A. Petrenko

OPB306 Approche lagrangienne

Vitesses verticales et équation Oméga.

Les vitesses verticales sont généralement induites par des dynamiques de méso- ou submésoéchelles, dans les couches superficielles de l'océan. Ces vitesses sont cruciales pour la compréhension de l'influence, à fine échelle, de structures telles que les tourbillons, les fronts ou les méandres sur la distribution et la dynamique des éléments biogènes. De ce fait, l'estimation des vitesses verticales est devenue un enjeu important dans l'étude de systèmes méso- ou submésoéchelle.

Même si la vitesse verticale peut être directement déduite de l'équation de continuité, cette méthode n'est pas à recommander car la divergence horizontale est principalement due aux faibles écarts du courant de l'équilibre géostrophique. Une erreur de 10% dans une composante du courant horizontal peut facilement causer une erreur de 100% dans les divergences estimées en utilisant des approximations de différences finies[**?**]. De plus, comme le soulignent ces auteurs, le courant géostrophique n'est généralement pas strictement non-divergeant en raison d'erreurs dans les données et d'erreurs associées à la méthode de calcul qui induisent des signaux parasites dans le mouvement vertical. Dans de tels cas, il est suggéré de dériver la vitesse verticale à partir de l'équation de vorticité. Dans ce papier, l'équation (6) calculant la variabilité temporelle de la vitesse verticale est particulièrement bien adaptée pour établir une relation entre la variabilité méso-échelle et le mouvement vertical induit, et peut être interprétée en termes de changement de tourbillon relatif dans une parcelle de fluide (voir les belles explications physiques du papier et les références qui y sont attachées).

Sinon, l'une des méthodes les plus couramment utilisées, pour des raisons de stabilité et de précision, est la version **Q**-*vector* de l'équation-ω [FIEKAS et al., 1994; STRASS, 1994]. Cette méthode a été utilisée de nombreuses fois avec succès pour estimer les mouvements verticaux, notamment aux niveaux de fronts intenses [PIETRI et al., 2013; PINOT et al., 1996; RUDNICK, 1996]. Cette méthode requiert la connaissance des champs de densité et de vitesses horizontales dans les trois dimensions d'espace (x, y, z). Ainsi, lorsque les vitesses verticales doivent être estimées à partir de données synoptiques *in situ*, souvent en deux dimensions, il est nécessaire de passer par une étape de reconstruction d'un champ en 3D. L'estimation des mouvements consiste donc en deux étapes : 1) une analyse, ex. analyse objective, à partir des données *in situ* pour obtenir des champs 3-Dimensions (3-D) de densité et de vitesses horizontales; 2) la résolution numérique de l'équation-ω en utilisant les champs 3-D pour en déduire les vitesses verticales.

Pour l'étape 2, une fois les champs de densité et de vitesses horizontales "reconstruits" (étape 1), il est possible d'utiliser la version **Q**-*vector* de l'équation-ω pour diagnostiquer les vitesses verticales à différents niveaux. Cette méthode se base sur la théorie quasigéostrophique qui déclare que des vitesses agéostrophiques verticales vont se mettre en place pour rétablir l'équilibre du vent thermique que les déformations et le cisaillement des mouvements géostrophiques tendent à détruire. Ces vitesses verticales agéostrophiques peuvent être estimées grâce à la divergence du vecteur **Q** qui représente l'advection des gradients de densité par la variation horizontale du champ géostrophique [Hoskins et al., 1978] :

$$\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2) = \left(\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \mathbf{V}_g}{\partial x} \cdot \nabla\rho, \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \mathbf{V}_g}{\partial y} \cdot \nabla\rho \right)$$

où $\mathbf{V}_g = (u_g, v_g)$ représente les composantes horizontales ouest-est et sud-nord des courants géostrophiques et ρ la densité.

La démonstration pour trouver cette forme du vecteur **Q** utilise les équations de la section 3 de [Rudnick, 1996]. Elle est détaillée ci-dessous :

→ Nous nous plaçons dans l'hypothèse d'un écoulement quasi-géostrophique :

$$\frac{\partial u_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial u_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial u_g}{\partial y} - f v_a = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial v_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial v_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial v_g}{\partial y} + f u_a = 0 \qquad (2)$$

avec les vitesses horizontales géostrophiques $\mathbf{V}_g = (u_g, v_g, 0)$ et agéostrophiques $\mathbf{V}_a = (u_a, v_a, w)$.

