} \text{ psu}^{-1}$.

T_0 et S_0 sont la température et la salinité de référence $T_0 = 19.7 \text{ }^\circ\text{C}$, $S_0 = 35 \text{ ‰}$, se rapportant à $\rho_0 = 1024.8 \text{ kg/m}^3$.



His results were as follows:

1. At low velocities the streak of dye extended in a straight line along the tube.
2. If the water in the tank was not at rest, the streak would shift about the tube.
3. As the velocity increased, at some point in the tube, the color band would all at once mix up with the surrounding waters. When viewing the tube with an electric spark, this mixed fluid actually looked like a bunch of coherent eddies.

http://www.marine.maine.edu/~eboss/classes/SMS_491_2003/Week_5.htm

La « fermeture » de la turbulence

L'indétermination qui réside dans les termes de flux turbulents des équations primitives ne permet pas de résoudre le système d'équations. Il est nécessaire d'ajouter des équations que l'on appelle « de fermeture ». À l'aide de ces équations, on exprime les termes indéterminés en fonction de variables calculées par le modèle. On utilise pour cela une relation entre les flux turbulents et les gradients verticaux des paramètres non turbulents (hypothèse de fermeture newtonienne). L'écoulement dans l'océan est généralement turbulent, surtout dans les couches de surface et de fond, et les échelles de temps de ces mouvements sont typiquement en excès par rapport aux échelles typiques des fluctuations turbulentes. Dans ces circonstances, il est possible d'utiliser l'approche de Reynolds et de penser les équations de la continuité et du mouvement comme relatives à un écoulement moyen convenablement défini.

Les équations de l'écoulement moyen (Reynolds)

Pour un écoulement turbulent, plutôt que de rechercher la vitesse instantanée, que nous donnent les équations de Navier-Stokes vues précédemment, on cherche une vitesse lissée dans le temps, c'est-à-dire moyennée sur une période de temps dépendant du phénomène étudié.

Dans le même temps, pour chacune des variables (composantes de la vitesse et pression) on fait la décomposition suivante $u = \bar{u} + u'$, où \bar{u} est la moyenne et u' la variabilité autour de \bar{u} , telle que $\overline{u'} = 0$:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u \, dt \quad \overline{u'} = \frac{1}{T} \int_0^T u' \, dt = 0$$

Cette technique a été mise au point par Osborne Reynolds (http://en.wikipedia.org/wiki/Osborne_Reynolds). Établissons par exemple la moyenne du produit de deux composantes indépendantes u et v :

$$\overline{uv} = \frac{1}{T} \int_0^T uv \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T \bar{u}\bar{v} \, dt + \frac{1}{T} \int_0^T \bar{u}v' \, dt + \frac{1}{T} \int_0^T u'\bar{v} \, dt + \frac{1}{T} \int_0^T u'v' \, dt$$

ainsi

$$\overline{uv} = \overline{u\bar{v}} + \overline{u\bar{v}'} + \overline{u'\bar{v}} + \overline{u'v'}$$

mais puisque $\overline{u'} = \overline{v'} = 0$

$$\overline{uv} = \overline{u\bar{v}} + \overline{u'v'}$$

T représente un laps de temps suffisamment long pour que les valeurs moyennes soient indépendantes du temps. On a pour $v, w, p \dots$ des définitions analogues. Bien que $\overline{u'} = 0$, il faut noter que les fluctuations elles-mêmes peuvent être du même ordre de grandeur que u . De plus, les fluctuations superposées au vecteur vitesse moyen sont tridimensionnelles, c'est-à-dire que u', v', w' sont toujours présentes même si l'écoulement est mono ou bidimensionnel.

On peut montrer que tous les termes linéaires des équations de Navier-Stokes gardent, pour l'écoulement moyen, la même forme que pour l'écoulement instantané. En revanche les termes d'advection (à démontrer en exercice) deviennent :

$$\overline{\vec{V} \cdot \nabla u} = \overline{\vec{V}} \cdot \nabla \bar{u} + \underbrace{\overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y}} + \overline{w' \frac{\partial u'}{\partial z}}}_{\text{termes turbulents}}$$

Les équations de Reynolds diffèrent donc de celles de Navier-Stokes par l'apparition des termes « turbulents ». En anglais elles sont aussi appelées *RANS equations (Reynolds-averaged Navier-Stokes equations)*.

Tension de Reynolds et viscosité turbulente

On démontre que l'équation de continuité pour un fluide incompressible

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

satisfait pour l'écoulement moyen (à faire en exercice) la forme :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0$$

D'après les définitions de \bar{u} et u' nous obtenons :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial u}{\partial x} dt = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{T} \int_0^T u dt \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{T} \int_0^T (\bar{u} + u') dt \right] = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$$

on en déduit par soustraction ($u' = u - \bar{u}$) que

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

On peut donc écrire les termes turbulents de la façon suivante, sans en changer la valeur (selon Ox) :

$$\overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y}} + \overline{w' \frac{\partial u'}{\partial z}} + \overline{u' \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right)} = \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}$$

et l'équation de Reynolds pour la composante u s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + f \bar{v} + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}$$

Les trois derniers termes sont appelés termes de tensions de Reynolds.

J.V. Boussinesq (1842 – 1929) proposa de relier ensuite ces tensions de Reynolds aux composantes du gradient des vitesses moyennes de la façon suivante :

$$\overline{u'u'} = -A_x \frac{\partial u}{\partial x} ; \quad \overline{u'v'} = -A_y \frac{\partial u}{\partial y} ; \quad \overline{u'w'} = -A_z \frac{\partial u}{\partial z} ;$$

où les coefficients A sont appelés coefficients d'échange turbulent (*Austausch* = échange en allemand) ou *eddy viscosity* en anglais.

Si on néglige les variations spatiales de ces coefficients, les termes turbulents prennent une forme identique aux termes de frottement moléculaire, e.g. pour la composante x :

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + f\bar{v} + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right] + A \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right]$$

Puisque ces derniers sont beaucoup plus petits (dans océan, 10^{-5} à 10^{-6} sur la verticale, 10^{-10} à 10^{-12} sur l'horizontale) ils pourront par la suite être négligés.

Il faut en revanche faire attention aux simplifications car, contrairement à ν , les A ne sont pas des propriétés du fluide, mais de l'écoulement. Ils varient d'une position à l'autre et dépendent de l'échelle de « lissage » choisie. En océanographie, généralement, on fait une distinction entre les coefficients horizontaux et le coefficient vertical.

Maintenant, il s'agit de trouver une façon de calculer la valeur de ces coefficients turbulents.

Coefficients horizontaux

Dans les équations du mouvement on peut introduire les substitutions suivantes :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial(\overline{u'u'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{u'v'})}{\partial y} &= A_x \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + A_y \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} = A_h \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) \\ -\frac{\partial(\overline{v'u'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{v'v'})}{\partial y} &= A_x \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + A_y \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} = A_h \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

avec $A_x = A_y = A_h$ puisqu'il n'y a pas de raison pour considérer que le mélange turbulent horizontal soit différent dans les deux directions de l'espace (hypothèse de turbulence horizontale isotrope).

Le modèle POM (dans la littérature sur ce modèle, le coefficient est indiqué par A_M , où la lettre M signifie *momentum*, quantité de mouvement en anglais) on utilise généralement la formule de Smagorinski [1963], basée sur les gradients de vitesse :

$$A_h = C \Delta x \Delta y \frac{1}{2} |\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T| \quad \text{avec} \quad |\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T| = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Le coefficient C prend généralement valeurs dans l'intervalle 0.10 à 0.20, mais peut aussi être nul si la grille est suffisamment fine. L'avantage de la formule de Smagorinski est que C est sans dimension et que A_h décroît avec l'augmentation de la résolution, et reste petit si le gradient des vitesses est petit.

Dans les équations du modèle SYMPHONIE, le coefficient de viscosité horizontale turbulente est fréquemment indiqué dans la littérature par ν_h . Du point de vue de la physique, il ne dépend pas des propriétés du fluide mais du type d'écoulement et donc, du point de vue numérique, il dépend de la taille de la maille de grille. Il a été généralement fixé constant, avec une valeur d'environ $5 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ pour une maille de $1 \text{ km} \times 1 \text{ km}$.

Le **nombre de Prandtl** est un nombre sans dimension. Il fournit une mesure de l'efficacité du transport par diffusion à travers la couche limite de vitesse et la couche limite thermique.

Le nombre de Prandtl représente le rapport entre la diffusivité de quantité de mouvement ν (ou viscosité cinématique) et la diffusivité thermique.

$$Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda} = \frac{\mu}{\frac{\lambda}{C_p}} = \frac{\frac{\mu}{\rho}}{\frac{\lambda}{\rho C_p}} = \frac{\nu}{\alpha}$$

ν la viscosité cinématique en $m^2.s^{-1}$	μ la viscosité dynamique en $N.s.m^{-2}$
ρ la masse volumique en $kg.m^{-3}$	C_p la chaleur massique en $J.kg^{-1}.K^{-1}$
α la diffusivité thermique en $m^2.s^{-1}$	λ la conductivité thermique $W.m^{-1}.K^{-1}$

Le **nombre de Schmidt** est l'équivalent de Pr pour la salinité (ou mieux, en générale pour une certaine propriété), il faut donc remplacer la diffusivité thermique avec celle haline, etc.

http://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_de_Prandtl

Récemment, un nouveau schéma numérique d'advection-diffusion a été implémenté pour ce modèle [Hu *et al.*, 2009] avec un coefficient variable selon la direction, la résolution de la maille de grille et dans le temps :

$$\tilde{A}_x = \delta |u| \frac{\Delta x}{2} \quad \text{et} \quad \tilde{A}_y = \delta |v| \frac{\Delta y}{2}$$

Pour le modèle ROMS, il y a la possibilité de choisir entre le schéma de Smagorinski et un coefficient constant (option *Laplacian horizontal mixing of momentum*). Dans ce deuxième cas, si la grille horizontale est variable, la viscosité est multipliée par un facteur adimensionnel prenant en compte la taille de la maille de grille avec une formulation harmonique ou bi-harmonique [Holland *et al.* (1998); Webb *et al.* (1998); Griffies *et al.* (2000a); Lee *et al.* (2002)].

Pour plus de détails, voir dans la suite les propriétés des schémas d'advection (chapitre 3).

Pour ce qui concerne les équations de la température et de la salinité, d'une manière similaire on a :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial(\overline{T'u'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{T'v'})}{\partial y} &= A_h^T \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = \frac{A_h}{Pr_{turb}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \\ -\frac{\partial(\overline{S'u'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{S'v'})}{\partial y} &= A_h^S \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right) = \frac{A_h}{Sc_{turb}} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

étant que le coefficient de diffusivité turbulente pour la température (respectivement, pour la salinité) peut s'exprimer par le rapport du coefficient de viscosité turbulent avec le nombre de Prandtl (respectivement, de Schmidt) turbulent.

NB: Les modèles de circulation océanique simulent toujours des écoulements turbulents, donc il faut remplacer la viscosité cinématique avec celle turbulente, la diffusivité thermique avec la diffusivité thermique turbulente, etc. et parler plus proprement de nombre de Prandtl (de Schmidt) turbulent.

Enfin, en générale dans les modèles océaniques on tient pas compte des possibles différences entre coefficients turbulents de la température et de la salinité et on utilise un seul coefficient pour tous les traceurs :

$$A_h^T = A_h^S = A_h^{tr}$$

Le coefficient de diffusivité turbulente horizontal a une valeur du même ordre de grandeur que celui du coefficient de viscosité horizontal.

Mellor [POM user's guide, 2004] suggère d'adopter une petite valeur du nombre de Prandtl turbulent, environ 0.2, afin d'éviter une diffusion excessive due à la discrétisation en coordonnées sigma.

Coefficients verticaux

Dans les équations du mouvement et de conservation des traceurs on peut introduire les substitutions suivantes :

$$-\frac{\partial}{\partial z}(\overline{u'w'}, \overline{v'w'}) = A_z \frac{\partial^2(u, v)}{\partial z^2}$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}(\overline{T'w'}, \overline{S'w'}) = A_z^{tr} \frac{\partial^2(T, S)}{\partial z^2} \quad \text{avec } tr = T, S$$

Sur la détermination de la valeur des coefficients turbulents verticaux, s'agissant d'un dès problèmes majeurs de la modélisation, une très vaste littérature existe. On peut résumer les différentes approches que l'on verra dans la suite, de la façon suivante :

Approche	Papier de référence	Modèle
Énergie cinétique	Gaspard et al. (1990)	SYMPHONIE
	Mellor et Yamada (1974)	POM, ROMS (vs. Rutgers)
Profile K	Pacanowski et Philander (1981)	ROMS
	Large et al. (1994)	ROMS

D'abord on verra les modèles de fermeture turbulente basée sur le calcul de l'énergie cinétique turbulente avec une équation pronostique dédiée.

Modèle SYMPHONIE : Gaspar et al. (1990)

Dans le code SYMPHONIE, d'une manière similaire à ce qu'on a vu pour l'horizontale, le coefficient de diffusivité turbulente A_z^{tr} s'exprime pour la température (respectivement, la salinité) par le rapport du coefficient de viscosité turbulente verticale A_z avec le nombre de Prandtl turbulent (respectivement, de Schmidt turbulent) :

$$-\frac{\partial}{\partial z}(\overline{T'w'}, \overline{S'w'}) = A_z^{tr} \frac{\partial^2(T, S)}{\partial z^2} = \frac{A_z}{(Pr_{turb}, Sc_{turb})} \frac{\partial^2(T, S)}{\partial z^2}$$

Il reste alors à déterminer la valeur du coefficient de viscosité turbulente verticale.

NB : dans la littérature sur ce modèle, les coefficients de viscosité et de diffusivité sont souvent indiqués avec ν_t et Γ_t , respectivement l'énergie cinétique avec K et le coefficient empirique C_k .

La turbulence intervient à une échelle spatiale inférieure à une maille du modèle. La viscosité turbulente est reliée à l'énergie cinétique turbulente Q par la relation :

$$A_z = C_Q L Q^{1/2}$$

C_Q est une constante empirique, L est la longueur de mélange qui est une échelle de longueur caractéristique de la dimension des tourbillons associés à l'écoulement turbulent. Q s'exprime en fonction des composantes turbulentes de la vitesse :

$$Q = \frac{1}{2}(u'^2 + v'^2 + w'^2)$$

et elle se calcule de manière pronostique à partir de l'équation d'évolution suivante :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} Q = A_z \underbrace{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right]}_{(1)} + \underbrace{\frac{g}{\rho_0} A_z \frac{\partial \rho}{\partial z}}_{(2)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left(A_z \frac{\partial Q}{\partial z} \right)}_{(3)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(A_h \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_h \frac{\partial Q}{\partial y} \right)}_{(4)} - \varepsilon$$

Dans cette équation, la production d'énergie turbulente par cisaillement de la vitesse est représentée par le terme (1), la production par la flottabilité par le terme (2), la redistribution de l'énergie par diffusion turbulente est représentée par le terme (3) dans la verticale et par le terme (4) dans l'horizontale.

La dissipation de l'énergie turbulente ε est paramétrée en fonction de la longueur de dissipation L_ε :

$$\varepsilon = \frac{C_\varepsilon \cdot Q^{3/2}}{L_\varepsilon}$$

Les constantes C_ε et C_Q ont été déterminées par Gaspar et al. [1990] dans l'océan: $C_\varepsilon = 0.7$ et $C_Q = 0.1$. Pour déterminer les longueurs de mélange et de dissipation, le modèle SYMPHONIE utilise l'approche de Bougeault and Lacarrère [1989] qui est intéressante car la formulation des longueurs tient compte de la stabilité locale du fluide et permet ainsi d'améliorer la représentation des échanges turbulents, notamment au niveau de la thermocline.

On explique les longueurs L et L_ε de la façon suivante : soit une particule fluide située à un niveau z . Elle possède comme énergie cinétique l'énergie cinétique de la turbulence moyenne de ce niveau. Elle peut donc se déplacer vers le haut et vers le bas tant que cette énergie n'est pas compensée par l'énergie potentielle qu'elle acquiert au fur et à mesure de ce mouvement vertical. Elle se déplace ainsi vers le haut d'une longueur L_{up} et vers le bas d'une longueur L_{down} .

Ces distances sont calculées grâce aux relations

$$Q(z) = \frac{g}{\rho_0} \int_z^{z+L_{up}} (\rho(z) - \rho(z')) dz' \quad \text{et} \quad Q(z) = \frac{g}{\rho_0} \int_{z-L_{down}}^z (\rho(z) - \rho(z')) dz'$$

et en suite on fixe

$$L = \min(L_{up}, L_{down}) \quad \text{et} \quad L_\varepsilon = \sqrt{L_{up} \cdot L_{down}}$$

Modèle POM : Mellor-Yamada (1974)

Le modèle POM utilise un autre type de modèle, mais toujours basé sur l'idée de résoudre une équation pronostique pour l'énergie cinétique turbulente. Une deuxième équation est utilisée pour la longueur de mélange. Ci-dessous les deux équations écrites dans un système de référence x, y, σ (Mellor, 2004, *POM user's guide*).

NB : Dans la littérature sur ce modèle, les coefficients de viscosité et diffusivité verticales turbulentes sont indiqués avec la lettre K : K_M pour la quantité de mouvement (*momentum* en anglais), K_H pour la température (*heat*) et la salinité, K_q pour l'énergie cinétique turbulente.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Q^2 D}{\partial t} + \frac{\partial U Q^2 D}{\partial x} + \frac{\partial V Q^2 D}{\partial y} + \frac{\partial \omega Q^2}{\partial \sigma} = \\ & = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{A_z^Q}{D} \frac{\partial Q^2}{\partial \sigma} \right] + \frac{2A_z}{D} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial \sigma} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \sigma} \right)^2 \right] + \frac{2g}{\rho_0} A_z^T \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \sigma} - \frac{2DQ^3}{B_1 L} + F_{Q^2} \\ & \frac{\partial Q^2 L D}{\partial t} + \frac{\partial U Q^2 L D}{\partial x} + \frac{\partial V Q^2 L D}{\partial y} + \frac{\partial \omega Q^2 L}{\partial \sigma} = \\ & = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{A_z^Q}{D} \frac{\partial Q^2 L}{\partial \sigma} \right] + E_1 L \left(\frac{A_z}{D} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial \sigma} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \sigma} \right)^2 \right] + E_3 \frac{g}{\rho_0} A_z^T \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \sigma} \right) - \frac{DQ^3}{B_1} \tilde{W} + F_{Q^2 L} \end{aligned}$$

$$\text{où } F_\Phi \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(H A_h^r \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(H A_h^r \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \quad \text{avec } \Phi = Q^2 \text{ ou } Q^2 L$$

Les diffusivités verticales A_z, A_z^r, A_z^Q sont définies

$$A_z = Q L S_M$$

$$A_z^r = Q L S_H$$

$$A_z^Q = Q L (0.41 S_H) \quad \text{!?!?!SH in pom2k, SM in pom98 !?!?!}$$

et les coefficients S_M et S_H sont calculés en fonction du nombre de Richardson G_H

$$S_H [1 - (3A_2 B_2 + 18A_1 A_2) G_H] = A_2 [1 - 6A_1 / B_1]$$

$$S_M [1 - 9A_1 A_2 G_H] - S_H [(18A_1^2 + 9A_1 A_2) G_H] = A_1 [1 - 3C_1 - A_1 / B_1]$$

avec

$$G_H = \frac{L^2 g}{Q^2 \rho_0} \left[\frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{1}{C_s^2} \frac{\partial p}{\partial z} \right]$$

Mellor et Yamada [1974] trouvent empiriquement les valeurs des 5 constantes :

$$(A_1, B_1, A_2, B_2, C_1) = (0.98, 16.6, 0.74, 10.1, 0.08) .$$

C_s^2 est le carré de la vitesse du son et l'approximation hydrostatique est utilisée pour trouver

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_0 g .$$

Kantha and Clayson [1994] ont critiqué les schémas du type Mellor-Yamada, qui sont connus pour sous-estimer l'entraînement pendant la convection et donc le mélange au travers de gradients de densité stables.

Le modèle ROMS, plus moderne, laisse donc la possibilité de choisir entre différents schémas : Mellor and Yamada [1974] d'une coté et deux schémas [Pacanowski et Philander, 1981 ou Large et al., 1994] qui adoptent une paramétrisation dite de type *K-profile*. Ce nom dérive du fait que souvent le coefficient de viscosité ou de diffusivité est indiqué avec la lettre K. La différence principale par rapport aux schémas précédents est qu'à la place de résoudre une équation pronostique de l'énergie cinétique turbulente, on adopte pour les coefficients verticaux de viscosité et de diffusion un certain profil vertical. Le but est donc de trouver le profil le plus généraliste (*non-local* en anglais) possible.

Modèle ROMS : Pacanowski et Philander (1981)

NB : dans ce papier les coefficients de viscosité et de diffusivité sont indiqués avec ν et κ .

Les mesures de Crawford et Osborn (1979) et Osborn et Bilodean (1980) suggèrent que les processus de mélange sont fortement influencés pas le cisaillement des courants moyens. Des études empiriques (Robinson, 1966; Jones, 1973) indiquent que la dépendance de la viscosité et de la diffusivité turbulentes soit de la forme :

$$A_z = \frac{\nu_0}{(1 + \alpha Ri)^n} + \nu_b \quad \text{et} \quad A_z^r = \frac{A_z}{(1 + \alpha Ri)} + \kappa_b$$

avec le nombre de Richardson $Ri = \frac{\beta g T(z)}{u^2(z) + v^2(z)}$

et le coefficient d'expansion thermique $\beta \simeq 8.75 \times 10^{-6} (T + 9)$

Le nombre de Richardson et la fréquence de Brunt-Väisälä

$$Ri = \frac{N^2}{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

Ri compare la stabilité statique représentée par la fréquence de Brunt-Väisälä N à l'instabilité dynamique représentée par le gradient vertical de la vitesse. Si $Ri > 0.25$ le milieu est stable; si $Ri < 0.25$ un gradient vertical de vitesse augmente la turbulence.

Si le fluide est incompressible

$$N^2 = -\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

et une certaine stratification est dite « stable » si $N^2 > 0$.

On peut expliquer la nature oscillatoire des fluides stratifiés en pensant à une particule de fluide dont la densité augmente avec la profondeur. Lorsqu'elle se trouve déplacée verticalement en dehors de sa position d'équilibre, sa densité devient plus grande ou plus faible que le fluide environnant et une force de restitution excédentaire, la pesanteur ou la poussée d'Archimède respectivement, apparaît et tend à la ramener vers le point d'équilibre. En général, par inertie la particule dépasse l'équilibre sur son chemin de retour.

Par exemple, entre autres paramètres, la fréquence de Brunt-Väisälä contrôle la hauteur et l'espacement entre les rues de cumulus ou les altocumulus lenticularis en aval de montagnes, ainsi que celui entre les crêtes de houle en pleine mer.

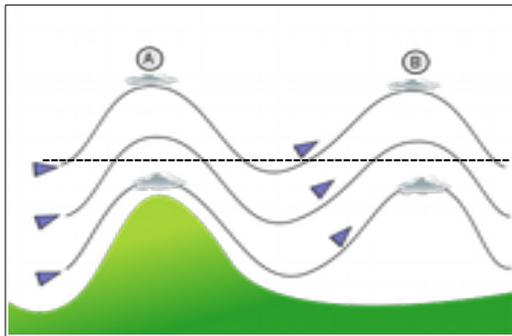


Diagramme du soulèvement orographique au-dessus d'une montagne et de l'onde qui est générée en aval. Des nuages sont créés dans les maxima de l'onde si l'air soulevé devient saturé (points A et B) [image [Dake](#)].
http://fr.wikipedia.org/wiki/Onde_orographique



Bandes parallèles de nuages formées par une onde orographique en aval de l'île Amsterdam et dont l'espacement est gouverné par la fréquence de Brunt-Väisälä [Image [NASA](#), satellite MODIS].

http://fr.wikipedia.org/wiki/Fréquence_de_Brunt-Väisälä

Dans les formules précédentes, T indique la température en °C, u et v sont les composantes horizontales de la vitesses, g est l'accélération de la pesanteur, ν_b et κ_b sont des paramètres de dissipation de fond (*background*) et ν_o , α et n sont des paramètres de calibration.

Suite à une série de tests numériques pour l'océan équatorial avec différents régimes de vent (vent d'est et d'ouest), Pacanowski et Philander trouvent que les résultats les plus en accord avec les mesures sont obtenus en choisissant pour les paramètres de calibration les valeurs suivantes :

$$\nu_b = 1 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$\kappa_b = 0.1 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$n = 2$$

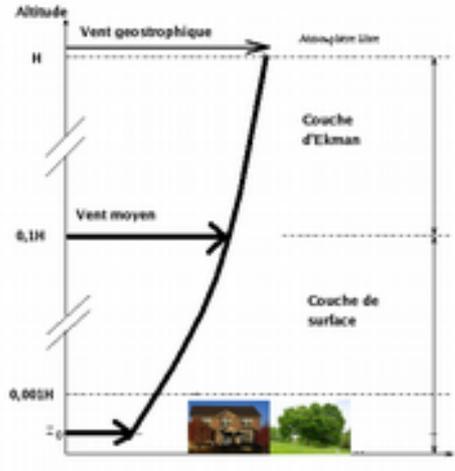
$$\alpha = 5$$

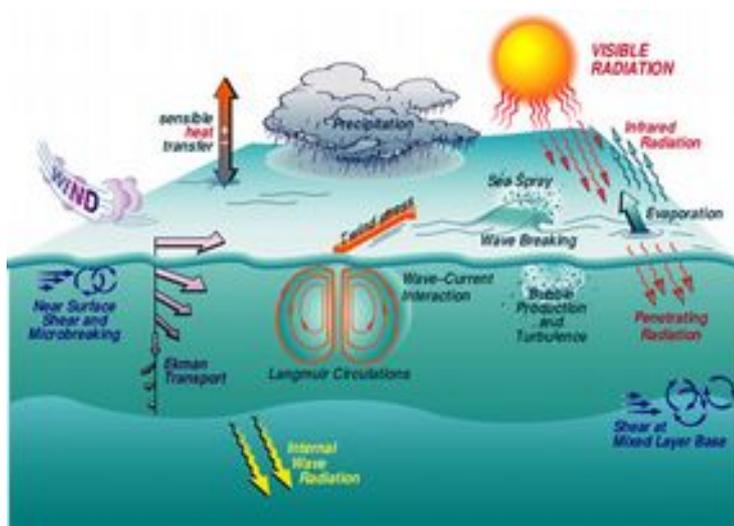
$$\nu_o = O(50 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1})$$

En même temps, ils signalent qu'ayant aussi utilisé le schéma de Mellor et Durbin (1975), ils trouvent beaucoup plus de difficultés dans l'implémentation numérique de ce dernier, pour obtenir les mêmes résultats. Ils concluent donc que leur modèle est aussi plus efficace du point de vue numérique.

