

## Chapitre VI Devenir de la lumière dans l'eau – qualitatif

### A) Hypothèse pour la mise en équation

- Principe d'interaction : repose sur l'hypothèse d'une théorie linéaire de l'interaction de la lumière avec la matière à un niveau phénoménologique. Ce principe d'interaction comprend deux parties :
  - a) linéarité des phénomènes radiatifs pour des « basses » énergies ( $< 10^{10} \text{ W.m}^{-2}$ ). Cette hypothèse est nécessaire pour la mise en place des équations de Maxwell, ainsi que de celles du transfert radiatif et des lois géométriques de réflexion, réfraction etc..
  - b) théorie phénoménologique : les mesures et les variables des équations sont au niveau macroscopique (pour lequel l'optique géométrique est valable) sans expliquer les processus se déroulant à plus petite échelle. Par exemple, pour la diffusion, la VS sera utilisée sans entrer dans le détail de l'absorption du photon et de sa ré-émission etc...
- Plans parallèles : l'eau est considérée comme homogène et infinie à l'horizontal. Il n'existe pas de conditions aux frontières pour des bords latéraux, seulement pour le fond.

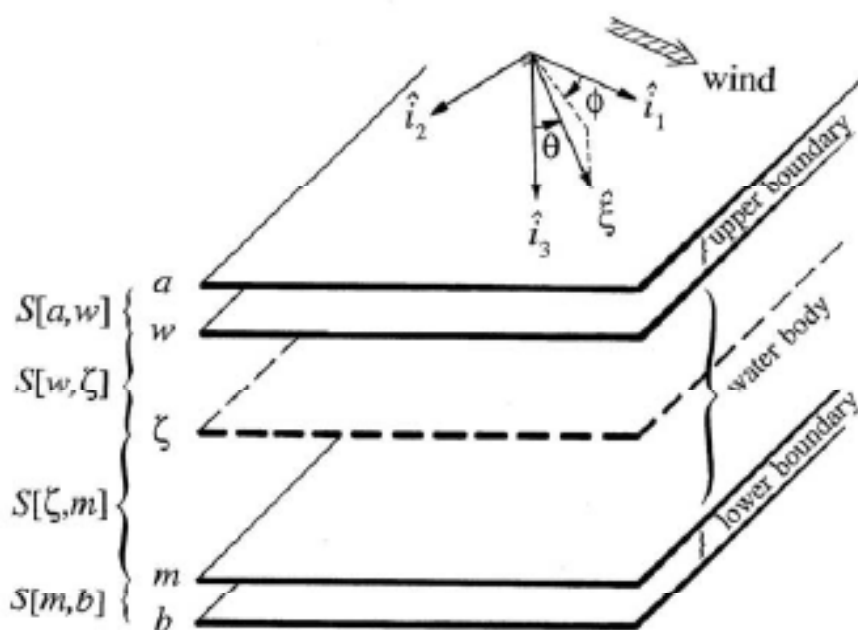


Fig. 4.1. Representation of a plane-parallel water body and the associated coordinate system. [redrawn from Mobley and Preisendorfer (1988)]

### B) Equation de transfert radiatif

Quand les photons franchissent l'interface air/mer et commencent à se propager dans la colonne d'eau, ils peuvent être absorbés, avec  $a$  le coefficient d'absorption; diffusés dans une autre direction sans changer de longueur d'onde, avec  $b$  le coefficient de diffusion élastique; ou diffusés en changeant de longueur d'onde, avec  $b^i$  notation choisie pour représenter le coefficient de diffusion inélastique. Si l'on étudie le devenir de la luminance  $L$ , en se concentrant sur des photons de longueur d'onde  $\lambda$  sur une distance  $r$  donnée et dans une

direction spécifique notée  $\xi$ , les trois sortes d'événements décrits ci-dessus peuvent arriver et sont des termes de perte : 1)  $-aL$ , 2)  $-bL$ , et 3)  $-b^i L$ . Mais, de même, trois termes de gains sont à prendre en compte décrivant : 4) une source potentielle de photons de cette longueur d'onde  $l$  dans la direction  $\xi$  ( $L^s$ ) ; 5) une diffusion élastique ( $L^e$ ) ou 6) inélastique ( $L^i$ ) aboutissant à un ou des photons dans la direction  $\xi$  et de longueur d'onde  $l$ .