→ On effectue $\frac{\partial}{\partial z}$ (1) ainsi que $\frac{\partial}{\partial z}$ (2) pour obtenir les 2 équations suivantes :

$$\frac{\partial^2 u_g}{\partial t \partial z} + \frac{\partial u_g}{\partial z}\frac{\partial u_g}{\partial x} + u_g \frac{\partial^2 u_g}{\partial x \partial z} + \frac{\partial v_g}{\partial z}\frac{\partial u_g}{\partial y} + v_g \frac{\partial^2 u_g}{\partial y \partial z} - f \frac{\partial v_a}{\partial z} = 0 \qquad (1')$$

$$\frac{\partial^2 v_g}{\partial t \partial z} + \frac{\partial u_g}{\partial z}\frac{\partial v_g}{\partial x} + u_g \frac{\partial^2 v_g}{\partial x \partial z} + \frac{\partial v_g}{\partial z}\frac{\partial v_g}{\partial y} + v_g \frac{\partial^2 v_g}{\partial y \partial z} + f \frac{\partial u_a}{\partial z} = 0 \qquad (2')$$

→ En utilisant l'équation hydrostatique et la fréquence de Brunt Väisälä (N), on peut écrire l'équation de densité (3) :

$$\text{Équation hydrostatique : } \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad \text{avec la pression P}$$

$$\text{Fréquence de Brunt Väisälä : } N^2 = -\frac{g}{\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial z}$$

$$\text{Équation de continuité : } \frac{1}{\rho_0}\frac{\mathbf{d}\rho}{\mathbf{d}t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

avec l'hypothèse de Boussinesq, d'ou ρ_0

et avec l'hypothèse d'incompressibilité, les 3 derniers termes sont nuls donc :

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{\rho_0}\left[\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y}}_{\frac{D}{Dt}(\rho)} + w \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial z}}_{-\frac{\rho_0 N^2}{g}} \right] + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}}_{0} = 0$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{1}{\rho_0 g}\frac{D}{Dt}\frac{\partial P}{\partial z} - w\frac{N^2}{g} = 0$$

note : on pouvait aussi indiquer directement que la dérivée lagrangienne de la masse volumique était nulle avec l'hypothèse d'incompressibilité mise dans l'équation de conservation de la masse.

$$\xrightarrow{\times(-g)} \quad \frac{1}{\rho_0}\frac{D}{D_t}\frac{\partial P}{\partial z} + N^2 w = 0 \qquad (3)$$

→ $\frac{\partial}{\partial x}$ (3) et $\frac{\partial}{\partial y}$ (3)

$$\frac{1}{\rho_0}\left[\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial u_g}{\partial x}\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + u_g \frac{\partial^3 P}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial v_g}{\partial x}\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} + v_g \frac{\partial^3 P}{\partial x \partial y \partial z}\right] + \frac{\partial}{\partial x}(N^2 w) = 0 \tag{4}$$

$$\frac{1}{\rho_0}\left[\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} + \frac{\partial u_g}{\partial y}\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + u_g \frac{\partial^3 P}{\partial x \partial y \partial z} + \frac{\partial v_g}{\partial y}\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} + v_g \frac{\partial^3 P}{\partial y^2 \partial z}\right] + \frac{\partial}{\partial y}(N^2 w) = 0 \tag{5}$$

→ En utilisant l'équilibre géostrophique

$$f\mathbf{V}_g = \frac{1}{\rho_0}\left(-\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial x}, 0\right)$$

dans (4) et (5) pour remplacer P par $\mathbf{V}_g$ et en éliminant ρ_0 et f :

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial v_g}{\partial z} = -\frac{\partial u_g}{\partial x}\frac{\partial v_g}{\partial z} - u_g \frac{\partial^2 v_g}{\partial x \partial z} + \frac{\partial v_g}{\partial x}\frac{\partial u_g}{\partial z} - v_g \frac{\partial^2 v_g}{\partial y \partial z} - \frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial x}(N^2 w) \tag{4'}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u_g}{\partial z} = \frac{\partial u_g}{\partial y}\frac{\partial v_g}{\partial z} - u_g \frac{\partial^2 u_g}{\partial x \partial z} - \frac{\partial v_g}{\partial y}\frac{\partial u_g}{\partial z} - v_g \frac{\partial^2 u_g}{\partial y \partial z} + \frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial y}(N^2 w) \tag{5'}$$