Modèle ROMS : KPP, Large et al. (1994)

Le cœur de ce schéma de mélange vertical est la paramétrisation pour la couche limite de surface dite *KPP*, *K - profile parameterization*. Autour de cette partie principale, Large et al. (1994) proposent aussi une paramétrisation du mélange dans l'intérieur de l'océan et des conditions pour coupler les deux parties : surface et intérieur. Toutefois, vu l'importance du mélange dans la couche limite de surface, ce schéma de mélange est généralement indiqué avec le nom de *KPP model*.

<p>COUCHE LIMITE ATMOSPHERIQUE</p>  <p>Altitude</p> <p>H</p> <p>Vent géostrophique</p> <p>Atmosphère libre</p> <p>Couche d'Ekman</p> <p>Vent moyen</p> <p>0,5H</p> <p>Couche de surface</p> <p>0,05H</p> <p>0</p> <p>H = HAUTEUR DE LA COUCHE</p> <p>En météorologie, on appelle <i>couche limite planétaire</i> (<i>ABL, Atmospheric Boundary Layer</i>) la zone de l'atmosphère entre la surface (terre ou mer), où la friction ralentit le déplacement de l'air, et l'atmosphère libre où cette dernière devient négligeable. Elle varie entre 0,5 et 3 km d'épaisseur selon la stabilité de l'air et la rugosité de la surface.</p>	<p>http://fr.wikipedia.org/wiki/Couche_limite</p> <p>Elle est en moyenne de 1 500 mètres. L'étude théorique de cette tranche d'atmosphère divise en fait la couche limite planétaire comme la superposition de deux couches dont les épaisseurs sont très inégales :</p> <ul style="list-style-type: none"> - la couche d'Ekman (d'après le nom du physicien suédois Vagn Walfrid Ekman) dans laquelle le vent est causé par un équilibre entre le gradient de pression, la force de Coriolis, due à la rotation quotidienne de la Terre, et une portion de la friction diminuant graduellement jusqu'à l'atmosphère libre. La vitesse et la direction au sommet de cette couche est approximativement celle du vent géostrophique alors qu'elle diminue graduellement et tourne vers la plus basse pression à mesure qu'on descend vers le sol; - la couche de surface ou couche limite de turbulence atmosphérique immédiatement au contact du sol et dont l'épaisseur ne dépasse pas le dixième de celle de l'ensemble de la couche limite. La vitesse de l'air y est causée par la convection due aux différences de températures et par les effets dynamiques du relief. Le flux y est turbulent. On parle également d'une sous-couche rugueuse tout près de la surface, qui varie de quelques centimètres à quelques dizaines de mètres selon les aspérités du relief. La vitesse y tend vers zéro.
---	---

<p>COUCHE LIMITE OCÉANIQUE</p> <p>La partie superficielle de l'océan présente typiquement une couche bien mélangée d'une épaisseur variant de quelques mètres à quelques centaines de mètres (<i>OBL, Ocean Boundary Layer</i>). Cette couche mélangée est une composante clé des études du climat, de la production biologique et de la pollution marine. Elle est le lien entre l'atmosphère et l'océan profond, intervient dans les échanges de chaleur, de mouvement et gazeux entre air et mer. Les écoulements turbulents dans cette couche conditionnent la production biologique en contrôlant l'arrivée des sels nutritifs dans la zone éclairée et l'exposition du phytoplancton à la lumière.</p> <p>De nombreux processus contribuent au mélange vertical dans la couche limite océanique. La convection thermique peut être générée par la perte de chaleur de l'océan via la radiation de retour à ondes longues.</p>	<p>http://hpl.umces.edu/ocean/sml_main.htm</p>  <p>Le cisaillement des courants dû au vent peut produire des instabilités de Kelvin-Helmholtz. L'interaction entre ondes et courants de surface dû au vent génère la circulation de Langmuir, qui consiste en des couples de tourbillons horizontaux, en rotation opposée, alignés dans la direction du vent.</p>
--	---

NB : dans le papier, la lettre X représente les quantités moyennées dans le temps (u, v, T, S) tandis que x représente les variations turbulentes (u', v', t', s'). K_x sont les coefficients turbulents verticaux pour les différentes propriétés dans la couche limite, tandis que ν_x sont les coefficients dans le fluide intérieur. Les auteurs ont aussi adopté une notation pour la coordonnée verticale basée sur d , la distance de la limite de la couche, donc dans la couche limite atmosphérique $d = z$ et dans celle océanique OBL $d = -z$, le zéro étant à la surface de la mer.

Ci-dessous on adopte cette dernière convention, tandis que toutes les équations sont écrites pour la composante u de la vitesse.

Un modèle généraliste (*nonlocal*) adoptant un profil vertical pour les coefficients turbulents verticaux a été développé par Troen et Mahrt [1986] pour des modèles d'atmosphère à grande échelle. Les deux principaux aspects qui en font un modèle généraliste sont :

- un terme de transport ajouté dans la partie droite de l'équation de fermeture ; par exemple pour la composante u de la vitesse :

$$\overline{u'w'} = -A_z \frac{\partial u}{\partial z} + ??$$

- la diffusivité dans la couche limite dépend du forçage à la surface mais aussi de l'épaisseur de la couche limite h ; toujours pour la composante u de la vitesse on a :

$$A_z \equiv A_z([\overline{w'u'}]_{surf}, h)$$

La théorie de Prandtl [1925, *nonlinear mixing length*] propose que la taille significative des tourbillons dans la couche limite, dite longueur de mélange (*mixing length*) L_m , soit proportionnelle à l'écart type du déplacement des particules du fluide.

Heisenburg's [1948] fait l'hypothèse que $A_z \propto L_m^{4/3}$ et aussi $A_z \propto \nu^{1/3}$ où ν est la diffusion moléculaire

Blackadar [1962] reformule cette dernière dépendance en termes de cisaillement vertical pour finalement arriver à l'expression suivante

$$A_z = L_m^2 [(\partial_z U)^2 + (\partial_z V)^2]^{1/2} \text{ avec } L_m = \kappa d / (1 + \kappa d / L_o)$$

où L_o est une valeur asymptotique de L_m empirique, obtenue par les observations de l'atmosphère.

Dans l'océan cette formulation fournit seulement de bons résultats proche de la surface, où L_m approche $\kappa d = 0.4$ (constante de Von Karman) en accord avec la formulation de la théorie de la similarité entre viscosité turbulente et moléculaire.

Toutefois cette formulation correspond à la définition précédente parce qu'elle contient un terme non local de transport, et qu' A_z dépend du cisaillement local et de l'épaisseur de la couche limite.

Il y a beaucoup d'autres paramétrisations de L_m ; entre autres, dans les modèles numériques où la maille de grille Δ est plus petite que la taille des tourbillons les plus significatifs, la théorie de la longueur de mélange est utilisée pour paramétrer le processus de mélange sous-maille. Pour cette raison, il est commun de prendre $L_m \propto \Delta$ comme pour Smagorinsky [1963] qui a développé sa formule (voir ci-dessus) pour un modèle de circulation générale de l'atmosphère à 2 couches. Cette formulation est aussi utilisée pour le coefficient vertical dans les simulations *LES* (*Large Eddies Simulations*) qui arrivent toutefois, sur des domaines idéalisés, à résoudre en 3D une partie significative du champ tourbillonnaire [Lilly, 1967; Deardorff, 1970].

Large et al [1994] ont adapté la paramétrisation KPP de Troen and Mahrt [1986] pour un modèle de OBL (*oceanic boundary layer*).

Le problème de déterminer les flux turbulents de quantité de mouvement et des scalaires actives et passives est résolu en ajoutant un terme γ ; toujours pour la composante x de la vitesse on peut donc écrire :

$$\overline{w'u'}(d) = -A_z \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \gamma \right)$$

En pratique, l'idée est de prescrire d'abord le forçage externe, de calculer ensuite l'épaisseur de la couche h , et enfin les profils des coefficients de viscosité et diffusivité A_z et A_z^r et de transport non-local γ .

Le profil de viscosité/diffusivité est le produit entre h , épaisseur de l'OBL, w_x , l'échelle de la

vitesse turbulente et G (sans dimensions), une fonction qui donne la forme du profil :

$$A_z(\sigma) = h w_x(\sigma) G(\sigma)$$

w_x et G dépendent de la profondeur, représentée ici par $\sigma = d/h$ coordonnée verticale qui varie entre 0 et 1 dans la couche limite.

À chaque profondeur, les valeurs de A_z sont directement proportionnelles à h pour mieux modéliser le fait que des couches limites plus profondes peuvent contenir des tourbillons plus grands et plus efficaces.

L'épaisseur de l'OBL dépend du forçage à la surface, de la flottabilité B due à la stratification (B pour *buoyancy* et on utilise le nombre de Richardson pour déterminer la stabilité de la couche) et des profils de vitesse V :

$$h \equiv h([\overline{w'u'}]_{surf}, B(d), V(d))$$

Le terme γ vaut zéro sauf pour les scalaires (T, S, etc.) quand il y a des conditions de forçage très instables, et dans ce cas il y a des paramétrisations ; par exemple pour la salinité :

$$\gamma_s = C^* \frac{[\overline{w'u'}]_{surf}}{w^* h}$$

À l'intérieur de l'océan, il n'y a plus de terme de transport non-local et, pour souligner que les processus sont différents, on remplace dans le symbole du coefficient la lettre majuscule avec une minuscule :

$$\overline{w'u'}(d) = -a_z \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

Le processus de mélange est considéré comme la somme de trois processus :

- l'instabilité du nombre de Richardson local liée au cisaillement vertical résolu ;
- le déferlement des ondes internes ;
- la double diffusion.

Chaque processus est paramétré en termes de diffusivité vertical local :

$$a_z(d) = a_z^{inst}(d) + a_z^{wave}(d) + a_z^{double}(d)$$

et éventuellement d'autres processus peuvent être ajoutés et de même, des simplifications peuvent être apportées si un des processus est prédominant, alors les autres peuvent être mis à zéro.

Ces deux dernières formules donnent aussi les conditions aux limites $a(h)$ et $w_x(1)$ pour la fonction G . À la frontière entre couche limite et intérieur de l'océan, elle prend la forme

$$G(1) = \frac{a_z(h)}{h w_x(1)}$$

La diffusivité due à l'instabilité liée au cisaillement vertical sera fixée sur la base du *local gradient Richardson number*

• Large et al.: OCEANIC VERTICAL MIXING

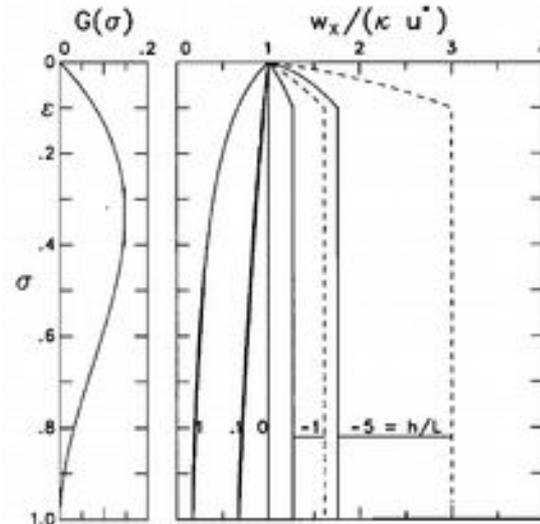


Figure 2. (left) Vertical profile of the shape function $G(\sigma)$, where $\sigma = d/h$, in the special case of $G(1) = \partial_\sigma G(1) = 0$. (right) Vertical profiles of the normalized turbulent velocity scale, $w_x(\sigma)/(\kappa u^*)$, for the cases of $h/L = 1, 0.1, 0, -1$, and -5 . In unstable conditions, $w_x(\sigma)$ (dashed traces) is greater than $w_m(\sigma)$ (solid traces) at all depths, but for stable forcing $h/L \geq 0$, the two velocity scales are equal at all depths.

$$Ri_g = \frac{N^2}{(\partial_z U)^2 + (\partial_z V)^2}$$

La grandeur du mélange lié aux ondes internes peut être calculée sur la base du *Garrett-Munk internal wave model* [Gregg, 1989] et l'équation de dissipation et diffusion d'Osborn's [1980], mais cette diffusivité qui varie seulement avec l'énergie de l'onde semble être petite.

On fixe alors des valeurs constantes :

$$a_z^{wave} = 1.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad \text{pour la quantité de mouvement et}$$

$$a_z^{wave} = 0.1 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad \text{pour les traceurs .}$$

Enfin, la double diffusion agit quand le gradient de densité est stable, mais sont instables le gradient vertical de la salinité (*salt fingering*) ou de la température (*diffusive convection*) dans leur contribution à la densité [Turner, 1973]. De plus dans l'océan, la cause de la *double diffusion* est la diffusion moléculaire plus rapide de la T par rapport à la S. Cela réduit l'énergie potentielle du profil vertical avec un mélange préférentiel pour la composante (T ou S) qui se déstabilise.

Là aussi, on a des fonctions de variation de a_z^{double} basées sur le rapport

$$R_p = \frac{\alpha \partial_z T}{\beta \partial_z S}$$

• Large et al.: OCEANIC VERTICAL MIXING

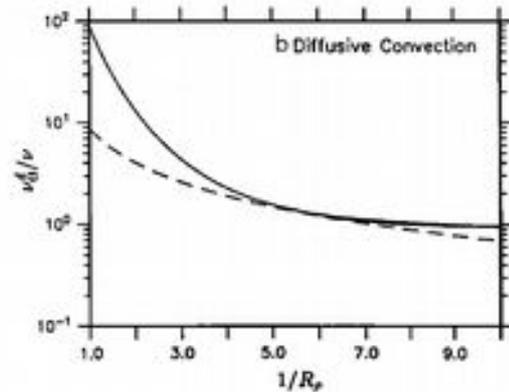
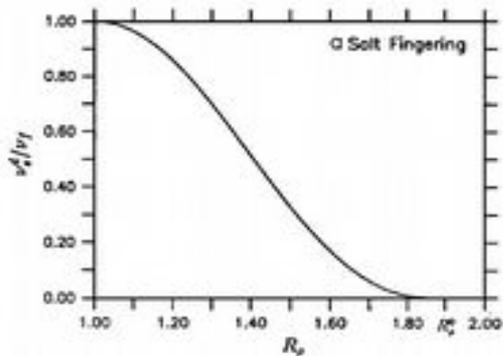


Figure 4. (a) Interior diffusivity for double-diffusive mixing due to salt fingering, $v_f^d = v_m^d$ (equation (31)), normalized by its maximum, $v_f = 10 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, as a function of the density ratio R_p (equation (30)). (b) Interior diffusivity of potential temperature for double-diffusive mixing due to diffusive convection, v_d^d , normalized by the molecular diffusivity $\nu (= 1.5 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1})$, as a function of R_p^{-1} . The solid trace represents (32); the dashed trace, (33).

Les conditions aux limites

Ces conditions concernent la surface, le fond, ainsi que les frontières latérales fermées à la côte et celles ouvertes sur l'océan.

À la surface libre

Pour ce qui concerne la vitesse du courant et l'énergie cinétique, les conditions aux limites à cette frontière $z=\eta$ pour le modèle SYMPHONIE s'écrivent :

$$A_z \left(\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z} \right) = (\tau_{sx}, \tau_{sy}) \quad \text{pour } z=\eta$$

$$Q = \frac{\|\vec{\tau}_s\|}{\rho_o \sqrt{C_\epsilon \cdot C_Q}} \quad \text{pour } z=\eta$$

La tension de surface $\vec{\tau}_s = (\tau_{sx}, \tau_{sy})$ est calculée à partir de ρ_{air} la masse volumique de l'air (1.266 kg.m^{-3}), de la vitesse du vent à 10 m d'altitude \vec{V}_{vent} (e.g. dans le cas du Golfe du Lion, elle est donnée par le modèle ALADIN de Météo-France) et de C_v le coefficient de traînée :

$$\vec{\tau}_s = \rho_{air} C_v \|\vec{V}_{vent}\| \vec{V}_{vent}.$$

Pour le modèle POM :

$$\frac{K_M}{D} \left(\frac{\partial U}{\partial \sigma}, \frac{\partial V}{\partial \sigma} \right) = - (\langle wu(0) \rangle, \langle wv(0) \rangle), \quad \sigma \rightarrow 0 \quad \sigma = \frac{z-\eta}{H+\eta}$$

Pour ce qui concerne la température la condition aux limites à la surface s'obtient du bilan de chaleur :

$$A_z^T \frac{\partial T}{\partial z} = H_s + H_e + H_l + (1-Tr)H_c \quad \text{pour } z=\eta$$

où :

H_s est le flux de chaleur sensible
 H_e représente le flux de chaleur latente
 H_l est le flux radiatif des ondes longues
 H_c est le flux radiatif des ondes courtes
 Tr est le coefficient de transmission.

RAPPEL : On appelle **chaleur sensible** la quantité de chaleur qui est échangée, sans transition de phase physique, entre deux corps formant un système isolé. La chaleur sensible s'oppose à la **chaleur latente**, qui elle, ne se traduit pas par un changement de température, mais par un changement de phase.

Les flux H_e et H_s sont calculés à partir de la température de surface de la mer fournie par le modèle et des paramètres atmosphériques fournis par un modèle atmosphérique (température et humidité de l'air à 2 m d'altitude, la température au niveau du sol, la pression atmosphérique au niveau de la mer et le vent à 10 m d'altitude. Ce calcul repose sur une paramétrisation dite « *bulk* » des flux à l'interface océan-atmosphère (voir Annexe 1, Thèse de C. Dufau-Julliand). Les flux des grandes et courtes longueurs d'onde peuvent être directement fournis par les modèles atmosphériques.

En ce qui concerne la salinité, la condition aux limites à la surface s'obtient à partir du bilan du sel :

$$A_z^S \frac{\partial S}{\partial z} = (E-P)S \quad \text{pour } z=\eta$$

P est le taux de précipitation et E est le taux d'évaporation donné par rapport du flux de chaleur latente et de la chaleur latente de condensation.

Pour le modèle POM :

$$\frac{K_H}{D} \left(\frac{\partial T}{\partial \sigma}, \frac{\partial S}{\partial \sigma} \right) = - (\langle w\theta(0) \rangle), \quad \sigma \rightarrow 0 \quad \sigma = \frac{z-\eta}{H+\eta}$$

Au fond

Les conditions aux limites à cette frontière $z = -h$ s'écrivent pour le modèle SYMPHONIE :

$$A_z \left(\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z} \right) = (\tau_{bx}, \tau_{by}) \quad \text{pour } z = -H$$

$$Q = \frac{\|\vec{\tau}_b\|}{\rho_0 \sqrt{C_\epsilon \cdot C_Q}} \quad \text{pour } z = -H$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial z}, \frac{\partial S}{\partial z} \right) = 0 \quad \text{pour } z = -H$$

La tension de cisaillement sur le fond $\vec{\tau}_b = (\tau_{bx}, \tau_{by})$ dépend de manière quadratique de la vitesse horizontale près de cette frontière, V_b , prise sur le premier niveau de la grille situé à la hauteur z_i par rapport au fond :

$$\vec{\tau}_b = \rho_0 C_d \|\vec{V}_b\| \vec{V}_b$$

C_d est le coefficient de traînée. Il s'exprime en fonction de la longueur de rugosité et de la constante de Von Karman κ par une loi logarithmique :

$$C_d = \left(\frac{\kappa}{\log(Z_i/Z_0)} \right)^2$$

La longueur de rugosité caractérise l'intensité du frottement. Elle est prise égale à 0.01 m. Les relations précédentes sont obtenues en faisant l'hypothèse que le courant suit un profil logarithmique au voisinage du fond. Z_i est la distance entre le premier niveau sigma et le fond.

Pour le modèle POM :

$$\frac{K_M}{D} \left(\frac{\partial U}{\partial \sigma}, \frac{\partial V}{\partial \sigma} \right) = C_z [U^2 + V^2]^{1/2} (U, V), \quad \sigma \rightarrow -1$$

where

$$C_z = \text{MAX} \left[\frac{\kappa^2}{[\ln\{(1 + \sigma_{kb-1})H/z_0\}]^2}, 0.0025 \right] \quad (14e)$$

$\kappa = 0.4$ is the von Karman constant and z_0 is the roughness parameter. Equations (14c,d,e) can be derived by matching the numerical solution to the "law of the wall". Numerically, they are applied to the first grid points nearest the bottom. Where the bottom is not well resolved, $(1 + \sigma_{kb-1})H/z_0$ is large and (14e) reverts to a constant drag coefficient, 0.0025. The boundary conditions on (5) and (6) are

$$\frac{K_H}{D} \left(\frac{\partial T}{\partial \sigma}, \frac{\partial S}{\partial \sigma} \right) = 0, \quad \sigma \rightarrow -1$$

$$(q^2(-1), q^2 \ell(-1)) = (B_1^{2/3} u_*^2(-1), 0) \quad (16c,d)$$

where B_1 is one of the turbulence closure constants and u_* is the friction velocity at the top or bottom as denoted in (16a) and (16c). In pom97.f and later versions, (16a) has been replaced by $q^2 \ell(\sigma_1) = q^2(\sigma_1) \kappa D \sigma_1$ where σ_1 is the value of σ corresponding to $k=1$, it is believed that this averts some numerical noise in some applications.

Les apports d'eau douce

Si dans le domaine de calcul il y a des fleuves, il faut les prendre en compte. Par exemple, dans nos simulation du Golfe du Lion on considère le Rhône (grand et petit), l'Aude, l'Hérault et l'Orb. Ils sont modélisés par des canaux longs de quelques points de grille dans l'une ou l'autre des directions horizontales du modèle. Aux points source de ces fleuves, la composante horizontale du courant dans le canal s'exprime en fonction du débit D , de la largeur L et de la profondeur h_c du canal:

$$U_{canal} = \frac{D}{L \cdot h_c}$$

Le profil vertical du courant dans le canal est logarithmique.

Concernant la température, une valeur (par exemple 8°C) est imposée au point source pendant toute la période de simulation. L'eau des fleuves étant douce, on applique une valeur de salinité nulle à la source.

Pour des débits très intenses (Rio de l'Amazonie, Mississippi), certains modélisateurs ajoutent aussi des conditions sur la conservation de la masse dans le domaine de calcul pour enlever aux frontières latérales l'eau éventuellement en excès.

Aux frontières latérales

Pour les frontières latérales fermées, on applique une condition de nullité pour le flux normal à la frontière. Concernant les frontières latérales ouvertes, il s'agit d'un problème majeur pour le modélisateur. On en reparlera après avoir vu les différents types de grilles numériques.

Paramétrisation des flux atmosphériques dans le modèle SYMPHONIE

Texte tiré de la thèse de C. Dufau-Julliand, Annexe 1

Annexes

Les formulations aérodynamiques de type « bulk » simplifient l'estimation des flux atmosphériques à l'interface océan-atmosphère. Ces relations s'appuient à la fois sur des coefficients déterminés expérimentalement et des informations météorologiques de type « bulk ». Les flux de surface (τ la tension du vent, H le flux de chaleur sensible et E le flux de chaleur latente) s'expriment de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\tau/\rho &= u_*^2 = -\langle u'w' \rangle = C_D U^2 \\ H/\rho C_p &= u_* T_* = \langle w'T' \rangle = C_H U (T - T_0) \\ E/\rho L_v &= u_* q_* = \langle w'q' \rangle = C_E U (q - q_0)\end{aligned}$$

U , T et q sont respectivement la vitesse du vent, la température potentielle de l'air et l'humidité relative de l'air à l'altitude z . T_0 et q_0 se rapportent à la température et à l'humidité de l'air à proximité de la surface de l'océan. ρ est la densité de l'air, C_p la chaleur spécifique de l'air à pression constante et L_v la chaleur latente de vaporisation. u_* , T_* et q_* constituent des échelles caractéristiques pour la vitesse, la température et l'humidité de l'air. C_D est le coefficient de traînée, C_H le nombre de Stanton et C_E le nombre de Dalton.

Ces trois derniers coefficients, aussi appelés « coefficients bulk », dépendent de l'altitude, de la stratification de l'air et de l'état de vague à la surface de l'océan. La détermination de ces coefficients est le cœur de la paramétrisation des flux atmosphériques. Pour cela, on calcule les équivalents de ces coefficients dans le cas d'une stratification neutre C_{DN} , C_{HN} et C_{EN} .

La relation entre C_D et C_{DN} s'obtient en considérant que pour la même vitesse de vent U le profil de la vitesse peut s'écrire, dans le cas général

$$U = \frac{u_*}{k} \left(\ln(z/z_0) - \psi_m \right) = C_D^{-1/2} u_*$$

où k est la constante de Karman ($k=0.4$), z_0 est la longueur de rugosité et ψ_m est une fonction de stratification dépendant de l'altitude z .

et à la neutralité

$$U = \frac{u_{*N}}{k} \left(\ln(z/z_{0N}) \right) = C_{DN}^{-1/2} u_{*N}$$

où z_{0N} est la longueur de rugosité à la neutralité.

En combinant les deux équations précédentes, on obtient la relation entre les deux coefficients :

$$C_D = \left(C_{DN}^{-1/2} - k^{-1} \psi_m + k^{-1} \ln(z_{0N}/z_0) \right)^2$$

Dans cette équation, on peut substituer les longueurs de rugosité par les échelles caractéristiques de la vitesse du vent, grâce à la relation de Charnock $z_0 = a u_*^2/g$, a étant le coefficient de Charnock, pris constant.