Grâce à cette approche intuitive des phénomènes (Mobley, 1994), on obtient **l'équation de transfert radiatif (RTE, « Radiative Transfer Equation »** en anglais) suivante :

$$\frac{dL}{dr} = -(a + b + b^i)L + L^s + L^e + L^i$$

1    2    3            4    5    6

Les chiffres de 1 à 6 correspondent aux 6 termes décrits dans le paragraphe précédent. Cette RTE permet de calculer le devenir de la lumière dans l'eau, quand sont connues  $a$  et  $b$  ( $b^i$  est souvent négligée).

Cette équation est en  $Wm^{-3} sr^{-1} nm^{-1}$ .

Notation rapide : A quoi correspond l'opération  $1/dr$  ?

$$V = Dr/Dt = dr/Dt$$

$$1/dr = 1/V \quad 1/Dt$$

$$1/Dt = 1/dt + (V \cdot \text{grad}) = 1/dt + V \cdot \nabla = 1/dt + u \cdot d/dx + v \cdot d/dy + w \cdot d/dz$$

$$1/dr = 1/V \cdot 1/dt + \xi_1 \cdot d/dx + \xi_2 \cdot d/dy + \xi_3 \cdot d/dz$$

les hypothèses sont telles que  $1/dt = 0$  + plans parallèles :  $d/dx = d/dy = 0$

$$\text{donc } 1/dr = \xi_3 \cdot d/dz = \cos\theta \cdot d/dz = \mu \cdot d/dz$$

donc  $dL/dr = \mu \cdot dL/dz$  correspond à l'équation précédente.

La loi de Beer, vue en fin de chapitre 5, correspond au cas idéalisé :

- sans source  $L^s$
- sans diffusion inélastique  $L^e$  (et  $a^i = 0$ )
- sans diffusion élastique  $L^i$  (et  $b = 0$ )

D'où :

$$dL/dz = -a/\mu \cdot L \quad \text{ou} \quad L = L(z=0) e^{-a/\mu z}$$

IOPs  $\rightarrow$  RTE  $\rightarrow$  AOPs      Problème direct  
 $\leftarrow$                                       Problème inverse

