T. D. n V. Tests d'hypothèse

Exercice n°1.

On sait que, à chaque naissance, la probabilité p d'observer un garçon est très proche de $1/2$. Pour estimer précisément cette probabilité, on recherche son intervalle de confiance pour un coefficient de sécurité de $99.99\,\%$ à partir de la proportion de garçons observée sur n naissances. Quelle valeur donner à n pour avoir une estimation à 0.001 près ?

Exercice n°2.

Un fabriquant de câbles océanographiques donne une charge de rupture $> 55\,kg$ pour un écart-type de $5\,kg$. Un chercheur a effectué des tests sur 9 lots de câbles choisis au hasard. Les résultats de ruptures sont les suivants : 48.0, 48.2, 49.3, 53.5, 54.7, 56.4, 57.8, 58.5, 60.5 .

1. Vérifier, au risque de 5%, si le cahier des charges du fabriquant est respecté.
2. On suppose maintenant que l'écart-type est inconnu. Elaborer un test permettant de vérifer les affirmations du fabriquant. Qu'en déduire par rapport au test précédent?

Exercice n°3.

On cherche à doser la quantité d'un polluant A dans un échantillon d'un litre d'eau. Ce produit A fait l'objet d'une réglementation particulière. On désigne par X la variable aléatoire représentant la quantité A , exprimée en mg/l, que l'on peut trouver dans un échantillon. On admet que X suit une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2. Pour que l'eau soit conforme à la règlementation en vigueur, la valeur de μ ne doit pas dépasser $50\,mg/l$. Un chercheur a effectué des dosages de A sur 9 prélèvements choisis au hasard, dans un même site. Les résultats sont les suivants : $60.5 - 58.5 - 57.8 - 56.4 - 54.7 - 53.5 - 49.3 - 48.2 - 48.0$

1. Vérifier si la règlementation est respectée.
2. Donner, pour le site, un intervalle de confiance de μ.

Exercice n°4.

Pour comparer l'influence de deux régimes alimentaires A et B sur le développement de bars juvéniles, un biologiste a mesuré le poids de poissons élevés dans les conditions A pour les uns, dans les conditions B pour les autres. Il a obtenu les résultats suivants. Pour le régime A (9 poissons mâles) 100, 94, 119, 111, 113, 84, 102, 107, $99\,g$ et pour le régime B (8 poissons mâles) : 107, 115, 99, 111, 114, 127, 145, $140\,g$. Le poids d'un poisson choisi au hasard dans un élevage est une variable aléatoire que l'on désignera par X dans le cas A et par Y dans le cas B . On admet que X et Y sont de loi normale.

1. Montrer qu'il n'y a aucune raison de penser que X et Y ont des variances différentes. Pour la suite, on notera σ^2 , la valeur commune de ces deux variances.
2. En utilisant l'ensemble des résultats, donner une estimation de σ^2 ; on désigne par $\hat{S}^2$ l'estimateur utilisé. Calculer l'espérance et la variance de $\hat{S}^2$ et en déduire les qualités de cet estimateur.
3. En utilisant l'ensemble des résultats et avec un minimum de justifications, donner un intervalle de confiance de σ^2.
4. Montrer que le régime B est plus favorable au développement des bars que le régime A.

Correction des exercices

Les valeurs numériques des quantiles sont déterminées à l'aide du logiciel R en utilisant les fonctions :

- `qt(`p`,`df`)`: `renvoie le quantile d'ordre` p `d'une loi de Student avec` df `degrés de liberté`
- `qf(`p`,`$df1$`,`$df2$`)`: `renvoie le quantile d'ordre` p `d'une loi de Fisher avec (df1, df2) degrés de liberté`
- `qchisq(`p`,`df`)`: `renvoie le quantile d'ordre` p `d'une loi du` χ^2 `avec` df `degrés de liberté`
- `qnorm(`p`,`mu`,`$sigma$`)`: `renvoie le quantile d'ordre` p `d'une loi` $\mathcal{N}$ `de moyenne` mu `et d'écart-type` $sigma$

Correction exercice n°1.