On obtient finalement la relation suivante entre les deux coefficients de traînée :

$$C_D = \left(C_{DN}^{-1/2} - k^{-1} \psi_m + \underbrace{k^{-1} \ln(C_{DN}/C_D)}_{\text{négligeable quand la stratification diffère peu de la neutralité}} \right)^2$$

Annexes

Un raisonnement identique à partir des profils de température et d'humidité près de la surface permet d'exprimer le nombre de Stanton et celui de Dalton en fonction de leur équivalent à la neutralité.

$$C_H = C_{HN} (1 - k^{-1} \psi_m C_{DN}^{1/2} - k^{-1} \psi_h C_{HN} C_{DN}^{-1/2} + k^{-2} C_{HN} \psi_m \psi_h)^{-1}$$

$$C_E = C_{EN} (1 - k^{-1} \psi_m C_{DN}^{1/2} - k^{-1} \psi_q C_{EN} C_{DN}^{-1/2} + k^{-2} C_{EN} \psi_m \psi_q)^{-1}$$

Les coefficients à la neutralité sont donnés par

$$C_{DN} = 10^{-3} (0.61 + 0.063U)$$

$$C_{HN} = \begin{cases} 1.2 \cdot 10^{-3} & \text{pour } z/L < 0 \\ 0.7 \cdot 10^{-3} & \text{pour } z/L > 0 \end{cases}$$

$$C_{EN} = 1.2 \cdot 10^{-3}$$

Les fonctions de stratification ψ dépendent de l'altitude z et de la stabilité de l'atmosphère calculée à partir de la longueur de Monin-Obukhov L :

$$z/L = - \frac{g \cdot k \cdot z \cdot \langle w'T_v' \rangle}{T_v u_*^3}$$

où $\langle w'T_v' \rangle$ est le flux turbulent de la température virtuelle tel que

$$\langle w'T_v' \rangle = \langle w'T' \rangle + 0.61T \langle w'q' \rangle \quad \text{avec} \quad \begin{cases} H = \rho C_p \langle w'T' \rangle \\ E = \rho L_v \langle w'q' \rangle \end{cases}$$

Ces fonctions de stratifications ont été paramétrées par différents auteurs et s'expriment de la manière suivante:

$$\psi_m = \begin{cases} 2 \ln \left(\frac{1 + \psi_m^{-1}}{2} \right) + \ln \left(\frac{1 + \psi_m^{-2}}{2} \right) - 2 \tan^{-1} (\psi_m^{-1}) + \pi/2 & \text{pour } z/L < 0 \\ 1 - \psi_m & \text{pour } z/L > 0 \end{cases}$$

$$\psi_q = \psi_h = \begin{cases} 2 \ln \left(\frac{1 + \psi_h^{-1}}{2} \right) & \text{pour } z/L < 0 \\ 1 - \psi_h & \text{pour } z/L > 0 \end{cases}$$

Les fonctions ϕ sont les fonctions universelles suivantes, établies par *Panlou* [1970], *Businger et al.* [1971]:

$$\psi_m = \begin{cases} (1 - \alpha z/L)^{-1/4} & \text{pour } z/L < 0 \\ 1 + \beta z/L & \text{pour } z/L > 0 \end{cases}$$

$$\psi_q = \psi_h = \begin{cases} \psi_m^{1/2} & \text{pour } z/L < 0 \\ \psi_m & \text{pour } z/L > 0 \end{cases}$$

α et β sont pris égaux à 16 et 7 [*Large and Pond*, 1982].

Annexes

On remarque donc que les fonctions de stratification dépendent des flux de chaleur et de vitesse. Il faut donc calculer ces flux avec une méthode itérative. L'état initial est choisi par exemple à la neutralité et l'état final lorsque les échelles caractéristiques u , T et q convergent.

Par ailleurs les coefficients C_{DN} , C_{HN} et C_{EN} sont établis pour 10 mètres d'altitude tandis que les paramètres atmosphériques tels que la température et l'humidité de l'air sont fournis par Météo-France à une altitude de 2 mètres. Il est donc nécessaire à chaque itération de calculer les valeurs à 10 mètres à partir de celles à 2 mètres d'altitude en combinant les équations décrivant les profils de température et d'humidité. Pour la température, cela donne par exemple

$$T_{10} = T_2 + T_0/k \left(\ln(10/2) - \psi_h(10/L) + \phi_h(2/L) \right)$$

Remarque: la température T_0 provient à chaque itération du calcul de la température océanique au niveau sigma situé le plus proche de la surface libre de l'océan.

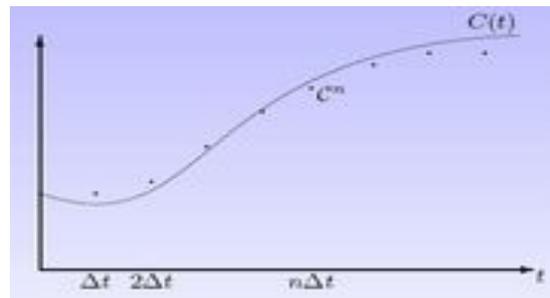
Une présentation détaillée de ces formulations est fournie par *Geernaert* [1990].

Grilles Numériques

Rappel :

définition de la dérivée $f'(x)$ d'une fonction $f(x)$

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



Notations :

Discrétisation $t = n\Delta t, n=1,2,\dots$

La vraie solution $C(t) = C(n\Delta t)$

Aux moments discrets t_n on note l'approximation de la solution $C(n\Delta t) = C^n$

(NB : attention à ne pas confondre avec une puissance !)

Parfois, lorsque C ne comporte pas d'indice, on sous-entend C^n

S'il n'y a pas de confusion possible, on note $Q^n = Q(n\Delta t, C^n)$

Propriétés d'un schéma numérique :

Consistance

Un schéma est consistant (ou compatible) lorsque l'équation discrète tend vers l'équation analytique dans l'hypothèse que les pas spatiaux et temporels tendent vers zéro de manière indépendante pour la solution C .

Convergence

Un schéma converge quand la solution de l'équation discrète tend vers la solution de l'équation analytique.

Stabilité

Un schéma est stable quand des perturbations ne s'amplifient pas de façon systématique.

Classification d'erreurs

- **Erreur de modélisation** : différence entre système physique et solution exacte de notre modèle mathématique :
 - Formulation des lois régissant le système (fermetures turbulentes ou paramétrisations d'effets non résolus)
 - Paramètres mals connus (taux de grazing, vitesse de sédimentation)
 - Formulation des limites du système (mer ouverte)
 - Données initiales et aux frontières
 - Géométrie simplifiée du problème

• **Erreur de discrétisation** : différence entre la solution exacte de notre modèle mathématique et la solution numérique exacte des équations discrètes :

- Erreur de troncature du schéma numérique résolvant les équations du modèle mathématique
- Erreurs de conservation de masse, concentrations, énergie

• **Erreur de convergence** : différence entre la solution numérique exacte des équations discrètes et la solution obtenue par méthode itérative :

- Arrêt d'itérations pour trouver les zéros d'une fonction non-linéaire
- Arrêt d'itérations de Gauss-Seidel
- Arrêt d'itérations de résolution d'équations de Poisson discrètes

• **Erreur d'arrondi** : erreur due aux arrondis du calculateur électronique :

- Représentation des nombres réels et des opérations arithmétiques sur une machine/compilateur
- Erreurs sur le produit scalaire de longs vecteurs
- Erreurs sur la soustraction de deux nombres proches

On pourrait alors définir le « bon » modèle comme celui dont

Erreur de modélisation >> Erreur de discrétisation >> Erreur de convergence >> Erreur d'arrondi

Il faut que chaque type d'erreur soit nettement plus petit que l'erreur sur la solution espérée sans cette erreur. Il ne faut cependant pas exagérer : il est inutile de mettre en route une méthode très précise si le modèle lui-même est imprécis.

Par contre, il y a des sources d'erreurs inacceptables :

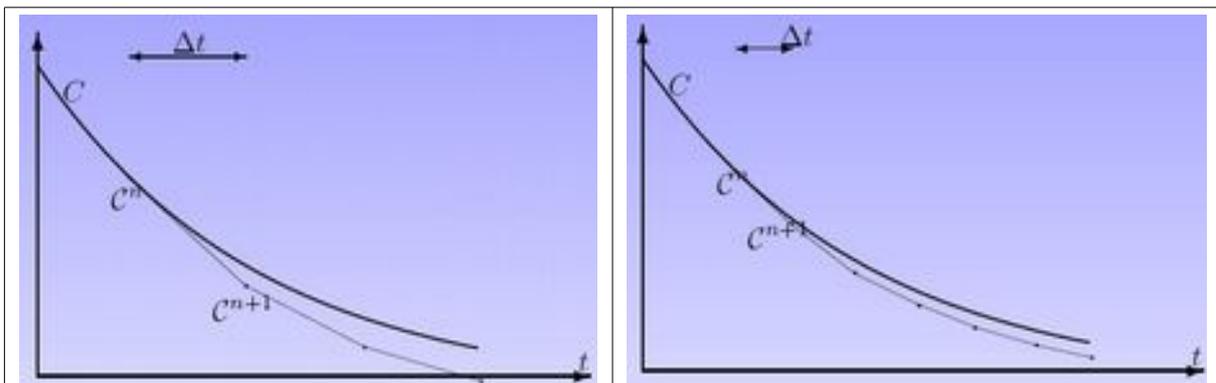
- Choix d'un modèle inadapté
- Erreurs sur les données
- Discrétisation trop grossière
- Erreurs de programmation
- Erreurs sur les unités

En général : tout ce qui détruit la chaîne d'un bon modèle.

Méthodes explicites : méthode d'Euler générale

$$\frac{dC}{dt} = Q(t, C) \text{ devient } \frac{C(t+\Delta t) - C(t)}{\Delta t} = Q(n\Delta t, C^n) \text{ ou } C^{n+1} = C^n + \Delta t Q^n$$

Méthode explicite (*forward differencing*) : calcul direct de C^{n+1} à partir de la connaissance de C^n .



Schémas implicites

Le schéma d'Euler est simple mais souvent trop rapidement instable en raison de l'extrapolation.

Pour résoudre ce problème, on peut penser à évaluer Q dans le futur, c'est-à-dire en ayant déjà une information plus actualisée, ou en décalant d'un point dans le temps.

$$\frac{C(t+\Delta t) - C(t)}{\Delta t} = Q(t+\Delta t, C(t+\Delta t)) \quad \frac{C(t) - C(t-\Delta t)}{\Delta t} = Q(t, C(t))$$

Problème pratique : cette discrétisation donne lieu à une équation algébrique non-linéaire en C_{n+1}

$$C^{n+1} = C^n + \Delta t Q(t_{n+1}, C^{n+1}) = f(C^{n+1})$$

On sera (sauf expression particulière de Q) obligé de résoudre cette équation par une méthode numérique de recherche des zéros d'une fonction. Une méthode de ce type est la méthode de Newton-Raphson, dont l'algorithme consiste à linéariser une fonction f en un point et à prendre le point d'annulation de cette linéarisation comme approximation du zéro recherché. On réitère cette procédure en l'approximation obtenue. Dans les cas favorables, les approximations successives obtenues convergent avec une vitesse quadratique (voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Méthode_de_Newton).

Schéma Leapfrog

Au lieu d'introduire des points intermédiaires, pourquoi ne pas utiliser les points déjà utilisés ? Exemple : le jeu du saute-mouton (*Leapfrog*) permet l'écriture d'un schéma du second ordre aisé à mettre en œuvre :

$$\frac{C(t+\Delta t) - C(t-\Delta t)}{2\Delta t} = Q(t, C(t)) \quad C^{n+1} = C^{n-1} + 2\Delta t Q(t_n, C^n)$$

Filtrage paramétrique

Il est introduit pour lisser la solution et réduire les éventuels bruits numériques

$$\tilde{C}^n = C^n + \gamma [C^{n-1} - 2C^n + C^{n+1}]$$

Cette approche demande le stockage de C^n et \tilde{C}^n et ne modifie pas C^n .

Un cas particulier est le **filtre d'Asselin**, qui utilise le filtre paramétrique et remplace C^{n-1} par la valeur filtrée :

$$C^{n+1} = \tilde{C}^{n-1} + 2\Delta t Q(t_n, C^n)$$

$$\tilde{C}^n = C^n + \gamma [\tilde{C}^{n-1} - 2C^n + C^{n+1}]$$

Cela revient en pratique à remplacer C^n par \tilde{C}^n .

Toutefois, il filtre également des ondes physiquement correctes, d'autant plus que les variations sont rapides.

Exemple : Modèle SYMPHONIE (Texte tiré de la thèse de C. Dufau-Julliard)

3.4.2 La discrétisation temporelle

La discrétisation temporelle se fait à l'aide d'un schéma « Leapfrog » ou Saut-Mouton explicite. Le calcul de la valeur des variables au temps $(t+1)$ nécessite la connaissance des valeurs aux temps (t) et $(t-1)$:

$$u^{n+1} = u^{n-1} + 2\Delta t f^n(u^n) \quad (3.23)$$

La solution numérique d'une équation discrétisée sur un schéma temporel de ce type comporte deux type de modes : un mode physique qui constitue la solution vraie et un mode numérique qui est en fait une source d'erreur. En effet, les solutions aux temps pairs et impairs peuvent diverger. Pour réduire ces erreurs numériques, il est fait appel à chaque pas de temps à un filtre d'Asselin diffusif [Asselin, 1972] qui consiste à calculer une valeur corrigée :

$$u_c^n = u^n + \frac{\Delta t}{2} (u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}) \quad (3.24)$$

Ce filtre agit donc comme une force de rappel empêchant la divergence des solutions à des pas de temps consécutifs (pairs et impairs). α est le coefficient du filtre d'Asselin.

Grilles décentrées (*staggered*)

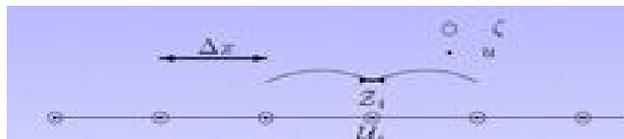
- L'approche des volumes finis avec flux aux interfaces suggère de définir (et de prédire éventuellement) les coefficients de diffusion A aux interfaces
 - Une approche de volumes finis pour l'advection suggère de définir les vitesses (normales) aux interfaces
 - Dans un modèle 3D général, les vitesses et les coefficients de diffusion turbulente sont prédits par le modèle
- Il est alors judicieux de ne pas définir les variables au même endroit.

On prend les équations d'un modèle hydrodynamique très simplifié (2 variables, une dimension spatiale) :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

et on écrit le modèle numérique associé sur une grille classique et sur une grille décentrée.

Sur grille classique :



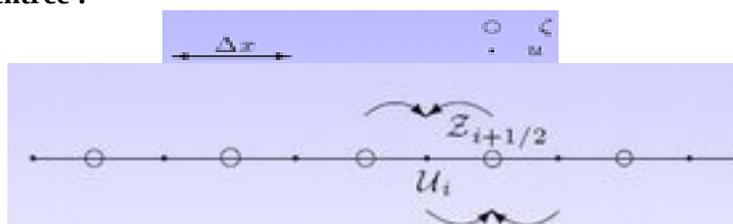
Si on adopte une dérivée centrée classique et du second ordre avec une distance de $2\Delta t$ entre les points utilisés, on a ce qu'on appelle une « discrétisation directe *forward-backward* » :

$$\frac{z_i^{n+1} - z_i^n}{\Delta t} + h \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -g \frac{z_{i+1}^{n+1} - z_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x}$$

Dans ce cas il est démontré que les approximations sont de l'ordre $O(\Delta t)$ et $O(\Delta x^2)$.

Sur une grille décentrée :



$$\frac{z_{i+1/2}^{n+1} - z_{i+1/2}^n}{\Delta t} + h \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0$$

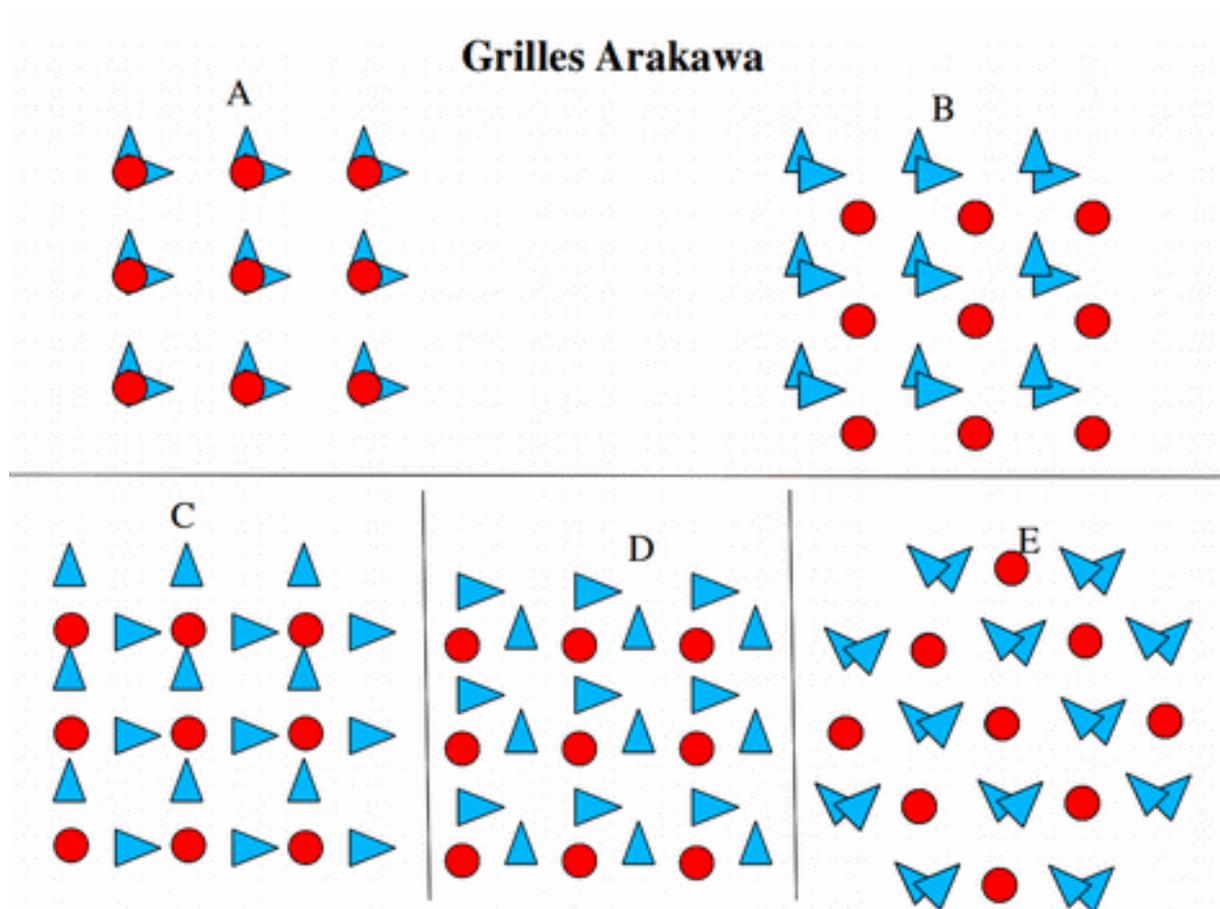
$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -g \frac{z_{i+1/2}^{n+1} - z_{i-1/2}^{n+1}}{\Delta x}$$

Ce schéma est toujours du type « discrétisation directe *forward-backward* » et les approximations sont toujours de l'ordre $O(\Delta t)$ et $O(\Delta x^2)$, mais la distance entre les points utilisés est de Δx et non plus $2\Delta x$, on a donc un gain de précision.

D'un point de vue pratique, dans le code numérique, on range $z_{i-1/2}$ dans ZETA(i).

Classification d'Arakawa pour les grilles horizontales

Arakawa et Lamb (1977) ont proposé une classification des 5 différentes possibilités de disposer les variables scalaires et les variables vectorielles sur une grille numérique.



Les grilles B et E ayant les deux composantes de la vitesse sur les mêmes points sont aussi dites « *semi-staggered* ». On peut considérer la grille E comme une grille B tournée de 45°

Choix d'une grille d'Arakawa

En pratique, seules les grilles B, C et E sont utilisées. On peut montrer que la grille B se comporte mieux aux basses résolutions spatiales et des petits pas de temps, tandis que la grille C se comporte mieux aux fines résolutions spatiales.

En océanographie :

B-Grid: MOM (*GFDL Modular Ocean Model*) <http://www.gfdl.noaa.gov/ocean-model>

C-grid: ROMS, POM, SYMPHONIE, OPA http://www.nemo-ocean.eu/content/download/259/1665/file/Doc_OPA8.1.pdf

E-grid: HOPE (*Hamburg Ocean Primitive Equation Model*) <http://meteora.ucsd.edu/~pierce/elnino/hope.html>

Discrétisations

Arakawa A

$$\frac{Z_{i,j}^{n+1} - Z_{i,j}^n}{\Delta t} + h \left[\frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \frac{V_{i,j+1}^n - V_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right] = 0$$

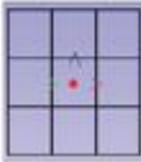
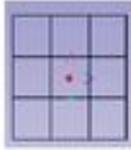
$$\frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta t} - fV_{i,j}^{n+s} = -g \frac{Z_{i+1,j}^{n+1} - Z_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x}$$

$$\frac{V_{i,j}^{n+1} - V_{i,j}^n}{\Delta t} + fU_{i,j}^{n+1-s} = -g \frac{Z_{i,j+1}^{n+1} - Z_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y}$$

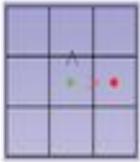
Arakawa B

$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$		$\frac{Z_{i,j}^{n+1} - Z_{i,j}^n}{\Delta t} + h \left(\frac{(U_{i+1/2,j+1/2}^n + U_{i+1/2,j-1/2}^n) - (U_{i-1/2,j+1/2}^n + U_{i-1/2,j-1/2}^n)}{2\Delta x} \right) + h \left(\frac{(V_{i-1/2,j+1/2}^n + V_{i+1/2,j+1/2}^n) - (V_{i-1/2,j-1/2}^n + V_{i+1/2,j-1/2}^n)}{2\Delta y} \right)$
$\frac{\partial u}{\partial t} = fv - g \frac{\partial \zeta}{\partial x}$		$\frac{U_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - U_{i+1/2,j+1/2}^n}{\Delta t} = fV_{i+1/2,j+1/2}^{n+s} - g \frac{(Z_{i+1,j}^{n+1} + Z_{i+1,j+1}^{n+1}) - (Z_{i,j}^{n+1} + Z_{i,j+1}^{n+1})}{2\Delta x}$
$\frac{\partial v}{\partial t} = -fu - g \frac{\partial \zeta}{\partial y}$		$\frac{V_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - V_{i+1/2,j+1/2}^n}{\Delta t} = -fU_{i+1/2,j+1/2}^{n+s} - g \frac{(Z_{i,j+1}^{n+1} + Z_{i+1,j+1}^{n+1}) - (Z_{i,j}^{n+1} + Z_{i+1,j}^{n+1})}{2\Delta y}$

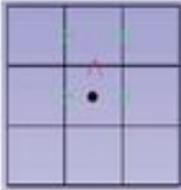
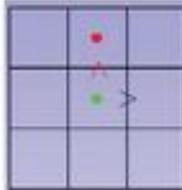
Arakawa C

$$(\delta_t \zeta)_{n_t+1/2, n_x, n_y} + h \left[\underbrace{(\delta_x u)_{n_t, n_x, n_y}} + \underbrace{(\delta_y v)_{n_t, n_x, n_y}} \right] = 0$$

$$(\delta_t u)_{n_t+1/2, n_x+1/2, n_y} - \underbrace{f \bar{v}_{n_t+s, n_x+1/2, n_y}^{xy}} = \underbrace{-g (\delta_x \zeta)_{n_t+1, n_x+1/2, n_y}}$$

$$(\delta_t v)_{n_t+1/2, n_x, n_y+1/2} + \underbrace{f \bar{u}_{n_t+1-s, n_x, n_y+1/2}^{xy}} = \underbrace{-g (\delta_y \zeta)_{n_t+1, n_x, n_y+1}}$$

Le critère CFL

Résolution spatiale et résolution temporelle sont liées par le critère de stabilité CFL (Courant-Friedrichs-Levy) de façon à ce qu'un processus (courant, onde...) ne se propage pas de plus d'une maille à chaque pas de temps. Pas de temps Δt et pas de grille Δx sont donc reliés par la vitesse de propagation de cet événement c selon une équation du type : $\Delta x > c \Delta t$ ou bien, puisqu'en général, on fixe d'abord la résolution spatiale puis le pas de temps

$$\Delta t \leq \frac{1}{c} \left[\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

Ainsi, l'augmentation des résolutions spatiale et temporelle vont de pair, vers une augmentation du coût de calcul.

En océanographie, les processus les plus rapides qu'on modélise sont les ondes de gravité longues, il faut donc calculer leur vitesse de propagation.

Les équations linéarisées pour des ondes se propageant dans un océan de profondeur constante sans frottement du vent et au fond se déduisent des équations en eaux peu profondes en supposant que la bathymétrie est constante (i.e. fond plat avec $h = \text{const}$), le domaine est non tournant ($f = 0$) et que le mouvement ne dépende que de x , i.e. on est dans un cas unidimensionnel. Il faut alors résoudre le système

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -gh \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{avec} \quad U = \int_{-H}^0 u dz \quad \text{et} \quad H = h + \eta$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

On différencie la première équation par rapport à x et la seconde équation par rapport à t puis en soustrayant les deux équations résultantes, on obtient :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - gh \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0$$

Cette équation est une équation classique des ondes dont la solution est une onde progressive

$$\eta = F(x - ct) \quad \text{qui se propage avec une célérité} \quad c = \sqrt{gh}$$

Donc, la surélévation η se propage sans se déformer avec la célérité c .

La résolution temporelle d'un modèle océanographique dépendra donc non seulement de la résolution spatiale, mais aussi de la bathymétrie du domaine. En général, on calcule par précaution le critère CFL en utilisant la valeur maximale de la bathymétrie du domaine, la formule devient donc :

$$\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{gh_{max}}} \left[\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

La prise en compte des d'ondes de gravité, comporte des d'avantages :

- prise en compte de l'ajustement géostrophique et d'ondes de surface
- comparaison/assimilation directe de données altimétriques

mais aussi des inconvénients :

- condition de stabilité associée à une vitesse de propagation rapide
- ondes parasites liées à une initialisation imprécise et/ou des conditions aux limites incorrectes et diffusion numérique associée à l'oscillation de la vitesse verticale lors de la propagation de cette onde, étant donné que $w \simeq \partial_t \eta$.

Pour résoudre ces inconvénients, on peut adopter différentes solutions techniques :

- Discrétisation classique avec un Δt adéquat (cher et donc pratiquement limité au cas 2D)
- Méthodes implicites avec construction de systèmes linéaires à résoudre (couplage dans deux directions).
- Séparation du pas de temps (*mode splitting*) : suivre le processus rapide avec le Δt adéquat et les autres processus avec un Δt plus grand.
- Élimination a priori des ondes de gravité-inertie en modifiant les équations par l'approximation du toit rigide (*rigid lid*)

Ces deux dernières solutions sont les plus utilisées.

Technique du toit rigide (*Rigid-lid*)

On calcule les ordres de grandeur de l'équation de continuité en e.p.p. Pour l'océan ouvert :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla_h \vec{V} = 0 \quad \frac{E}{T} = \frac{HU}{L} \quad \frac{1}{T} = \frac{10^3 10^{-1}}{10^6} = 10^{-4}$$

pour des échelles de temps T supérieures à 10^4 s, environ 10 heures, la variation de η dans la conservation de la masse intégrée peut être négligée

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla_h \vec{V} \simeq \nabla_h \vec{V} = 0.$$

On suppose a priori que l'interface ne bouge pas rapidement (ce qui serait le cas en présence d'ondes

de gravité). Alors on fixe $w_{z=0} = 0$ et l'inconnue devient la pression de surface.

Le *rigid-lid* élimine le processus rapide associé au mouvement de la surface libre η mais également le moyen de la calculer directement alors que l'on en a besoin pour le calcul de la pression. L'équation d'évolution pour η devient une contrainte de non divergence du transport. Cette contrainte est satisfaite si l'on définit une fonction de courant (pour le transport) :

$$U = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad V = +\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

La différence entre deux isolignes de ψ donnera alors immédiatement le débit d'eau entre ces deux lignes et plutôt que de résoudre deux équations, une pour U et une pour V, on peut n'en résoudre qu'une pour ψ .

