

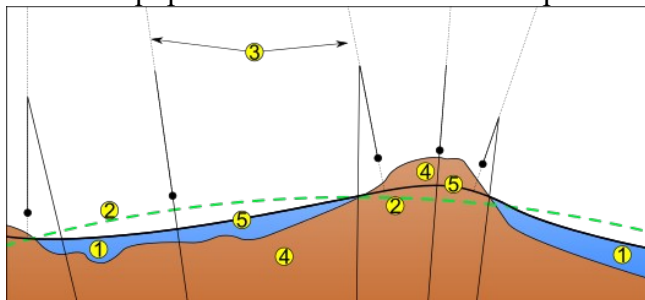
OSCILLATION D'INERTIE – ONDE PROCHE INERTIELLE

Résumé : **L'oscillation d'inertie est, en milieu tournant, un mouvement horizontal et circulaire d'une particule soumise à la seule force de Coriolis, glissant sans frottement sur une équipotentielle de la pesanteur** (en première approximation*, localement, un plan horizontal) avec une vitesse initiale non nulle. Un cycle de cette oscillation définit le cercle d'inertie qui est décrit dans le sens des aiguilles d'une montre dans l'hémisphère nord, en un temps égal à la période d'inertie.

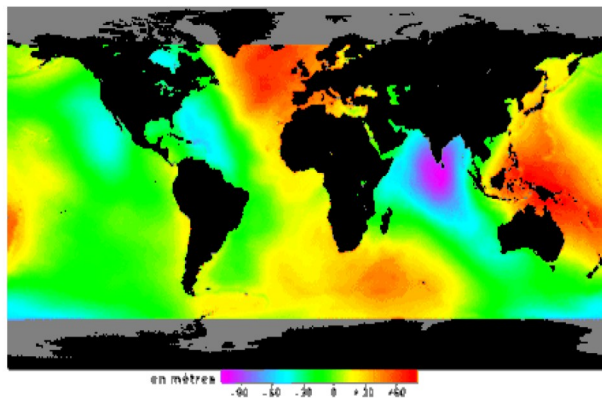
Rappel : Un géoïde est une surface équipotentielle de référence du champ de pesanteur terrestre proche du niveau moyen des mers.

Sur la Terre, tout point subit une accélération de la pesanteur \vec{g} . Cette accélération dérive d'un potentiel gravitationnel W , tel que : $\vec{g} = \overrightarrow{\text{grad}} W = \overrightarrow{\nabla} W$. Les surfaces où le potentiel de pesanteur W est constant sont des équipotentielles de pesanteur.

*Note l'équipotentielle est en réalité bien plus accidentée que le plan horizontal



1. Océan — 2. Ellipsoïde — 3. Déformation locale — 4. Continent — 5. Géoïde



Géoïde terrestre (hauteurs en mètres)

(thanks MesserWoland)

Comme l'orientation du champ de pesanteur varie à la surface de la Terre, un géoïde ne se superpose pas rigoureusement avec un ellipsoïde. La forme d'un géoïde est en effet « déformée », à cause de l'inégale répartition des masses à la surface de la Terre et à l'intérieur. La présence d'une chaîne de montagnes, par exemple, crée une déformation de la surface du géoïde.

I - Rappel du cours de L3 (Dynamique océanique A. Doglioli et A. Petrenko ; Section 2.9)

Si une particule n'est soumise à aucune force extérieure, son accélération dans un repère d'inertie obéit à la 2ème loi de Newton. Les équations du mouvement se simplifient de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= fv \\ \frac{dv}{dt} &= -fu\end{aligned}$$

en prenant la formule pour v issue de la 1ère équation et en la mettant dans la deuxième équation, et en

faisant, en plus, l'hypothèse que le facteur de Coriolis ne varie pas dans la zone étudiée :

$$v = \frac{1}{f} \frac{du}{dt}$$

$$\frac{1}{f} \frac{d^2u}{dt^2} = -fu \quad \text{i.e.} \quad \frac{d^2u}{dt^2} + f^2u = 0$$

La solution générale de cette équation différentielle du deuxième degré est :

$$u = +V_o \cos(ft + \phi) \quad \text{et, si on remplace } u \text{ par cette solution dans l'équation pour } v :$$

$$v = -V_o \sin(ft + \phi)$$

où la vitesse V_o et la phase ϕ dépendent des conditions initiales. La sinusoïde de la composante est-ouest (u) est décalée d'un quart de période par rapport à celle de la composante sud-nord (v).

Par exemple si on prend le cas des oscillations déclenchées par les coups de Mistral au large de Marseille, en positionnant les axes comme dans la figure ci-dessous, on fixe les conditions initiales suivantes :

vitesse initiale du courant dans la direction du vent, i.e. $u_{t=0} = 0$. Alors,

$$u_{t=0} = V_o \cos(\phi) = 0 \quad \text{et} \quad \phi = \pi/2$$

En remplaçant dans l'équation pour v

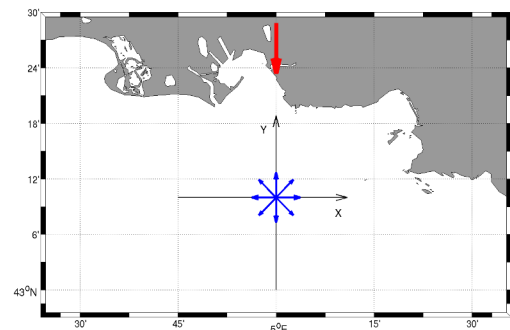
$$v = -V_o \sin(ft + \pi/2) \quad \text{et donc}$$

$$v_{t=0} = -V_o \sin(\pi/2) = -V_o$$

L'intensité dépend du vent, par exemple, pour un vent de 80 km h^{-1} on peut estimer une vitesse du courant de surface de 50 cm s^{-1} .

Voir par exemple:

<http://www.dot.state.fl.us/rddesign/dr/Research/CE/Wind-Generated-Currents.pdf>



En rouge vecteur du vent, en bleu vecteurs du courant d'inertie, variant de direction avec le temps (voir TD OPB201).

Comme $f = 2\Omega \sin \lambda$ [rad.s^{-1}] avec λ latitude, pour Marseille qui se trouve près de la latitude de 45°N , on a approximativement :

$$f \approx 2 \frac{2\pi}{24} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx \frac{2\pi}{17} \text{ [rad.h}^{-1}\text{]}$$

i.e. la période sera $T \approx 17$ [h]

NB : Pour calculer une valeur plus précise, utilisez la durée du jour sidéral de 23 h 56 min 4 s et la latitude de Marseille à 43° et non pas 45° comme dans l'AN précédente (valeur de T plus précise obtenue 17h33').

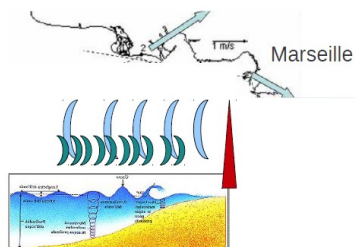
Si, pour simplifier les calculs, on prend une valeur de $T=16\text{h}$ (amusez vous à vérifier à quelle latitude cela correspond), on remplace dans les équations pour u et v et on obtient :

$$\vec{v}_{t=0} \equiv (0, -0.5) V_o, \quad \vec{v}_{t=4\text{h}} \equiv (-0.5, 0) V_o, \quad \vec{v}_{t=8\text{h}} \equiv (0, +0.5) V_o \quad \text{et} \quad \vec{v}_{t=12\text{h}} \equiv (+0.5, 0) V_o$$

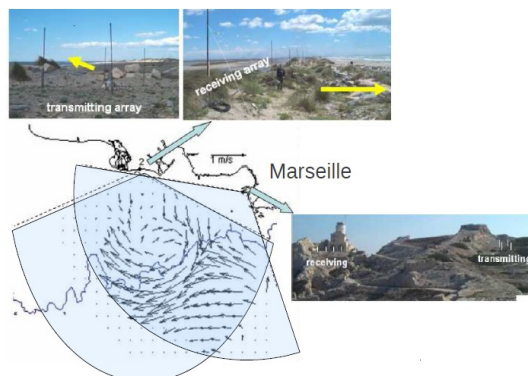
Les mesures effectuées avec un radar côtier par les collègues du MIO de Toulon corroborent ce modèle analytique (<http://hfradar.univ-tln.fr/HFRADAR/squel.php?content=accueil>).

Mesure du courant de surface par radar cotier à haute resolution

Le radar est un système qui utilise les **ondes radio** pour détecter et déterminer la distance et/ou la vitesse d'objets tels que les **avions**, **bateaux**, ou encore la **pluie**. Un émetteur envoie des ondes radio, qui sont réfléchies par la cible et détectées par un récepteur, souvent situé au même endroit que l'émetteur. La position est estimée grâce au temps de retour du signal et la vitesse est mesurée à partir du changement de fréquence du signal par **effet Doppler**.



Mesure du courant de surface par radar cotier à haute resolution



Note : le radar actuel est installé en face de Toulon/Hyères (voir site web ci-dessus).

En intégrant de nouveau, avec $u = \frac{dx}{dt}$ et $v = \frac{dy}{dt}$ on obtient la trajectoire :

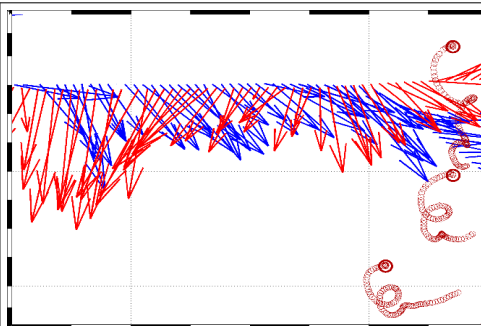
$$x = x_0 + \frac{V_0}{f} \sin(ft + \phi)$$

$$y = y_0 + \frac{V_0}{f} \cos(ft + \phi)$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \left(\frac{V_0}{f}\right)^2$$

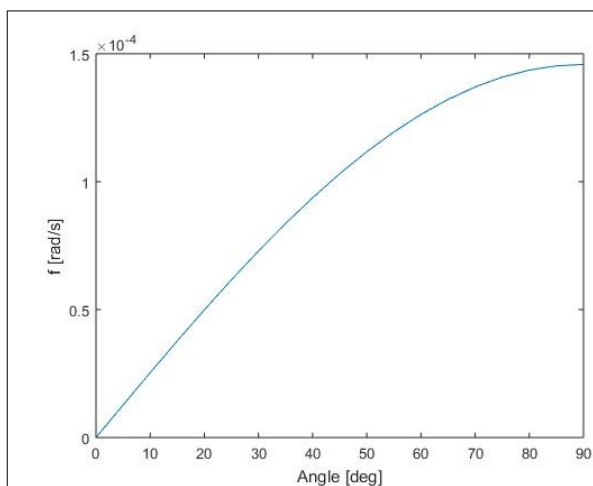
Cette dernière formule montre que la trajectoire parcourue par une particule fluide « piégée » dans une oscillation d'inertie, est un cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon $|V_0|/f$.

La force de Coriolis agissant à droite du mouvement dans l'hémisphère nord, la particule parcourt le cercle d'inertie dans le sens indirect, soit dans le sens des aiguilles d'une montre. C'est l'inverse dans l'hémisphère sud.

