

Navier-Stokes : le problème du prix du millénaire est peut-être résolu

Comprendre le comportement des océans, de l'atmosphère et l'écoulement de l'air autour d'un avion ou d'une voiture nécessite de résoudre les équations de Navier-Stokes. Malgré plus d'un siècle de recherche, les mathématiciens n'avaient jamais pu démontrer un théorème fondamental portant sur la résolution de ces équations. Un mathématicien kazakh pense avoir réussi, ce qui lui vaudrait l'attribution d'un des prix du millénaire de l'institut de mathématiques Clay.

(Le 30/01/2014 à 08:31 - Par Laurent Sacco, Futura-Sciences

<http://www.futura-sciences.com/magazines/mathematiques/infos/actu/d/mathematiques-navier-stokes-probleme-prix-millenaire-peut-etre-resolu-51943/>)

Le 8 août 1900, lors du deuxième congrès international des mathématiciens qui se tenait à Paris, David Hilbert avait proposé une liste de 23 problèmes tenant les mathématiciens en échec. Plusieurs ont été résolus et comme le prévoyait Hilbert, certaines de ces solutions ont eu un impact très significatif sur les mathématiques du XXe siècle. On peut citer par exemple le théorème d'incomplétude de Gödel. L'un des 23 problèmes de Hilbert non résolus est celui de la conjecture de Riemann. Il fait maintenant partie de l'un des sept problèmes du prix du millénaire de l'institut de mathématiques Clay.

Cet institut a été fondé en 1998 par Landon T. Clay, un homme d'affaires américain, richissime et philanthrope. Il a pour but de catalyser des progrès en mathématiques et de les promouvoir de plusieurs façons dans la société. C'est probablement en ayant à l'esprit la saga des 23 problèmes de Hilbert au cours du siècle dernier que des membres de l'institut de mathématiques Clay ont annoncé, lors d'une conférence au Collège de France à Paris le 24 **mai 2000, une liste de sept problèmes dont la résolution par des mathématiciens leur vaudrait un prix d'un million de dollars.** Parmi les membres du comité d'experts ayant sélectionné ces problèmes, on trouvait Michael Atiyah, Alain Connes et Edward Witten, tous lauréats de la médaille Fields. Ces mathématiciens sont aussi très impliqués dans des problèmes de physique théorique, et c'est sans surprise que l'on constate que bon nombre des sept problèmes du prix du millénaire sont à la frontière entre les mathématiques pures et la physique (comme les équations de Yang-Mills, qui interviennent dans la classification topologique des variétés et qui sont à la base du modèle standard en physique des particules).

L'un de ces problèmes a été résolu par le mathématicien russe Grigori Perelman en 2002. Il s'agissait de la conjecture de Poincaré. L'école de mathématiques de l'ex-URSS est l'une des meilleures du monde, et certains de ses membres comme Kolmogorov, Arnold et Gelfand sont célèbres pour leurs contributions multiples à des problèmes similaires à ceux du prix du millénaire.

Les équations de Navier-Stokes

Il semble maintenant qu'un second problème ait été résolu, par un **mathématicien kazakh** de l'Eurasian National University à Astana, au Kazakhstan. **Mukhtarbay Otelbayev** pense en effet qu'il a fini par apporter une solution au problème de savoir si la résolution des équations de Navier-Stokes était toujours un « problème bien posé » au sens du mathématicien français Jacques Hadamard (1865-1963).



Le mathématicien Mukhtarbay Otelbayev a travaillé 30 ans sur le problème de l'existence et de l'unicité des solutions aux équations de Navier-Stokes en fonction de conditions initiales données. Ce problème mathématique a de nombreuses conséquences en mécanique des fluides.

Les équations de Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles non linéaires qui sont très largement utilisées en hydrodynamique. Elles tirent leur nom de leurs découvreurs au XIX^e siècle, le mathématicien et ingénieur français Henri Navier et le physicien et mathématicien britannique George Stokes. L'histoire a malheureusement laissé dans l'ombre le rôle du physicien Barré de Saint-Venant.

En physique classique, les équations de Navier-Stokes sont aussi importantes que les équations de Maxwell et d'Einstein. Elles décrivent l'évolution dans le temps et dans l'espace du champ de vecteur vitesse des fluides « newtoniens » considérés comme continus. Les météorologues et les océanographes s'en servent pour décrire l'atmosphère et les océans et les astrophysiciens pour décrire les étoiles et la formation des planètes dans un disque protoplanétaire. Surtout, les ingénieurs les utilisent en aérodynamique pour modéliser le comportement des voitures, des trains et des avions à grande vitesse.

Un théorème d'existence et d'unicité

Elles sont très difficiles à résoudre et il est souvent nécessaire d'avoir recours à des approximations, par exemple en considérant que l'essentiel du comportement d'un fluide en 3D peut être décrit par une modélisation en 2D. Il est fréquent de devoir passer par des simulations numériques, en particulier si l'on est confronté à des problèmes où les écoulements sont turbulents.

Mukhtarbay Otelbayev serait parvenu à montrer qu'étant données des conditions initiales pour un champ de vitesse dans un fluide newtonien continu, les équations de Navier-Stokes en 3D auraient toujours une solution unique et continue décrivant l'évolution de ce fluide ultérieurement, et que cette évolution ne serait pas considérablement changée par de petites variations des conditions initiales (du moins au début de son évolution et pendant un certain temps). Les ingénieurs et les chercheurs utilisant ces équations pour modéliser des phénomènes auraient donc de bonnes raisons de penser que leurs travaux reposent sur des bases mathématiques solides.

Les collègues d'Otelbayev sont en train de vérifier son travail. Malheureusement, le chercheur ne parle pas anglais, et son article publié dans Mathematical Journal est écrit en russe. Une traduction est en cours, ce qui permettra à un plus large panel de mathématiciens de juger de l'exactitude de sa démonstration.