Avantages

- Filtrage a priori des modes rapides
- Élimination d'un processus rapide

Inconvénients

- Interprétation ambiguë de η
- Coût de calcul croît rapidement si la résolution augmente
- Difficultés dans les conditions de la fonction de courant sur les îles et pour l'ajout de rivières
- Impossibilité de tenir compte de la pression atmosphérique
- Impossibilité de tenir compte de la perte d'eau par évaporation
- Déformation de la propagation d'ondes planétaires longues

Technique de la séparation des pas de temps (*mode splitting*)

On garde comme condition

$$w_{z=0} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \cdot \nabla_h \eta$$

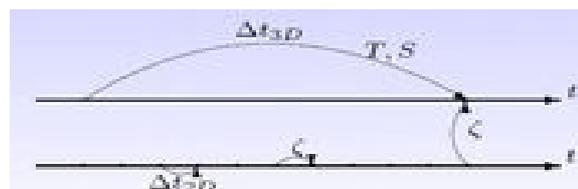
L'inconnue est la position de la surface libre et la pression de surface est la pression atmosphérique (en négligeant la tension superficielle).

Si un système possède des processus avec des échelles de temps très différentes, les restrictions sur le pas de temps admis sont très différentes. On peut alors isoler le processus rapide et le simuler avec un pas de temps plus petit. C'est le cas des ondes de gravité externes dans un modèle 3D.

La limite de stabilité imposée par le critère CFL

$$\Delta t_E \leq \frac{1}{\sqrt{g h_{max}}} \left[\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

ne concerne qu'un processus 2D (mode dit externe, pas de temps Δt_E). On intègre alors un modèle 2D (inconnues η, U, V) à l'intérieur d'un modèle 3D (inconnues u, v, T, S, ρ).



Naturellement, il faudra vérifier que l'intégrale verticale du 3D soit cohérente avec le transport 2D. Par ailleurs, pour le mode interne, il faut aussi fixer un critère de stabilité

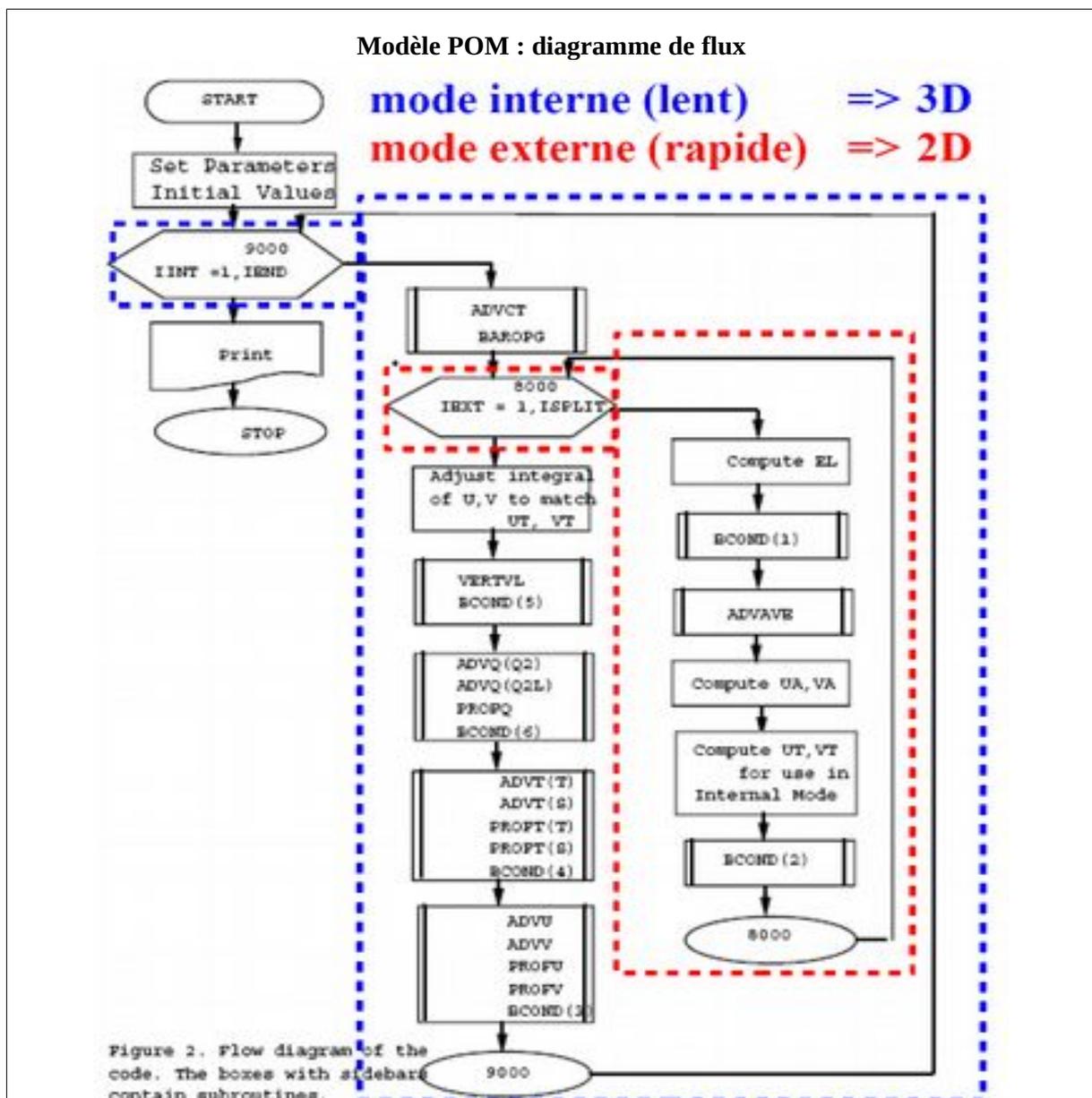
$$\Delta t_I \leq \frac{1}{C_I} \left[\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

avec $C_I = \sqrt{g'h'} + u_{max}$ où $g' = g \frac{\rho'}{\rho_o}$ est la gravité réduite, qui s'exerce sur une particule d'eau dans la couche d'épaisseur h' et de densité ρ' , tandis que u_{max} est la vitesse maximale attendue pour le courant.

La condition pour le pas de temps interne est toujours moins contraignante que celle pour le pas de temps externe et le rapport

$$30 < \frac{\Delta t_I}{\Delta t_E} < 80$$

Dans le code du modèle ROMS, pour fixer les paramètres temporels, on fixe d'abord le pas de temps interne puis le rapport $\Delta t_I/\Delta t_E$, qui est la variable *NDTFAST*, dans le fichier *roms.in*.



Modèle SYMPHONIE

Texte tiré de la thèse de C. Dufau-Julliand

CHAPITRE 3 - Le modèle numérique SYMPHONIE

3.4.3 La technique de séparation des pas de temps

Les ondes de gravité externes se propagent beaucoup plus rapidement que les ondes de gravité internes. Elles nécessitent donc une résolution temporelle plus fine et conditionnent les critères de stabilité numérique du modèle. Afin de ne pas alourdir les temps de calcul, le traitement de ces ondes (équation (3.6)) s'effectue séparément. Les gradients horizontaux de pression présents dans les équations (3.1) sont décomposés en deux parties liées au mode externe et au mode interne. Suivant la direction x, le gradient de pression s'écrit en effet :

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_z^{\eta} \rho dz' \right) = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_z^{\eta} \left(\frac{\rho - \rho_0}{f} + \rho_0 \right) dz' \right) = \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_z^{\eta} \rho' dz' \right) + g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (3.25)$$

Le terme de pression du mode externe est donné par l'intégration sur la verticale de ce gradient :

$$\Pi_z^* = \underbrace{g \rho_0 H \frac{\partial \eta}{\partial x}}_1 + \underbrace{g \int_z^{\eta} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_z^{\eta} \rho' dz' \right) dz}_2 \quad (3.26)$$

Le terme (1) est calculé avec un pas de temps plus court (6 secondes) que le terme (2) qui se calcule avec le même pas de temps que le mode interne (180 secondes)

Le terme de pression du mode interne correspond quand à lui au gradient de pression débarrassé de sa valeur moyennée sur la verticale :

$$\Pi_i^* = \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\Pi_z^*}{H} \quad (3.27)$$

Le mode interne et le mode externe se calculent donc séparément de manière explicite. Cette technique permet de représenter correctement la propagation rapide des ondes externes de gravité avec un pas de temps plus court sans alourdir le temps de calcul global du modèle.

Concernant le mode externe, il faut résoudre simultanément l'équation (3.6) et les équations du mouvement intégrées sur la verticale (3.28) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (H \bar{u} \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (H \bar{v} \bar{u}) - \bar{u} H \bar{v} &= -\frac{1}{\rho_0} \Pi_z^* - \int_0^z \left[\frac{\partial H u' u'}{\partial x} + \frac{\partial H v' u'}{\partial y} \right] d\sigma + \frac{\partial}{\partial x} (H \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (H \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}) + \frac{v_z}{\rho_0} \left[\frac{\partial u}{\partial z} \right]_0 \\ \frac{\partial H \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (H \bar{u} \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial y} (H \bar{v} \bar{v}) + \bar{v} H \bar{u} &= -\frac{1}{\rho_0} \Pi_z^* - \int_0^z \left[\frac{\partial H u' v'}{\partial x} + \frac{\partial H v' v'}{\partial y} \right] d\sigma + \frac{\partial}{\partial x} (H \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (H \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}) + \frac{v_z}{\rho_0} \left[\frac{\partial v}{\partial z} \right]_0 \end{aligned}$$

Intégrage du mode externe par le mode interne

Le mode interne est calculé quant à lui à partir des équations (3.1) en suivant la méthode de *Blumberg and Mellor* [1987]: la partie moyenne du courant est remplacée par le résultat obtenu pour le mode externe. Pour garantir la conservation des quantités scalaires lors des calculs d'advection, cette substitution est réalisée selon une méthode inspirée de *Blumberg and Mellor* [1987]. Le mode externe, résolu avec un pas de temps plus court, conditionne les critères de stabilité numérique du modèle. Une condition CFL (Courant-Friedrichs-Levy) contraint ainsi le pas de temps du mode externe:

$$dt \leq \frac{1}{2c} \left(\frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \right)^{-1/2} \quad (3.29)$$

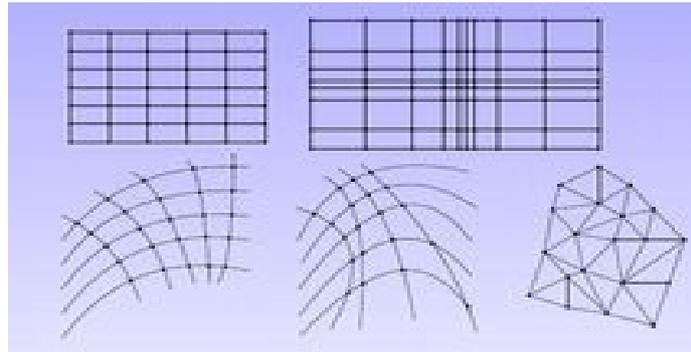
dt, Δx et Δy sont respectivement le pas de temps et d'espace du modèle.

La vitesse de propagation des ondes ($c = \sqrt{gH}$) est celle des ondes de gravité barotropes.

Coordonnées horizontales et transformation des grilles horizontales

Exemples de différents types de grilles existants :

- grille cartésienne,
- grille cartésienne non-uniforme,
- grille curviligne orthogonale,
- grille curviligne non-orthogonale,
- grille non-structurée.



Coordonnées cartésiennes

L'expression des opérateurs mathématiques est fortement simplifiée, ils prennent leur forme habituelle simple et la discrétisation numérique est tout aussi naturelle et rapide à mettre en œuvre.

En revanche, il est difficile d'aligner ce type de grille sur une topographie complexe (parfois une rotation peut aider, voir modèle SYMPHONIE NWMed, Hu et al., 2009) et on est obligé de limiter le domaine du modèle à une taille faible par rapport à la surface du globe.

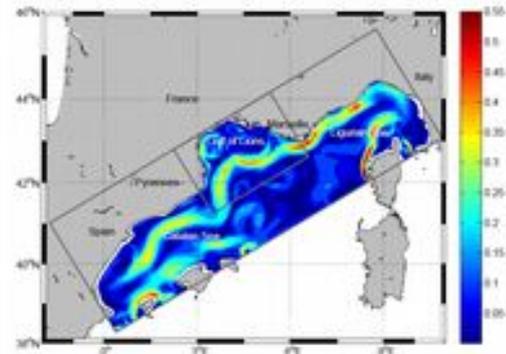
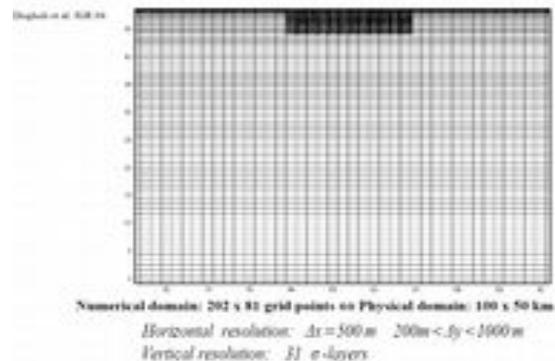
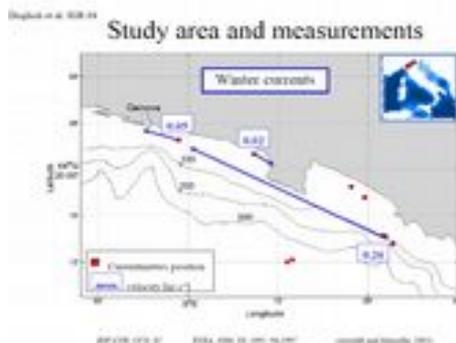


Fig. 2. Model domain. The larger (smaller) rectangle represents the model domain of the 3-km (1-km) resolution. Shaded color represents the intensity of the modelled horizontal current [m s^{-1}] at 20-m depth on July 25, 2001.

Exemple de grille cartésienne non-uniforme (modèle POM, Doglioli et al, 2004)



Coordonnées sphériques

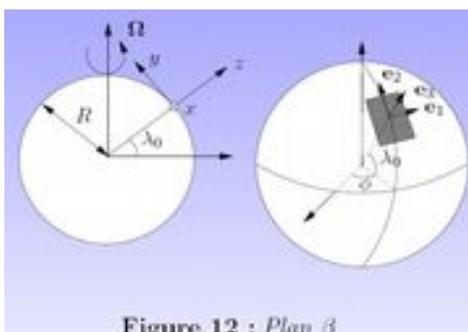


Figure 12 : Plan β

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\frac{w}{r} + \frac{1}{r \cos \lambda} \frac{\partial v \cos \lambda}{\partial \lambda} + \frac{1}{r \cos \lambda} \frac{\partial u}{\partial \phi} = 0$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{uv}{r} - \frac{uv}{r} \tan \lambda - 2\Omega v \sin \lambda + 2\Omega w \cos \lambda = -\frac{1}{\rho \cos \lambda} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{F_\phi}{\rho}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{vw}{r} + \frac{u^2}{r} \tan \lambda + 2\Omega v \sin \lambda = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \frac{F_\lambda}{\rho}$$

$$\frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{r} - 2\Omega u \cos \lambda = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g + \frac{F_r}{\rho}$$

$$\text{où } \frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{r \cos \lambda} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \lambda} + w \frac{\partial}{\partial r}$$

Comme pour les coordonnées cartésiennes, si une grille uniforme est utilisée dans ce système de

coordonnées, on perd la possibilité d'ajuster la grille à la géométrie ou à un processus particulier. Nous rencontrerons aussi un problème au niveau des pôles puisque les coordonnées sphériques possèdent un pôle mathématique à cet endroit. Également aux pôles, nous constatons que les lignes de coordonnées méridiennes se rapprochent de plus en plus de sorte qu'une grille uniforme en latitude/longitude est une grille physique dans l'espace euclidien très déformée avec une résolution beaucoup plus forte près des pôles qu'à l'équateur.

Puisque la profondeur des océans est très faible par rapport à la distance au centre de la terre r , on remplace généralement r par le rayon moyen a de la Terre dans ces équations. De même, il est tout à fait licite de négliger le facteur géométrique w/r devant $\partial w / \partial r$. On désigne alors par z la coordonnée locale verticale mesurée positivement vers le haut à partir de la surface de la mer.

On obtient ainsi les coordonnées sphériques simplifiées :

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{a \cos \lambda} \frac{\partial v \cos \lambda}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \lambda} \frac{\partial u}{\partial \phi} = 0$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{uw}{a} - \frac{uv}{a} \tan \lambda - 2\Omega v \sin \lambda + 2\Omega w \cos \lambda = -\frac{1}{\rho a \cos \lambda} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{F_\phi}{\rho}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{vw}{a} + \frac{u^2}{a} \tan \lambda + 2\Omega u \sin \lambda = -\frac{1}{\rho_0 a} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \frac{F_\lambda}{\rho}$$

$$\frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{a} - 2\Omega u \cos \lambda = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial q}{\partial z} - b + \frac{F_r}{\rho}$$

où $\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \lambda} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \lambda} + w \frac{\partial}{\partial z}$

Pour les modèles globaux, une attention particulière est donnée à positionner les pôles sur des points de terre. S'il n'y a pas de soucis pour le pôle sud, puisqu'il est sur le continent Antarctique, le pôle nord au contraire est en plein océan Arctique.

Par exemple, le modèle OPA déforme la grille de façon à avoir deux pôles numériques qui sont l'un sur le Canada et l'autre sur la Russie.



Figure tirée de http://www.nemo-ocean.eu/content/download/259/1665/file/Doc_OPA8.1.pdf

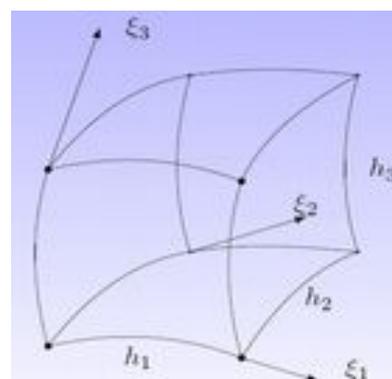
Coordonnées curvilignes orthogonales

Transformation d'un élément 3D

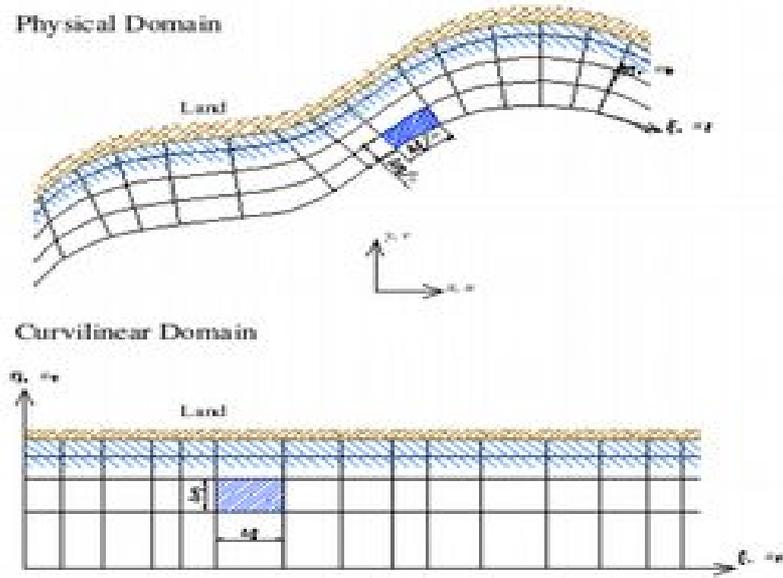
$$h_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_1} \right)^2$$

$$h_2^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_2} \right)^2$$

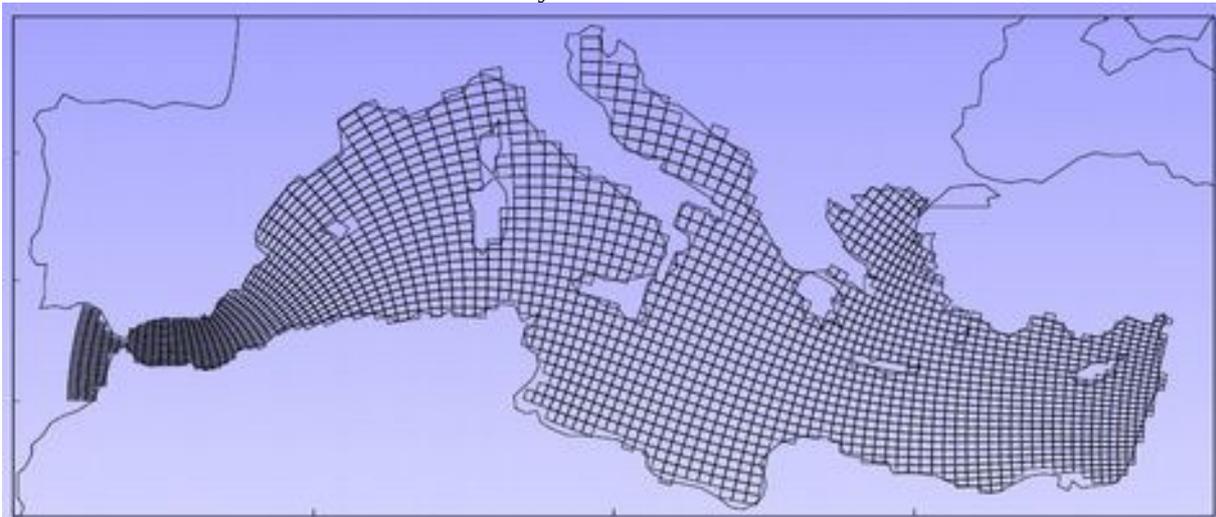
$$h_3 = 1$$



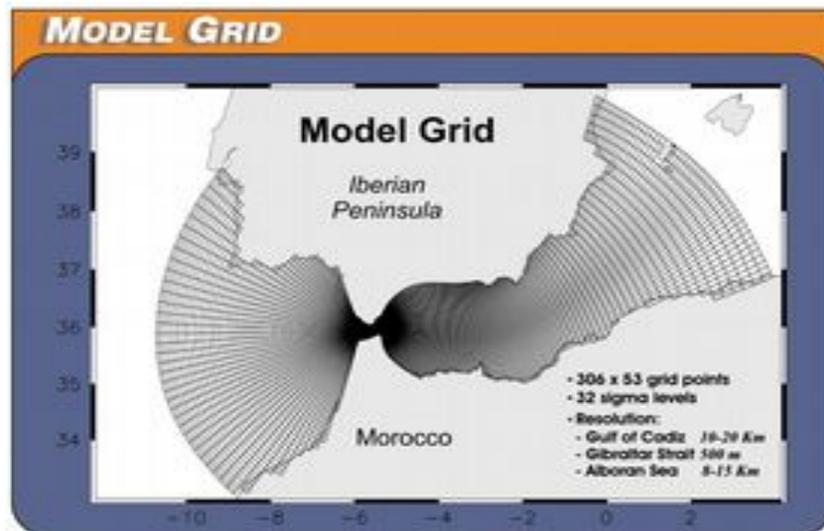
Grille curviligne horizontale



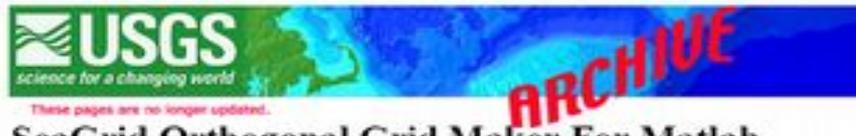
Numerical model of the Mediterranean Sea by J.-M. Beckers



Sannino et al. Modèle POM

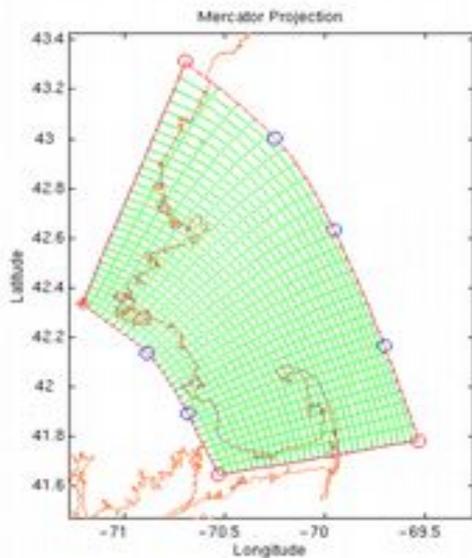


SeaGrid : un outil numérique sous Matlab pour créer des grilles curvilignes orthogonales
<http://woodshole.er.usgs.gov/operations/modeling/seagrid/seagrid.html>



SeaGrid Orthogonal Grid Maker For Matlab

Dr. Charles R. Denham, U.S. Geological Survey, Woods Hole, MA 02543



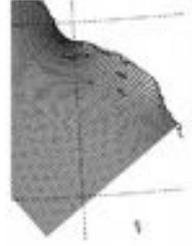
SeaGrid is a Matlab 5.2+ application for generating an orthogonal grid within a curved perimeter, suitable for oceanographic modeling.

With SeaGrid, one can:

- *Select a conformal map projection.
- *Manually adjust grid corner points and curved boundaries.
- *Modify the number of grid-cells and grid-line spacings.
- *Compute depths, land-masking, and orthogonality.
- *Save, then later reload a grid for further work.
- *Port a grid to Matlab on another computer.
- *Create SCRUM/ROMS-like and ECOM-like output files.
- *Get comprehensive built-in help.

Starting from a conformal projection (such as Mercator) of the targeted area, SeaGrid uses the Ives-Zacharias scheme to conformally map the curved perimeter to a rectangle, after which, a Poisson solver fills the interior with orthogonally distributed grid points.

