Examen de Statistiques, session d'été, Juin 2007.

documents non autorisés - Calculatrice autorisée - durée $3h00$

Il sera tenu compte dans la notation finale de la propreté des copies et de la précision apportée à chaque réponse.

Exercice n° I.

Sur une rivière en Alaska, une passe à saumon permet de mesurer le temps de passage entre deux saumons successifs (minute). Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :

classe C_i	$[0;1[$	$[1;2[$	$[2;3[$	$[3;4[$	$[4;5[$	$[5;6[$	$[6;7[$	$[7;8[$	$[8;9[$	$[9;10[$	$[10;11[$
effectif N_i	193	170	128	82	73	75	53	38	36	33	31

classe C_i	$[11;12[$	$[12;14[$	$[14;20[$
effectif N_i	24	29	35

I.1) Quel est le type de cette variable?

I.2) Tracer l'histogramme de cette distribution observée ainsi que sa fonction de répartition empirique.

I.3) Calculer la moyenne empirique de cette distribution.

I.4) On décide d'effectuer un regroupement en 3 classes de taille$([0;6[\,,[6;10[\,,[10;20[)$. Calculer la moyenne empirique dans ce cas. Que remarque-t-on?

I.5) Tracer le boxplot de cet échantillon.

Exercice n° II.

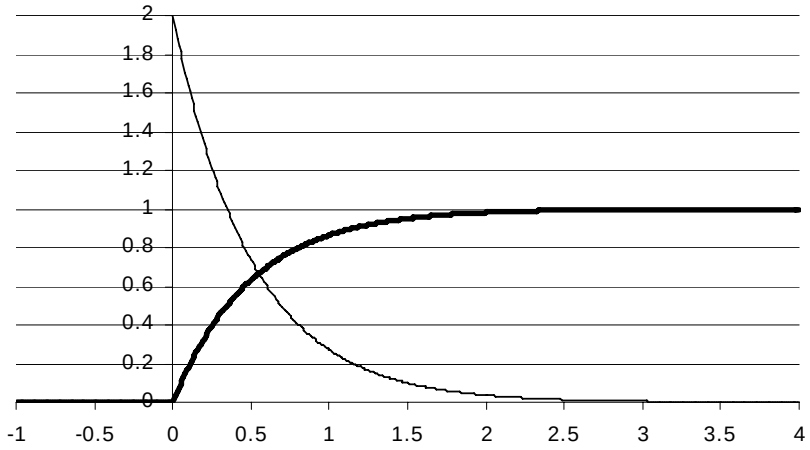
Soit X une variable aléatoire continue à valeur dans $\mathbb{R}$, dont la fonction de répartition est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x < 0 \\ 1 - \exp(-\alpha x), \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

II.1) Déterminer, en fonction de α, l'expression de $f(x)$, densité de probabilité de X. Que doit nécessairement vérifier cette fonction? En déduire la valeur de a.

II.2) Déterminer $E(X)$ et $var(X)$.

II.3) Quel est l'équivalent de l'espérance dans le cadre empirique? Si l'on considère que les données de l'exercice précédent peuvent être ajustées par la loi de X, proposer une estimation de α.

II.4) Que représentent les courbes de la figure ci-dessous? Déterminer, par le calcul, la proportion d'observations ≤ 1? < 2? Comprises entre 1 et 2?

On rappelle que $\displaystyle\int_a^b \exp(\beta t)\,dt = \left[\frac{\exp(\beta t)}{\beta}\right]_a^b$ *où* $\beta \in R^*$.