Soit X la variable "genre masculin". Elle suit une loi de Bernouilli de paramètre p. Soit un échantillon de taille n de la même loi que X. Pour estimer la proportion de garçon, un estimateur naturel consiste à calculer la moyenne de l'échantillon composé de 0 (genre fille observé) et de 1 (genre garçon observé). Soit

$$P_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

cet estimateur. D'après le théorème de Moivre-laplace si n est suffisamment grand, alors

$$P_n \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right).$$

On sait alors construire un intervalle de confiance de la forme

$$p_{obs} - \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} z_{1-\alpha/2} \le p \le p_{obs} - \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} z_{\alpha/2}$$

où l'on a remplacé p par $p_0 = 0.5$ dans les bornes de l'intervalle et on prendra $p_{obs} = p_0 = 0.5$ également. Les valeurs z_k sont les quantiles d'ordre k de la $\mathcal{N}(0,1)$. On souhaite un niveau de confiance de 99.99 % soit un risque très faible $\alpha = 0.0001$. Les quantiles d'ordre $\alpha/2$ et $1-\alpha/2$ sont dans ce cas égaux à $z = \pm 3.89$. On souhaite également une estimation à 10^{-3} près, cet à dire que l'on veut

$$\begin{aligned}
&\mid p_0 - p \mid < 10^{-3} \\
&3.89 \times \sqrt{\frac{0.5 \times (1-0.5)}{n}} < 10^{-3} \\
&n > 1945^2 = 3783025.
\end{aligned}$$

Correction exercice n°2.

Q1 - Nous supposerons que les données de l'exercice sont des réalisations d'un échantillon $\{X_1, \cdots, X_n\}$ de taille $n = 9$ de variables aléatoires *i.i.d* gaussiennes de moyenne μ inconnue et de variance fixée $\sigma^2 = 5^2\,kg^2$. Posons $\mu_0 = 55\,kg$. On va ici tester l'hypothèse $H_0 : \mu = \mu_0$ contre l'hypothèse alternative $H_0 : \mu < \mu_0$. Ce qui nous intéresse dans ce problème ce sont les cables défectueux. On se place dans le cas le plus optimiste pour le fabriquant : celui d'une hypothèse nulle *a minima*. On va estimer μ avec

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

la moyenne empirique de l'échantillon. Sous H_0, on sait que $\overline{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ et que sa version centrée-réduite est telle que

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1).$$

Sous H_1, $\overline{X}$ prendra des valeurs inférieures à $\mu = \mu_0$, la variable Z aura tendance à prendre des valeurs négatives. On a donc affaire à un test unilatéral avec une zone de rejet de H_0 à gauche. Fixons le risque de première espèce $\alpha = 0.05$ que l'on souhaite le plus petit possible. La zone de rejet de H_0, notée RH_0 correspond donc à l'intervalle

$$RH_0 =]-\infty;\, z_\alpha[$$

où la borne seuil z_α est le quantile d'ordre α de la gaussienne centrée-réduite. Au risque de 5 % ($\alpha = 0.05$), cette zone de rejet devient

$$RH_0 =]-\infty;\, -1.645[.$$

On a mesuré $\overline{x}_{obs} = 54.1$ à patir des données de l'énoncé et on en déduit

$$z_{obs} = \frac{\overline{x}_{obs} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{54.1 - 55}{\frac{5}{\sqrt{9}}} = -0.54.$$

On constate que $z_{obs} \in \overline{RH}_0$. L'hypothèse nulle n'est pas rejetée. Avec une probabilité de 95 %, le cahier des charges est respecté.