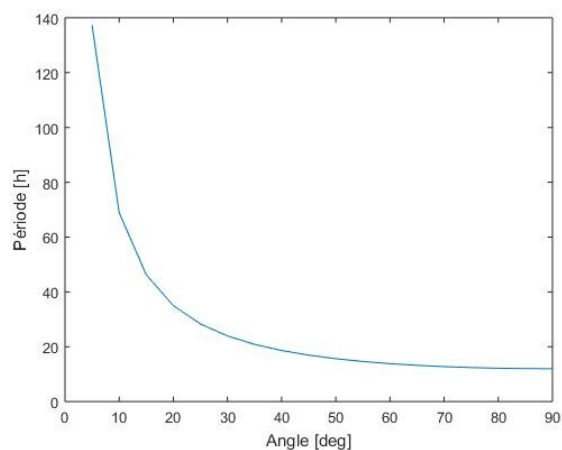


Trajectoires de flotteurs lagrangiens lâchés pendant la campagne Latex 2010 (cercles rouge). Les flèches représentent les vitesses mesurées par l'ADCP de coque du bateau pendant un aller/retour le long d'un même transect

Le cercle d'inertie est parcouru en un temps T dépendant uniquement de la fréquence d'inertie f . A l'équateur, il n'y a pas de mouvement d'inertie et f croît avec la latitude.



Facteur de Coriolis en fonction de la latitude



Période d'inertie en fonction de la latitude

Dans cette rotation circulaire, la force centrifuge (ou axifuge) est compensée par la force de Coriolis (rappel voir TD1 Cours Dynamique océanique ; Doglioli et Petrenko):

$$m \omega^2 r = m \left(\frac{U^2}{r} \right) = m f U$$

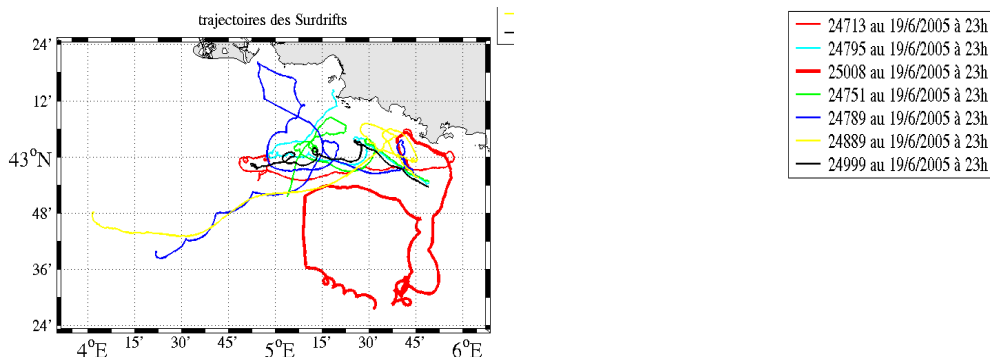
$$f = \frac{U}{r}$$

$$\text{Du coup } T = \frac{2\pi}{f} = \frac{2\pi r}{U}$$

A une latitude donnée, on retrouve la relation entre vitesse et rayon du cercle d'inertie. Plus le module de la vitesse (dépendant du forçage générateur) est grand, plus le rayon est grand. La période de rotation elle ne change pas.

(même formule que précédemment avec $U = |V_0|$)

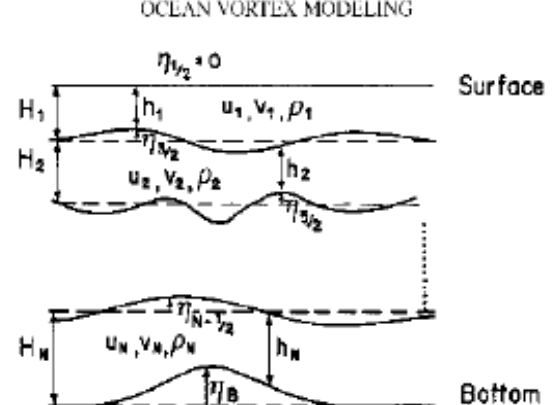
Des cercles purs sont difficiles à observer dans la nature à cause du frottement toujours présent dans la réalité, mais ils sont très souvent observés avec des flotteurs lagrangiens en tant que trajectoires circulaires s'atténuant au cours du temps. Dans la figure ci-dessous, sont dessinées les trajectoires de flotteurs lagrangiens lâchés pendant la campagne Ecology 2005 (MIO/Ifremer)



Les courants d'inertie sont générés par des variations locales du forçage atmosphérique. Le phénomène est le plus souvent observé en période de stratification. Dans ce cas, il y a un processus à deux couches qui se met en place, le courant d'inertie dans la couche inférieure est décalée temporellement de la moitié de la période d'inertie (déphasage de π).

II - Théorie

from Millot and Crepon, 1981, Inertial oscillations on the Continental Shelf of the Gulf of Lions – Observations and Theory, JPO vol 11, 5.

<p>The density variation of the ocean is simplified by using a two-layer fluid. This is a crude, but realistic assumption corresponding to retention of only the first internal mode, which is the most important for small motions (Lightill, 1969; Gill and Clarke, 1974). Because of the small depths of the Gulf of Lions we will also investigate the effects of bottom friction on the motions.</p> <p>Hydrostatic and Boussinesq assumptions are employed and we deal with the vertically averaged equations of hydrodynamics in each layer. Since we consider small perturbations from rest, the equations are linearized.</p>	<p style="text-align: center;">OCEAN VORTEX MODELING</p>  <p style="text-align: center;">Figure 2a. Vertical cross-section of a N-layer shallow-water model.</p>
<p><i>In the upper fluid</i></p> $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}_1 + f\mathbf{z} \times \mathbf{u}_1 = -g\nabla\zeta_1 + \frac{1}{\rho_1 h_1} (\tau - \tau_I) \quad (4.1)$ $\frac{\partial}{\partial t} (\zeta_1 - \zeta_2) + \nabla h_1 \mathbf{u}_1 = 0. \quad (4.2)$ <p><i>In the lower fluid</i></p> $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}_2 + f\mathbf{z} \times \mathbf{u}_2 = -g\epsilon\nabla\zeta_2 - g(1 - \epsilon)\nabla\zeta_1 + \frac{1}{\rho_2 h_2} (\tau_I - \tau_b), \quad (4.3)$ $\frac{\partial}{\partial t} \zeta_2 + \nabla h_2 \mathbf{u}_2 = 0. \quad (4.4)$	<p>The terms are defined as follows:</p> <ul style="list-style-type: none"> ζ_1 (ζ_2) elevation at sea surface (interface) from rest \mathbf{u}_1 (\mathbf{u}_2) averaged velocity in the upper fluid (lower fluid) f Coriolis parameter g acceleration of the gravity ϵ fractional change in density $[(\rho_2 - \rho_1)/\rho_2]$ ∇ two-dimensional operator $\partial/\partial x, \partial/\partial y$ \mathbf{z} unit vector along the vertical axis, positive upward h_1 (h_2) thickness of the upper layer (lower layer) at rest τ stress at the sea surface τ_I stress at the interface τ_b bottom stress.

Voir Section 6 (Carton 2005) du cours pour les équations en eaux peu profondes (EPP) en système multi-couche (Figure 2a ci-dessus), ici à 2 couches

Voir section 2.8 (EPP ou Equations de Saint Vénant) pour la notation de l'équation de la masse

Etant donné les échelles spatio-temporelles du processus, on peut faire l'hypothèse que f est constant et que la profondeur totale $H = h_1 + h_2$ l'est aussi.

D'après Thompson et O'Brien (1973), l'ordre de grandeur du stress à l'interface (τ_I) est un ordre de magnitude plus petit que τ_b et τ . Donc le couplage entre les 2 couches est du aux forces de pression. La tension de fond est considérée comme proportionnelle à la vitesse:

$$\tau_b = \rho_2 h_2 \nu u_2$$

ou ν est un coefficient d'atténuation (dimension t^{-1}).

Méthode de résolution

L'étude est effectuée le long d'une cote rectiligne $x=0$ (repère classique: x positif vers l'est, y positif vers le nord) avec un vent transitoire (i.e., VARIABLE). On fait l'hypothèse que la solution sera indépendante de y (dérivées par rapport à y nulles).

En effectuant la transformée de Laplace (Voir fin de cette section pour un bref résumé sur Laplace et la méthode de transformée de Laplace) par rapport au temps pour l'élévation, les vitesses et les tensions de stress, on a:

$$Z_i(p, x) = \int_0^\infty e^{-pt} \zeta_i(t, x) dt = \mathcal{L}(\zeta_i),$$

$$U_i(p, x) = \int_0^\infty e^{-pt} \mathbf{u}_i(t, x) dt = \mathcal{L}(\mathbf{u}_i),$$

$$\mathbf{T}(p, x) = \int_0^\infty e^{-pt} (\mathbf{x}\tau^x + \mathbf{y}\tau^y) dt = \mathcal{L}(\boldsymbol{\tau}).$$

A partir des équations EPP (4.1 et 4.3), on peut trouver U_i à partir de Z_i . Si on entre alors U_i dans les équations dérivés de la cons. de la masse (4.2 et 4.4), cela donne:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} Z_1 - (p^2 + f^2)(Z_1 - Z_2) \frac{1}{gh_1}$$

$$= \frac{1}{\rho_1 gh_1} \left(\nabla \mathbf{T} + \mathbf{z} \frac{f}{p} \nabla \times \mathbf{T} \right)$$

$$\times (p + \nu) \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(1 - \epsilon)Z_1 + \epsilon Z_2]$$

$$- p[(p + \nu)^2 + f^2] Z_2 \frac{1}{gh_2} = 0. \quad (4.6)$$

The solution of the homogeneous differential equation associated with (4.6) is of the form

$$Z = A e^{\pm \alpha_i x},$$

where α_i is a positive eigenvalue of Eq. (4.6).

Alors :

If $\boldsymbol{\tau}$ does not depend on x , and taking into account the radiation condition (the motions must vanish as x tends to infinity), the solution of (4.6) is

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= A_1 e^{-\alpha_1 x} + A_2 e^{-\alpha_2 x} \\ Z_2 &= B_1 e^{-\alpha_1 x} + B_2 e^{-\alpha_2 x} \end{aligned} \right\}, \quad (4.7)$$

where

$$B_i = \left(1 - \alpha_i^2 \frac{gh_1}{p^2 + f^2} \right) A_i,$$

$$A_i = (-1)^i \frac{1}{\rho_1 (gh_1)^2 \epsilon} (fT^y + pT^x)$$

$$\times \frac{p^2 + f^2 - \alpha_{3-i}^2 g \epsilon h_1}{(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) p \alpha_i}.$$

Here A_i does not depend on x ; it is determined by the boundary condition $\mathbf{u}_i(t, 0) = 0$.

1) Simplification – Cas où ν le coefficient d'atténuation est pris nul (= pas de tension de fond)

processus très étudié voir O'Brien et al (déjà en 1977)

les valeurs propres solutions pour α_i sont les suivantes:

$$\alpha_1^2 = \frac{p^2 + f^2}{c_1^2} \quad \text{et} \quad \alpha_2^2 = \frac{p^2 + f^2}{c_2^2}$$

avec $c_1 = (gH)^{1/2}$ vitesse des ondes longues barotropes

et $c_2 = \left(\frac{g \epsilon h_1 h_2}{H}\right)^{1/2}$ vitesse des ondes longues baroclines

avec r_i les rayons de déformation associés $r_i = \frac{c_i}{f}$

On a généralement $c_1 \gg c_2$ (eg, dans le golfe du Lion, $\frac{c_2}{c_1} \approx 2 \cdot 10^{-2}$) et $r_1 \gg r_2$

Deux cas sont généralement traités:

1a – cas où le vent est perpendiculaire à la côte

1b - cas où le vent est parallèle à la côte

1a - cas où le vent est perpendiculaire à la côte avec $\tau = \tau_0 Y(t) x$

avec $Y(t) = 1$ pour $t \geq 0$ et $Y(t) = 0$ pour $t < 0$ et x équivalent au vecteur unitaire i

On trouve un upwelling près de la côte dans le terme d'élévation (voir papier pour plus de détails) et on obtient les vitesses suivantes pour les deux couches quand $0 < x < r_2 \leq r_1$ et $ft > 2$:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \frac{\tau_0}{\rho_1 f H} \frac{h_2}{h_1} \left\{ (e^{-x/r_2} - 1) \mathbf{y} + (x/r_2) \right. \\ &\quad \times (ft)^{-1/2} (2/\pi)^{1/2} [\cos(ft - \pi/4) \mathbf{x} \\ &\quad \left. - \sin(ft - \pi/4) \mathbf{y}] \right\} \\ \mathbf{u}_2 &= - \frac{h_1}{h_2} \mathbf{u}_1 \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

The spin-up time of (4.16) is $T = 2f^{-1}$. The inertial oscillations are polarized clockwise. The currents are baroclinic. The mean currents and the inertial oscillations in the upper and the lower layers have opposite phases, in agreement with the observations of Section 3.