Diapos de présentation de SeaGrid tirée de <http://www.myroms.org/Workshops/TOMS2001/presentations/>

<p>ARCTIC REGION SUPERCOMPUTING CENTER</p> <h3>Grid Generation with SeaGrid</h3> <p>Kate Hedstrom Chuck Denham</p>	<p>ARCTIC REGION SUPERCOMPUTING CENTER</p> <h3>Curvilinear orthogonal grids</h3> <ul style="list-style-type: none"> • Define the boundary, interior filled in • Fine resolution at capes, coarse resolution in bays • Best with four 90 degree corners • Control spacing on two adjacent edges 
<p>ARCTIC REGION SUPERCOMPUTING CENTER</p> <h3>Curvilinear grids, continued</h3> <ul style="list-style-type: none"> • Algorithm uses complex math, requires flat geometry • Masking is a useful feature 	<p>ARCTIC REGION SUPERCOMPUTING CENTER</p> <h3>Orthogonal grids on a sphere</h3> <ul style="list-style-type: none"> • Find the domain boundary in latitude, longitude • Use conformal map projection on boundary • Create grid in x,y Euclidean space • Use inverse map projection • Recompute grid metrics for spherical geometry

<p>ARCTIC REGION SUPERCOMPUTING CENTER</p> <h3>Common conformal map projections</h3> <p>Stereographic Mercator Lambert Conformal Conic</p>	<p>ARCTIC REGION SUPERCOMPUTING CENTER</p> <h3>Bathymetry datasets</h3> <p>ETOPO5 Smith and Sandwell</p>
<p>ARCTIC REGION SUPERCOMPUTING CENTER</p> <h3>Using SeaGrid</h3> <ul style="list-style-type: none"> • Extract coastline <ul style="list-style-type: none"> • Pick one of five resolutions from GSHHS • Pick latitude, longitude range • Extract bathymetry <ul style="list-style-type: none"> • Pick latitude, longitude range of ETOPO5 or find something better for your domain • Run SeaGrid 	<p>ARCTIC REGION SUPERCOMPUTING CENTER</p> <h3>Running SeaGrid</h3> <ul style="list-style-type: none"> • Load coastline • Load bathymetry • Set four corners • Fuss with boundary • Set number of gridpoints • Compute mask and bathymetry • Export to NetCDF
<p>ARCTIC REGION SUPERCOMPUTING CENTER</p> <h3>Considerations</h3> <ul style="list-style-type: none"> • Know the oceanography • Parallel tiling • (Lm+2, Mm+2) • Lines are through rho points, outermost are image points 	<p>ARCTIC REGION SUPERCOMPUTING CENTER</p> <h3>Still need mask editing</h3>
<p>ARCTIC REGION SUPERCOMPUTING CENTER</p> <h3>Another Prince William Sound</h3>	<p>ARCTIC REGION SUPERCOMPUTING CENTER</p> <h3>Bathymetry</h3>

Coordonnées et grilles verticales

Grille cartésienne en coordonnée z

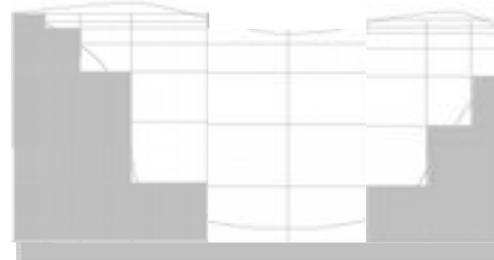
Il s'agit de la grille la plus simple.

Avantages :

Comportement robuste et diffusion numérique (horizontale) qui tend vers une stratification sans vent thermique

Désavantages :

Mauvaise résolution de la topographie (par marches) surtout pour les pentes faibles en grande profondeur ou le Δz est largement supérieur aux variations de h entre deux points de grille. Beaucoup de points de la grille sont inutilisés



Coordonnées suivant la topographie (*terrain following*)

Le désir d'améliorer la résolution de la topographie a mené à l'utilisation de grilles numériques qui s'intègrent harmonieusement à la forme irrégulière du domaine modélisé. Cela a conduit à la fois en météorologie et en océanographie, à des modèles avec des coordonnées curvilignes sur la verticale. Comme vu pour l'horizontale, les transformations de coordonnées mènent à un domaine de calcul rectangulaire. Cela assure une utilisation efficace des ressources de l'ordinateur, puisque tous les points de la grille se situent dans le fluide.

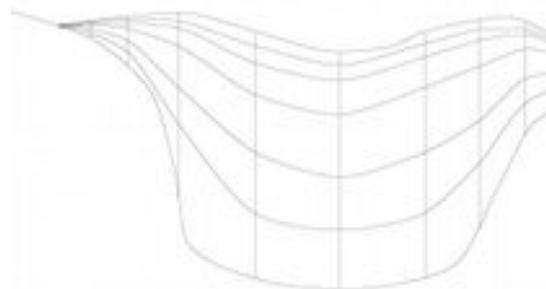
Les coordonnées suivant la topographie (*terrain following*) ont d'abord été introduites dans la modélisation atmosphérique (Phillips, 1957), et sont depuis devenues une alternative standard dans la modélisation de l'océan. Un modèle d'océan qui utilise un suivi de terrain pour la coordonnée verticale est SPEM (*S-coordinate Primitive Equation Model*), initialement développé par Haidvogel et al. (1991) pour les études de processus à haute résolution.

Avantages :

Bonne représentation de la vraie topographie, bonne résolution verticale et incorporation de la surface libre.

Désavantages :

Changements rapides de Δz et lignes de la grille très raides menant à des intersections avec les gradients de densité (diffusion de la thermocline par effets numériques et apparition d'une erreur sur la gradient de pression (qui est horizontal)).



Coordonnée sigma, e.g. modèle POM

coordinate equations which are based on the transformation,

$$x^* = x, y^* = y, \sigma = \frac{z + \eta}{H + \eta}, t^* = t \quad (1a, b, c, d)$$

where x, y, z are the conventional cartesian coordinates; $D = H + \eta$ where $H(x, y)$ is the bottom topography and $\eta(x, y, t)$ is the surface elevation. Thus, σ ranges from $\sigma = 0$ at $z = \eta$ to $\sigma = -1$ at $z = H$. After conversion to sigma coordinates and deletion of the asterisks, the basic equations may be written (in horizontal cartesian coordinates),

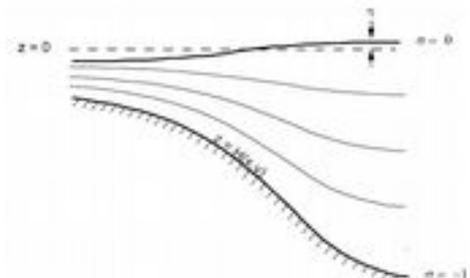


Figure 1. The sigma coordinate system.

Coordonnées sigma généralisées, e.g. modèle ROMS.

Figures tirées de

Song, Y.T., Haidvogel, D., 1994. *A semi-implicit ocean circulation model using a generalized topography following coordinate system.* J. Comp. Phys. 115, 228–248.

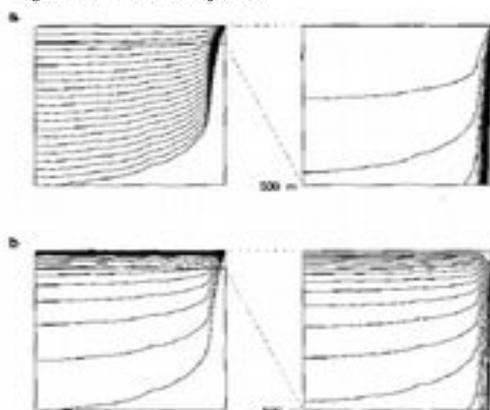
however, there is no coordinate system in use which successfully permits uniformly high resolution near the surface like the z -coordinate, yet preserves the bottom following character of the σ -coordinate. In this paper, we will introduce such a general vertical coordinate (s -coordinate) system. Our s -coordinate consists of three terms:

$$z = \zeta(1 + s) + k_s + (h - k_s)C(x), \quad -1 \leq s \leq 0, \quad (2.16)$$

where $C(x)$ is a set of s -curves, defined by

$$C(x) = (1 - b) \frac{\sinh(bx)}{\sinh \theta} + b \frac{\tanh(\theta x + 1/2) - \tanh(1/2) \theta}{2 \tanh(1/2) \theta},$$

where θ and b are the surface and bottom control parameters. Their ranges are $0 \leq \theta \leq 20$ and $0 \leq b \leq 1$, respectively. k_s is a constant chosen to be the minimum depth of the bathymetry or a width of surface or bottom boundary layer in which a higher resolution is required.



The first term in (2.16) is used to follow the free surface $\zeta(x, y, t)$, the second is chosen to prevent possible linear instability, and the third is designed to stretch the interior coordinate lines and to follow the bottom $h(x, y)$. There are three attractive features of this s -coordinate system:

- It is a generalized σ -coordinate system. Letting θ approach zero, by L'Hopital's rule, the s -coordinate becomes the σ -coordinate

$$z = (\zeta + h)(1 + s) - h. \quad (2.17)$$

Numerically, taking $\theta \rightarrow 1$ is sufficient to recover the σ -coordinate system.

- It has a simple linear functional form of $\zeta(x, y, t)$ and $h(x, y)$, and z is an infinitely differentiable function of s . Therefore, the formulation of primitive equations in the s -coordinate is similar to that in the σ -coordinate.
- With an equal grid size in s , and by choosing the parameter θ appropriately, the highest resolution is achieved near the surface layer, independently of the varying bottom topography.

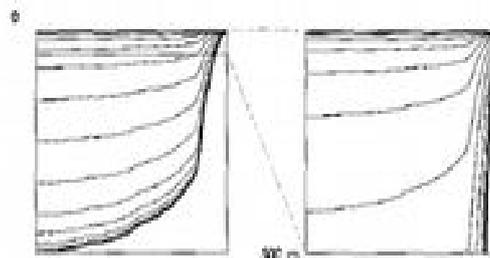


FIG. 1. Vertical computational levels for the California coastal shelf in s -coordinate, left column for the full depth and right column for the upper 500 m; (a) $\theta = 0.0001$, $b = 0$; (b) $\theta = 8$, $b = 0$; (c) $\theta = 8$, $b = 1$.

Figures tirées de

A.F. Shchepetkin, J.C. McWilliams: *The regional oceanic modeling system (ROMS): a split-explicit, free-surface, topography-following-coordinate oceanic model.* Ocean Modelling 9 (2005) 347–404

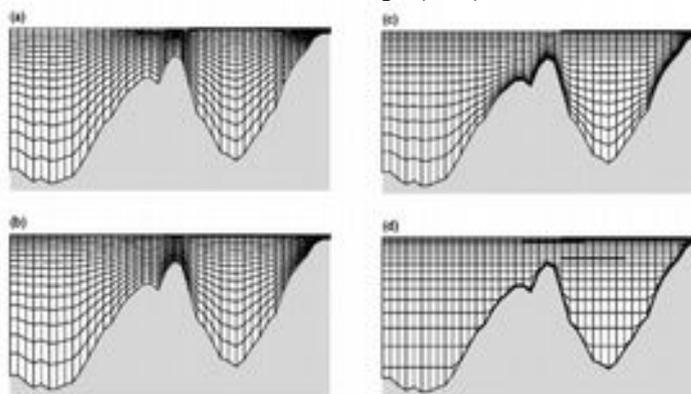


Fig. 1. Examples of vertical coordinate systems: (a) S -coordinate of Song and Haidvogel, 1994 with $\theta = 3$ and $h_s = 0.0$; (b, c) hybrid $z-s$ coordinate systems obtained by relaxing the (a) z -coordinate system toward the S -coordinate.

Coordonnées sigma généralisées, e.g. modèle SYMPHONIE

tirée de la thèse de C. Dufau-Julliard

3.4.1.2 La grille du modèle

Les équations décrites aux paragraphes précédents sont discrétisées par la méthode des différences finies sur la grille du modèle SYMPHONIE. Sur ce maillage de type C étagé [Arakawa and Suarez, 1983] les variables sont définies un point sur deux et de façon alternée à la fois sur la verticale et l'horizontale comme illustré sur la Figure 3-2. Les variables turbulentes et la vitesse verticale sont ainsi définies sur les niveaux verticaux entiers tandis que la température, la salinité, la masse volumique et les vitesses horizontales sont définies sur les demi-niveaux.

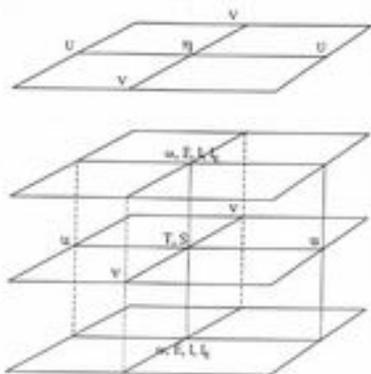


Figure 3-2 Grille du modèle océanique

Selon la verticale, le modèle utilise par ailleurs 25 niveaux de coordonnées sigma généralisées. Les coordonnées de type sigma permettent de suivre la bathymétrie, la résolution verticale étant proportionnelle à l'épaisseur de la colonne d'eau. Le passage de la coordonnée z à la coordonnée sigma généralisée s'écrit :

$$\sigma(i, j, k) = \frac{z(i, j, k) + h(i, j)}{\eta(i, j) + h(i, j)} \quad (3.19)$$

σ vaut donc 1 à la surface et 0 sur du fond.

Dans un modèle à coordonnée sigma classique, comme la version du modèle POM (Princeton Ocean Model) donnée par Blumberg and Mellor [1987], la variable sigma est une grandeur 1D verticale : pour un niveau donné, la valeur sigma est constante quelque soit le point de grille (i, j) . Cette coordonnée présente l'inconvénient de diminuer la résolution verticale en surface et près du fond dans les régions de forts gradients bathymétriques. L'augmentation du nombre de niveau permettrait de pallier ce défaut mais aurait pour conséquence un accroissement du coût de calcul. La généralisation du système de coordonnées sigma à une dépendance aux trois indices de la grille permet une meilleure description des phénomènes qui ont lieu au fond et en surface. Elle limite en effet les variations d'épaisseurs des couches sigma dans les régions sensibles. Elle permet ainsi de réduire les erreurs de troncature (représentation erronée du gradient horizontal de pression) dans les régions où le gradient vertical de masse volumique est fort [Auclair et al., 2000a]. Elle réduit aussi la diffusion diapycnale liée aux coordonnées topographiques [Beckman and Haidvogel, 1993]

Coordonnées isopycnales, e.g. Modèle MICOM

Au lieu de suivre la topographie, ce type de coordonnées suit les isopycnes.

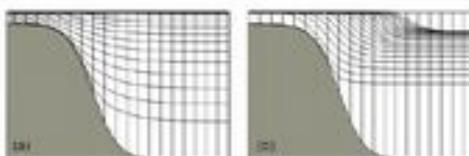
isopycnic coordinate system

http://www.ocean-modeling.org/docs_main.php?page=isopycnic

In an isopycnic coordinate system with potential density as the vertical coordinate, $Z \equiv \sigma_\theta$, and the hydrostatic equation becomes

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma_\theta} = -g \sigma_\theta \frac{\partial z}{\partial \sigma_\theta}$$

Figure 4: Vertical discretization for an isopycnic coordinate model and 20 layers. (a) typical time-mean location of coordinate lines, approximately equidistant in density; (b) a less uniform discretization.



Horizontally, MICOM is discretized on the Arakawa "C" grid, with curvilinear coordinates like SPEM/SCRUM. Arbitrary topography can be included.

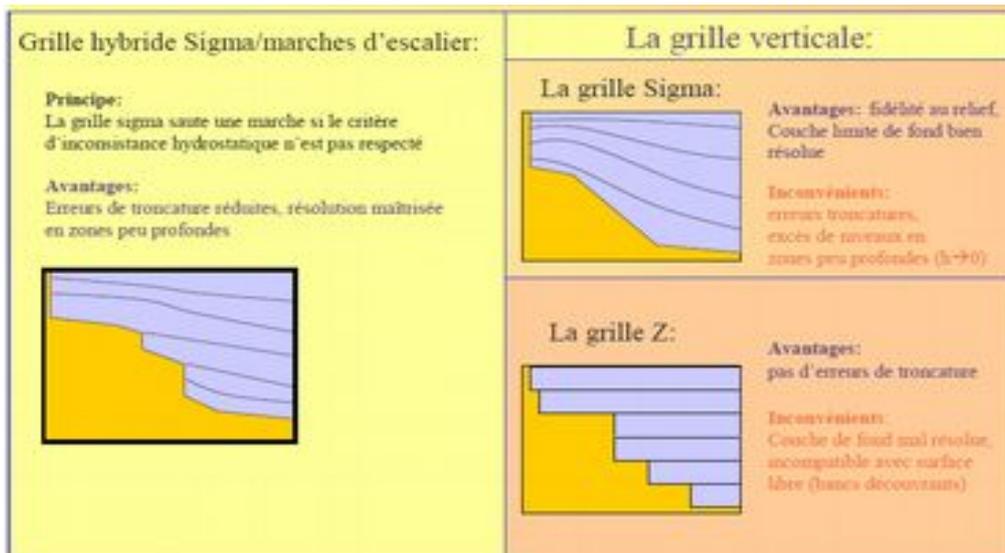
Coordonnées hybrides

Il s'agit d'un « mélange » des différents types de coordonnées précédents.

Modèle SYMPHONIE : hybridation entre coordonnées sigma généralisées et z

Tirée de P. Marsaleix

http://www.mercator-ocean.fr/documents/science/ao/ao_2003/gmmc/marsaleix_presentation.ppt



Modèle HYCOM : hybridation isopycnales + sigma + z

Ce modèle adopte une coordonnée isopycnale en océan ouvert où l'on trouve une forte stratification, des coordonnées suivant la topographie en zone côtière et les coordonnées z dans la couche de mélange ou dans des zones sans stratification. Cette approche permet d'élargir la zone d'action des modèles isopycnales comme MICOM (*Miami Isopycnic Coordinate Ocean Model*) ou NLOM (*Navy Layered Ocean Model*) vers les mers côtières peu profondes ou les parties non stratifiées de l'océan ouvert.

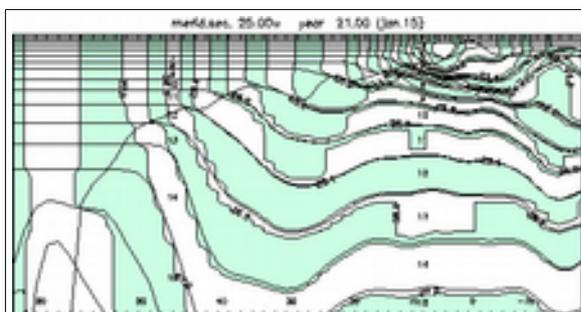


Fig. 1. HYCOM vertical section at 25°W in January of year 21. Shaded field: density. Thin solid lines; layer interfaces. Thick line: mixed-layer depth. Depth range: 500 m. Numbers along bottom indicate latitude. Tick marks at the top and bottom indicate horizontal mesh size.

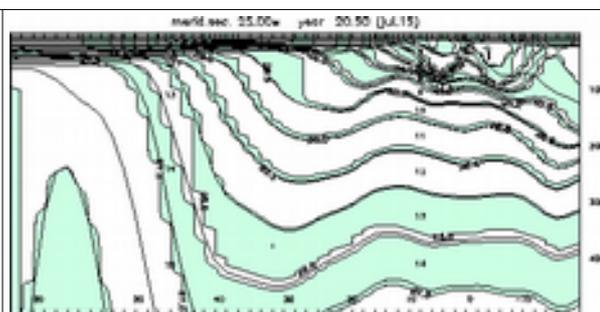


Fig. 2. As in Fig. 1, but for July of year 21.

Figures tirées de <http://hycom.rsmas.miami.edu/hycom-model/overview.html>

Schémas d'advection

L'équation

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = 0$$

peut s'écrire forme discrète de plusieurs façons.

Schéma upwind ou donor-cellDiscrétisation simple *forward* dans le temps et *backward* dans l'espace

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} + u \frac{C_i^n - C_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

$$C_i^{n+1} = C_i^n - u \frac{\Delta t}{\Delta x} (C_i^n - C_{i-1}^n)$$

Différences centrées

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} + u \frac{C_{i+1}^n - C_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

$$C_i^{n+1} = C_i^n - u \frac{\Delta t}{2\Delta x} (C_{i+1}^n - C_{i-1}^n)$$

Ce schéma est instable, il a comme équation équivalente :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = -\frac{u^2 \Delta t}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + O(\Delta x^2)$$

Schéma de Lax-Wendroff (ou de Leith en 1D)

Il s'agit d'un schéma du second ordre. L'idée à la base est d'ajouter autant de diffusion numérique qu'il faut pour compenser la diffusion numérique négative du schéma centré. Le modèle SYMPHONIE l'utilise en 2D.

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} + u \frac{C_{i+1}^n - C_{i-1}^n}{2\Delta x} = \frac{u^2 \Delta t}{2} \frac{C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

$$C_i^{n+1} = C_i^n - u \frac{\Delta t}{2\Delta x} (C_{i+1}^n - C_{i-1}^n) + u^2 \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} (C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n)$$

Advection avec Leapfrog

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^{n-1}}{2\Delta t} + u \frac{C_{i+1}^n - C_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

$$C_i^{n+1} = C_i^{n-1} - u \frac{\Delta t}{\Delta x} (C_{i+1}^n - C_{i-1}^n)$$

Comparaison entre différents schémas (voir cours de JM Beckers)

<p>Advection 1D avec un schéma upwind. Condition initiale ("chapeau" à gauche), solution numérique (courbe du type Gaussienne) et solution exacte ("chapeau" à droite) après 200 pas de temps avec un nombre de Courant CFL=0.1</p>	<p>Advection 1D avec un schéma du second ordre. Condition initiale ("chapeau" à gauche), solution numérique (courbe oscillante) et solution exacte ("chapeau" à droite) après 200 pas de temps avec un nombre de Courant CFL=0.1</p>	<p>Advection avec <i>Leapfrog</i></p>

Pour choisir un certain schéma plutôt qu'un autre, on peut se baser sur certaines propriétés. En particulier, la propriété dite TVD (*total variation diminishing*) a été introduite par A. Harten (1983).

La variation totale TV est définie comme

$$TV = \int \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| dx \quad , \text{ i.e. en forme discrète } \quad TV = \sum_j |u_{j+1} - u_j|$$

Cette propriété est intéressante car Harten a prouvé que

- un schéma numérique monotone est TVD et,
- un schéma TVD préserve la monotonie.

Les schémas monotones sont attrayants pour résoudre des problèmes scientifiques et d'ingénierie parce qu'ils ne fournissent pas de solutions non physiques.

Le schéma du second ordre Lax-Wendroff est dispersif et crée des extrema non physiques, le schéma avec *Leapfrog* est aussi dispersif et non-monotone.

Le théorème de Godunov prouve que seuls des schémas de premier ordre linéaire (comme le schéma *upwind*) préservent la monotonie et sont donc TVD. Les schémas d'ordre supérieur linéaire, bien que plus précis pour les solutions « lisses », ne sont pas TVD et tendent à introduire des oscillations parasites (*wiggles*) où les discontinuités ou des chocs surviennent.

Pour pallier ces inconvénients, divers schémas à haute résolution et non-linéaires ont été développés, souvent en utilisant des limiteurs de pente ou de flux.

Un schéma non-linéaire peut pondérer un schéma *upwind* (monotone) et du second ordre (précis) en fonction de la solution elle-même.

Une autre solution est d'adopter le schéma *upwind*, qui est TVD mais dont le défaut principal est de « diffuser » trop. En effet, James (1996) a montré que ce schéma peut être considéré comme une combinaison d'un schéma d'advection centré et un terme de dissipation type Laplacien, dans lequel le

coefficient de diffusion est $A = |u| \frac{\Delta x}{2}$. Combiné avec le *Leapfrog* on a le schéma suivant :

$$\frac{\phi_i^{t+\Delta t} - \phi_i^{t-\Delta t}}{2\Delta t} = -\frac{u_{i+1/2}^t}{\Delta x} \frac{\phi_i^t + \phi_{i+1}^t}{2} + \frac{u_{i-1/2}^t}{\Delta x} \frac{\phi_i^t + \phi_{i-1}^t}{2} + \frac{A_{i+1/2}}{\Delta x} \frac{\phi_{i+1}^{t-\Delta t} - \phi_i^{t-\Delta t}}{\Delta x} - \frac{A_{i-1/2}}{\Delta x} \frac{\phi_i^{t-\Delta t} - \phi_{i-1}^{t-\Delta t}}{\Delta x}$$

Toutefois, cette diffusivité numérique peut être utilisée comme diffusivité physique : on n'ajoute pas de terme de diffusion turbulente dans les équations de la quantité de mouvement et on introduit un

coefficient $0 < \delta < 1$ qui permet de régler l'intensité de la diffusion $A = \delta |u| \frac{\Delta x}{2}$.

Le valeur du coefficient δ est ensuite déterminée par des tests de sensibilité et de comparaison avec les données disponibles (voir Hu et al., 2009).

Table 1
Summary of numerical experiment setups and results.

Experiment code	Resolution (km)	δ (non-dimensional)	Eddy area mean \pm SD (km^2)	Tracking duration (days)
exp0	3	$\bar{A} = 15^4$ ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)	1035 ± 407	42
exp1	3	0.2	950 ± 398	33
exp2	3	0.8	1853 ± 1753	45
exp3	1	0.2	694 ± 446	70
exp4	1	0.8	1193 ± 543	56

* N.B.: here, the horizontal viscosity coefficient is taken as a fixed value and, hence, does not contain the attenuation coefficient δ .

Z.Y. Hu et al. / Ocean Modelling 28 (2009) 203–208

205

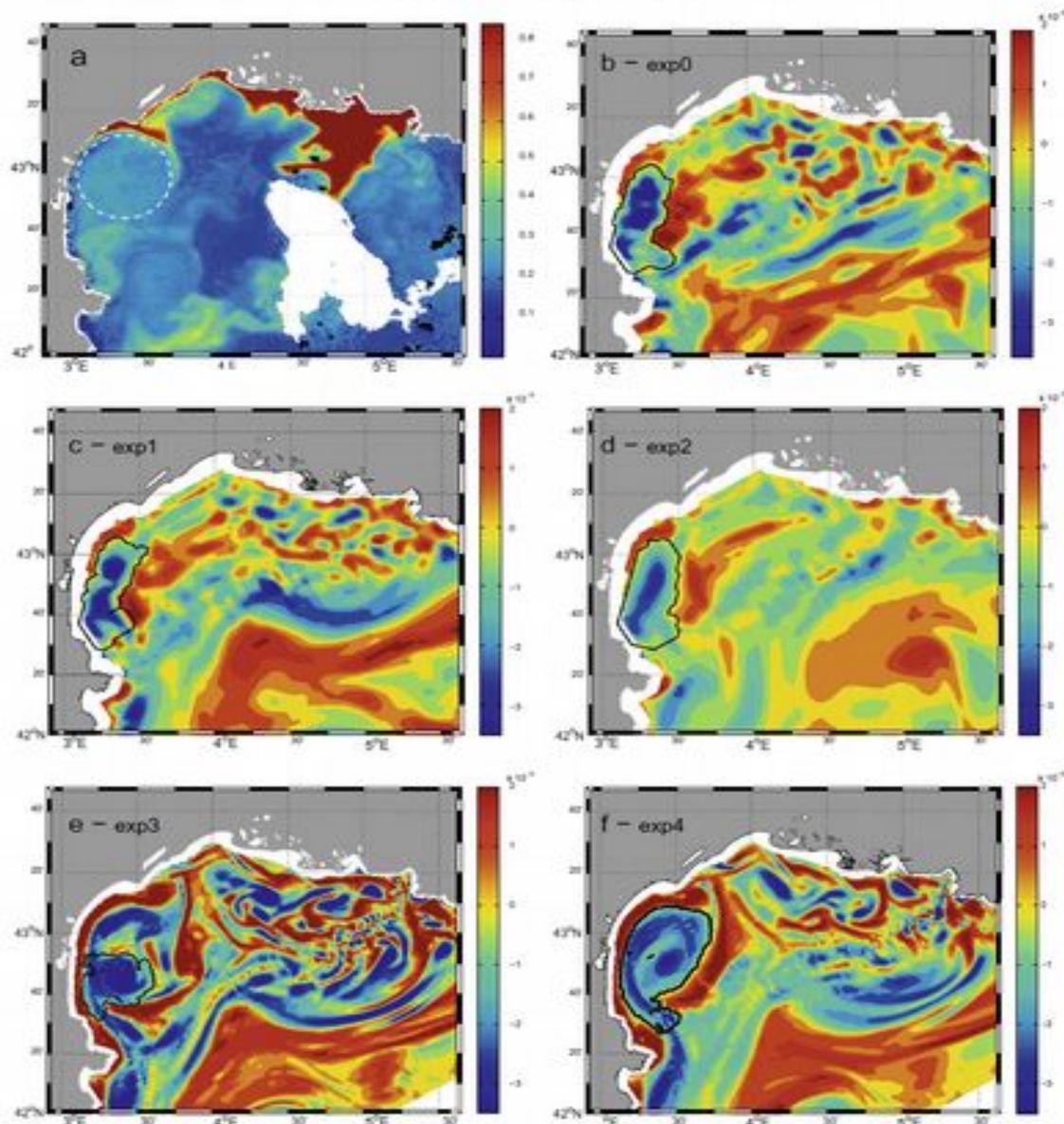


Fig. 3. Comparison of the signature of the anticyclonic eddy on a chlorophyll *a* (mg m^{-3}) map and the eddy, as identified by the wavelet analysis (contour black) of simulated relative vorticity (s^{-1}) on July 25, 2001. (a) SeaWiFS image processed with OC4 (courtesy E.Bloc); the dashed white circle represents the eddy area. Relative vorticity at 20-m depth from simulations (b) exp0, (c) exp1, (d) exp2, (e) exp3 and (f) exp4. See text for more explanations.