Q2 - On se retouve dans le cas d'un échantillon de variables gaussiennes dont aucune information sur les paramètres populationnels n'est fournie. Il faut donc estimer moyenne et variance avec leurs estimateurs empiriques

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$
$$S_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

où l'on a choisi une version sans biais de l'estimateur de la variance. A la différence du test précédent, le fait que l'on ne nous indique plus une valeur d'écart-type implique que deux sources de variabilité issues de à la fois de l'estimation de la moyenne et de la variance avec l'échantillon proposé, vont venir modifier la distribution de la variable

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{S_{n-1}^2}{n}}}.$$

Sous H_0, cette variable ne suit plus une gaussienne centrée réduite mais une loi de Student à $n-1$ degrés de liberté

$$Z \rightsquigarrow \mathcal{T}_{n-1}.$$

Sous H_1, $\overline{X}$ prendra des valeurs inférieures à $\mu = \mu_0$, la variable Z aura tendance à prendre des valeurs négatives, comme précédemment. On a donc affaire à un test unilatéral avec une zone de rejet de H_0 à gauche. Avec $\alpha = 0.05$, la zone de rejet de H_0, notée RH_0 correspond donc à l'intervalle

$$RH_0 =]-\infty;\, z_{n-1;\alpha}[$$

où la borne seuil $z_{n-1;\alpha}$ est le quantile d'ordre α de la loi de Student de paramètre $n-1$. Comme $n-1 = 8$, cette zone de rejet devient

$$RH_0 =]-\infty;\, -1.86[.$$

On a mesuré $s_{obs}^2 = 21.885$ et

$$z'_{obs} = \frac{\overline{x}_{obs} - \mu_0}{\sqrt{\frac{s_{obs}^2}{n}}} = \frac{54.1 - 55}{\sqrt{\frac{21.885}{9}}} = -0.577,$$

et on en déduit immédiatement que $z'_{obs} \in \overline{RH}_0$. L'hypothèse nulle n'est pas rejetée. Avec une probabilité de 95 %, le cahier des charges est respecté, comme dans le test précédent.

Ce qui diffère concerne essentiellement l'étalement de la distribution (Fig. 1). La loi de Student est plus étalée que la loi normale parce que la statistique de test Z cumule deux sources d'incertitude lorsqu'on estime moyenne et variance populationnelles. On peut calculer la *p-value* (valeur seuil observée) dans le cas gaussien

$$\alpha_{obs} = P\left(Z \le z_{obs}\right) = 0.2945$$

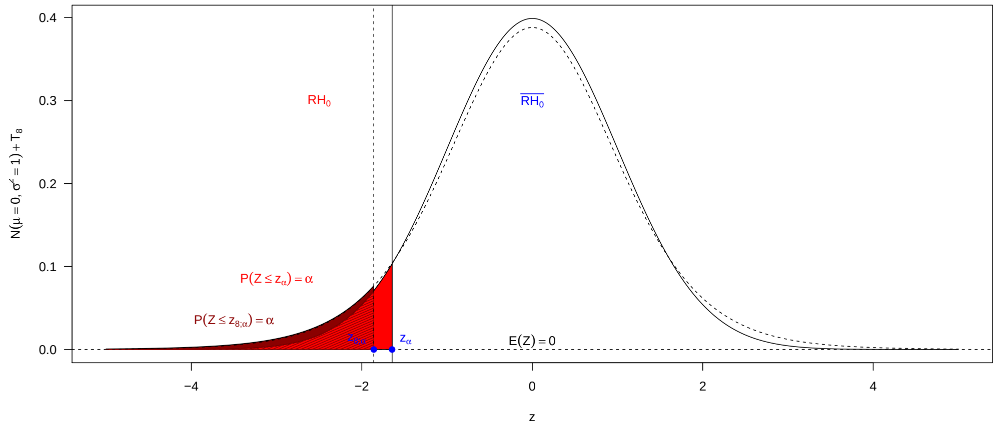

Figure 1: Loi normale centrée réduite et loi de Student à 8 degrés de liberté (pointillés). La probabilité de rejeter H_0 est la même dans le cas de la loi de Student (surface rouge foncé) que dans le cas gaussien (surface rouge clair) mais l'étalement plus important de la loi de Student implique de prendre un quantile $z_{8;\alpha}$ plus éloigné.

et dans le cas de la loi de Student

$$\alpha'_{obs} = P\left(Z \leq z'_{obs}\right) = 0.289.$$

Ces valeurs sont éloignées de la borne seuil à 5 % et finalement assez proche.