1b - cas où le vent est parallèle à la côte avec $\tau = \tau_0 Y(t) \mathbf{j}$
 avec $Y(t) = 1$ pour $t \geq 0$ et $Y(t) = 0$ pour $t < 0$ et \mathbf{j} équivalent au vecteur unitaire \mathbf{j}

On retrouve un upwelling près de la côte dans le terme d'élévation et on obtient les vitesses suivantes pour les deux couches quand $0 < x < r_2 \leq r_1$ et $ft > 2$:

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{u}_1 &= \frac{\tau_0}{\rho_1 H f} \frac{h_2}{h_1} \left\{ \left(\frac{h_1}{h_2} + e^{-x/r_2} \right) f t \mathbf{y} \right. \\
 &\quad + (1 - e^{-x/r_2}) \mathbf{x} + (x/r_2) (ft)^{-1/2} \\
 &\quad \times (2/\pi)^{1/2} [\sin(ft - \pi/4) \mathbf{x} \\
 &\quad \quad \quad \left. + \cos(ft - \pi/4) \mathbf{y}] \right\} , \quad (4.20) \\
 \mathbf{u}_2 &= \frac{\tau_0}{\rho_1 H f} \left\{ (1 - e^{-x/r_2}) (f t \mathbf{y} - \mathbf{x}) \right. \\
 &\quad - (x/r_2) (ft)^{-1/2} (2/\pi)^{1/2} \\
 &\quad \times [\sin(ft - \pi/4) \mathbf{x} + \cos(ft - \pi/4) \mathbf{y}] \left. \right\}
 \end{aligned} \right\}$$

where the spin-up time of (4.20) is $T = 2f^{-1}$.

Il y a la présence d'un jet côtier près de la côte le long de y .

On remarque aussi que le cas est plus complexe que le précédent avec $u_1 = A + B$ et $u_2 = C - \frac{h_1}{h_2} B$

On the continental shelf, the behavior of currents is similar to that in (4.16). The inertial oscillations are polarized clockwise. The mean current perpendicular to the shore and the inertial oscillations are in opposite phases in the two layers, but the mean current parallel to the shore increases linearly with time and has a tendency to become semi-barotropic for distances off the shore of the order of r_2 . This agrees with the observations of currents off the Oregon shore where the wind is parallel to a straight coastline (Smith, 1974).

2) Cas où ν le coefficient d'atténuation n'est pas nul; solution plus complexe (voir Annexe du papier Millot and Crepon, 1981, Inertial oscillations on the Continental Shelf of the Gulf of Lions – Observations and Theory, JPO vol 11, 5.

A. Petrenko	Cours OPB309	Courant d'inertie
-------------	--------------	-------------------

Transformation de Laplace

Cette transformation fut introduite pour la première fois sous une forme proche de celle utilisée par Laplace en 1774, dans le cadre de la théorie des probabilités.

La transformation de Laplace généralise la transformation de Fourier qui est également utilisée pour résoudre les équations différentielles : contrairement à cette dernière, **elle tient compte des conditions initiales** et peut ainsi être utilisée en théorie des vibrations mécaniques ou en électricité dans l'étude des régimes forcés sans négliger le régime transitoire. Elle converge pour toutes les fonctions qui, pondérées par une exponentielle, admettent une transformée de Fourier ; par conséquent les fonctions admettant une transformée de Fourier admettent toutes une transformée de Laplace, mais la réciproque n'est pas vraie. De manière générale, **ses propriétés vis-à-vis de la dérivation permettent un traitement plus simple de certaines équations différentielles**, et elle est de ce fait très utilisée en automatique.

Dans ce type d'analyse, **la transformation de Laplace est souvent interprétée comme un passage du domaine temps**, dans lequel les entrées et sorties sont des fonctions du temps, **dans le domaine des fréquences**, dans lequel les mêmes entrées et sorties sont des fonctions de la « fréquence » (complexe) p . Ainsi; il est possible d'analyser simplement l'effet du système sur l'entrée pour donner la sortie en matière d'opérations algébriques simples (cf. théorie des fonctions de transfert en électronique ou en mécanique).

Plus sur https://fr.wikipedia.org/wiki/Transformation_de_Laplace et démos sur le web.

Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) est un mathématicien, astronome, physicien et homme politique français.

Laplace est l'un des principaux scientifiques de la période napoléonienne. En effet, il a apporté des contributions fondamentales dans différents champs des mathématiques, de l'astronomie et de la théorie des probabilités. Il a été l'un des scientifiques les plus influents de son temps, notamment par son affirmation du déterminisme. Il a contribué de façon décisive à l'émergence de l'astronomie mathématique reprenant et étendant le travail de ses prédécesseurs dans son *Traité de Mécanique céleste* (1799-1825). **Cet ouvrage majeur, en cinq volumes, a transformé l'approche géométrique de la mécanique développée par Newton en une approche fondée sur l'analyse mathématique.**

Plus sur https://fr.wikipedia.org/wiki/Pierre-Simon_de_Laplace

A. Petrenko	Cours OPB309	Courant d'inertie
-------------	--------------	-------------------

III - Détection des intrusions dans les sorties numériques et les données

Quand des courants locaux pré-existent avant le coup de vent, ils peuvent continuer à être présents durant le coup de vent ; par exemple, superposition de deux courants: Courant Nord considéré comme quasi-géostrophique + courant d'inertie.

Si on veut filtrer les courants d'inertie pour obtenir les courants pré-existants, plusieurs méthodes sont possibles.

a) *Modèle*

Dans les sorties numériques de modèle de circulation, les courants peuvent être très nets. Dans l'exemple donné, les courants sont montrés sur une période inertielle (Figure). Les courants d'inertie sont principalement visibles au sud et à l'est du plateau. Les courants sur le plateau tournent également dans le sens horaire mais avec un léger déphasage avec le courant d'inertie au large du plateau (déphasage ou légère différence de période ?).

Pour contourner ce problème, si l'on veut « retirer » l'influence des courants d'inertie, il suffit de moyenner les sorties numériques de courant sur la période inertielle, ou sur une période proche (ex période journalière mais avec un risque d'aliasing).

From Petrenko A., Y. Leredde, and P. Marsaleix (2005), *Circulation in a stratified and wind-forced Gulf of Lions, NW Mediterranean Sea: in-situ and modeling data*. Continental Shelf Res., 25, 5-27, doi:10.1016/j.csr.2004.09.004

“A strong inertial oscillation, with maximum amplitude of 60 cm/s, is clearly observed at the western side of the gulf due to the absence of the NC there. The model also exhibits this oscillation, and provides its temporal variations. The analysis, closely coupling in situ measurements and model results, provides information that would not have been obtained using either data separately. »
(voir papier pour plus de détails)

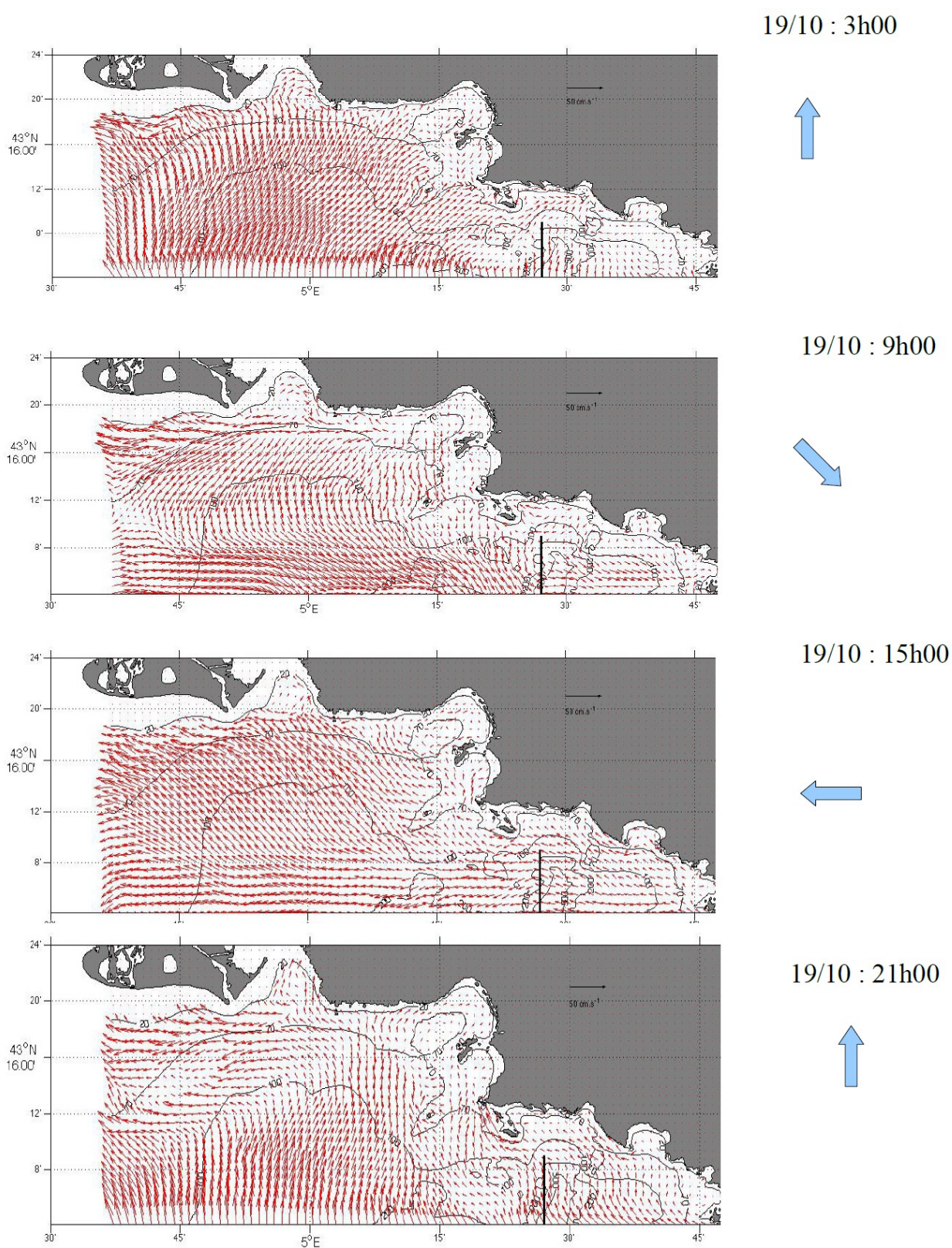


Fig. - Modélisation océanique au large de Marseille avec MARS 3D – Rhoma (remerciements F. Desbiolles, stage avec I. Pairaud et A. Petrenko, 2010)

b) *Données de courant mesurées in situ*

From Petrenko, A.A. (2003), *Circulation features in the Gulf of Lions, NW Mediterranean Sea; importance of inertial currents*, *Oceanol. Acta*, 26, pp. 323–338

“The summer stratification allows the development, after strong wind variations, of inertial currents with their characteristic 2-layer baroclinic structure. In the surface layer, the speed of the inertial oscillation can locally be as high as 200 % the NC speed. Otherwise the inertial current is about 2/3 the NC. Horizontal spatial coherence of inertial currents is found on scales up to 50 - 75 km. The contribution of these inertial currents to the measured circulation can not be neglected but is hard to estimate without the detailed and local analysis done in this article. The situation is different with time series data sets where high frequency motions such as inertial currents are classically filtered out. Spatial interpolation technique [Candela *et al.*, 1992] was tried unsuccessfully on the MOOGLI 1 ADCP data to isolate inertial currents (Durrieu de Madron, pers. comm.). The retrieval of the inertial component from the circulation is one of the main problems that oceanographers and modelers, working on the circulation in the Gulf of Lions and elsewhere, are presently dealing with.”