FROM: <http://www.myroms.org/>

ROMS has various options for advection schemes: second- and forth-order centered differences; and third-order, upstream biased. The later scheme is the model default and it has a velocity-dependent hyper-diffusion dissipation as the dominant truncation error ([Shchepetkin and McWilliams, 1998](#)). These schemes are stable for the predictor-corrector methodology of the model. In addition, there is an option for conservative parabolic spline representation of vertical advection which has dispersion properties similar to an eight-order accurate conventional scheme.

There are several subgrid-scale parameterizations in ROMS. The horizontal mixing of momentum and tracers can be along vertical levels, geopotential (constant depth) surfaces, or isopycnic (constant density) surfaces. The mixing operator can be harmonic (3-point stencil) or biharmonic (5-point stencil). See [Haidvogel and Beckmann \(1999\)](#) for an overview of all these operators.

FROM DONG &MCWILLIAMS 2007

A third- order, upstream-biased advection operator allows the generation of steep gradients in the solution, enhancing the effective resolution of the solution for a given grid size when the explicit viscosity is small. The numerical diffusion implicit in the third-order upstream-biased operator allows the explicit horizontal viscosity to be set to zero without excessive computational noise or instability (The impact of different forms of the horizontal viscosity on numerical solutions can be found in [Shchepetkin and O'Brien, 1996](#))

TEST MARION may 2011

les différentes possibilité de choix des coefficients de viscosité et de diffusivité horiz avec ROMS :

- `cppdefs.h`

```
define UV_VIS2
define TS_DIF2
```

Les coefficients sont des constantes que l'on fixe dans le `roms.in` ou `roms_inter.in` :

```
lateral_visc: VISC2, VISC4 [m^2/sec for all]
             10.      0.
```

```
tracer_diff2: TNU2(1:NT) [m^2/sec for all]
             0.d0 0.d0 0.d0 0.d0 0.d0 0.d0 0.d0 0.d0 0.d0
```

- `cppdefs.h`

```
define UV_VIS2
define TS_DIF2
define VIS_COEF_3D
define DIF_COEF_3D
```

Les coefficients seront automatiquement initialisés et conservés = 0

- `cppdefs.h`

```
define UV_VIS2
define TS_DIF2
define VIS_COEF_3D
define DIF_COEF_3D
defined VIS_SMAGO
defined DIF_SMAGO
defined UV_SPLIT_UP3
```

Smagorinsky viscosity (harmonic)
Combined Smagorinsky+Peclet hyperviscosity (physical and numerical closure)
Smagorinsky diffusivity (harmonic)

- cppdefs.h

```
define UV_VIS2  
define TS_DIF2  
define VIS_COEF_3D  
define DIF_COEF_3D  
defined VIS_SMAGO  
defined DIF_SMAGO  
defined UV_SPLIT_UP3  
defined TS_SPLIT_UP3
```

Smagorinsky viscosity (harmonic)
Combined Smagorinsky+Peclet hyperviscosity (physical and numerical closure)
Tracer mixing coefficient based on Peclet number

Les conditions initiales et aux frontières ouvertes

Les équations différentielles aux dérivées partielles qui sous-tendent les modèles numériques de circulation océanique ne donnent que la structure locale d'une surface dans l'espace et le temps ; une détermination globale et unique de la solution sur un domaine demande, en plus, les valeurs à l'instant initial et sur les frontières du domaine. La donnée d'un état initial rappelle simplement que l'océan obéit au principe de causalité alors que les conditions aux limites donnent des indications sur le milieu environnant. Par exemple, les conditions de Dirichlet expriment le fait que le système concerné est en contact avec un réservoir si grand qu'il n'est pas perturbé par les échanges. Les conditions de Neumann s'imposent pour un milieu environnant complètement isolé qui ne permet aucun échange diffusif.

Du point de vue numérique, pour démarrer le processus d'itération constituant le modèle numérique, il faut connaître la condition initiale C^0_i , $i = 1, \dots, N_x$. D'autre part, pour pouvoir calculer l'évolution du premier et du dernier point de calcul ($i = 1$ et $i = N_x$), il faudrait connaître les valeurs aux points virtuels C^n_0 et $C^n_{N_x+1}$: ce sont les conditions aux limites (ou aux frontières) qui permettront de fixer ces valeurs.

Classification des équations aux dérivées partielles

Les équations aux dérivées partielles peuvent être classées en : équations hyperboliques, équations paraboliques et équations elliptiques. Du point de vue physique, le type d'équation impose le nombre et le type de conditions initiales et aux frontières, tandis que du point de vue numérique, il guide le choix de méthodes numériques. En pratique, une classification correcte est difficile. On n'analyse souvent qu'un sous-ensemble des processus.

Équations hyperboliques

$$\frac{\partial C}{\partial t} - u \frac{\partial C}{\partial x} = 0$$

Nécessite une condition initiale et une seule condition aux limites (d'entrée) en $x = 0$ si $u > 0$, $x > 0$. La propagation du signal se fait dans le sens de la vitesse.

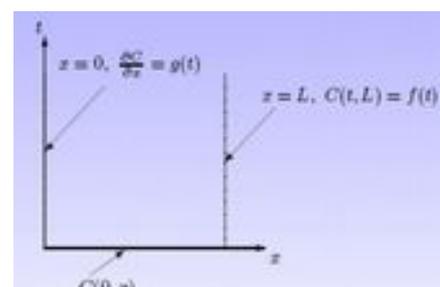
$$\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

Nécessite deux conditions initiales (C et $\frac{\partial C}{\partial t}$) et une condition aux limites (d'entrée) en $x = 0$ et $x = L$. La propagation du signal se fait dans les deux directions.

Équations paraboliques

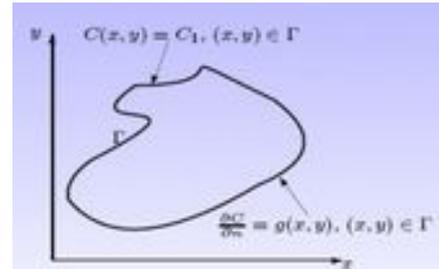
$$\frac{\partial C}{\partial t} = A \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

Nécessite une condition initiale et une condition aux limites (d'entrée) en $x = 0$ et $x = L$.



Équations elliptiques

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = -Q \quad \text{Nécessite une condition aux limites sur la frontière du domaine}$$



Parfois, un schéma demande plus de conditions aux limites ou initiales que la formulation mathématique ne le permet. Ceci est dû au fait que l'on ne résout pas l'équation mathématique mais une approximation de celle-ci, contenant des dérivées d'ordre supérieur et demandant des conditions auxiliaires additionnelles (voir erreur de troncature de l'équation équivalente). L'effet de ces conditions aux limites ou initiales additionnelles doit normalement disparaître lorsque les résolutions augmentent.

Les modèles avec frontières ouvertes

texte tirée du site de l'Ifremer

Pour se protéger du risque de retenir dans la modélisation certaines conditions complètement dénuées de sens physique, on a introduit en mathématiques le concept de problème bien posé. Un problème sera dit bien posé si :

- la solution existe et
- la solution dépend continûment des données.

Toutefois, selon cette définition mathématique, un problème bien posé peut avoir une infinité de solutions, ce qui n'est pas acceptable en modélisation. C'est pourquoi Courant et Hilbert (1962) ont ajouté la condition suivante :

- la solution est uniquement déterminée par les données.

La détermination de conditions aux limites mathématiquement correctes fait intervenir des résultats théoriques de continuité et de convergence, le cas d'une côte (frontière fermée) étant le plus facile à démontrer du fait de l'annulation de la vitesse normale et de la vitesse tangentielle.

On a aussi pu montrer que les conditions aux limites ouvertes utilisées lors des premières simulations numériques en mécanique des fluides par Charney et al. (1950) avec un modèle quasi-géostrophique monocouche étaient adéquates (fonction de courant constante sur les bords et données de la vorticité aux points de flux entrant). En fait, le problème du modèle quasi-géostrophique est bien posé tant qu'il n'y a pas de points isolés pour lesquels l'écoulement n'est pas tangent aux bords.

Bennett (1992) analyse le cas du modèle en eau peu profonde linéaire pour lequel il identifie des conditions aux limites ouvertes satisfaisantes ; il démontre aussi que le problème est mal posé dans le cas non linéaire. Puis il aborde le problème des modèles stratifiés. Des conditions aux limites ouvertes peuvent être exhibées dans un certain cas linéaire, mais les calculs très lourds laissent peu d'espoir d'arriver à des résultats positifs dans le cas non linéaire. Il montre de plus que le nombre de conditions aux limites à imposer sur une frontière ouverte dépend du régime et du sens de l'écoulement local, c'est-à-dire que le nombre de conditions aux limites à ajouter pour compléter le système d'équations primitives initiales peut être diff rent en deux points d'une même frontière et ce nombre peut, de plus, varier dans le temps. Bien entendu, dans une simulation numérique, on n'étudie pas point par point la forme de l'écoulement, mais on impose un même jeu de conditions aux limites sur toute la frontière. Il en résulte en général une sur-détermination des conditions aux limites en certains points, notamment les points où l'écoulement est sortant. Si les conditions spécifiées étaient parfaites, cette sur-détermination n'entraînerait pas de conséquence, mais en pratique on ne dispose jamais de valeurs exactes, ne serait-ce que par l'erreur d'arrondi des calculateurs.

La conclusion est donc que le problème des conditions aux limites ouvertes est sans aucun doute mal posé pour les modèles aux équations primitives (voir aussi Yakimiw et Robert 1986 et Robert et Yakimiw 1990).

  ces considérations théoriques, il faut ajouter un problème pratique : le manque d'observations océanographiques. Supposons en effet que la théorie puisse nous donner une formulation explicite de conditions aux limites parfaites, il resterait alors à aller en mer mesurer ces valeurs sur les bords de la région d'étude afin de les "fournir" au modèle. Il est impossible de disposer de ce genre

d'observations, sauf peut-être pour des domaines géographiquement très limités. Des expériences de ce genre ont été tentées avec des modèles quasi-géostrophiques (De Mey et Robinson 1987, De Mey et Ménard 1989, Rienecker et Miller 1991). Des campagnes de mesures ont été déployées en essayant d'échantillonner au mieux les bords du domaine. Les résultats des simulations montrent que l'inévitable bruit de mesure des observations effectuées sur les bords polluaient rapidement l'intérieur du domaine, ce phénomène étant d'autant plus accentué que le domaine est nécessairement de petite taille (voir aussi Miller et Bennett (1988) pour les problèmes d'instabilités numériques sur les frontières ouvertes).

Le problème mathématique des frontières ouvertes dans les modèles aux équations primitives étant mal posé, il faut avoir recours à une méthode de régularisation. Ces méthodes consistent à modifier légèrement le problème, en général par ajout de conditions supplémentaires que l'on demande à la solution de vérifier. Ces conditions sont issues de connaissance que l'on peut avoir a priori sur la solution ; elles portent sur la régularité de la solution (variations bornées des dérivées), des statistiques disponibles (climatologie), ou de l'information issue de l'observation. On recherche alors la solution qui satisfait l'ensemble des contraintes. Physiquement, cela correspond à lever l'indétermination du problème initial en recherchant parmi toutes les solutions possibles celle qui est la plus régulière dans le cas de la validation croisée ou celle qui est la plus proche des observations dans le cas de l'assimilation de données. Mathématiquement, on se trouve confronté à un problème d'inversion.

Les méthodes d'inversion classiques (Tarantola 1987), développées initialement pour les sondages pétroliers, se révèlent très peu efficaces pour les problèmes quadridimensionnels (espace + temps) de la météorologie et de l'océanographie : le nombre de variables y est trop important. On a donc introduit dans ces disciplines de nouvelles méthodes issues du calcul variationnel. Ces méthodes variationnelles (LeDimet et Talagrand 1986, Thacker et Long 1988) permettent de résoudre à un coût de calcul abordable ou, tout au moins, concevable, les problèmes d'inversion dans lesquels les gros modèles numériques océaniques ou atmosphériques sont impliqués. Elles permettent en principe de trouver des champs physiques qui utilisent toute l'information apportée à la fois par le modèle numérique et les observations. Les méthodes variationnelles sont employées avec succès depuis désormais un certain temps en météorologie pour l'identification des conditions initiales et commencent à être employées pour l'estimation des conditions aux limites sur la frontière ouverte. Cette approche prometteuse fait l'objet de recherches intenses actuellement. Les résultats théoriques de Bennett (1992) montrent qu'il est possible, par une formulation variationnelle inverse, de régulariser le problème des conditions aux limites ouvertes des modèles aux équations primitives. Toutefois, ce résultat encourageant est théorique et son application pose certains problèmes. En effet, du fait de la grande dimension du modèle, il n'y a que des algorithmes itératifs qui puissent être utilisés pour résoudre le problème de minimisation sur lequel débouche la formulation variationnelle. Or, il apparaît au cours du processus itératif des intégrations du modèle numérique avec des conditions aux limites mal spécifiées et donc numériquement instables. Afin d'éviter ce genre d'instabilités numériques au cours de la résolution du problème, il est envisageable d'associer les méthodes variationnelles à une méthode de résolution simple et robuste. Ainsi, la formulation variationnelle ne portera plus sur le problème initial instable, mais sur une forme qui aura été auparavant régularisée à l'aide d'une méthode simple et qui sera ainsi numériquement stable.

Les remarques précédentes montrent la difficulté de la question posée par les intégrations des modèles océaniques dans des domaines limités et expliquent le faible nombre de travaux publiés qui abordent vraiment le problème. Ils se limitent en effet aux modèles météorologiques (Yakimiw et Robert 1986, Robert et Yakimiw 1990, Errico et Bauhefner 1987) et aux modèles océaniques où les problèmes physiques sont réduits comme les équations en eau peu profonde (Oliger et Sunström 1978), les modèles monocouches à gravité réduite (Camerlango et O'Brien 1980). Bien entendu, les études avec des modèles quasi-géostrophiques ont été privilégiées (De Mey et Robinson 1987, De Mey et Ménard 1989, Rienecker et Miller 1991). Notons en particulier l'étude de Seiler (1993) consacrée spécifiquement à l'identification par méthode adjointe des conditions aux limites. Son travail est pour le moment purement numérique et ne met pas en œuvre d'observations, mais la méthode est très intéressante et les résultats encourageants. Marotzke et Wunsch (1993) recherchent avec un modèle aux équations primitives par une méthode variationnelle une circulation stationnaire de l'Atlantique Nord qui soit compatible avec la climatologie.

Le cas des modèles aux équations primitives est plus délicat. En l'absence de résultats théoriques, des

solutions pratiques ont été proposées pour contourner le problème dans les simulations numériques. La solution la plus rudimentaire consiste à fermer les frontières en agrandissant le domaine jusqu'à une côte ou "assez loin" pour que les phénomènes se développant sur les bords n'aient pas le temps de se propager jusqu'au centre du domaine pendant la durée de l'intégration. Cette solution est très coûteuse en temps de calcul et n'est guère utilisée. Les autres solutions (conditions de radiation, conditions de type éponge) qui ont été utilisées jusqu'à présent sont plus astucieuses. Toutefois, bien que basées sur certains fondements théoriques, elles sont avant tout empiriques et leur efficacité dépend beaucoup de la situation à simuler.

Méthodes pratiques de calcul des conditions initiales

Modèle ROMS (version IRD ROMS_tools)

Le conditions initiales pour le champ de courant sont calculées par le script *make_clim.m* en utilisant la méthode dynamique et les données *World Ocean Atlas*.

Ci-dessous, un petit rappel de la méthode dynamique, qui permet de calculer un champ 3D de courant en équilibre géostrophique à partir des données de T et S . Pour plus de détails voir : G. Copin-Montégut, Le Courant Géostrophique, <http://www.obs-vlfr.fr/Enseignement/enseignants/copin/Geostro.pdf>.

Le courant géostrophique à l'immersion où se situe localement l'isobare p a pour valeur :

$$u_p = \frac{1}{f} g \frac{dh}{dn} \simeq \frac{1}{f} g \frac{z^A - z^B}{\Delta n}$$

où dh/dn est la pente locale de l'isobare et z_A et z_B sont les profondeurs auxquelles se situe une même isobare p à deux stations A et B éloignées l'une de l'autre d'une distance Δn .

On obtient la profondeur à laquelle est située l'isobare p en intégrant l'équation de l'hydrostatique

$$z_p = \frac{1}{g_0} \int_0^1 \frac{1}{\rho} dp = \frac{1}{g_0} \int_0^1 \alpha dp$$

où on a remplacé la densité avec le volume massique α . Cette relation devient discrète dans la pratique :

$$z_p = \frac{1}{g} \sum_0^p \bar{\alpha} \Delta p$$

On définit le géopotential comme

$$\Phi_p \equiv g \times z = \frac{1}{g_0} \int_0^1 \alpha dp \simeq \sum_0^p \bar{\alpha} \Delta p$$

et on peut donc calculer la vitesse géostrophique à partir du géopotential avec la formule

$$u_p = \frac{1}{f} \frac{\Phi_p^A - \Phi_p^B}{\Delta n}$$

Le calcul du géopotential d'une isobare peut s'écrire :

$$\Phi_p = \sum_0^p \bar{\alpha}_{(T,S,p)} \Delta p = \sum_0^p \bar{\alpha}_{(0,35,p)} \Delta p + \sum_0^p \bar{\delta} \Delta p$$

Alors en définissant $D_p = \sum_0^p \bar{\delta} \Delta p$ l'anomalie de géopotential, on peut réécrire le calcul de la vitesse géostrophique à partir de l'anomalie :

$$u_p = \frac{1}{f} \frac{D_p^A - D_p^B}{\Delta n}$$

Des tableaux empiriques fournissent les valeurs de D pour des couples de valeurs de T et de S pour une isobare p .

Enfin, en estimant que les isobares profondes sont parallèles et non pas le niveau de la mer en surface, il faut effectuer le nivellement à partir d'une isobare profonde (la valeur **zref** dans *make_clim.m*!!!).

Modèle Symphonie

(texte issu de la traduction du papier Estournel et al., 2003)

Le calcul de l'état initial du modèle a pour but de démarrer la simulation avec une circulation de grande échelle déjà établie. Dans le Golfe du Lion, cette circulation est quasi-géostrophique et correspond au Courant Nord [Millot, 1990]. Différentes méthodes ont déjà été proposées pour modéliser des circulations d'extension horizontale supérieure à l'échelle du domaine numérique côtier. Le modèle peut débiter à partir d'un état au repos en imposant des forçages extérieurs au niveau des frontières ouvertes établissant un courant géostrophique [Pinazo et al., 1996]. Néanmoins, le temps de mise en place de cette circulation peut s'avérer long et, à cause du fait que le problème avec les équations primitives est mal posé, l'état final est imprévisible. Une autre solution consiste à initialiser le modèle côtier avec des champs dynamiques interpolés déduits des résultats fournis par un modèle de circulation océanique à plus grande échelle voire globale (*OGCM, Ocean Global Circulation Model*) de la Méditerranée [Beckers et al., 1997] et/ou des données. Cependant, Auclair et al. [2000] ont montré que cette méthode peut parfois donner des résultats non satisfaisants si de fortes inconsistances apparaissent entre les courants de fond interpolés et les gradients locaux de bathymétrie. Le début des simulations peut être caractérisé par des processus transitoires irréalistes, tels que la propagation d'ondes de gravité excitées à la côte ou sur des zones de fort gradient de topographie. Ils en concluent que l'ajustement dynamique à la contrainte topographique doit être introduit dans le schéma d'interpolation du champ de grande échelle afin d'éviter les conflits entre la bathymétrie du modèle à grande échelle et celle du modèle à plus fine résolution. Le Golfe du Lion et son talus continental abrupt indenté de nombreux canyons sous-marins est un exemple de domaine où l'initialisation d'un modèle côtier est particulièrement compliquée.

La solution proposée par Auclair et al. [2000] est d'appliquer une méthode d'interpolation optimisée basée sur les équations linéarisées du modèle. Toutefois, si toutes les équations et les variables du modèle sont utilisées, cette méthode nécessite la résolution d'un nombre assez grand d'équations avec par conséquent une forte demande de temps de calcul. Un compromis intéressant entre temps de calcul et équilibre de la condition initiale consiste dans la résolution des équations du seul mode externe du modèle. Estournel et al. [2003] ont calculé l'état initial du modèle de circulation du Golfe du Lion à partir d'un ensemble d'équations linéarisées en appliquant la méthode suivante.

1. Approximation de toit rigide

$$U = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad V = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (A1)$$

avec U et V les composantes du transport et Ψ fonction de courant barotrope.

2. Paramétrisation du cisaillement vertical du courant géostrophique

Considérons le gradient de pression sous la forme suivante

$$\nabla p(z) = \nabla p_s + g \int_z^0 \nabla \rho dz \quad (A2)$$

où ∇p_s est le gradient de pression à la surface et ∇p_s est le gradient horizontal de densité.

En suivant la méthode de Cooper et Haines [1996] on peut simplifier (A2). En considérant $\rho(z)$ un champ de densité homogène sur l'horizontale, on peut considérer que les gradients horizontaux sont le résultat de déplacements sur la verticale homogènes h des colonnes d'eau. Le gradient de pression peut alors être approximé par

$$\nabla p(z) = \nabla p_s + g(\rho(0) - \rho(z))\nabla h \quad (A3)$$

Le gradient de déplacement vertical ∇h peut être calculé avec (A3) et une condition de vitesse nulle (*no motion*) à une certaine profondeur z_{ref} , qui peut être le fond comme dans Cooper et Haines [1996] :

$$\nabla h = -\frac{\nabla p_s}{g(\rho(0) - \rho(z_{ref}))} \quad (A4)$$

En remplaçant (A4) dans (A3), on obtient finalement la relation :

$$\nabla p(z) = R(z)\nabla p_s = R(z)g\rho_o\nabla\eta \quad (A5)$$

avec

$$R(z) = \frac{\rho(z) - \rho(z_{ref})}{\rho(0) - \rho(z_{ref})} \quad (A6)$$

$R(z)$ peut être calculé avec cette formule à partir de données de sections CTD, mais (A5) suggère qu'il peut être aussi considéré comme la représentation adimensionnée du cisaillement du courant géostrophique. La validité de la forte assumption que ∇h soit uniforme sur la verticale a été vérifiée par Estournel et al. [2003] en comparant $R(z)$ avec les profils de courants géostrophiques obtenus à partir des données hydrologiques et ils concluent que $R(z)$ est mieux estimé par la formulation

$$R(z) = \frac{V_g(z)}{V_g(0)} \quad (A7)$$

avec V_g intensité du courant géostrophique moyen, calculée avec les données CTD en fixant un niveau de vitesse nulle au fond.

3. Équations linéarisées du transport à l'équilibre

En faisant l'hypothèse de la stationnarité, en négligeant les termes d'advection et en utilisant (A5), les équations à l'équilibre du mode externe s'écrivent :

$$-f\frac{\partial\psi}{\partial x} = -g\bar{R}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\tau_{sx}-\tau_{bx}}{\rho_o} - H\left[\frac{\partial}{\partial x}A_h\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}A_h\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right] \quad (A8)$$

$$-f\frac{\partial\psi}{\partial y} = -g\bar{R}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\tau_{sy}-\tau_{by}}{\rho_o} + H\left[\frac{\partial}{\partial x}A_h\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}A_h\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right] \quad (A9)$$

où τ_s est le frottement dû au vent, τ_b est le frottement au fond, H est la profondeur, A_h est le coefficient de viscosité horizontale et $\bar{R} = \int_{-H}^0 R dz$.

Le frottement au fond, qui est généralement paramétré avec une loi quadratique, est calculé par Estournel et al. [2003] avec une relation linéaire $(\tau_{bx}, \tau_{by}) = \rho_o c_d (u_b, v_b)$ dont le courant au fond est estimé à partir du transport et du cisaillement vertical du courant géostrophique avec la relation :

$$(u_b, v_b) = \frac{R_{(z=-H)}}{\bar{R}}(U, V) = \frac{R_{(z=-H)}}{\bar{R}}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) \quad (A10)$$

En divisant (A8) et (A9) par \bar{R} , dérivant la première par rapport à y et la deuxième par rapport à x et en soustrayant, le terme contenant la surélévation peut être éliminé. Utilisant la (A10), une équation pour la fonction de courant peut être finalement obtenue (voir thèse Dufau-Juillard, eq.3.48).

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f}{\bar{R}} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f}{\bar{R}} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial y} = r \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{R_{(z=-h)}}{\bar{R}^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + r \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{R_{(z=-h)}}{\bar{R}^2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\theta(\partial \Psi / \partial x)}{\bar{R}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\theta(\partial \Psi / \partial y)}{\bar{R}} \right) + \frac{1}{Tr} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{U_g + (\partial \Psi / \partial y)}{\bar{R}} \right) - \left(\frac{V_g - (\partial \Psi / \partial x)}{\bar{R}} \right) \right] \right]$$

En pratique, un système linéaire du type

$$A\Psi = B \quad (A11)$$

est résolu sur la même grille du modèle. Ψ est une matrice colonne contenant les valeurs de la fonction courant dans chaque maille, A est une matrice carrée avec les opérateurs de la fonction de courant déduits dès schémas linéarisés du mode externe du modèle et B est une matrice colonne avec

les termes de forçage, i.e. le rotationnel de $\frac{\tau_s}{\rho_o \bar{R}}$ et les conditions aux frontières ouvertes.