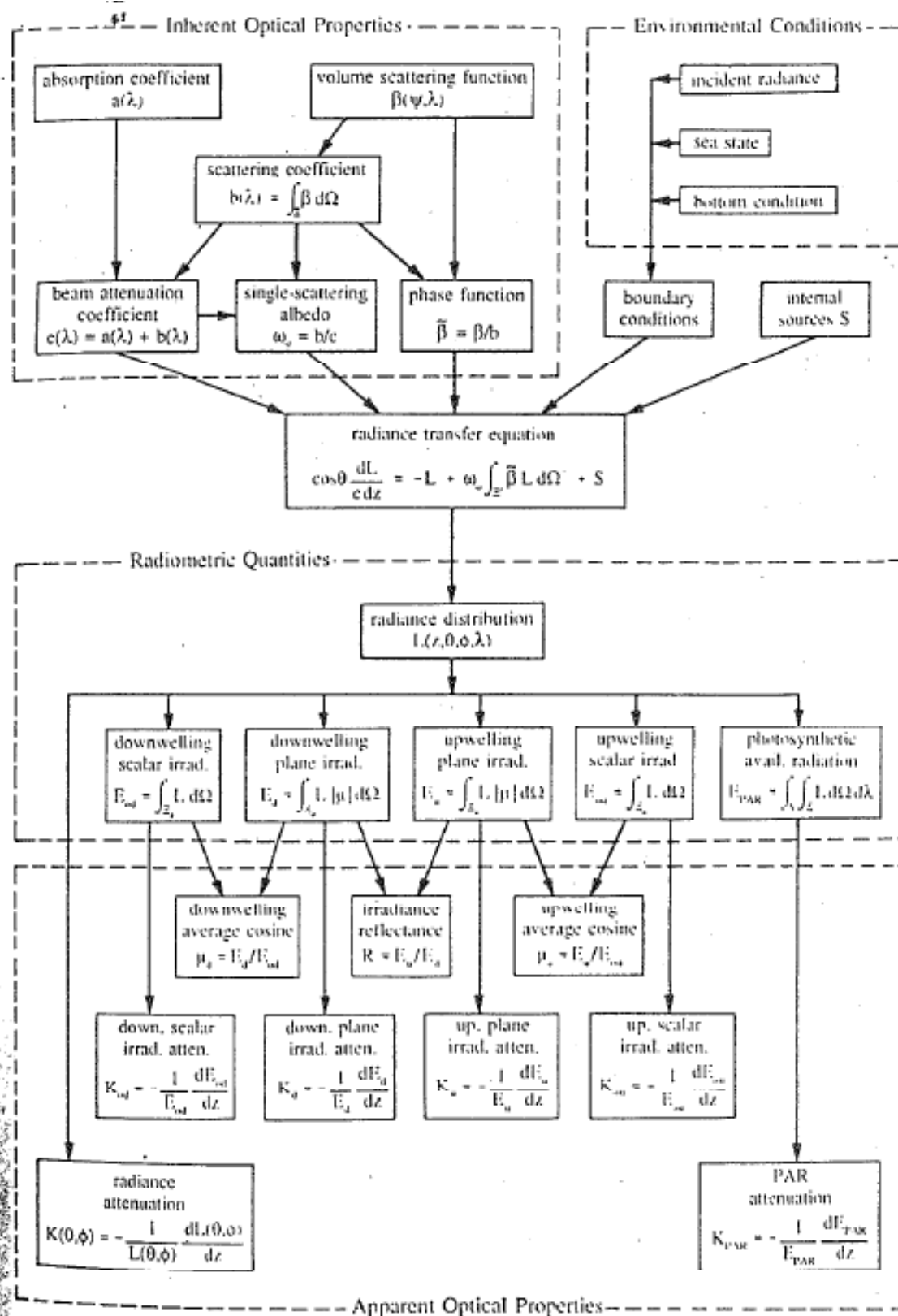


Fig. 3.27. Relationships among the various quantities commonly used in hydrologic optics. [reproduced from Mobley (1994), by permission]



### **C) Méthodes de résolution de l'équation RTE**

Intro sur les types de modèles

- 1) Méthode de Monte-Carlo
- 2) Méthode de plongement invariant (invariant embedding)
- 3) Méthode des eigenmatrices
- 4) Méthode itérative
- 5) Méthode harmonique sphérique

## Classification of models

*Predictive* (predict something we don't know from something we do know, e.g., radiance from IOP's, etc.)

vs.

*Diagnostic* (analyze or transform known information, e.g., curve-fitting to data)

*Direct* (e.g., predict radiance given IOP's)

vs.

*Inverse* (e.g., deduce IOP's given the radiance)

*Approximate analytical* (e.g., single-scattering approximation)

vs.

*"Exact" numerical* (e.g., Hydrolight and Monte Carlo)

*Deterministic* (no statistical noise, e.g., Hydrolight)

vs.

*Probabilistic* (statistical noise, e.g., Monte Carlo)

### 1) Méthode de Monte-Carlo

Méthode la plus générale pour résoudre la RTE quelles soient les frontières, la radiance incidente et les IOPs. Elle est basée sur la **méthode de tracés de rayons** dont l'hypothèse est : si l'on connaît la probabilité d'existence de chaque événement séparé, on peut déterminer la probabilité d'existence d'une série d'événements.

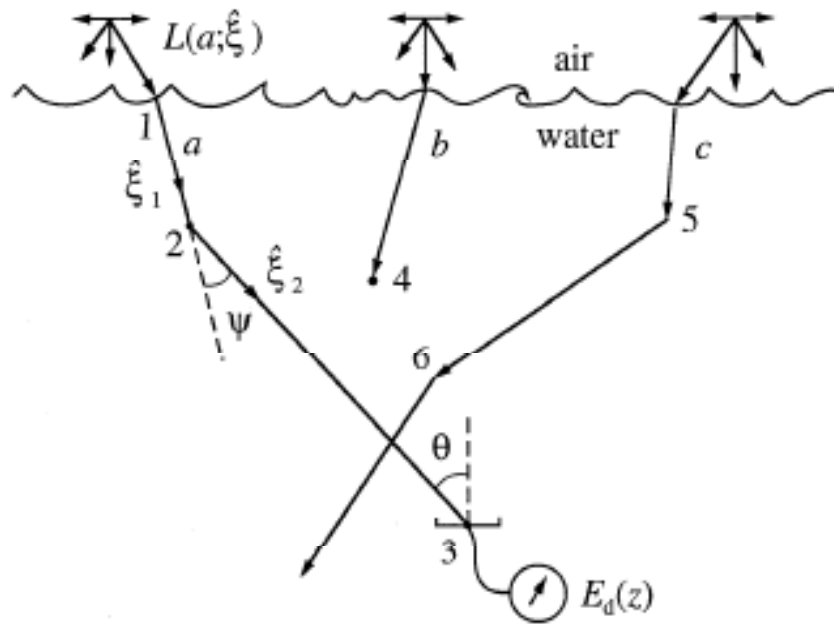


Fig. 6.1. Illustration of three photon trajectories and of the computation of  $E_d$ .