Plusieurs méthodes sont appropriées suivant les données disponibles :

- | | |
|------------------------------------|--------------------------------|
| 1 Plot de $u+iv$ | 4 Spectre tournant |
| 2 Déroulement de phase | 5 Analyse en ondelettes |
| 2 Sinusoïde additionnée au courant | 6 Transformée de Hilbert-Huang |
| 3 Filtre passe-bande | |

1) **Plot de $u+iv$** - Soient u et v les composantes est et nord du courant, on peut dessiner $u+iv$ en représentation graphique. Si la courbe tourne autour de 0 en une période d'inertie, on a affaire à un courant inertiel. Si la courbe tourne autour de d'un point (u_0, v_0) en une période d'inertie, on a affaire à un courant inertiel superposé à un courant fixe de grandeur (u_0, v_0) .

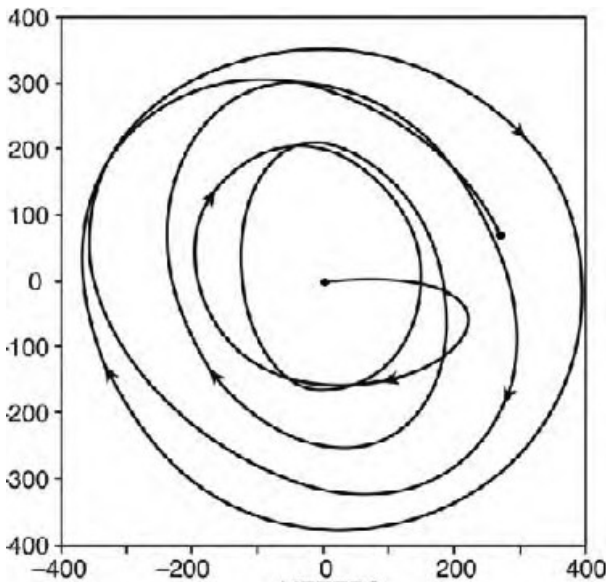


Fig Inertial circles observed by a current meter in the main thermocline of the Atlantic Ocean at a depth of 500 m; 28°N, 54°W. Five inertial periods are shown. The inertial period at this latitude is 25.6 h. (Courtesy of Carl Wunsch, MIT, via J. Marshall and A. Plumb « Atmosphere, Ocean and Climate Dynamics », Elsevier book, 2008, Fig 6.16)

2) Déroulement de phase

Chereskin JGR 1989

Cette méthode consiste à faire la figure représentant l'évolution temporelle de la phase du cisaillement (vitesse de la couche de surface – vitesse de la couche de fond). Si la courbe prend une allure linéaire, avec une pente égale à -2π pour une période inertielle (ici 17.5 h), cela indique la présence d'oscillation inertielle.

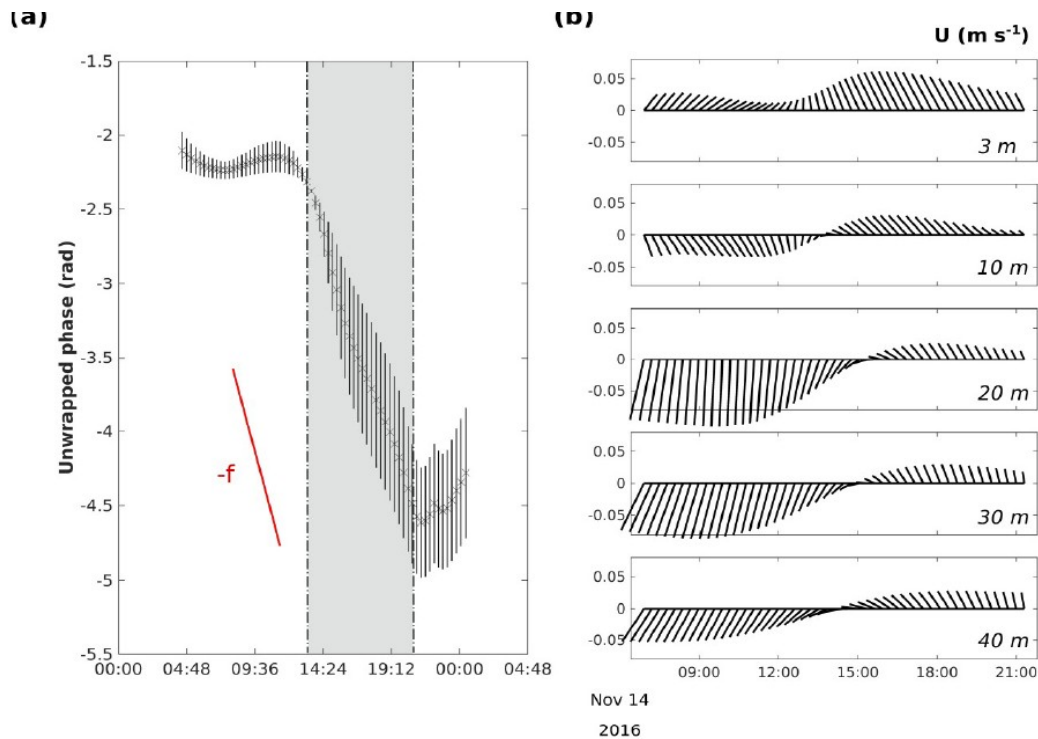


Figure 4.10: (a) Phase unwrapping of the horizontal current shear (3–40 m) from November 14 to 15, 2016.

Figure 4.10 : (a) Déroulement de la phase du cisaillement horizontal (3-40 m) du 14 au 15 novembre 2016. Une pente négative correspondant au facteur de Coriolis (-f) est indiquée. La zone ombrée correspond à la portion de la période pendant laquelle des oscillations inertielles sont observées. (b) Courants horizontaux du 14 au 15 novembre 2016, à 3, 10, 20, 30 et 40 m de profondeur. A partir de 10m de profondeur, les profils montrent une oscillation des courants dans le sens horaire.

(extrait de Gentil et al., 2020, Glider based active acoustic monitoring of currents and turbidity in the coastal zone, Remote Sensing 12(18), 2875 ; avec tous nos remerciements)

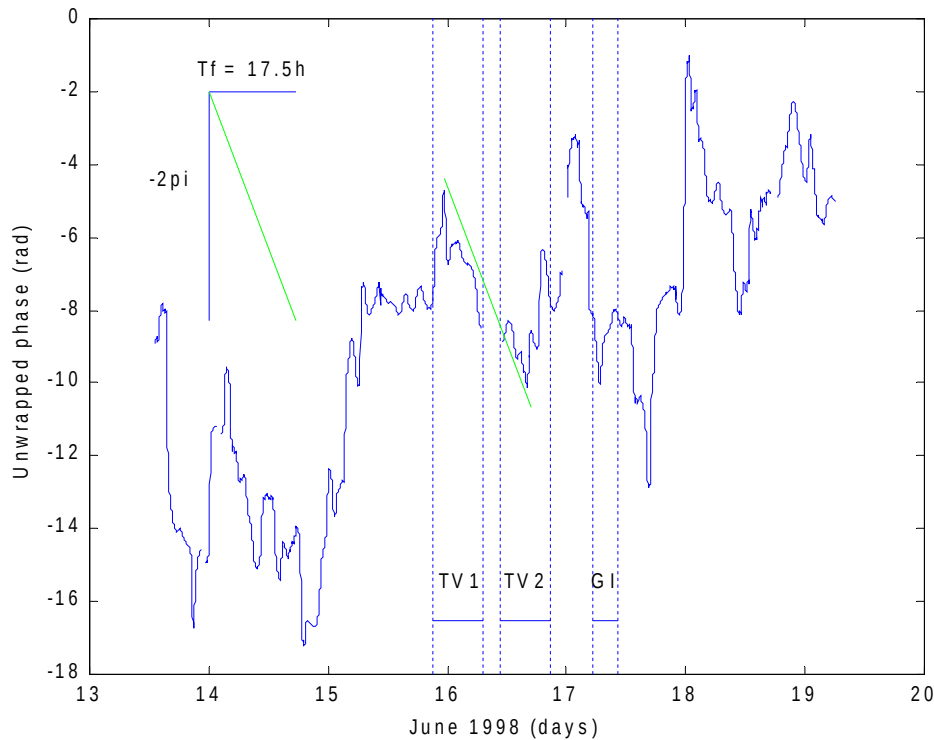
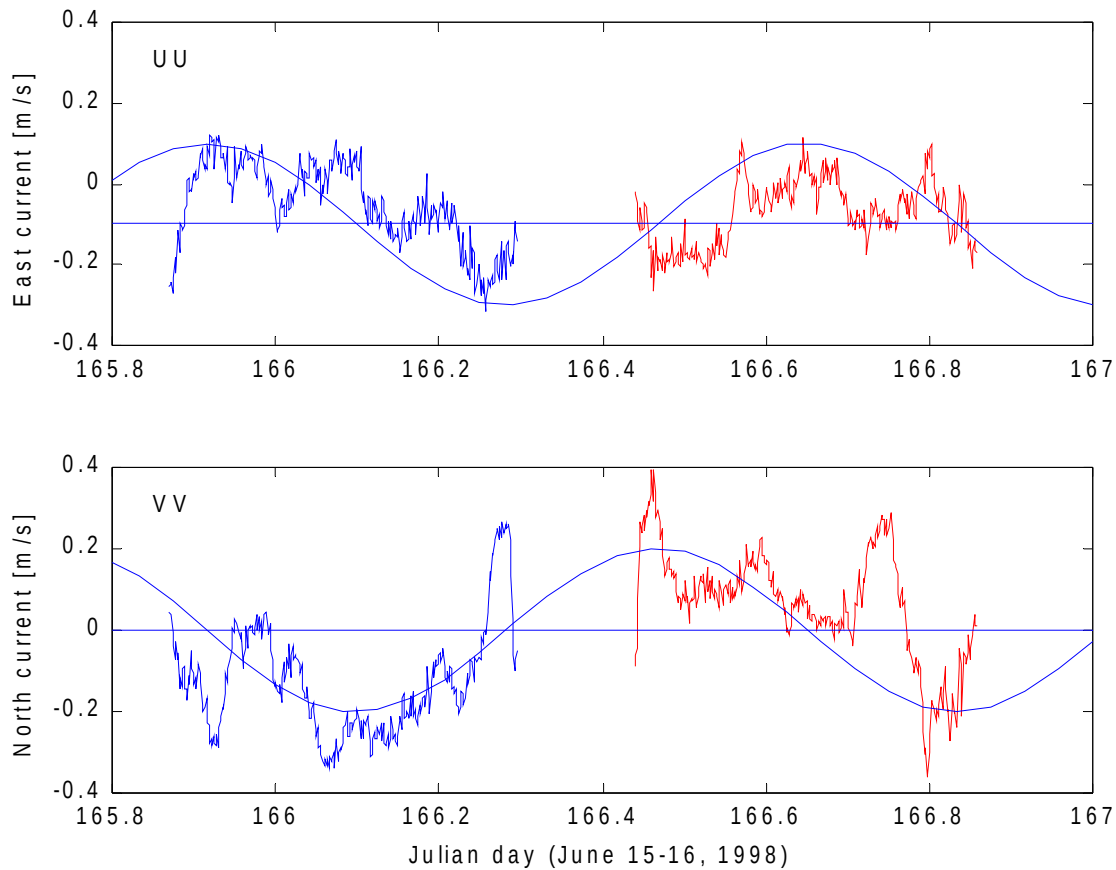


Fig. - Phase unwrapping of the horizontal current shear (16 m - 72 m) during June 13-19, 1998 (Moogli 2 cruise). The negative slope corresponding to the Coriolis factor is shown. Transects TR1, TR2 and GI were done during the periods indicated by vertical dotted lines. (Fig. 8 extraite de **Petrenko A.** (2003), *Circulation features in the Gulf of Lions, NW Mediterranean Sea; importance of inertial currents*. *Oceanol. Acta*, 26, 323-338)

“La stratification estivale permet le développement, après un fort épisode de vent, de courants inertiels de structure barocline à 2 couches. Dans la couche supérieure, la vitesse de l'oscillation inertielle peut s'élever localement à 200 % la vitesse du CN. Sinon, dans la couche de surface, le courant inertielle représente à peu près 2/3 du CN. La cohérence des courants inertiels s'étend jusqu'à 75 km.” extrait de Petrenko (2003).