→ En remplaçant $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u_g}{\partial z}$ dans (1') et $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial v_g}{\partial z}$ dans (2') :

$$\frac{\partial u_g}{\partial z}\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial z}\frac{\partial u_g}{\partial y} + u_g \frac{\partial^2 u_g}{\partial x \partial z} + v_g \frac{\partial^2 u_g}{\partial y \partial z} - f\frac{\partial v_a}{\partial z} + \frac{\partial u_g}{\partial y}\frac{\partial v_g}{\partial z} - u_g \frac{\partial^2 u_g}{\partial x \partial z} - \frac{\partial v_g}{\partial y}\frac{\partial u_g}{\partial z} - v_g \frac{\partial^2 u_g}{\partial y \partial z} + \frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial y}(N^2 w) = 0$$

$$\frac{\partial u_g}{\partial z}\frac{\partial v_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial z}\frac{\partial v_g}{\partial y} + u_g \frac{\partial^2 v_g}{\partial x \partial z} + v_g \frac{\partial^2 v_g}{\partial y \partial z} + f\frac{\partial u_a}{\partial z} - \frac{\partial u_g}{\partial x}\frac{\partial v_g}{\partial z} - u_g \frac{\partial^2 v_g}{\partial x \partial z} + \frac{\partial v_g}{\partial x}\frac{\partial u_g}{\partial z} - v_g \frac{\partial^2 v_g}{\partial y \partial z} - \frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial x}(N^2 w) = 0$$

→ En supprimant les dérivées secondes les unes avec les autres :

$$\frac{\partial u_g}{\partial z}\frac{\partial u_g}{\partial x} + 2\frac{\partial v_g}{\partial z}\frac{\partial u_g}{\partial y} - f\frac{\partial v_a}{\partial z} - \frac{\partial v_g}{\partial y}\frac{\partial u_g}{\partial z} + \frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial y}(N^2 w) = 0 \tag{6}$$

$$2\frac{\partial u_g}{\partial z}\frac{\partial v_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial z}\frac{\partial v_g}{\partial y} + f\frac{\partial u_a}{\partial z} - \frac{\partial u_g}{\partial x}\frac{\partial v_g}{\partial z} - \frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial x}(N^2 w) = 0 \tag{7}$$

→ D'après l'équilibre géostrophique :

$$\frac{\partial u_g}{\partial z} = \frac{g}{\rho_0 f}\frac{\partial \rho}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v_g}{\partial z} = -\frac{g}{\rho_0 f}\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

On remplace alors $\frac{\partial u_g}{\partial z}$ et $\frac{\partial v_g}{\partial z}$ dans (6) et (7) :

$$\frac{g}{\rho_0 f}\left[\frac{\partial u_g}{\partial x}\frac{\partial \rho}{\partial y} - 2\frac{\partial u_g}{\partial y}\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial v_g}{\partial y}\frac{\partial \rho}{\partial y}\right] - f\frac{\partial v_a}{\partial z} + \frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial y}(N^2 w) = 0 \quad (6')$$
$$\frac{g}{\rho_0 f}\left[2\frac{\partial v_g}{\partial x}\frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{\partial v_g}{\partial y}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u_g}{\partial x}\frac{\partial \rho}{\partial x}\right] + f\frac{\partial u_a}{\partial z} - \frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial x}(N^2 w) = 0 \quad (7')$$

→ L'équation de continuité pour la vitesse géostrophique nous donne :

$$\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial u_g}{\partial x} = -\frac{\partial v_g}{\partial y}$$