L'explication pédagogique est la suivante. La modélisation Monte Carlo directe consiste à :

- simuler les directions des photons pour 1 soleil et ciel donné
- simuler l'interface air/mer
- suivi de tous les photons
- comptage des photons arrivant sur le récepteur (correction facteur  $\cos\theta$ ); évaluation de  $E_d(z)$

Exemple très simplifié de détermination du chemin parcouru

A quoi est égale la distance  $r$  parcourue par un photon ? (la même question peut être posée non pour  $r$  mais  $l = cr$  appelé le chemin optique)

$dL/dr = -cL$   $r ? l ?$  rappel :  $c$  = coefficient d'atténuation spectral

La diminution de la luminance  $L$  dans la direction  $\xi$  dépend de la probabilité du photon d'être absorbé ou diffusé entre  $l$  et  $l+dl$  :  $p_i(l)$

Une probabilité est telle que son intégration de 0 à  $\infty$  est égale à 1 et que

$$p_i(l)dl = e^{-l} dl$$

Soit  $R$  un nombre tiré au hasard entre 0 et 1 (distribution uniforme) :

$$R = 1 - p_i(l) = 1 - e^{-l}$$

Soit  $l = -\ln(1-R)$

D'où  $cr = -\ln(1-R)$

$$r = -1/c \ln(1-R)$$

$r$  correspond à la distance moyenne géométrique, appelé aussi libre parcours moyen (freem mean path)  $\langle r \rangle = \langle l/c \rangle = \langle l \rangle / \langle c \rangle = 1/\langle c \rangle$

une fois que la distance parcourue  $r$  a été calculée, la même démarche est effectuée pour déterminer quelle sorte d'interaction a lieu au bout de la distance.

Tir au sort de  $R$  entre 0 et 1 et comparaison avec l'albédo de diffusion simple  $w_0 = b/c$

Si  $R > w_0$       absorption      (proportion  $a/c$ )

Si  $R < w_0$       diffusion      (proportion  $b/c$ )

On rappelle que ce terme  $w_0$  est aussi appelé la probabilité de survie du photon)

Propriétés de Monte Carlo avant (= les photons sont suivis dans le sens du temps croissant)

+ simulation analogue : ie analogue aux processus physiques

+ simple conceptuellement

+ instructive

+ très générale

+ simple à programmer (ordinateur //)

- pas de lien simple avec la structure mathématique de la RTE

- peut être très inefficace en temps de calcul

Exemple en cours de calcul

En bas de la zone euphotique, 1 photon sur  $10^{10}$  arrive dans le détecteur (rayon 1 cm)

En général pour avoir de bonnes estimations il faut que l'erreur soit inférieure à l'erreur de mesures (par exemple de l'ordre de 2-5 % pour  $E_d$ )

L'erreur est liée au nombre de photons  $n$  détectés par le capteur  $\text{erreur} = n^{-1/2}$

Si  $n = 10^4$  photons alors l'erreur est de 0,01 et déterminer  $E_d$  à 1% est satisfaisant.

Cependant, il vaut mieux rentabiliser tous les calculs en effectuant une **simulation de Monte Carlo arrière** ou tous les photons sont utilisés car ils sont suivis dans l'ordre du temps décroissant, du capteur (= la source) vers la surface de l'eau (Gordon, 1985).

## 2) Méthode du plongement invariant

Méthode analytique (déterministe et non statistique) inventée par Ambarzumian (1943) dans le domaine de l'astrophysique

Propriétés :

+ applicable à toute situation

+ pas de bruit statistique dans les résultats

+ mathématiquement élégante

+ efficace en temps de calcul

- mathématiquement très complexe

Mobley et Preisendorfer ont travaillé pendant 2 à 3 ans sur la mise en place et modélisation numérique de la RTE ; voir les 6 volumes de Preisendorfer « Hydrologic Optics » (1976).

La technique est expliquée brièvement pour le modèle simplifié de la RTE , consistant en les équations « Two-flow ». Elle consiste à transformer :

- un problème linéaire (voir Table 7.1) à 2 équations , 2 inconnues  $E_d$  et  $E_u$  et 2 conditions limites : air et fond
- en un problème non linéaire à 1 seule condition limite « facilement » résolu par ordinateur

C'est la base du plongement invariant (démarche très complexe).