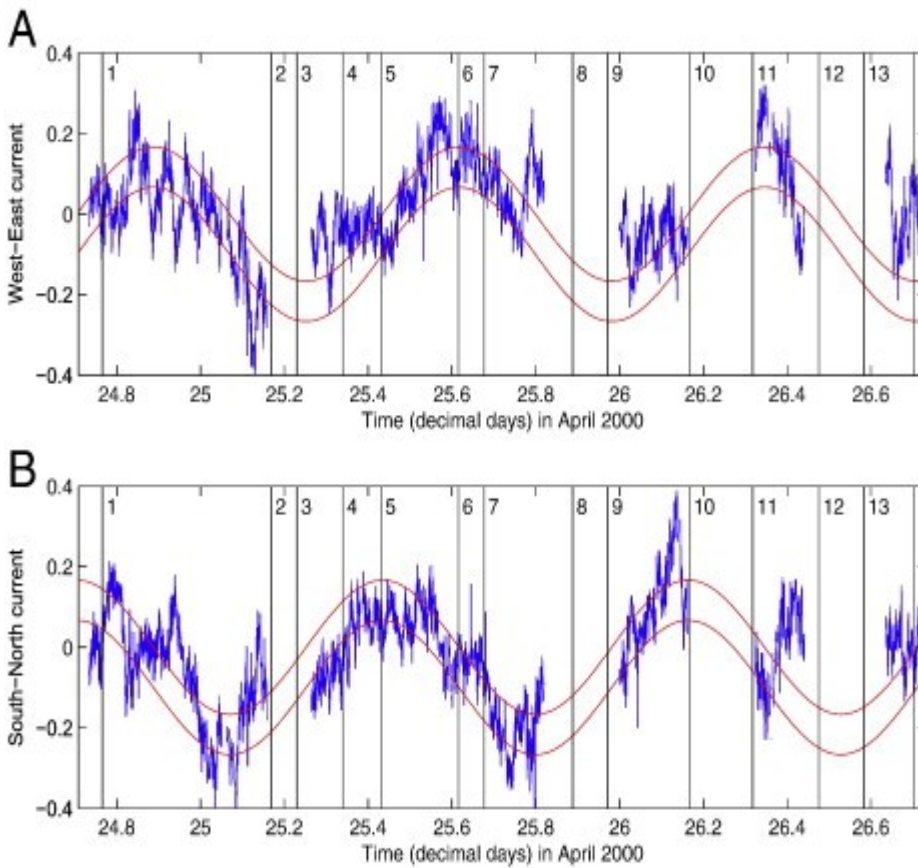
3) Sinusoïde additionnée au courant



Time series of the A) west-east and B) south-north current components, at 16 m depth, along transects TR1 and TR2 of MOOGLI 2. Superimposed is a sinusoidal curve of inertial period, shifted by $+\pi/2$ on A compared to B. The means of the two components are also drawn: A) -0.10 m/s; and B) 0 m/s. (Fig 12 extraite de **Petrenko A.** (2003), *Circulation features in the Gulf of Lions, NW Mediterranean Sea; importance of inertial currents*. *Oceanol. Acta*, 26, 323-338).

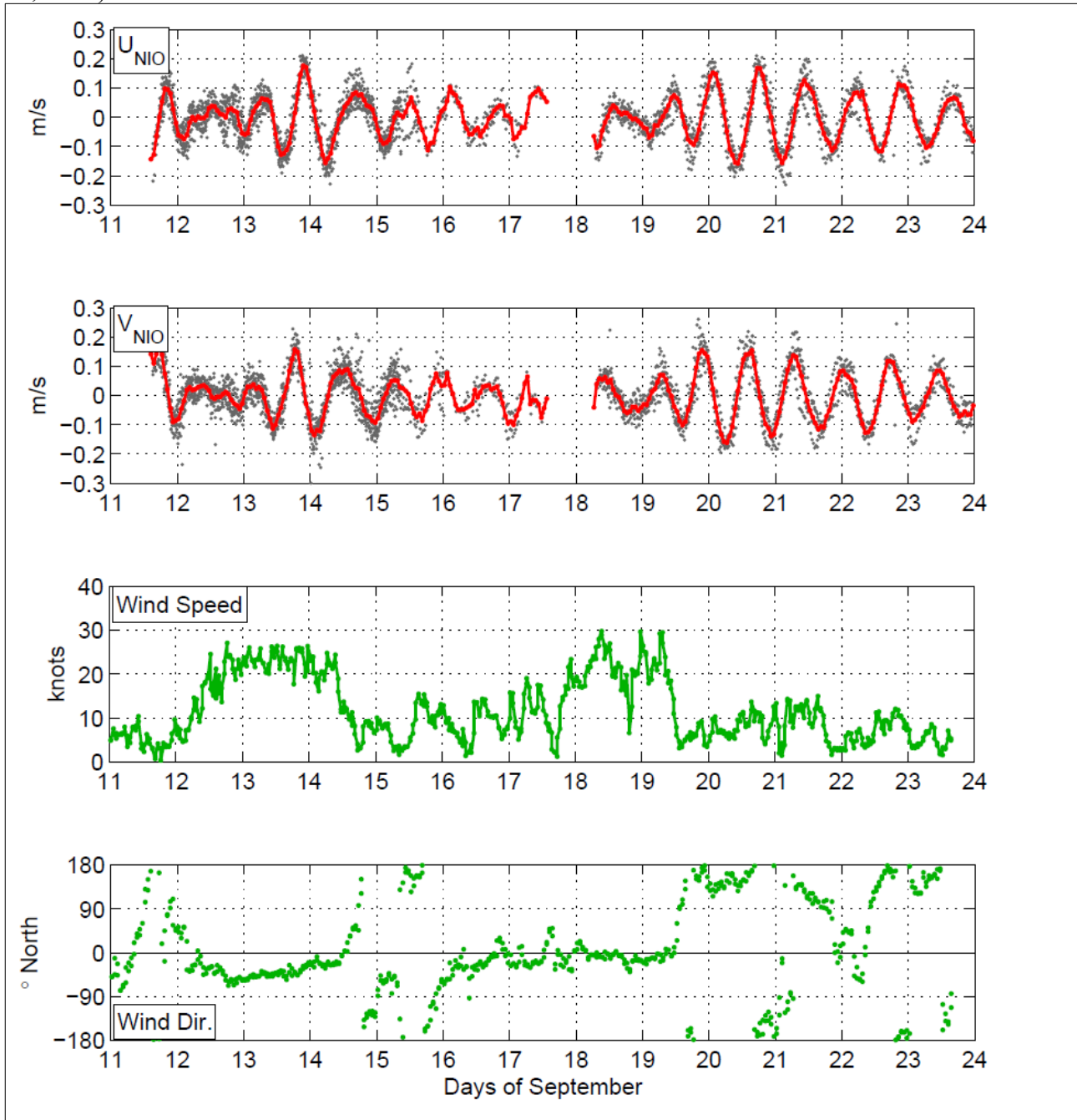
and associated text:

“The mean current of the eastward component is around -10 cm/s, corresponding to the average westward speed of the NC. The mean component of the northward component is zero. The amplitude of the sinusoidal curve, corresponding to the inertial current, is about 20 cm/s. Hence, at that depth (16 m), the speed of the inertial oscillation can be locally as high as 200% the NC speed. Otherwise, the average speed of the NC in its core is about 30 cm/s; so the inertial current is about 2/3 the NC. It is important to remember that the thickness of the top layer of the inertial oscillation is about 30 m while the NC extends over 200 m; hence, the inertial oscillation energy is much smaller than the NC energy.”

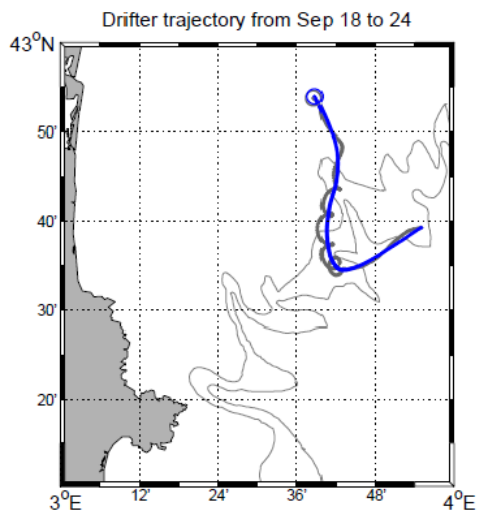


Time series of the ADCP current differences between two depths, in m/s A) $u(12\text{ m})-u(48\text{ m})$, u being the west-east (+ east) component of the horizontal current and B) $v(12\text{ m})-v(48\text{ m})$, v being the south-north (+ north) component during Sarhygol 2, April 2000. A sinusoid at the Coriolis frequency, representing the inertial oscillation is added to A and shifted by $\pi/2$ in B. (from Petrenko A., C. Dufau and C. Estournel (2008), *Barotropic eastward currents in the western Gulf of Lion, north-western Mediterranean Sea, during stratified conditions*. *J. Marine Syst.*, doi:10.1016/j.jmarsys.2008.03.004, Fig 2)

Dans le projet LATEX (Petrenko et al., 2017 et tous les références incluses), des OI étaient présentes. Qq exemples de détection et gestion de ces OI durant Latex10 (extrait de Nencioli et al., 2016):