Correction exercice n°3.

Q1 - On se trouve dans le même cas de figure que dans la seconde question de l'exercice précédent. Nous supposerons l'échantillon *i.i.d.*, de variables gaussiennes dont aucune information sur les paramètres populationnels n'est fournie. Il faut donc estimer moyenne et variance avec leurs estimateurs empiriques

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$$S^2_{n-1} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

où l'on choisira une version sans biais de l'estimateur de la variance. Fixons $\mu_0 = 50\,mg$, la valeur à ne pas dépasser. On veut tester l'hypothèse $H_0 : \mu = \mu_0$ contre l'alternative $H_1 : \mu > \mu_0$. La statistique de test est la variable aléatoire

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{S^2_{n-1}}{n}}}.$$

Sous H_0, cette variable suit une loi de Student à $n-1$ dégrés de liberté

$$Z \rightsquigarrow \mathcal{T}_{n-1}.$$

Sous H_1, $\overline{X}$ prendra des valeurs supérieures à $\mu = \mu_0$ et la variable Z aura tendance à prendre des valeurs positives. On a donc affaire à un test unilatéral avec une zone de rejet de H_0 à droite. Avec $\alpha = 0.05$, la zone de rejet de H_0, notée RH_0 correspond donc à l'intervalle

$$RH_0 =]z_{n-1;1-\alpha};\, +\infty[$$

où la borne seuil $z_{n-1;1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi de Student de paramètre $n-1$. Dans cet exercice, $\alpha = 0.05$, $n-1 = 8$, $z_{8;0.95} = 1.86$ et cette zone de rejet devient

$$RH_0 =]1.86;\, +\infty[.$$

On a mesuré $\overline{x}_{obs} = 54.1$ et $s^2_{obs} = 21.885$, ce qui nous permet de calculer

$$z_{obs} = \frac{\overline{x}_{obs} - \mu_0}{\sqrt{\frac{s^2_{obs}}{n}}} = \frac{54.1 - 50}{\sqrt{\frac{24.62}{9}}} = 2.629,$$

et on en déduit immédiatement que $z_{obs} \in RH_0$. L'hypothèse nulle est rejetée. Avec une probabilité de 95 %, la réglementation n'est pas respectée.

Q2 - On veut un intervalle de confiance de la moyenne d'une population gaussienne ou moyenne et variance sont estimées avec un échantillon de petite taille ($n = 9$). On sait que cet intervalle est de la forme

$$IC_{1-\alpha} = \left[\overline{X} - \sqrt{\frac{S^2_{n-1}}{n}} z_{n-1;1-\alpha/2};\ \overline{X} - \sqrt{\frac{S^2_{n-1}}{n}} z_{n-1;\alpha/2}\right]$$

où $z_{n-1;1-\alpha/2} = z_{8;0.975} = 2.30$ et $z_{n-1;\alpha/2} = z_{8;0.025} = -2.30$ si $\alpha = 0.05$. Avec les valeurs calculées sur l'échantillon, on obtient alors

$$\begin{aligned}
IC_{0.95} &= \left[\overline{x}_{obs} - \sqrt{\frac{s^2_{obs}}{n}} z_{8;0.975};\ \overline{x}_{obs} - \sqrt{\frac{s^2_{obs}}{n}} z_{8;0.025}\right] \\
&= \left[54.1 - \sqrt{\frac{21.885}{9}} \times 2.30;\ 54.1 + \sqrt{\frac{21.885}{9}} \times 2.30\right] \\
&= [50.50;\ 57.69]\,.
\end{aligned}$$

Avec un échantillon réalisé dans les mêmes conditions que celui dont nous disposons, il y aurait 95 % de chance de trouver $50.50 \leq \mu \leq 57.69$, ce qui corrobore les résultats du test précédent ($\mu_0 \notin IC_{0.95}$).

Correction exercice n°4.