4. Conditions au frontières ouvertes pour le modèle linéaire

La fonction de courant doit s'annuler à la côte. La condition à la frontière ouverte peut être calculée à partir des données d'un modèle à plus grande échelle. Le cas échéant, Estournel et al. [2003] ont considéré, sur la base des nombreuses études précédentes [Millot, 1990], que le Courant Nord suit principalement la pente continentale et ont prescrit une condition basée sur une simple relation linéaire avec la bathymétrie :

$$\Psi_{ob} = \alpha H \quad (A12)$$

validée par des mesures ADCP.

L'intensité du courant de pente obtenue par (A11) est fortement dépendante de la valeur de α (au lieu de la valeur du frottement du vent, comme c'est notamment le cas dans la région du Golfe du Lion) et Estournel et al. [2003] ont fixé sa valeur égale à 400 s^{-1} (OK for PSI if not CHECK DIMENSIONS ???) afin d'obtenir des valeurs comparables aux courants observés et ont résolu numériquement (A11) sur un domaine plus grand que celui du domaine étudié afin de réduire l'influence de la condition à la frontière.

5. Initialisation du modèle

Soit Ψ_{i0} une solution de (A11) et (U_{i0}, V_{i0}) les composantes du transport calculées avec (A1). Les composantes horizontales du courant peuvent être déduites du transport et du coefficient de cisaillement vertical du courant géostrophique R :

$$(u_{i0}, v_{i0}) = \frac{R(z)}{\bar{R}} (U_{i0}, V_{i0}) \quad (A13)$$

Ensuite, les valeurs du transport et du courant sont introduites dans (A8) et (A9) pour calculer la surélévation. D'une manière similaire à (A11), (A8) et (A9) sont utilisées pour obtenir un système surestimé d'équations linéaires à résoudre sur la grille du modèle :

$$C X = D \quad (A14)$$

où X est une matrice colonne qui contient la surélévation dans chaque maille de grille, C contient les opérateurs horizontaux pour la surélévation et D les termes qui restent, i.e. le terme de Coriolis, les termes de frottement à la surface et au fond et la viscosité horizontale.

La solution de (A14) est

$$X = (C^T C)^{-1} C^T D \quad (A15)$$

Une perturbation du champ de densité peut être déduite à partir du champ de surélévation, en utilisant l'équilibre hydrostatique et (A5) dérivée par rapport à z :

$$\rho_{i0} = -\rho_o R' \eta_{i0} \quad (A16)$$

avec R' dérivée de R par rapport à z . Le champ total de densité est donné par

$$\rho = -\rho(z) + \rho_{i0} \quad (A17)$$

où le champ de densité homogène sur l'horizontale $\rho(z)$ a été choisi pour être représentatif des

données de la campagne FETCH.

La salinité initiale S_{t0} est déterminée empiriquement à partir des données et la température initiale T_{t0} est calculée avec l'équation d'état de l'eau de mer.

En accord avec les conclusions de Auclair et al. [2000], l'état initial de Estournel et al. [2003] ainsi calculé est stable et ne produit pas de processus transitoires d'ajustement au début de la simulation.

Des études de sensibilité sur la durée de la période de *spin-up* et des comparaisons entre modèle et données ont amené Estournel et al. [2003] à considérer 8 jours comme une période suffisante aux forçages locaux du vent et du panache du Rhône pour mettre en place la circulation locale.

Les schémas numériques pour résoudre (A11) et (A14) dérivent directement du mode externe du modèle. Cet aspect permet d'obtenir un état initial en accord avec la dynamique du modèle et donc de pouvoir réduire le temps de *spin-up*. En ce qui concerne l'application au Courant Nord, il est bien représenté, particulièrement son intensité et la répartition tridimensionnelle des vitesses. Ces deux caractéristiques sont d'ailleurs facilement contrôlées aux travers des forçages aux limites ouvertes et de la fonction $R(z)$. Pourtant, Dufau-Juilland et al. [2004] souligne comment le choix d'un unique $R(z)$ pour l'ensemble du domaine de modélisation limite le niveau de réalisme de l'état initial. On peut s'attendre à ce qu'il existe une variabilité spatiale dans le cisaillement vertical du courant entre la côte, le plateau et le large.

Auclair et al. [2003] montrent que l'intrusion du courant de pente sur le plateau continental est plus probable lorsque $R(z)$ diminue rapidement en profondeur (courant peu profond) et que des courants barotropes ($R(z)=1$) ont tendance à suivre le talus continental.

Dufau-Juilland et al. [2004] proposent d'initialiser le modèle côtier en utilisant une combinaison linéaire de N solutions Ψ^i correspondant à plusieurs profils verticaux $R^i(z)$, $i=1, N$, i.e.

$$(\Psi, u, v, \nabla P_s, \nabla \rho) = \sum_{i=1, N} (\Psi^i, u^i, v^i, \nabla P_s^i, \nabla \rho^i)$$

afin de reproduire la variabilité spatiale de la circulation tridimensionnelle dans le Golfe du Lion avec un nombre limité de profils. En particulier, trois profils sont choisis à partir des données du modèle à grande échelle MOM : un pour le large, un pour la zone du talus et un pour la zone du plateau continental.

D'ailleurs, la méthode de Dufau-Juilland et al. [2004] diffère aussi de celle de Estournel et al. [2003] par le choix des conditions aux limites, qui sont fournies par le modèle MOM à l'échelle de la Méditerranée, et non par une représentation schématique du Courant Nord.

Conditions aux frontières ouvertes pour les modèles résolvant les équations primitives

Sélection de diapos tirées de la présentation :
E.Blayo

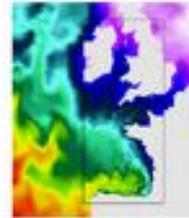
Nesting Ocean Models

http://www-meom.hmg.inpg.fr/Web/GODAE_school/Pdf/E.Blayo.pdf

Nesting ocean models

E. Blayo

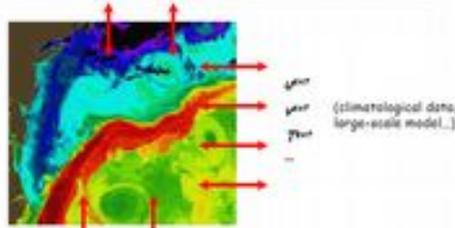
LMC-IMAG, University of Grenoble and INRIA Rhône-Alpes



Collaboration with :

- L. Delbecq, V. Federman, C. Vouland (LMC-IMAG)
- B. Barnier, G. Broquet, S. Collin (LEGI, Grenoble)
- L. Halpern, C. Japhet, V. Martin (LISA Paris 12)
- P. Marchesiello (IRD Brest)
- P. Vandenbrouck (IFREMER Brest)

The open boundary problem / one-way nesting



$$\begin{cases} L_{\text{low}} u_{\text{low}} = f_{\text{low}} & \text{in } \Omega_{\text{low}} \times [0, T] \\ B u_{\text{low}} = \tau & \text{on } \Gamma \times [0, T] \end{cases}$$

Goal : choose the partial differential operator B in order to

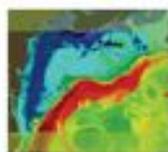
- > evacuate the outgoing information
- > bring some external knowledge on incoming information

The open boundary problem (2)

- > OBCs (data + operator) have a strong influence on the model results.
- > Designing OBCs is an old problem : abundant literature, numerous conditions proposed, often no clear conclusions.
- > Some OBCs are often recommended in comparative studies : radiation methods with relaxation term, Flather condition, relaxation (+ sponge layer), Hedström condition.

- > give an overview of usual OBCs
- > performances of OBCs : fact and fiction
- > How can we design OBCs for primitive equations ?

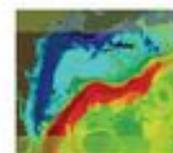
Usual open boundary conditions : relaxation methods



relaxation layer
 $(1 - \alpha(x)) \phi + \alpha(x) \phi^{\text{ext}}$

- > This is equivalent to adding a nudging term: $\frac{\partial \phi}{\partial t} + F(\phi) + K(\phi - \phi^{\text{ext}}) = 0$
- > Relaxation is often used together with a **sponge layer** (i.e. increased viscosity within the relaxation area)
- > Limit case : **Clamped** boundary conditions $\phi = \phi^{\text{ext}}$

Usual open boundary conditions : relaxation methods (2)



$(1 - \alpha(x)) \phi + \alpha(x) \phi^{\text{ext}}$

- > Clamped boundary conditions $\phi = \phi^{\text{ext}}$ should be avoided : the outgoing information does not depend on the interior solution.
- > Relaxation + sponge layer gives good results in all comparative studies (e.g. Reed & Cooper, 87; Palma & Matano, 98; Nylander & Dose, 03).
- > Drawbacks: - increase of computational cost
- solution in the relaxation layer ?
- > Future methods : Perfectly Matched Layers (Berenger, 1994; Hu, 2001; Navon et al, 2004)

Usual open boundary conditions : radiation methods

- > Radiation conditions are based on the **Sommerfeld condition** :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

- > For complex flows: **adaptive evaluation of c** (Orlanski-type methods)
- $c = c(x,t)$ is computed at each gridpoint on the boundary and at each timestep, using inner values at the same or at previous timesteps.

$$c(x,t) = - \frac{\partial \phi / \partial t}{\partial \phi / \partial x} \quad \text{gives for example} \quad c_0^+ = - \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{\phi_{0,1}^{n-1} - \phi_{0,1}^{n-2}}{\phi_{0,1}^{n-1} - \phi_{0,1}^{n-2}}$$

Numerous variants : Orlanski (76), Camerlengo & O'Brien (80), Miller & Thorpe (81), Raymond & Kuo (84), Barnier et al. (98), Marchesiello et al. (01)

- > Results and recommendations are split.

Usual open boundary conditions : radiation methods (2)

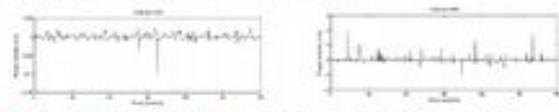
Orlanski = Sommerfeld + an **arbitrary hypothesis** e.g. $\frac{\partial c}{\partial x} = 0$

- > This additional hypothesis makes the condition **nonlinear** (Nylander & Dose, 03).

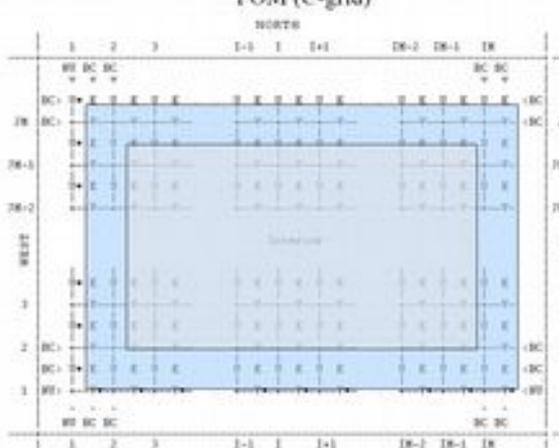
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$$

- > Orlanski-type methods have no justification as soon as there is a combination of several waves with different velocities :

$F(x,t) = f(x-ct)$ satisfies any Orlanski-type condition,
but $F(x,t) = f_1(x-c_1t) + f_2(x-c_2t)$ with $c_1 \neq c_2$ does not.

<p>Usual open boundary conditions : radiation methods (3)</p> <p>> The adaptive estimation of c has no physical meaning, but is more or less a white noise (Tréguer et al., 2001; Duran, 2001).</p>  <p>> Their apparent efficiency in some studies is mostly due to the addition of a relaxation term.</p> $\begin{cases} \phi = \phi^* & \text{or} & \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\phi - \phi^*}{\tau_{in}} & \text{if } c \text{ is inward} \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + c \frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{\phi - \phi^*}{\tau_{out}} & & & \text{if } c \text{ is outward} \end{cases}$ <p>$\frac{\partial(\phi - \phi^*)}{\partial t} = -\frac{\phi - \phi^*}{\tau}$ or $\phi = \phi^*$ would give quite similar results.</p>	<p>Usual open boundary conditions : Flather condition</p> <p>For 2-D barotropic flows :</p> <p>Sommerfeld condition for surface elevation : $\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sqrt{gh} \frac{\partial \eta}{\partial n} = 0$</p> <p>1-D approximation of the continuity equation : $\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial \eta_n}{\partial n} = 0$</p> <p>Combination + integration through Γ : $v_n - \sqrt{\frac{g}{h}} \eta = v_n^* - \sqrt{\frac{g}{h}} \eta^*$</p> <p>> Used with additional conditions like $\frac{\partial \eta}{\partial n} = 0$</p> <p>> Gives good results in all comparative studies (e.g. Palma & Matano, 98; Marchesiello et al. 01; Nylander & Böss, 03).</p>
--	---

Exemples de codages

<p>POM (C-grid)</p> 	<p>Clamped Condition</p> <pre> **** NORTH *** j=JM ELF(j,M)=? VAF(j,M)=? UAF(j,M)=? **** WEST *** i=1 ELF(1,j)=? UAF(2,j)=? VAF(1,j)=? **** EAST *** i=IM ELF(IM,j)=? UAF(IM,j)=? VAF(IM,j)=? **** SOUTH *** j=1 ELF(i,1)=? VAF(i,2)=? UAF(i,1)=? </pre>
<p>Zero Gradient Condition</p> <pre> **** NORTH *** j=JM ELF(j,M)=ELF(j,M-1) VAF(j,M)=? UAF(j,M)=? **** WEST *** i=1 ELF(1,j)=ELF(2,j) UAF(2,j)=UAF(3,j) VAF(1,j)=VAF(2,j) **** EAST *** i=IM ELF(IM,j)=ELF(IM-1,j) UAF(IM,j)=UAF(IM-1,j) VAF(IM,j)=VAF(IM-1,j) **** SOUTH *** j=1 ELF(i,1)=ELF(i,2) VAF(i,2)=VAF(i,3) UAF(i,1)=UAF(i,2) </pre>	<p>Flather Condition</p> <pre> **** NORTH *** j=JM ELF(j,M)=ELF(j,M-1) VAF(j,M)=? UAF(j,M)=? **** WEST *** i=1 ELF(1,j)=ELF(2,j) UAF(2,j)=UAF(3,j) VAF(1,j)=VAF(2,j) **** EAST *** i=IM ELF(IM,j)=ELF(IM-1,j) UAF(IM,j)=? + sqrt(GH(IM,j)) VAF(IM,j)=VAF(IM-1,j) **** SOUTH *** j=1 ELF(i,1)=ELF(i,2) VAF(i,2)=VAF(i,3) UAF(i,1)=UAF(i,2) </pre>

Travaux Pratiques

TP 1 : Familiarisation avec Linux ; inscription comme utilisateur de CROCO et téléchargement des logiciels et des données

Se connecter à une machine de la salle informatique avec système Linux ou au server du campus (commande `ssh -X -p8012 login@sas.luminy.univ-amu.fr`).

Dans une fenêtre *Terminal* (pour en ouvrir une sous Linux, *Ctrl+Alt+t* ou menu *Outils de système*).

Essayer les commandes Linux suivantes :

pwd savoir le répertoire où l'on se trouve

ls liste du contenu du répertoire (option utiles **ls -l**, **ls -lh**, **ls -lrth**)

cd *nom_du_repertoire* changer de répertoire (**cd** tout seul pour retourner à la home)

man *nom_de_la_commande* aide

mkdir *nom_du_repertoire* créer un répertoire

rm -i *nom_du_fichier* effacer (**rmdir** pour les répertoires)

& en fin de commande (ou **Ctrl+Z** suivi de **bg**) pour mettre en *background* (**fg**, **top**)

Dans une deuxième fenêtre terminal, se connecter au cluster de calcul avec la commande

`ssh login@172.20.9.110`

Comparer le contenu de la home locale et de la home du cluster : le contenu doit être le même, sauf un sous-répertoire *modelisation-calcul* présent seulement sur le cluster

Créer un sous répertoire *modelisation/MYCROCO2021* qui sera le répertoire de travail pour ce cours. Ce répertoire apparaîtra aussi sur la machine locale.

Aller à la page web <https://www.croco-ocean.org>

Lire la page d'accueil et, pour plus d'information, ouvrir le lien « *History* » (<https://www.croco-ocean.org/history/>) : un nouveau modèle, CROCO, vient de naître !

Cliquer sur l'onglet « *Download* », ouvrir le lien « *CROCO Project* », lire le texte et s'inscrire comme utilisateur de ROMS en ouvrant dans une nouvelle fenêtre le lien [official ROMS website](#).

Revenir à la page « *Download/Croco Project* » et télécharger dans le répertoire de travail (touche droite et commande « enregistrer la cible du lien sous ... ») les fichiers suivants :

- depuis la page « *Croco Project* » : **CROCO stable release V1.1** ;
- depuis la page « *Croco Project* » : **CROCO_tools stable release V1.1**

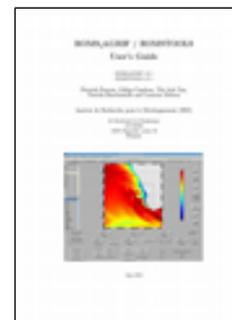
Ouvrir la page <https://www.croco-ocean.org/download/datasets/> et télécharger dans le répertoire de travail (touche droite et commande « enregistrer la cible du lien sous ... ») les fichiers suivants :

- lien COADS05/ **COADS05.tar.gz**
- lien Topo/ **Topo.tar.gz**
- lien WOA2009 **WOA2009.tar.gz**
- lien m_map **m_map1.4f.tar.gz**

Ouvrir la page <https://www.croco-ocean.org/documentation/> et cliquer dans la rubrique *CROCO's documentation and tutorials* «*PDF of model's doc*» « *tutos* »).

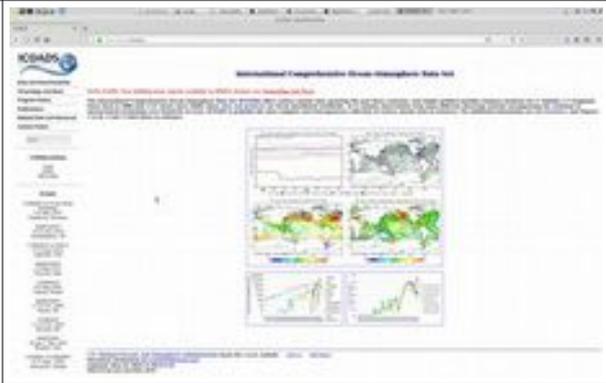
Enfin, vérifier que dans votre répertoire de travail il y ait bien :
6 fichiers *.tar.gz et 2 fichiers *.pdf .

Ci-dessous, quelques informations sur les données qui viennent d'être téléchargées.



<https://icoads.noaa.gov/>

The **International Comprehensive Ocean-Atmosphere Data Set (ICOADS)** offers surface marine data spanning the past three centuries, and simple gridded monthly summary products for 2° latitude x 2° longitude boxes back to 1800 (and 1°x1° boxes since 1960)—these data and products are freely distributed worldwide. As it contains observations from many different observing systems encompassing the evolution of measurement technology over hundreds of years, ICOADS is probably the most complete and heterogeneous collection of surface marine data in existence.



<https://www.ngdc.noaa.gov/mgg/global/etopo2.html>

The "Smith & Sandwell" database is a worldwide set of **2 - minute gridded ocean bathymetry** derived from 1978 satellite radar altimetry of the sea surface.



https://www.nodc.noaa.gov/OC5/WOA09/pr_woa09.html

World Ocean Atlas 2009 (WOA09) is a set of objectively analyzed (1° grid) climatological fields of in situ temperature, salinity, dissolved oxygen, Apparent Oxygen Utilization (AOU), percent oxygen saturation, phosphate, silicate, and nitrate at standard depth levels for annual, seasonal, and monthly compositing periods for the World Ocean. It also includes associated statistical fields of observed oceanographic profile data interpolated to standard depth levels on both 1° and 5° grids .



<https://www.eoas.ubc.ca/~rich/map.html>

M_Map is a set of **mapping tools** written for Matlab (it also works under [Octave](#)). M_Map includes:

- Routines to project data in 20 different projections (and determine inverse mappings), using spherical and ellipsoidal earth-models.
- A grid generation routine to make nice axes with limits either in lat/long terms or in planar X/Y terms.
- A coastline database (with 1/4 degree resolution).
- A global elevation database (1 degree resolution).
- Hooks into freely available high-resolution coastline and bathymetry databases.



TP 2 : Décompression et test de compilation

Se connecter à une machine de la salle informatique avec système Linux ou au serveur du campus (commande `ssh -X -p 8012 login@sas.luminy.univ-amu.fr`).

Dans une fenêtre *Terminal* exécuter la commande `ls -l` et vérifier le nombre de fichiers téléchargés (6 fichiers `.tar.gz` + 2 fichiers `.pdf`)

Désarchiver tous les fichiers avec la commande `tar -xvfz nomdufichier.tar.gz` en suivant l'ordre ci-dessous :
Désarchiver `croco-v1.1.tar.gz`, un répertoire `croco-v1.1/` apparaît dans lequel se trouvent tous les codes de CROCO.

Désarchiver `croco_tools-v1.1.tar.gz`, un répertoire `croco_tools-v1.1/` apparaît.

Désarchiver les fichiers des données `COADS05.tar.gz`, `Topo.tar.gz` et `WOA2009.tar.gz`.

Copier les répertoires `COADS05`, `Topo` et `WOA2009` qui viennent d'apparaître dans le répertoire `croco_tools-v1.1` avec les commandes :

```
mv COADS05 croco_tools-v1.1/
```

```
mv Topo croco_tools-v1.1/
```

```
mv WOA2009 croco_tools-v1.1/
```

Ouvrir le répertoire `croco_tools-v1.1` et vérifier le nombre de répertoires (23 répertoires + 3 fichiers) et leur contenu (voir ci-dessous les descriptions des différentes sources de données).

Éditer et lire le fichier `readme_version_croco_tools.txt` avec `gedit`.

Se connecter au cluster de calcul avec la commande `ssh login@172.20.9.110`.

Vérifier que vous soyez dans le *home directory* avec la commande `pwd`.

Se déplacer dans le répertoire de travail `$modelisation/MYCROCO2021`.

Renommer le répertoire `croco-v1.1` en `croco`, et renommer `croco_tools_V1.1` en `croco_tools` :

```
mv croco-v1.1 croco
```

```
mv croco_tools_V1.1 croco_tools
```

Puis aller dans `croco` et lancer le script `create_run.bash` :

```
cd croco
```

```
./create_run.bash
```

Un répertoire `$modelisation/MYCROCO2021/Run_BENGUELA_LR` apparaît. Aller dans ce répertoire qui contient tout le nécessaire pour la compilation et l'exécution du code.

Vérifier que le script `jobcomp` soit exécutable (sinon le rendre exécutable avec la commande `chmod a+x`).

Sur la machine locale, éditer le fichier `jobcomp` et

ajouter à la ligne 40 les 2 lignes suivantes :

```
NETCDFLIB="-I/home/mazoyer/CROCO/CROCO_Graphique/LibrairieNetcdf/netcdf_x86_64/ -lnetcdf"
```

```
NETCDFINC="-I/home/mazoyer/CROCO/CROCO_Graphique/LibrairieNetcdf/netcdf_x86_64/"
```

et supprimer les lignes 62-63 :

```
NETCDFLIB=$(nf-config --flibs)
```

```
NETCDFINC=-I$(nf-config --includedir)
```

Sur le cluster, effectuer la compilation du code du modèle en exécutant ce script avec la commande `./jobcomp`

Si tout se passe bien, à la fin de la compilation, un fichier exécutable nommé `croco` a été créé ; vérifier sa présence et ses propriétés avec la commande `ls -lrt`.

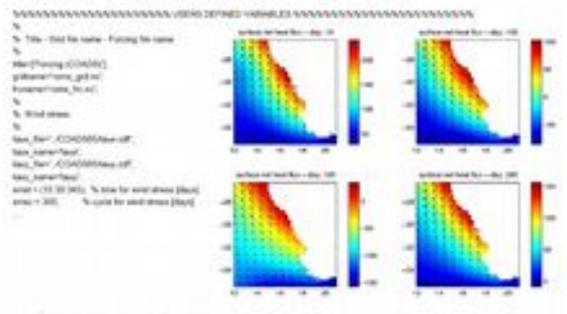
Synchroniser les répertoires `modelisation` et `modelisation-cluster` avec le script `synchro_cluster.sh`, que vous avez téléchargé depuis les pages web du cours dans le répertoire `MYCROCO2021` et rendus exécutables avec la commande `chmod a+x synchro_cluster.sh`.

Enfin, se déconnecter du cluster avec la commande `logout`.

TP 4 : Benguela example : forçages et conditions aux frontières (*make_forcing* et *make_clim*)

Diapos tirées de la présentation de P. Penven à l'école d'été de modélisation à l'Université de Toulon en 2006
http://seet.univ-tln.fr/ecoleete/Documents/ROMS_TOOLS.pdf

2.6.1.2: ~Roms_tools/Preprocessing_tools/make_forcing.m

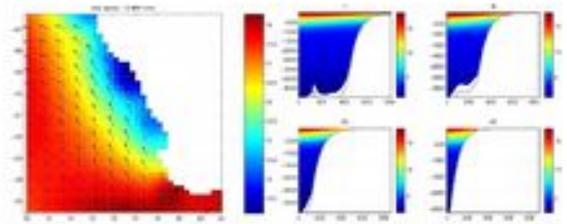


Result of >>make_forcing : roms_frc.nc

2.6.1.3: ~Roms_tools/Preprocessing_tools/make_clim.m



Result of >>make_clim : roms_in.nc AND roms_clm.nc



Se connecter à une machine de la salle informatique avec système Linux ou au serveur du campus (commande `ssh -X -p8012 login@sas.luminy.univ-amu.fr`) et ensuite au serveur matlab (commande `ssh -X ens1.luminy.univmed.fr`).

Aller dans le répertoire `$MYCROCO2021/Run_BENGUELA_LR/`
Lancer Matlab avec la commande `matlab -nodesktop`.

Éditer le fichier `make_forcing.m` qui se trouve dans le repertoire `Preprocessing_tools`, comprendre son fonctionnement et, l'exécuter ensuite dans Matlab.

Vérifier que dans le sous-répertoire `CROCO_FILES/` il y ait deux nouveaux fichiers nommés `croco_frc.nc`.

Également, éditer le fichier `make_clim.m`, comprendre son fonctionnement et, l'exécuter ensuite.

Vérifier que dans le sous-répertoire `CROCO_FILES/` il y ait deux nouveaux fichiers nommés `croco_oa.nc`, `croco_clm.nc` et `croco_ini.nc`.