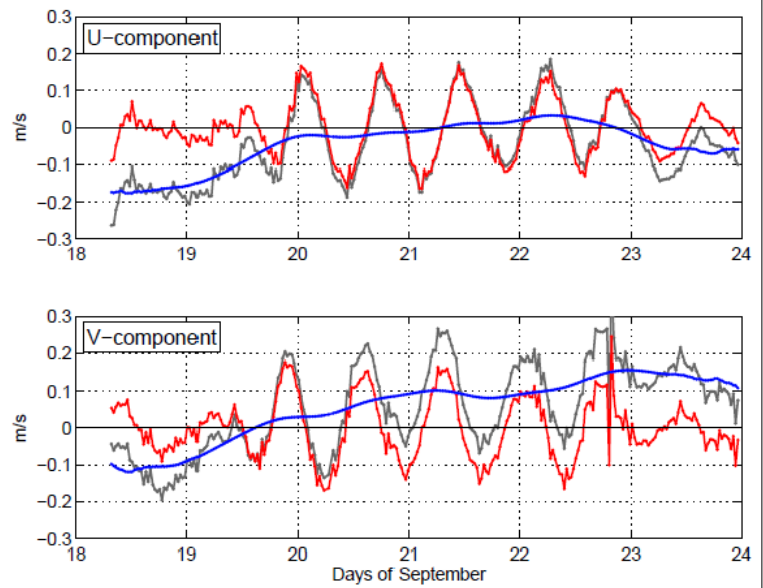
LATEX 2010 – Gulf of Lion



Grey : Lyap 2 drifter Sept 18-24
(circle Sept 24)
Blue : 17.5 h moving averaged

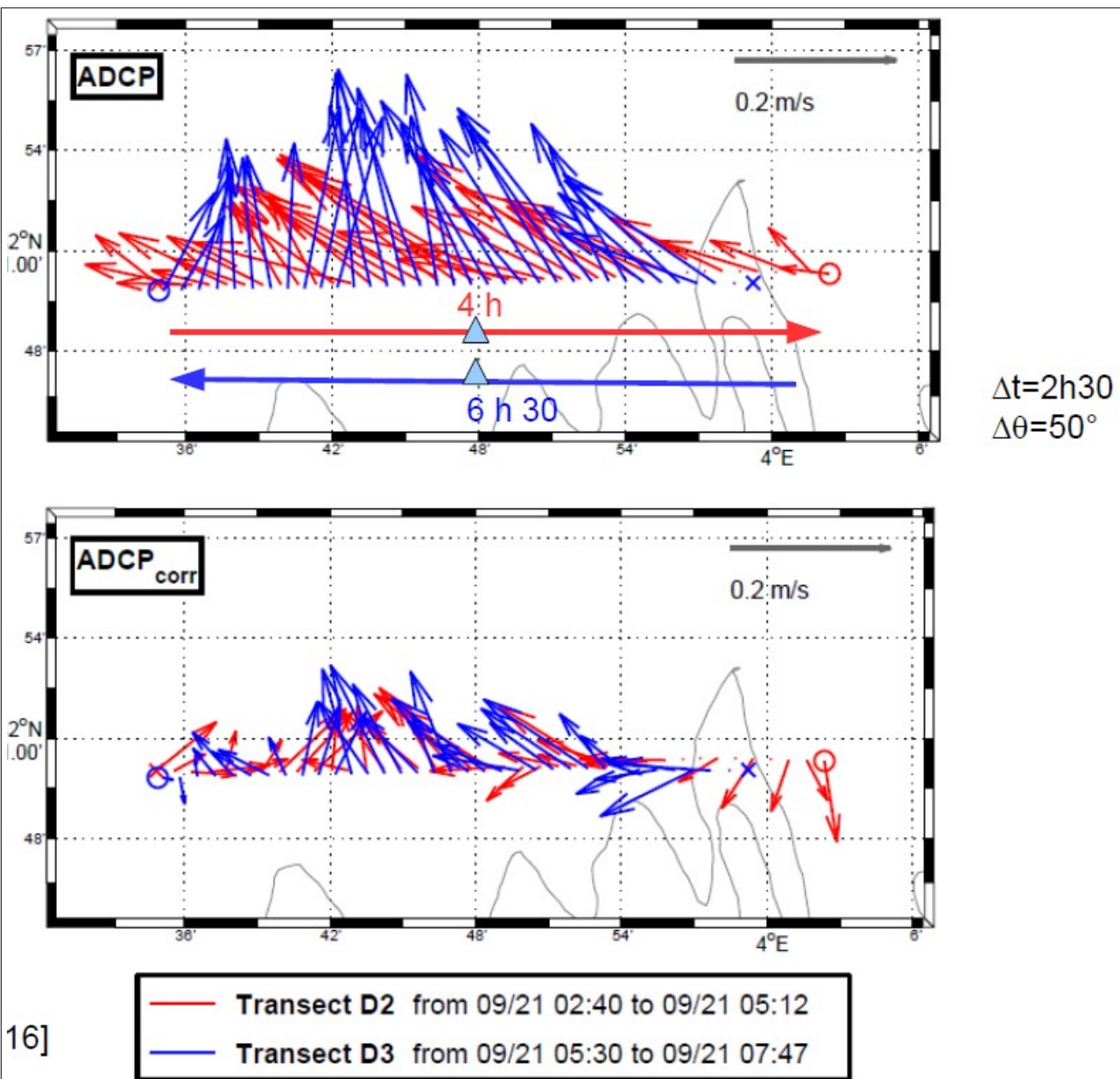
Le drifter va de bas en haut

[Nencioli et al., 2016]



Top : u, bottom : v of Lyap 2 drifter Sept 18-24

Grey : total velocities
Blue : 17.5 h moving averaged
Red : NIO = total velocities -smoothed ones



3 Filtre

papier à venir ?

D. Allain, 2014, Numerical filtering of geophysical data : methods and application on ocean inertial waves.

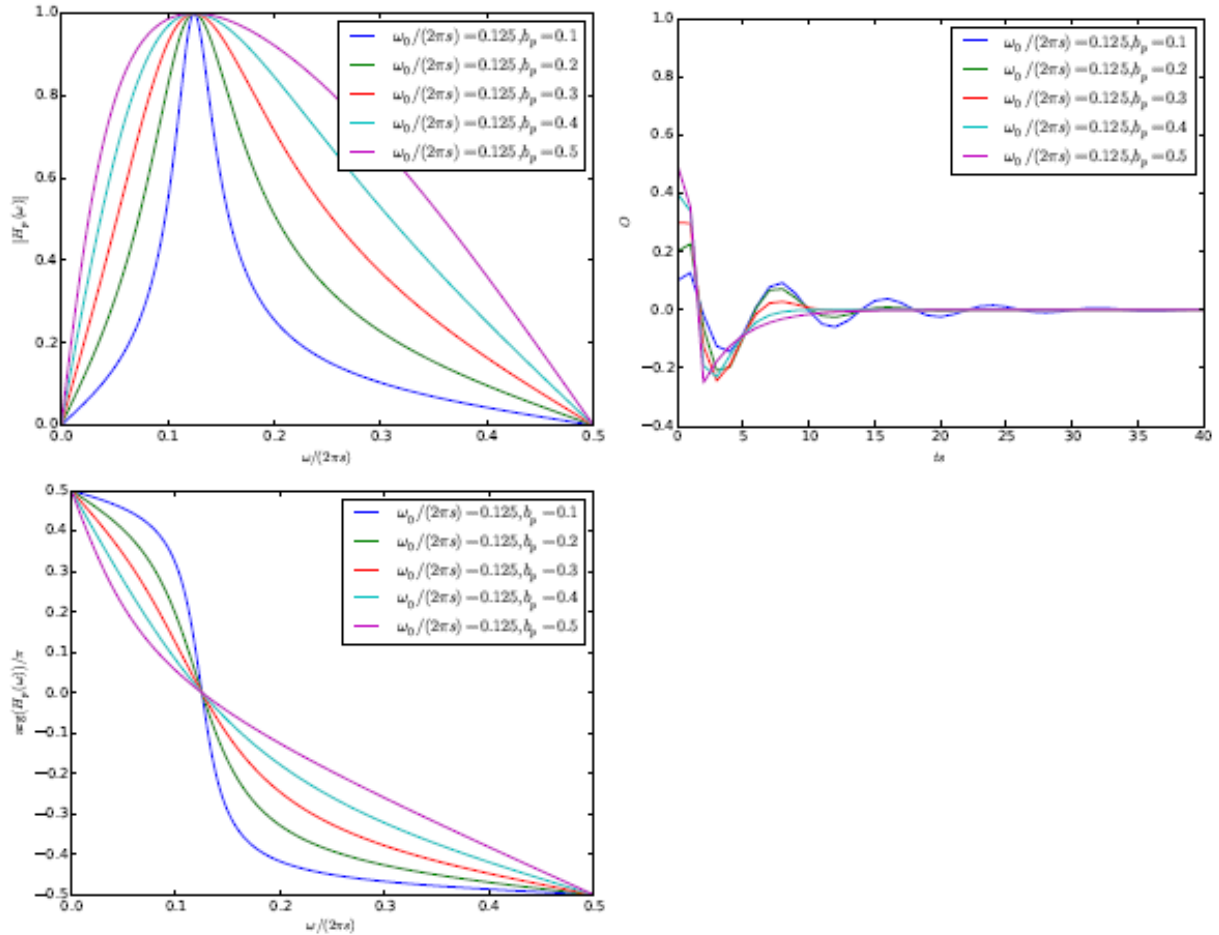
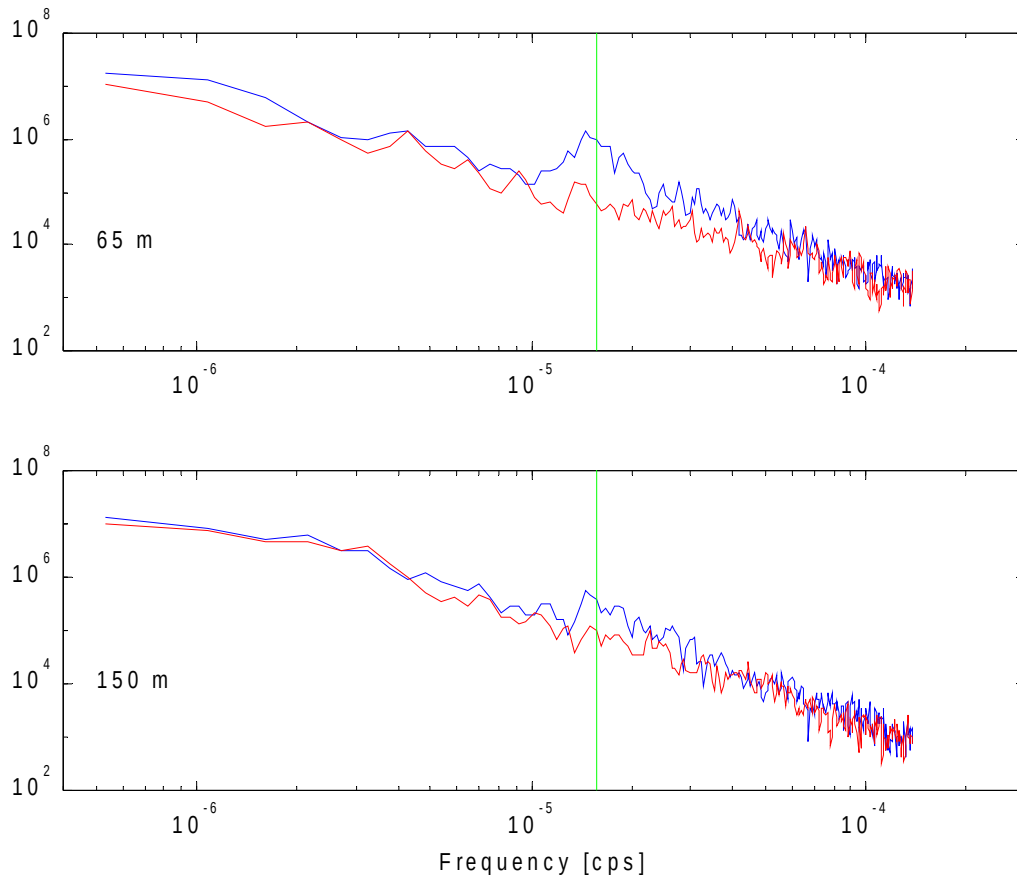


Figure 2: Amplitude and phase diagrams and convolution kernels of the DF-II IIR BP filter for different values of b_p

Pour plus de détails, contacter D. Allain (SHOM-founded CNRS research engineer working within the ECOLA team, damien.allain@legos.obs-mip.fr)

4) Rotary spectra



Rotary spectra versus frequency (bottom x-axis) for A) 65 m, B) 150 m currents measured at SOFI during April to June 1998. The black (grey) line is the clockwise (counter-clockwise) component of the spectra. Note that, at the inertial frequency (indicated by the vertical line), the clockwise component is much higher than the counter-clockwise component. (Fig 11 extraite de **Petrenko A.** (2003), *Circulation features in the Gulf of Lions, NW Mediterranean Sea; importance of inertial currents*. *Oceanol. Acta*, 26, 323-338).