Table 7.1. The two-flow irradiance equations and associated boundary conditions. The underlined quantities are assumed known.

water layer	equations to be satisfied	equation number
$S[a,w]$	$E_u(a) = E_u(w) \underline{t(w,a)} + \underline{E_d(a)} \underline{r(a,w)}$ $E_d(w) = E_u(w) \underline{r(w,a)} + \underline{E_d(a)} \underline{t(a,w)}$	(7.1) (7.2)
$S[w,m]$	$\frac{dE_d(z)}{dz} = E_d(z) \underline{\tau_{dd}(z)} + E_u(z) \underline{\rho_{nd}(z)} + \underline{E_{od}^s(z)}$	(7.3)
	$-\frac{dE_u(z)}{dz} = E_u(z) \underline{\tau_{uu}(z)} + E_d(z) \underline{\rho_{du}(z)} + \underline{E_{ou}^s(z)}$	(7.4)
$S[m,b]$	$E_u(m) = E_d(m) \underline{r(m,b)}$	(7.5)

3) Méthode des eigenmatrices (ou des ordinats discrets)  
C'est une méthode analytique.

On approxime la fonction de phase de diffusion comme une série de polynômes de Legendre.

This powerful solution method is based on *approximating the scattering phase function as a series of Legendre polynomials, truncated to a finite number  $2n$  of terms*:

$$\tilde{\beta}(\psi) \approx \sum_{k=0}^{2n-1} g_k P_k(\cos\psi). \quad (9.1)$$

Here the  $g_k$  are the *expansion coefficients*, and the  $P_k$  are *Legendre polynomials*. It will prove convenient [see Eqs. (9.6) and (9.11)] to have an even number of terms in Eq. (9.1), hence the upper limit of  $2n-1$  in the sum. For the moment, we consider  $n$  to be an arbitrary integer; we shall discuss below how to determine its value.



Legendre polynomials are treated in textbooks on mathematical methods of physics, for example Boas (1983) or Mathews and Walker (1965). They can be defined in general by

$$P_k(x) \equiv \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k,$$

where  $x = \cos\psi$  in the context of Eq. (9.1). The first few Legendre polynomials are

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 & P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_1(x) &= x & P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) & P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x). \end{aligned} \quad (9.2)$$

The  $P_k$  form a complete set of orthogonal functions on the interval  $-1 \leq x \leq 1$ . They satisfy the orthogonality relation

$$\int_{-1}^1 P_k(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2m+1} \delta_{k,m}, \quad (9.3)$$

where  $\delta_{k,m}$  is the Kronecker delta function of Eq. (1.19).

Pour plus de détails voir Stamnes (1988)

Propriétés :

- + très efficace pour la RTE
- + L à toute profondeur, pour n'importe quelle direction  $\xi$
- inefficace pour une fonction de phase de diffusion très « pointue »
- inefficace si les IOPs varient avec  $z$
- effets du vent à la surface ne sont pas bien rendus

Voir Mobley (1994) pour plus de détails sur ces 3 premières méthodes et les autres méthodes de résolution de la RTE

#### D) Méthode inverse

IOPs  $\rightarrow$  RTE  $\rightarrow$  AOPs      Problème direct  
 $\leftarrow$                       Problème inverse

Le problème inverse n'est pas encore résolu pourtant c'est un problème d'intérêt majeur car c'est ce que l'on voudrait faire avec les données satellitales.

$$L_{\text{sat}} = L_{\text{atm}} + t L_w$$

Avec  $L_w = 2\%$  de  $L_{sat}$

Une fois  $L$  atm soutiré et les corrections atmosphériques effectuées

Si on connaît ou que l'on peut modéliser  $E_d$ , alors on a  $R_{rs} = L_w/E_d$

D'où l'on veut dériver les composantes de l'eau de mer.

Mais il existe des problèmes spécifiques avec les méthodes inverses :

- unicité de la solution
- sensibilité aux erreurs (de petites erreurs en  $L_w$  peuvent aboutir à des IOPs complètement fausses)

une méthode inverse simplifiée : la loi de Gershun

la RTE peut s'écrire :

$$\mu \, dL/dz = -c \, L + L^e + L^i + L^s$$

Si il n'y a pas de diffusion inélastique ni de source interne, il reste :

$$\mu \, dL/dz = -c \, L + L^e$$

qui, intégrée sur toute la sphère, donne :

$$d/dz(E_d - E_u) = -cE_o + bE_o = -aE_o$$

$$a = -1/E_o \, d/dz(E_d - E_u)$$

Avec relativement peu d'hypothèses, on peut obtenir une IOP le coefficient d'absorption en fonction de  $E_d$ ,  $E_u$  et  $E_o$ .