Sauvegarder les figures produites dans des fichier `.pdf`.

Pour lancer la simulation sur le cluster de calcul, il faut préparer un script de lancement spécifique au système d'exploitation de cette machine à haute performance.

Pour plus d'information sur le système d'exploitation Slurm, visiter le site <https://slurm.schedmd.com/overview.html>.

Pour plus d'information sur le cluster de calcul de l'institut, visiter le site <https://calcul.osupytheas.fr/>

Créer le nouveau script avec `gedit` `slurm_run.sh` et les instructions ci-dessous :

```
#!/bin/sh

#SBATCH --job-name=MYCROCO2021
#SBATCH --time=01:00:00
#SBATCH --mail-type=ALL
#SBATCH --mail-user=ici_mettre_votre_mail@etu.univ-amu.fr
#SBATCH --partition=student
#SBATCH --output=output.log
#SBATCH --error=error.log

export
LD_LIBRARY_PATH=$LD_LIBRARY_PATH:/apps/intel/impi/2019.3.199/intel64/lib/lib64:/libraries/libcalcul/netcdf/lib/
export NETCDF=/libraries/libcalcul/netcdf/
source /apps/intel/bin/ifortvars.sh intel64
source /apps/intel/bin/iccvars.sh intel64
source /apps/intel/impi/2019.3.199/intel64/bin/mpivars.sh

ulimit -s unlimited
ulimit -n 100240
ulimit -u 95679
ulimit -f unlimited
ulimit -v unlimited
ulimit -x unlimited

time srun --exclusive --ntasks 1 ./croco croco.in
```

Se connecter au cluster avec la commande `ssh login@172.20.9.110` et se déplacer dans le répertoire `/home/AMU/$USER/modelisation_calcul/MYCROCO2021/Run_BENGUELA_LR/`.

Rendre exécutable le script de lancement avec la commande `chmod a+x slurm_run.sh`.

Synchroniser les répertoires de calcul du cluster avec le script `synchro_cluster.sh` (voir TD2).

Lancer la simulation avec la commande `sbatch slurm_run.sh`.

Vérifier l'exécution du modèle pendant qu'il tourne avec la commande `squeue` (si le modèle tourne correctement `state=RUNNING`), en éditant le fichier `output.log` et en regardant le contenu du répertoire `CROCO_FILES/`.

Synchroniser les répertoires de calcul du cluster avec le script `synchro_cluster.sh`.

Se connecter au serveur matlab (commande `ssh -X ens1.luminy.univmed.fr`) et visualiser à l'aide du script `croco_gui.m` les résultats de la simulations contenus dans les fichiers `roms_avg.nc` et `roms_his.nc` du répertoire `Run_BENGUELA_LR/CROCO_FILES/`.

TP 7 : Implémentation d'un nouveau modèle pour une région océanique choisie

Lancer une fenêtre Terminal et aller dans le répertoire `$MYCROCO2020/croco/`.

Éditer le script `create_run.bash`, modifier le nom de la configuration à la ligne 24 et l'exécuter.

Télécharger dans le répertoire `MYCROCO2020` le fichier `ad_tools.tar.gz` et `gshh.tar.gz` depuis la page web du cours https://people.mio.osupytheas.fr/~doglioli/TEACHING_Modelisation3DOceanique/.

Décompacter les archives en utilisant la commande `tar -xvfz - nom_archive.tar.gz`.

Déplacer les fichiers `gssh*` dans le répertoire `modelisation/MYCROCO2020/croco_tools/UTILITIES/m_map1.4h/private/`.

Ajouter à la fin du fichier `startup.m` les instructions suivantes :

```
disp('add path of ad-tools');addpath('../ad_tools')
```

Utiliser le script Matlab `ad_findgeocoord.m` pour fixer les coordonnées de votre domaine de calcul.

Copier dans le nouveau répertoire de travail depuis `Run_BENGUELA` le fichier `crocotools_param.m` et y modifier les coordonnées géographiques et la résolution horizontale, et vérifier le nombre de niveau verticaux (pour éviter des simulation trop longues, limiter la taille de la grille autour de 10^5 mailles) et lancer `make_grid.m`. Avec l'option `editmask`, modifier le masque du modèle. Faire particulièrement attention aux frontières ouvertes, qui doivent aussi être indiquées dans `crocotools_param.m` à la ligne 233.

Terminer l'exécution de `make_grid.m`, sauvegarder la figure de la bathymétrie et les valeurs de la grille nécessaires au calcul du critère CFL dans un fichier nommé `memo.mat` à l'aide des instructions MATLAB suivantes :

```
LLm=L-1;MMm=M-1;
```

```
save memo LLm MMm dxmin dymin dxmax dymax grdname
```

Exécuter les scripts pour le calcul des forçages et des conditions initiales et aux frontières `make_forcing.m` et `make_clim.m`, en n'oubliant pas de sauvegarder les figures pour une future utilisation dans le rapport.

Adapter les fichiers `param.h` et `cppdefs.h` en définissant une nouvelle clé pour la nouvelle configuration de la façon suivante.

Ajouter dans `param.h` à la ligne 187

```
# elif defined NOM_DE_VOTRE_CONFIG
  parameter (LLm0=nouvelle_valeur, MMm0=nouvelle_valeur, N=nouvelle_valeur)
```

Modifier le fichier `cppdefs.h` à la ligne 56

```
# define BENGUELA_LR
# undef BENGUELA_LR
# define NOM_DE_VOTRE_CONFIG
```

Toujours dans `cppdefs.h`, activer/désactiver les clés correspondant aux frontières ouvertes dans la nouvelle configuration (lignes 75-78).

Calculer les pas de temps interne et externe de la simulation sur la base du critère CFL à l'aide du script MATLAB `ad_cfl.m`. Vérifier le résultat à la main avec la formule reportée dans le polycopié du cours.

Éditer les fichiers `roms.in` pour fixer le pas de temps interne et externe (variables `dt[sec]` et `NDTFAST`) sur la base du critère CFL et fixer la durée de la simulation (variable `NTIMES`) et la fréquence de sauvegarde des sorties instantanées et moyennées (variables `NWRT` et `NAVG`) et des sorties pour relancer le modèle (variable `NRST`).

Se connecter au cluster et se déplacer dans le répertoire

```
/home/AMU/$USER/modelisation_calcul/MYCROCO2020/Run_BENGUELA_LR/
```

Compiler le modèle avec `./jobcomp`.

Après avoir vérifié dans le fichier `run_croco.bash` le pas de temps, le nombre de jours par mois simulé, le mois et l'année de départ et de fin, lancer une simulation pluriannuelle avec la commande `sbatch` `./slurm_run_croco.sh`.

TP 8 : Mise en ligne des résultats du nouveau modèle

Si ce n'est pas encore fait, il faut demander l'activation de la page web personnelle via l'ENT ; toutes les informations sont sur <https://dud.univ-amu.fr/ma-page-web-personnelle-campus-luminy> et le lien vers le formulaire de demande est <https://newutils.luminy.univ-amu.fr/>.

Pour modifier votre page web :

- créer dans votre home locale un sous-répertoire *MYWEB* ;

télécharger my synchro dans MYWEB

rendre exécutable ;

- copier le contenu du répertoire web actuellement en ligne depuis le serveur web avec la commande
`rsync -auv --modify-window=2 --rsh='ssh -p8012' sasweb.luminy.univ-amu.fr/amuhome/$USER/ amuhome/$USER/MYWEB/`

- éditer avec gedit le fichier *index.html* qui représente la home .sh de vos pages web ;

- visualiser les changements en ouvrant ce même fichier avec le navigateur Firefox, en utilisant la touche F5 pour recharger la page chaque fois qu'un changement est sauvegardé ;

- mettre en ligne la nouvelle version avec la commande

`rsync -auv --modify-window=2 --rsh='ssh -p8012' amuhome/$USER/MYWEB/ sasweb.luminy.univ-amu.fr/amuhome/$USER/`

-visualiser la page web en ligne en accédant à l'adresse <https://prenom-nom-etu.pedaweb.univ-amu.fr/> avec le navigateur Firefox et en utilisant la touche F5 pour recharger la page.

Dans la page suivante, vous trouverez un exemple de code HTML.

Sur la page web du cours, un script pour synchroniser les pages web est disponible.

Ci-dessous, le code source de la page web d'à côté, avec les commandes en langage HTML pour insérer :

- un lien à une page web externe ou à un document PDF interne
- un tableau <TABLE> avec des lignes <TR> et ses colonnes <TD>
- une figure JPG
- une ligne horizontale <HR>
- le retour à la ligne

- centrer le texte <CENTER>

Chaque commande se termine avec la même commande précédée de /



```
<html>

<!-- En tête -->
<head>
  <title>Page Personnelle de PRENOM NOM</title>
</head>

<!-- Corps de la page -->
<body bgcolor=white>

<h2>Page Personnelle de PRENOM NOM</h2>
&Eacute;tudiant du Master de Sciences de la Mer de l'
<A href="http://www.pytheas.univ-amu.fr" target="new">Institut Pyth&eacute;as de
Marseille</A>
<BR><HR>

<CENTER>
<H3>Mes r&eacute;sultats du cours <BR> <I>OPCB205 - Mod&eacute;lisation 3D
Oc&eacute;anique</I></H3>

<TABLE BORDER=1 width=90%>
  <TR>
    <TD width=30% ALIGN="CENTER"> Bathymetrie du mod&egrave;le</TD>
    <TD width=70% ALIGN="CENTER"><IMG width=90% src="./bathy.jpg"></TD>
  </TR>
  <TR>
    <TD width=30% ALIGN="CENTER"> ??? </TD>
    <TD width=70% ALIGN="CENTER"><IMG src="./nom_du_fichier2.jpg"></TD>
  </TR>
</TABLE>

<BR>
Pour t&eacute;l&eacute;charger mon rapport (en format PDF) faire click <A
href="./nom_du_fichier.pdf"> ICI </A>
<BR>
Pour t&eacute;l&eacute;charger ma pr&eacute;sentation (en format PDF) faire click <A
href="./nom_du_fichier.pdf"> ICI </A>
<BR>
<HR><BR>
<I>Derni&egrave;re r&eacute;vision de cette page JOUR/MOIS/ANNEE</I><BR>

</CENTER>
</body>
</html>
```

TP 9 (4h) : Rédaction du rapport et de la présentation

En suivant le schéma typique d'un article de recherche (introduction, méthode, résultats, discussion, conclusion), le rapport sur le travail effectué devra contenir :

- un résumé en français et un *abstract* en anglais ;
- une présentation de la zone d'étude et de la modélisation numérique ;
- une explication du modèle ROMS et de son implémentation pour la région océanique choisie (résolution, taille du domaine numérique, conditions initiales et aux frontières, paramètres d'intégration temporels, etc.) avec un degré de détail tel que d'autres modélisateurs puissent éventuellement refaire les mêmes expériences numériques ;
- une présentation des résultats numériques obtenus (diagnostics du modèle, circulations saisonnières, profils de température et de salinité, etc.) ;
- une comparaison avec les données de la littérature (voir le papier fourni à chacun et éventuellement d'autres) ;
- une conclusion sur le fonctionnement du modèle numérique implémenté avec des suggestions pour de possibles améliorations et des perspectives.

Ce document doit comporter de 8 à 10 pages (de l'introduction à la conclusion) composées en simple interligne avec des marges de 2 cm minimum. La police de caractère sera Times New Roman ou Nimbus Roman avec une taille de 12 points minimum. Le nombre de pages du rapport devra être strictement respecté. Les références bibliographiques et les éventuelles programmes numériques seront adjoints en annexe.

Règles de rédaction :

- sur la première page (couverture) doivent apparaître : année, nom de l'UE, du Master et de l'Université, NOM et prénom de l'étudiant, le titre du rapport, la date ;
- toutes les figures et les tableaux doivent être numérotés en ordre d'apparition et posséder une légende synthétique, exhaustive et précise. Dans le texte ils seront tous cités comme Fig.*NUMERO* ou Tab.*NUMERO* ;
- seules les équations qui seront citées dans le texte doivent être numérotées en ordre d'apparition. Dans le texte, elles seront citées comme Eq.*NUMERO* ;
- les références bibliographiques seront citées selon le style « auteur-date », i.e. le nom de l'auteur est suivi de la date de publication du papier. S'il y a deux auteurs, les deux noms seront indiquées ; s'il y a plus de 2 auteurs, seul le premier sera indiqué suivi de « et al ».

Exemples :

- Auteur mentionné dans le texte : « Perrot (2011) obtient ... »
- Auteur non mentionné dans le texte : «... studi precedenti (Supplien 2011)... »
- Plusieurs documents cités du même auteur et parus la même année : ajout d'une lettre

après l'année selon l'ordre de citation qui doit être reporté dans la bibliographie finale
« (Assassi 2011a)...(Assassi 2011b)... »

- Plusieurs auteurs : cités par ordre chronologique : « Certains auteurs (Kersalé 2009, Rainaud et Dutheil 2011) affirment... »

- toutes les citations doivent être référencées dans la bibliographie par ordre alphabétique, puis pour un même auteur par ordre chronologique, selon le style suivant :

NOM, Initiale(s). *Titre de l'article*. Titre du périodique, date de publication, volume, numéro.

NOM, Initiale(s). *Titre de la contribution et/ou Nom du site*. Date de publication. Date ou périodicité de mise à jour [date de consultation]. Disponible sur Internet <adresse URL>

La présentation suivra le même schéma dans le contenu et sa durée à l'oral devra strictement être comprise entre 10 et 12 minutes.

Sur la première diapo doit apparaître : année, nom de l'UE, du Master et de l'Université, NOM et prénom de l'étudiant, le titre du rapport, la date.

Choisir des couleurs foncées sur fond clair ou des couleurs claires sur fond sombre.

Taille des caractères d'au moins 24 points.

Ne pas oublier de numéroter les diapositives.

Le rapport (à nommer *Nometudiant_rapportOPB205.pdf*) et la présentation (à nommer *Nometudiant_presentationOPB205.pdf*) doivent être mis en ligne sur les pages web personnelles en format PDF, respectivement une semaine et deux jours avant l'examen.

La deuxième version du rapport, révisée et corrigée, devra être mise en ligne avant le jury.

!!! ASTUCE !!!

Il est suggéré d'utiliser pour la rédaction du rapport et la présentation, les logiciels libres TeXworks (interface amicale pour le langage TeX) ou LibreOffice, disponibles sur les machines de la salle info ou bien téléchargeables depuis les adresses <http://www.tug.org/texworks/> ou <http://www.libreoffice.org> en version pour Windows et pour Linux. De plus, une maquette de rapport sous format .tex est disponible sur la page web du cours.

Ces logiciels présentent, entre autre, l'avantage d'une sauvegarde directe des fichiers en format PDF.

Autrement, pour la conversion d'un fichier MSOffice (Word ou PowerPoint) en format PDF il est possible de suivre la démarche illustrée à l'adresse suivante :

<http://www.eleves.ens.fr/wintuteurs/tutorials/ms-office2ps/index.html>

Sujets d'examen des années précédentes

Examen Partiel

mercredi 27 février 2008

DURÉE : 1h30

L'usage de tout document est interdit.

Chaque question vaut 4 points.

Les réponses doivent être les plus concises et précises possibles.

- 1) Décrire la signification du point de vue physique des différents termes des équations du mouvement

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P}{\partial x} + f v - \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P}{\partial y} - f u - \frac{\partial \overline{v'u'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z}.$$

- 2) Expliquer les différences entre les techniques de fermeture de la turbulence adoptées par SYMPHONIE, POM et ROMS.
- 3) Écrire et expliquer la condition à la surface pour l'équation de conservation de la salinité.
- 4) Expliquer la différence entre les grilles d'Arakawa B et C.
- 5) En quoi consiste la technique de la séparation du pas de temps (*time splitting*) ?

Examen Partiel

lundi 15 mars 2010

DURÉE : 1h30

L'usage de tout document est interdit.

Chaque question vaut 5 points.

Les réponses doivent être les plus concises et précises possibles.

- 1) Écrire et expliquer les équations de la conservation de la température et de la salinité.
- 2) Décrire la signification du point de vue physique des différents termes de l'équation de l'énergie cinétique turbulente du modèle SYMPHONIE

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} Q = A_z \underbrace{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right]}_{(1)} + \underbrace{\frac{g}{\rho_0} A_z \frac{\partial \rho}{\partial z}}_{(2)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left(A_z \frac{\partial Q}{\partial z} \right)}_{(3)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(A_h \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_h \frac{\partial Q}{\partial y} \right)}_{(4)} - \varepsilon .$$

- 3) Expliquer dans quel but l'équation précédente est introduite dans le système d'équations résolu par le modèle SYMPHONIE et analyser les différences entre les différents types d'approche utilisés par les autres modèles POM et ROMS.
- 4) Écrire et expliquer les conditions au fond pour les équations d'un modèle thermo-hydrodynamique de l'océan.

Examen Partiel

vendredi 18 mars 2011

DURÉE : 1h30

*L'usage de tout document est interdit.
Chaque question vaut 5 points.
Les réponses doivent être les plus concises et précises possibles.*

- 1) Qu'est-ce que l'« usine à fabriquer le temps » ? Quelles idées physiques en sont à la base ?
- 2) Écrire et expliquer les équations en eaux peu profondes.
- 3) Décrire la signification physique des différents termes de l'équation

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = -\frac{\partial \overline{(T'u')}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{(T'v')}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{(T'w')}}{\partial z} + \frac{H_c}{\rho_o C_p} \frac{\partial I}{\partial z}$$

- 4) Expliquer le schéma de mélange vertical dit « *KPP*, *K - profile parameterization* » utilisé par le modèle ROMS.

Examen Partiel

RATTRAPAGE 25 mars 2011

DURÉE : 1h30

L'usage de tout document est interdit.

Chaque question vaut 5 points.

Les réponses doivent être les plus concises et précises possibles.

- 1) Écrire et expliquer les équations de la conservation de la température.
- 2) Décrire la signification du point de vue physique des différents termes de l'équation de l'énergie cinétique turbulente du modèle SYMPHONIE.
- 3) Expliquer dans quel but l'équation précédente est introduite dans le système d'équations résolu par le modèle SYMPHONIE et analyser les différences entre les différents types d'approche utilisés par les modèles POM.
- 4) Écrire et expliquer les conditions au fond pour les équations d'un modèle thermo-hydrodynamique de l'océan.

Examen Oral

RATTRAPAGE 20 juin 2012

DURÉE : 45'

L'usage de tout document est interdit.

Chaque question vaut 5 points.

Les réponses doivent être les plus concises et précises possibles.

- 1) Décrire la signification du point de vue physique des différents termes des équations du mouvement ci-dessous :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} + f v - \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} - f u - \frac{\partial \overline{v'u'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z}.$$

- 2) Expliquer les différences entre les techniques de fermeture de la turbulence adoptées par SYMPHONIE, POM et ROMS.
- 3) Expliquer la différence entre les grilles d'Arakawa B et C.
- 4) En quoi consiste la technique de la séparation du pas de temps (*time splitting*) ?

Examen Partiel

vendredi 10 avril 2015

DURÉE : 1h30'

L'usage de tout document est interdit.

Chaque question vaut 5 points.

Les réponses doivent être les plus concises et précises possibles.

- 1) Décrire la signification du point de vue physique des différents termes des équations du mouvement ci-dessous :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} + f v - \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} - f u - \frac{\partial \overline{v'u'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z}.$$

- 2) Expliquer le critère CFL et donner un exemple d'application.
- 3) Expliquer la grilles d'Arakawa C.
- 4) Quel est la différence entre une grille verticale en coordonnées z et une grille verticale suivant la topographie ?

Liste des projets des années précédentes

- [Arancio, M.](#) (2008), *Modélisation de la Mer Adriatique avec ROMS*. [[PDF rapport](#); [PDF presentation](#)]
- [Assassi, C.](#) (2011), *Le courant Algérien*. [[PDF rapport](#); [PDF presentation](#)]
- [Ayache, M.](#) (2012), *Application du modèle ROMS dans le bassin Algérien*. [[PDF rapport](#); [PDF presentation](#)]
- Bachelier, C. (2007), *Modélisation de la Méditerranée Nord Occidentale*. [[PDF rapport](#)]
- [Beghoura, H.](#) (2015), *Étude de la dynamique océanique dans le bassin Algérien*. []
- Beloucif, N. (2007), *Modélisation de la circulation dans le Golfe du Lion : application du modèle Romstools et comparaison avec le modèle Symphonie*. [[PDF rapport](#)]
- [Bergthold, V.](#) (2015), *Modélisation de la circulation dans le Golfe du Mexique*. []
- [Blaizot, A.-C.](#) (2008), *Modélisation océanographique dans la Mer du Japon*. [[PDF rapport](#) ; [PDF presentation](#)]
- [Bourgeois, T.](#) (2012), *Application du modèle ROMS aux Îles Marquises*. [[PDF rapport](#); [PDF presentation](#)]
- [Bouvier, C.](#) (2013), *Modélisation de la circulation dans le Golfe du Lion*. [[PDF rapport](#) ; [PDF presentation](#)]
- [Caffin, J.](#) (2014), *Application du modèle ROMS à la Manche*. [[PDF rapport](#) ; [PDF presentation](#)]
- [Campbell, R.](#) (2007), *Introduction à ROMS: étude de la mer Ligure*. [[PDF rapport](#)]
- [Chauvin, V.](#) (2014), *Modélisation du Courant Est Australien*. []
- [Desbiolles, F.](#) (2010), *Comparaison entre deux schémas de fermeture de la turbulence avec ROMS en Adriatique*. [[PDF rapport](#) ; [PDF presentation](#)]
- [Dorel, M.](#) (2010), *Étude du bassin levatin avec le modèle ROMS*. [[PDF rapport](#) ; [PDF presentation](#)]
- [Dutheil, C.](#) (2011), *Modélisation du Courant Est Australien avec ROMS et son utilitaire ROMSTOOLS*. [[PDF rapport](#) ; [PDF presentation](#)]
- [Giannesini, L.](#) (2011), *Etudes du courant Oyashio par le modèle ROMS*. [[PDF rapport](#) ; [PDF presentation](#)]
- [Grangis, E.](#) (2011), *Application de ROMS au courant de Kuroshio avec ROMSTOOLS*. [[PDF rapport](#) ; [PDF presentation](#)]
- [Guillon, B.](#) (2014), *Modélisation du bassin de Sorell et mise en évidence du courant de Zeehan par le modèle océanique régional ROMS*. [[PDF rapport](#) ; [PDF presentation](#)]
- [Huguet, J.-R.](#) (2013), *Le courant Caraïbe*. [[PDF rapport](#) ; [PDF presentation](#)]
- [Ienny, R.](#) (2015), *Modélisation de la circulation océanique autour du Plateau des Kerguelen*. []
- [José, Y.](#) (2008), *Application de ROMS-Romstools pour étudier les aspects hydrodynamiques du canal du Mozambique*. [[PDF rapport](#) ; [PDF presentation](#)]
- [Lacour, L.](#) (2012), *Modélisation de la circulation océanique en Mer d'Arabie*. [[PDF rapport](#); [PDF presentation](#)]
- [Le Clec'H, S.](#) (2013), *Étude de la circulation océanique autour des îles Malouines en fonction de différents modes de calculs du mélange vertical*. [[PDF rapport](#) ; [PDF presentation](#)]
- [Lucet, M.](#) (2012), *Modélisation de la circulation océanique de l'Argentine*. [[PDF rapport](#); [PDF presentation](#)]

[presentation\]](#)

[Kersalé, M.](#) (2009), *Modélisation de la circulation autour des îles Hawaii*. [[PDF rapport](#) ; [PDF presentation](#)]

[Martin, S.](#) (2015), *Sensibilité d'un modèle de l'upwelling californien à la résolution de la grille et du forçage du vent*. []

[Martinache, M.](#) (2013), *Modélisation du Courant d'Irmingier avec étude de la sensivité aux conditions aux bords ouverts*. [[PDF rapport](#) ; [PDF presentation](#)]

[Mereu, J.](#) (2014), *Etude de la circulation au large des côtes d'Amérique du sud et de l'impact de l'upwelling du Pérou*. [[PDF rapport](#) ; [PDF presentation](#)]

[Morisset, S.](#) (2007), *Modélisation du plateau de Kerguelen à l'aide du modèle RomsTools*. [[PDF rapport](#)]

[Navarro, J.](#) (2014), *Modélisation de la mer des Caraïbes avec le modèle ROMS*. [[PDF rapport](#) ; [PDF presentation](#)]

[Pagès, R.](#) (2015), *Étude de sensibilité aux modèles de fermeture turbulente dans le code ROMS. Application à l'Atlantique*. []

[Perrot, L.](#) (2011), *Introduction au modèle ROMS : Le courant des Aiguilles*. [[PDF rapport](#) ; [PDF presentation](#)]

[Rainaud, R.](#) (2011), *Modélisation 3D du Golfe du Lion*. [[PDF rapport](#) ; [PDF presentation](#)]

[Rammou, A.-M.](#) (2012), *Ocean Circulation Modeling: The Bay of Bengal*. [[PDF rapport](#); [PDF presentation](#)]

[Riousset, R.](#) (2015), *Modélisation de la circulation océanique dans la passe de Drake*. []

[Rocchietta, J.](#) (2014), *Modélisation de la circulation océanique de la Mer des Salomon*. [[PDF rapport](#) ; [PDF presentation](#)]

[Rousselet, L.](#) (2014), *Etude des caractéristiques du Pacifique Sud-Ouest avec le modèle ROMS*. [[PDF rapport](#) ; [PDF presentation](#)]

[Rimaud, J.](#) (2010), *Modélisation régionale 3D: application de ROMS à l'Atlantique Nord avec ROMSTOOLS*. [[PDF rapport](#) ; [PDF presentation](#)]

[Si-Bachir, M.-A.](#) (2012), *Application du model ROMS dans le golfe de Gascogne*. [[PDF rapport](#); [PDF presentation](#)]

[Simon, M.](#) (2008), *Introduction au modèle ROMS : Application de ce modèle au cas du Golfe du Mexique et étude du «Loop Current»*. [[PDF rapport](#) ; [PDF presentation](#)]

[Supplien, M.](#) (2011), *Modélisation du courant de Californie*. [[PDF rapport](#) ; [PDF presentation](#)]

[Susini, M.](#) (2014), *Modélisation et étude de l'upwelling de Somalie*. [[PDF rapport](#) ; [PDF presentation](#)]

[Tehami, I.](#) (2012), *Application du modèle ROMS à la Mer Rouge*. [[PDF rapport](#); [PDF presentation](#)]

[Yefsah, H.](#) (2015), *Étude de la circulation océanique au large du Pérou et rôle de l'upwelling*. []

[Zemenzer, S.](#) (2008), *Application du modèle ROMS dans la méditerranée occidentale; Circulation de LIW dans le bassin Algérien*. [[PDF rapport](#) ; [PDF presentation](#)]