A. Petrenko	Cours OPB309	Courant d'inertie
-------------	--------------	-------------------

5) Analyse en ondelettes

Une ondelette est une fonction à la base de la décomposition en ondelettes, décomposition similaire à la « transformée de Fourier à court terme (TFCT)* », utilisée dans le traitement du signal. Elle correspond à l'idée intuitive d'une fonction correspondant à une petite oscillation, d'où son nom.

(*La transformée de Fourier à court terme (TFCT), ou transformée de Fourier locale (en anglais Short-Time Fourier Transform (STFT)) ou encore transformée de Fourier à fenêtre glissante est une transformation liée aux transformées de Fourier utilisée pour déterminer la fréquence sinusoïdale et la phase d'une section locale d'un signal. Son module carré donne le spectrogramme)

Cependant, une ondelette comporte deux différences majeures avec la transformée de Fourier à court terme:

- elle peut mettre en œuvre une base différente, non forcément sinusoïdale ;
- il existe une relation entre la largeur de l'enveloppe et la fréquence des oscillations.

Toutefois, il ne s'agit pas d'une démarche complètement différente de la transformée de Fourier, mais complémentaire ; en effet, la décomposition en ondelettes utilise le formalisme de Fourier.

La technique des ondelettes est particulièrement utilisée en compression de données informatiques.

Historique : Jean Morlet (1931 - 2007), ancien élève de l'École polytechnique (X1952), est un géophysicien français qui a été le pionnier dans le domaine de l'analyse des ondelettes en collaboration avec Alex Grossmann. Morlet a inventé le mot « ondelette » pour décrire des équations similaires à celles existant depuis environ les années 1930.

Jean Morlet était ingénieur de recherche chez ELF Aquitaine lorsqu'il inventa les ondelettes pour résoudre des problèmes de traitement des signaux pour la prospection pétrolière.

Il a obtenu en 2001 le premier Prix Chéreau Lavet - Grand Prix de l'Académie des technologies.

Il y a eu un colloque international en son honneur: « Transformée en ondelettes continues et ondelette de Morlet, 1978-2008 » à l'Université Marseille-Luminy, en octobre 2008; voir plaque sur le gîte pour recevoir les scientifiques dans le parc du CIRM.

[source Wikipédia]

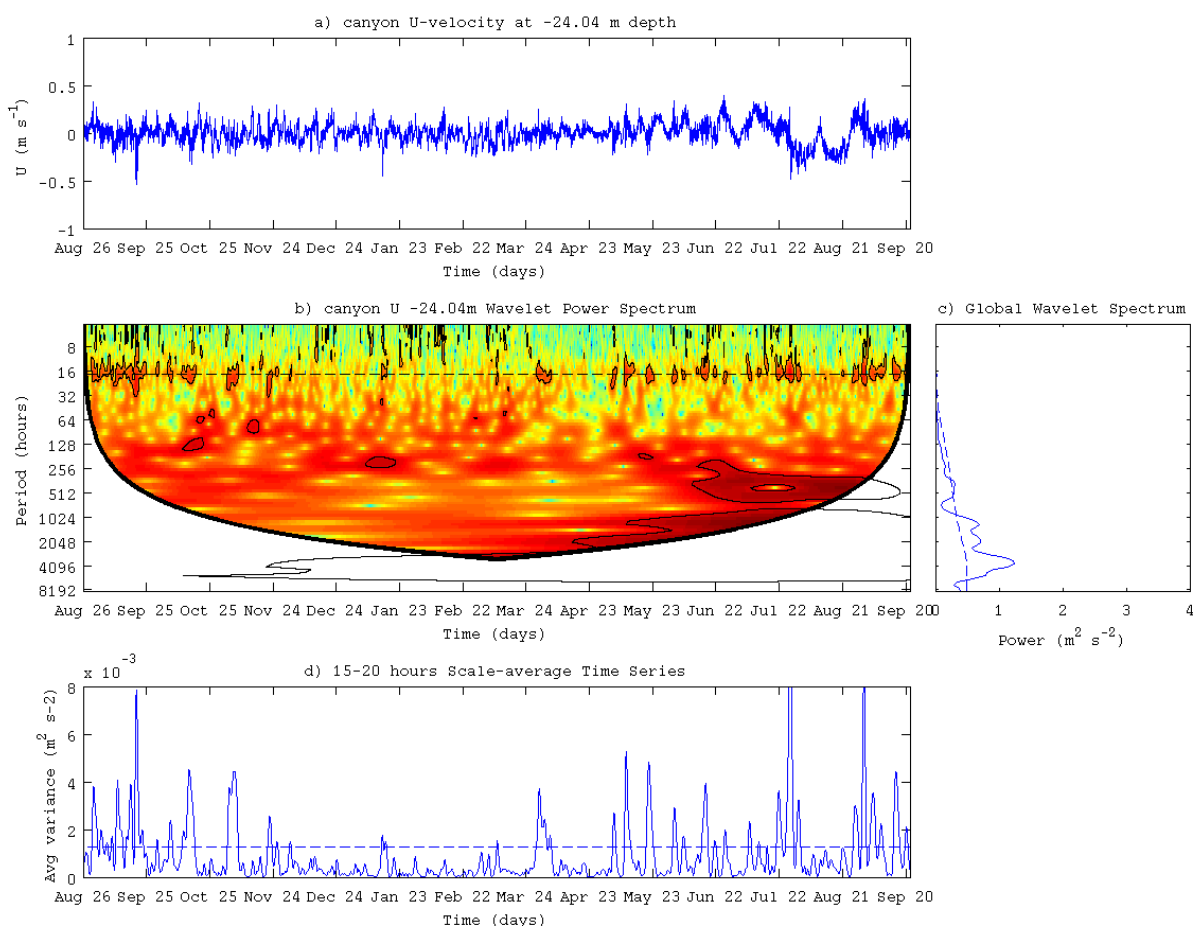


Fig – Analyse en Ondelettes de la série temporelle de vitesse acquise durant Latex (Mouillage du canyon) de août 2009 à août 2010 (Courtesy F. Nencioli) – outil d'analyse spectrale d'après Torrence and Compo, 1998.

6 Transformée de Hilbert-Huang

Extrait de la thèse d'A. Allou (2009)

« toute augmentation de la résolution fréquentielle suppose une augmentation de la durée d'analyse du signal, ce qui nuit à l'aspect d'instantanéité de l'analyse au regard des phénomènes considérés. Le même type de limitations peut se rencontrer dans les méthodes d'analyse temps-fréquence comme celles fondées sur la transformée de Wigner-Ville, ou les ondelettes à des degrés moindres.

Ainsi pour nous affranchir de ces problèmes de résolution fréquentielle au regard de ceux de résolution temporelle, nous avons orienté nos recherches vers des techniques se basant sur la transformée de Hilbert. En effet, cette transformée prend en considération l'évolution au cours du temps du contenu fréquentiel instantané du signal, alors que celle fondée sur l'analyse de Fourier ne le fait pas. Cependant, ce type de technique ne représente le signal qu'au moyen d'une seule fréquence instantanée. Or, ce dernier est composé en général d'un ou plusieurs modes distincts qui peuvent être modulés en fréquence ou pas. Cela peut être le cas comme avec les oscillations d'inertie dopplérisées par les courants associés aux ondes internes dans les situations de

stratification (Pollard *et al.*, 1980; Orvik et Mork, 1995). De plus, pour les signaux dont la moyenne locale est non nulle, l'énergie allouée à une bande de fréquences peut être largement surestimée, si l'on emploie cette méthode. Ainsi, il faut au préalable décomposer le signal selon ses modes physiques qui sont généralement à moyenne nulle. C'est dans ce sens que va l'article de Huang *et al.* (1998) qui pose ainsi les fondements de cette **décomposition du signal en modes empiriques nommé EMD (Empirical Mode Decomposition)**. Cette méthode est à la base d'autres méthodes et nous la détaillerons en premier avant de parler de ses nombreuses améliorations.

La décomposition en modes empiriques suppose que le signal soit composé d'une somme de signaux modulés indépendants les uns des autres par bande de fréquence. Le processus de décomposition en mode empirique tel que conçu par Huang et al. (1998), consiste à appliquer la méthode suivante sur le signal brut.

Détail des étapes clefs de l'EMD de Huang et al (1998):

-(A) relier entre eux les sommets (ou maxima locaux) par une interpolation à base de fonctions splines cubiques, la même opération étant effectuée sur les minima locaux. Nous obtenons ainsi les 2 courbes enveloppes du signal. Les premiers et derniers points de la série sont considérés comme des points où l'enveloppe liant les maxima et celle liant les minima s'intersectent.

-(B) en faisant la demi somme des enveloppes nous obtenons la moyenne locale « m » (figure 40 dans la thèse, ci-dessous) dont la bande passante contient les fréquences les plus basses du signal.