Q1 - Pour le régime A, on dispose d'un échantillon $\{X_1, \cdots, X_9\}$ de variables que nous supposerons *i.i.d.* et de même loi mère que la variable $X \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu_A, \sigma^2_A\right)$. pour le régime B, on a un échantillon $\{Y_1, \cdots, Y_8\}$ de variables que nous supposerons également *i.i.d.* et de même loi mère que la variable $Y \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu_B, \sigma^2_B\right)$. Aucun paramètre populationnel n'est connu. Il faut donc les estimer. Soit

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} X_i \text{ et on a observé } \overline{x}_{obs} = 103.222, \\
S^2_A &= \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{9} \left(X_i - \overline{X}\right)^2 \text{ et on a observé } s^2_A = 112.944, \\
\overline{Y} &= \frac{1}{8}\sum_{j=1}^{8} Y_j \text{ et on a observé } \overline{y}_{obs} = 119.750, \\
S^2_B &= \frac{1}{7}\sum_{j=1}^{8} \left(Y_j - \overline{Y}\right)^2 \text{ et on a observé } s^2_B = 260.786.
\end{aligned}$$

On souhaite établir un test permettant de confronter l'hypothèse $H_0: \sigma^2_A = \sigma^2_B$ contre l'alternative $H_1: \sigma^2_A \neq \sigma^2_B$. On sait que, pour le régime A, la variable aléatoire

$$Z_A = \frac{8S^2_A}{\sigma^2_A}$$

suit une loi χ^2_8. Pour le régime B,

$$Z_B = \frac{7S^2_B}{\sigma^2_B} \rightsquigarrow \chi^2_7.$$

La statistique de test que nous allons utiliser est donnée par la variable

$$Z = \frac{8 \times Z_B}{7 \times Z_A} = \frac{\sigma_A^2 S_B^2}{\sigma_B^2 S_A^2} \rightsquigarrow \mathcal{F}\left(7, 8\right)$$

que l'on sait suivre une loi de Fisher-Snedecor de paramètres $(7, 8)$(Fig 2).

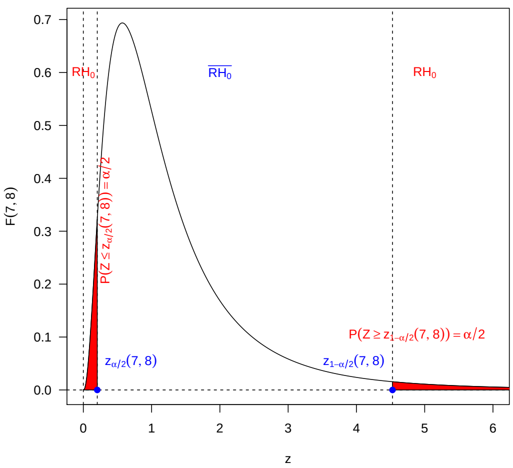

Figure 2: Loi de Fisher-Snedecor de paramètres $(7, 8)$. Distribution de probabilité et test bilatéral $(\alpha = 0.05)$.

Sous H_0, la variable

$$Z = \frac{S_B^2}{S_A^2} \rightsquigarrow \mathcal{F}\left(7, 8\right)$$

car $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$. Sous H_1, la variable Z peut s'écrire

$$Z = \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2} \times \frac{\sigma_A^2 S_B^2}{\sigma_B^2 S_A^2} = \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2} \times Z'$$

où $Z' \rightsquigarrow \mathcal{F}\left(7, 8\right)$. La variable Z aura donc tendance à prendre des valeurs plus petites sous H_1 si $\sigma_A^2 > \sigma_B^2$, l'inverse sinon. le test est bilatéral avec une zone de rejet à droite et à gauche. La zone de non-rejet de H_0 est de la forme

$$\overline{RH}_0 = \left[z_{(7,8);\alpha/2};\ z_{(7,8);1-\alpha/2}\right]$$

où $z_{(7,8);\alpha/2}$ et $z_{(7,8);1-\alpha/2}$ sont les quantiles d'ordre donné de la loi $F\left(7, 8\right)$. Pour $\alpha = 0.05$, on obtient

$$\begin{aligned}\overline{RH}_0 &= \left[z_{(7,8);0.025};\ z_{(7,8);0.975}\right] \\ &= \left[0.204;\ 4.528\right].\end{aligned}$$

On a observé

$$z_{obs} = \frac{s_B^2}{s_A^2} = \frac{260.786}{112.944} = 2.309.$$

On constate que $z_{obs} \in \overline{RH}_0$. l'hypothèse nulle n'est pas rejetée : on a aucune raison de penser que $\sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$. On posera pour la suite $\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma^2$.