Ces hypothèses sont acceptables pour des milieux peu diffusifs.

## E) Modélisation bio-optique (production primaire ..)

Behrenfeld, M., and P. Falkowski (1997). A consumer's guide to phytoplankton primary productivity models. *Limnology and Oceanography* 42 (7), 1479–1491.

### I. Wavelength-resolved models (WRMs)

$$\sum PP = \int_{\lambda=400}^{700} \int_{t=\text{sunrise}}^{\text{sunset}} \int_{z=0}^{Z_{eu}} \Phi(\lambda, t, z) \times \text{PAR}(\lambda, t, z) \times a^*(\lambda, z) \times \text{Chl}(z) \, d\lambda \, dt \, dz - R$$

### II. Wavelength-integrated models (WIMs)

$$\sum PP = \int_{t=\text{sunrise}}^{\text{sunset}} \int_{z=0}^{Z_{eu}} \phi(t, z) \times \text{PAR}(t, z) \times \text{Chl}(z) \, dt \, dz - R$$

### III. Time-integrated models (TIMs)

$$\sum PP = \int_{z=0}^{Z_{eu}} P^b(z) \times \text{PAR}(z) \times DL \times \text{Chl}(z) \, dz$$

### IV. Depth-integrated models (DIMs)

$$\sum PP = P^b_{\text{opt}} \times f[\text{PAR}(0)] \times DL \times \text{Chl} \times Z_{eu}$$

# Système de classification

## I. Wavelength-resolved models (WRMs)

$$\sum PP = \int_{\lambda=400}^{700} \int_{t=\text{sunrise}}^{\text{sunset}} \int_{z=0}^{Z_{eu}} \Phi(\lambda, t, z) \times PAR(\lambda, t, z) \times a^*(\lambda, z) \times Chl(z) d\lambda dt dz - R$$

## II. Wavelength-integrated models (WIMs)

$$\sum PP = \int_{t=\text{sunrise}}^{\text{sunset}} \int_{z=0}^{Z_{eu}} \varphi(t, z) \times PAR(t, z) \times Chl(z) dt dz - R$$

## III. Time-integrated models (TIMs)

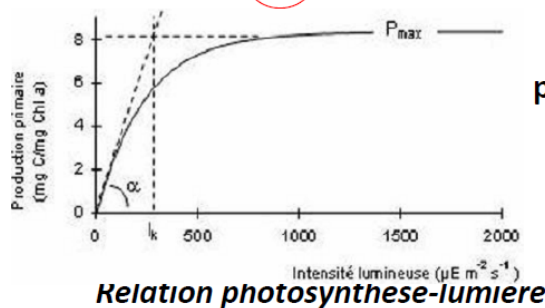
$$\sum PP = \int_{z=0}^{Z_{eu}} P^b(z) \times PAR(z) \times DL \times Chl(z) dz$$

## IV. Depth-integrated models (DIMs)

$$\sum PP = P_{opt}^b \times f[PAR(0)] \times DL \times Chl \times Z_{eu}$$

Relation  
Photosynthèse-lumière

Mesure directe de la  
production primaire  
nette



Conclusion du papier

## 2/ Synthèse

- Variabilité de  $\sum PP$  a été divisée en l'associant à chaque variable d'un DIM standard

$$\sum PP := C_{surf} \times Z_{eu} \times P_{opt}^b \times DL \times F,$$

- ➡ Amélioration des évaluations de  $\sum PP$  entre les catégories est négligeable  
Si un paramétrage équivalent est fait pour la variabilité horizontale de  $P_{opt}^b$  et  $E_k^*$   
+ une dépendance linéaire de  $E_0$  n'est pas supposée

- ➡ La variabilité de  $E_0$  est responsable d'une partie mineure de la variabilité de  $\sum PP$

EVOLUTION DES MODELES ➔ AMELIORATION RESTREINTE DES ESTIMATIONS DE  $\sum PP$

Effort sur la compréhension des causes de variabilité des facteurs physiologiques les + influents sur la variabilité de la productivité du phytoplancton

Extraits de la présentation du papier Behrenfeld et Falkowski, 1997 par Marion Kersale en 2009 (merci Marion).