En remplaçant alors dans (6') et (7') :

$$2\frac{g}{\rho_0 f}\left[-\frac{\partial v_g}{\partial y}\frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{\partial u_g}{\partial y}\frac{\partial \rho}{\partial x}\right] - f\frac{\partial v_a}{\partial z} + \frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial y}(N^2 w) = 0$$
$$2\frac{g}{\rho_0 f}\left[\frac{\partial u_g}{\partial x}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial x}\frac{\partial \rho}{\partial y}\right] + f\frac{\partial u_a}{\partial z} - \frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial x}(N^2 w) = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(N^2 w) - f^2\frac{\partial v_a}{\partial z} = 2\frac{g}{\rho_0}\left(\frac{\partial u_g}{\partial y}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y}\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) = 2Q_2 \quad (8)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(N^2 w) - f^2\frac{\partial u_a}{\partial z} = 2\frac{g}{\rho_0}\left(\frac{\partial u_g}{\partial x}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial x}\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) = 2Q_1 \quad (9)$$

en ayant défini Q :

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q_1}, \mathbf{Q_2}) = \left(\frac{\mathbf{g}}{\boldsymbol{\rho_0}}\frac{\partial \mathbf{V_g}}{\partial \mathbf{x}}\cdot\nabla\rho \;\; , \;\; \frac{\mathbf{g}}{\boldsymbol{\rho_0}}\frac{\partial \mathbf{V_g}}{\partial \mathbf{y}}\cdot\nabla\rho\right)$$

Les vitesses verticales (w) peuvent ensuite être estimées à partir de l'équation-ω quasigéostrophique obtenue en sommant $\frac{\partial}{\partial x}$ (9) et $\frac{\partial}{\partial y}$ (8) :

$$N^2\nabla_h^2 w + f^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 2\nabla_h\cdot\mathbf{Q}$$

où $N^2 = \frac{\partial b}{\partial z}$ est le carré de la fréquence de Brunt Väisälä, avec $b = -(g/\rho_0)\rho$ la flottabilité.

En effet, apparait dans le terme de gauche le terme :

$$\frac{\partial^2 u_a}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v_a}{\partial y \partial z}$$

qui, en fait, est égal à :

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

puisque la divergence de la vitesse totale (V = Vg + Va) est nulle ainsi que que la divergence de la vitesse géostrophique.

Rappel : on a appelé Va la vitesse agéostrophique $\mathbf{V}_a = (u_a, v_a, 0)$.

Une solution de cette équation-ω quasigéostrophique peut être obtenue, par méthode itérative, en inversant l'opérateur :

$$\mathrm{L} = \mathrm{N}^2\nabla_h^2 + f^2\partial^2/\partial z^2$$

et en résolvant $\mathrm{w} = 2\mathrm{L}^{-1}\,\nabla \cdot \mathbf{Q}$ [Giordani et al., 2006]. Les estimations de w sur les bords du domaine doivent cependant être prises avec précaution du fait de la condition aux frontières $\mathrm{w} = 0$.

Bibliographie

FIEKAS, V., H. LEACH, K. MIRBACH et J. WOODS. 1994, «Mesoscale instability and upwelling. Part 1 : Observations at the North Atlantic intergyre front», *J. Phys. Oceanogr.*, vol. 24, nº 8, p. 1750–1758. 1

GIORDANI, H., L. PRIEUR et G. CANIAUX. 2006, «Advanced insights into sources of vertical velocity in the ocean», *Ocean Dynam.*, vol. 56, nº 5-6, p. 513–524. 5

HOSKINS, B., I. DRAGHICI et H. DAVIES. 1978, «A new look at the ω-equation», *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, vol. 104, nº 439, p. 31–38. 2

PIETRI, A., P. TESTOR, V. ECHEVIN, A. CHAIGNEAU, L. MORTIER, G. ELDIN et C. GRADOS. 2013, «Finescale vertical structure of the upwelling system off southern Peru as observed from glider data», *J. Phys. Oceanogr.*, vol. 43, nº 3, p. 631–646. 1

PINOT, J.-M., J. TINTORÉ et D.-P. WANG. 1996, «A study of the omega equation for diagnosing vertical motions at ocean fronts», *J. Mar. Res.*, vol. 54, nº 2, p. 239–259. 1

RUDNICK, D. L. 1996, «Intensive surveys of the Azores Front : 2. Inferring the geostrophic and vertical velocity fields», *J. Geophys. Res-O.*, vol. 101, nº C7, p. 16 291–16 303. 1

STRASS, V. H. 1994, «Mesoscale instability and upwelling. Part 2 : Testing the diagnostics of vertical motion with a three-dimensional ocean front model», *J. Phys. Oceanogr.*, vol. 24, nº 8, p. 1759–1767. 1