Q2 - Lorsque les variances des échantillons sont homogènes on peut construire un estimateur de la variance commune des deux échantilllons avec

$$\widehat{S}^2 = \frac{8 \times S_A^2 + 7 \times S_B^2}{7 + 8}$$

et l'on a observé $\widehat{s}^2_{obs} = 181.937$. On sait que la variable

$$\frac{15 \widehat{S}^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2_{15}.$$

Dans ce cas, on en déduit que

$$E\left(\frac{15\widehat{S}^2}{\sigma^2}\right) = \frac{15}{\sigma^2}E\left(\widehat{S}^2\right) = 15,$$

grçace à la connaissance de l'espérance d'un χ^2_{15}et aux propriétés de linéarité de l'espérance, et

$$V\left(\frac{15\widehat{S}^2}{\sigma^2}\right) = \frac{15^2}{\sigma^4}V\left(\widehat{S}^2\right) = 2\times 15,$$

parce que $V\left(\chi^2_p\right) = 2p$ et grâce qux propriétés de la variance. Finalement, $\widehat{S}^2$ est un estimateur sans biais car $E\left(\widehat{S}^2\right) = \sigma^2$, également convergent car

$$V\left(\widehat{S}^2\right) = \frac{2\sigma^4}{15},$$

variance qui tendra tendra vers 0 si la taille de l'échantillon augmente.

Q3 - On peut construire un intervalle de confiance de σ^2 en utilisant la loi du χ^2_{15} car

$$P\left(\chi^2_{15;\alpha/2} \leq \frac{15\widehat{S}^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{15;1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha,$$

où les bornes sont les quantiles d'ordre donné. Avec $\alpha = 0.05$, $\widehat{s}^2_{obs} = 181.937$, $\chi^2_{15;0.025} = 6.262$ et $\chi^2_{15;0.975} = 27.488$, l'intervalle de confiance à 95 % devient

$$\begin{aligned} 6.262 \leq \frac{15\times 181.937}{\sigma^2} &\leq 27.488 \\ 99.28 \leq \sigma^2 \leq 435.81. \end{aligned}$$

Q4 - On veut tester l'hypothèse $H_0 : \mu_A = \mu_B$ contre l'alternative $H_1 : \mu_B > \mu_A$. On s'intéresse à la variable

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\widehat{S}^2\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\right)}} \rightsquigarrow \mathcal{T}_{8+9-2=15}.$$

Sous H_0, la variable

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\widehat{S}^2\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\right)}}$$

suit toujours une loi de Student à 15 degrés de liberté car $\mu_A - \mu_B = 0$. Sous H_1, $\overline{Y}$ prendra des valeurs plus forte que $\overline{X}$: la variable T sera plus petite que sous H_0. Nous sommes confrontés à un test unilatéral avec une zone de rejet à gauche. Au niveau $\alpha = 0.05$, la zone de rejet de H_0 est de la forme

$$RH_0 =]-\infty; t_{15;0.05} = -1.753[$$

où $t_{15;0.05}$ est la quantile d'ordre 0.05 de la loi $\mathcal{T}_{15}$. On observe

$$t_{obs} = \frac{\overline{x}_{obs} - \overline{y}_{obs}}{\sqrt{\widehat{s}^2_{obs}\left(\frac{17}{72}\right)}} = -2.521$$

et $t_{obs} \in RH_0$. L'hypothèse alternative est acceptée : le régime alimentaire B est plus efficace en moyenne que le régime A. On vient d'effectuer un test de comparaison de moyennes qui nécessite, avant d'être exécuté, de s'assurer de l'homogénéité des variances à l'aide d'un test préliminaire de Fisher-Snedecor.