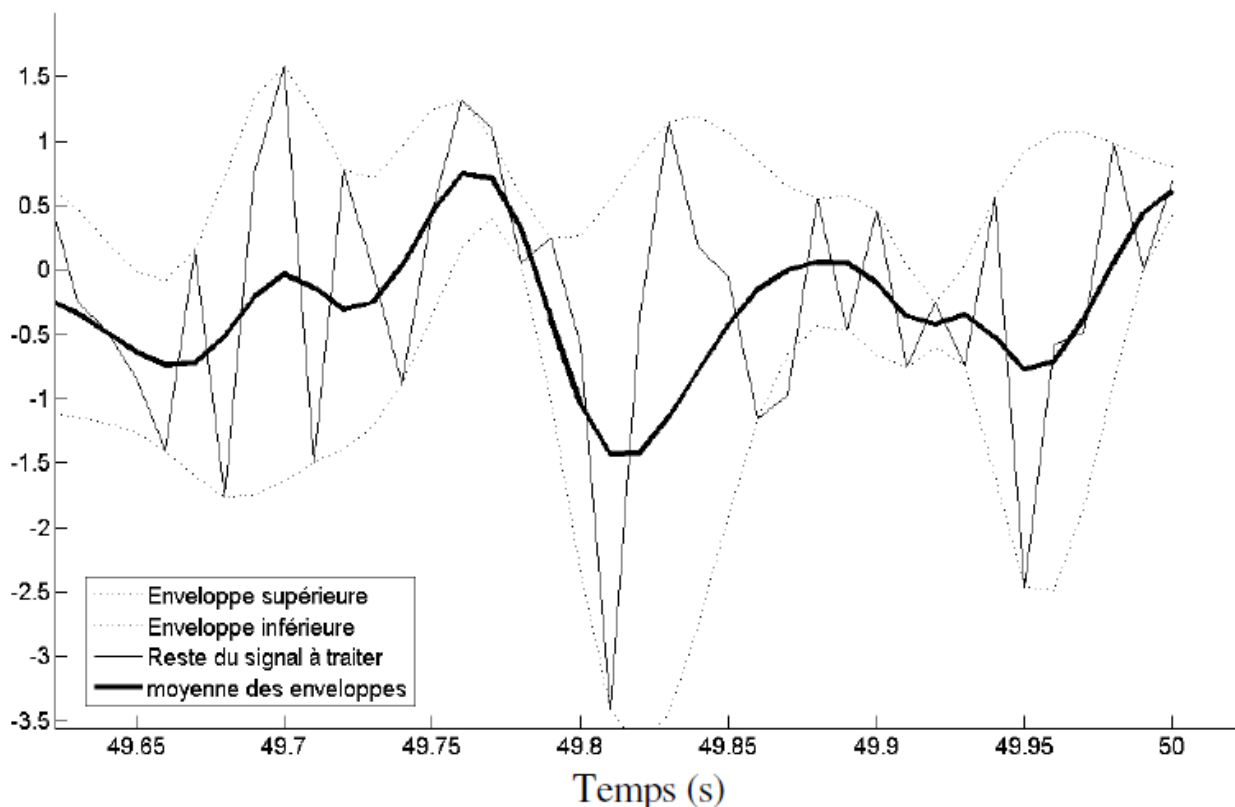
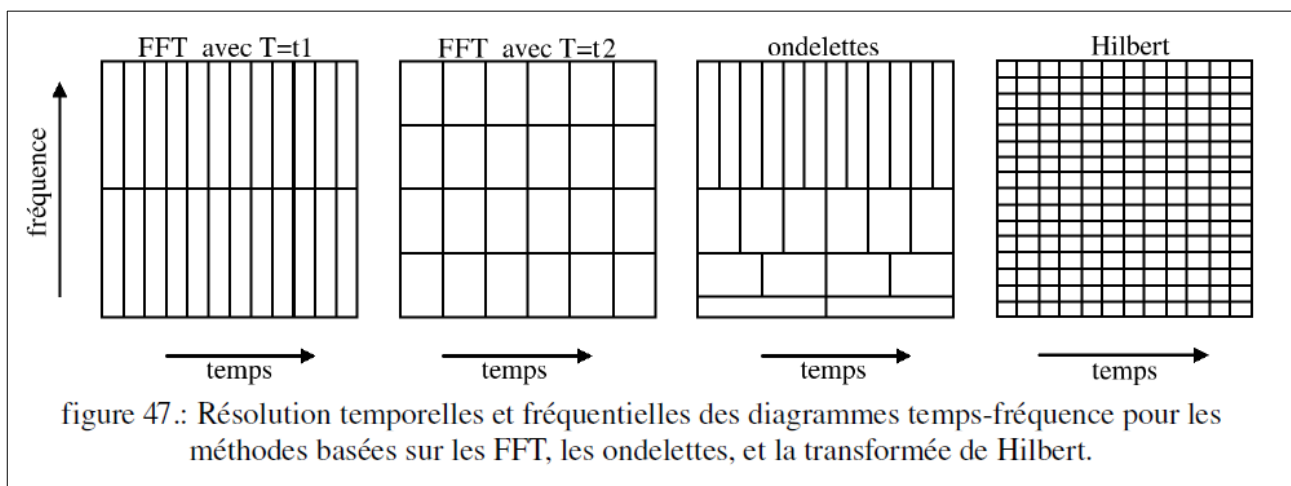


Figure 40 : Résultat des 2 premières étapes A et B

« -(C) on retire cette tendance « m » au signal initial « X » on obtient le reste « h ». Ce reste, s'il est bien conditionné, est appelé fonction de mode intrinsèque (IMF pour « intrinsic mode function »). Une IMF est définie par 2 conditions. La première condition est que le nombre de maxima locaux est égal au nombre de racines ou doit différer de 1 au plus. La seconde condition est que « la moyenne locale doit être nulle ». Ces deux critères sont indispensables pour bien conditionner les modes empiriques pour leur appliquer la transformée de Hilbert. Dans la première version de 1998 Huang et al forcent alors la moyenne des 2 courbes enveloppes à être nulle.

-(D) le résidu n'est pas forcément symétrique par rapport à 0, selon le signal de départ, c'est pour cela qu'il faut réitérer le processus (étapes de (A) à (C)) afin de retirer progressivement les parties du signal qui n'appartiennent pas à l'IMF recherchée. Ce sont ces parties de signal qui font que l'IMF n'est pas à moyenne nulle localement. Il s'agit du processus de tamisage. On est obligé de tamiser jusqu'à ce que la condition de symétrie locale soit obtenue. Cela se traduit par une moyenne des enveloppes nulle.

-(E) Huang et al (1998) proposent d'arrêter l'étape « D » lorsque l'écart type de la moyenne des enveloppes ne varie quasiment plus au cours de 2 tamisages successifs pour la même IMF. »



« La transformée de Hilbert n'ayant pas besoin de tronquer la série pour faire intervenir la dimension temps, se révèle être l'outil adapté pour détecter au mieux les phénomènes instationnaires » . (remerciement A. Allou)

Annexe :
Exemple de OI dans les données

Un déphasage de π entre les vitesses de courant mesurées dans la couche de mélange et sous la thermocline (ex ci-dessous visible sur les coupes horizontales) met sur la piste d'OIs.

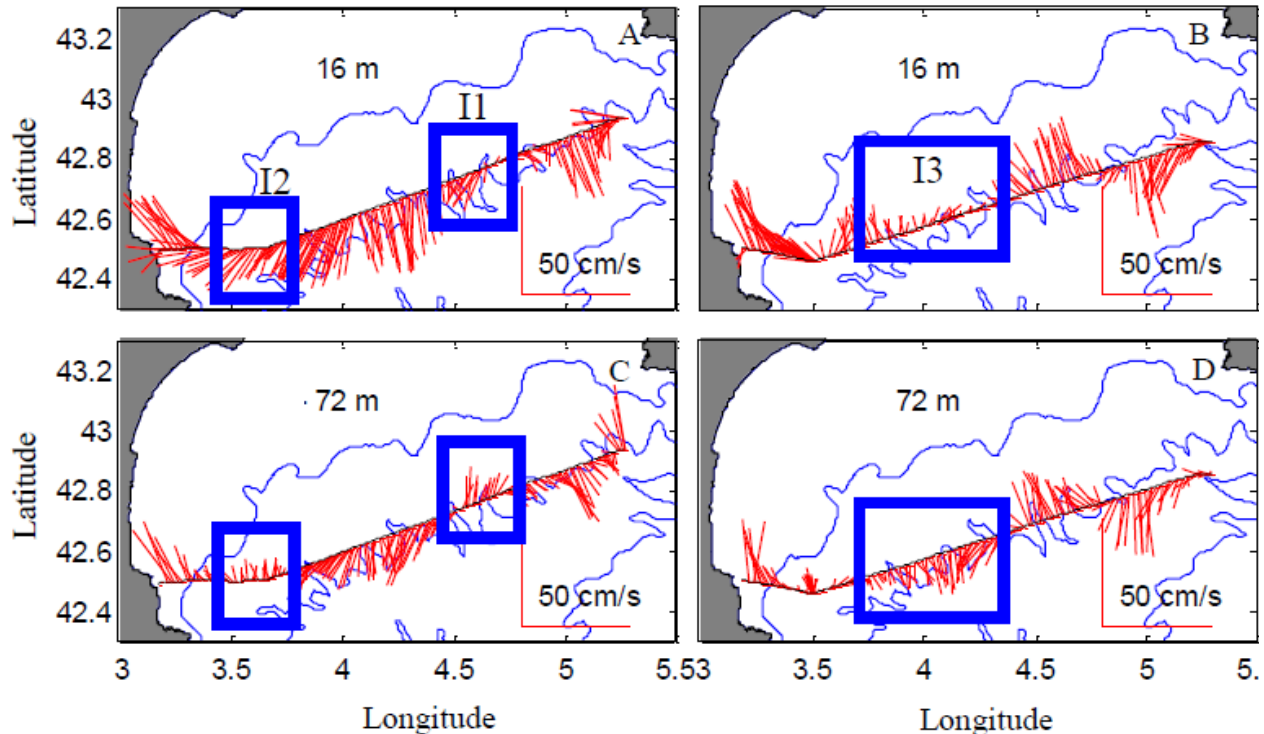


Fig. - Horizontal currents during MOOGLI 2 at A) 16 m and C) 72 m along transect TR1, and B) 16 m and D) 72 m along transect TR2. The boxes isolate the zones with inertial currents. At 16 m, they are labeled (I1, I2, and I3) in the chronological order currents were measured. Isobaths 100 m, 1000 m, and 2000 m are shown. (Fig 9 extraite de **Petrenko A.** (2003), *Circulation features in the Gulf of Lions, NW Mediterranean Sea; importance of inertial currents*. *Oceanol. Acta*, 26, 323-338)

A noter:

- le cisaillement des courants entre les courants de la couche de surface (ex 16 m) et ceux de la couche de fond (ex 72 m);
- la plus faible valeur des courants dans la couche de fond (plus épaisse que la couche de surface) dans le cas de I1 et I2;
- la rotation de courants entre le passage en I2 et le passage en I3. Ces deux parties de transects sont séparées par une durée de 10h. En 10h, à cette latitude (période inertielle 17,5h), les courants d'inertie -si ils étaient seuls- auraient un décalage de environ $205-210^\circ$. Comme on est en présence d'un courant moyen (amplitude deux fois plus faible que celle de l'OI; voir dans la Section III - Détection des intrusions b 3), il existe un décalage d'angle plus réduit, égal à $125-130^\circ$ (calcul trigonométrique). L'angle mesuré est ~ 120 degrés, en très bon accord avec la théorie.

A. Petrenko	Cours OPB309	Courant d'inertie
-------------	--------------	-------------------

Bibliographie

Allou A., *Étude expérimentale des instabilités méso à subméso-échelle du courant Nord Méditerranéen*, thèse 2009, COM (Centre d'Océanologie de Marseille), 265pp.

Chereskin T.K., M.D. Levine, A.J. Harding, L.A. Regier, *Observations of near-inertial waves in Acoustic Doppler Current Profiler measurements made in the Mixed Layer Dynamics Experiment*, J. Geophys. Res., 94 (C6) (1989), pp. 8135–8145

C. Millot, *The Gulf of Lion's hydrodynamics*, Cont. Shelf Res., 10 (9–11) (1990), pp. 885–894

Millot and Crepon, 1981, *Inertial oscillations on the Continental Shelf of the Gulf of Lions – Observations and Theory*, JPO vol 11, 5.

Nencioli, F., Petrenko, A.A., Doglioli, A.M. (2016). Diagnosing cross-shelf transport along an ocean front: an observational case study in the Gulf of Lion. J. Geophys. Res. Oceans.

doi:10.1002/2016JC011908

Petrenko, A.A., Doglioli, A.M., Nencioli, F., Kersalé, M., Hu, Z., d'Ovidio, F. (2017). A review of the LATEX project: mesoscale to submesoscale processes in a coastal environment. Ocean Dynam., doi: 10.1007/s10236-017-1040-9.

Petrenko A., C. Dufau and C. Estournel (2008), *Barotropic eastward currents in the western Gulf of Lion, north-western Mediterranean Sea, during stratified conditions*. J. Marine Syst., doi:10.1016/j.jmarsys.2008.03.004

Petrenko A., Y. Leredde, and P. Marsaleix (2005), *Circulation in a stratified and wind-forced Gulf of Lions, NW Mediterranean Sea: in-situ and modeling data*. Continental Shelf Res., 25, 5-27, doi:10.1016/j.csr.2004.09.004

Petrenko, A.A. (2003), *Circulation features in the Gulf of Lions, NW Mediterranean Sea; importance of inertial currents*, Oceanol. Acta, 26, pp. 323–338.

Torrence C. and G. P. Compo, 1998: *A Practical Guide to Wavelet Analysis*. Bull. Amer. Meteor. Soc., 79, 61–78.