

Exercice n°5. Jet d'eau incliné.

a) Soit 5 le sommet du jet
hyp: stationnaire, fluide parfait

• Bernoulli entre 4 et 5.

$$\frac{1}{2} \rho V_4^2 + \underbrace{P_4}_{\text{Poten}} + \rho g z_4 = \frac{1}{2} \rho V_5^2 + \underbrace{P_5}_{\text{Poten}} + \rho g z_5.$$

$$\text{or } V_5^2 = V_{sh}^2 + \cancel{V_{sv}^2} = V_{sh}^2 = V_{4h}^2$$

$$\text{or } V_4^2 = V_{4h}^2 + V_{4v}^2 = 2 V_{4h}^2$$

$$\text{car } \alpha = 45^\circ$$

$$\Rightarrow V_5 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot V_4 = \frac{V_4}{\sqrt{2}}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \rho V_4^2 + \rho g z_4 = \frac{1}{2} \rho \frac{V_4^2}{2} + \rho g z_5$$

$$\cancel{\frac{1}{2} \rho V_4^2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \cancel{\rho g} (z_5 - z_4).$$

$$V_4^2 = 4g(z_5 - z_4).$$

$$\Rightarrow V_4 = \sqrt{4g(z_5 - z_4)}$$

AN: $V_4 = 15,34 \text{ m/s}$.

ou

Passage de 4 à 5 = conversion énergie cinétique verticale en énergie potentielle.

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \rho u_{4v}^2 = \rho g \Delta h.$$

$$\text{avec } u_{4v}^2 = \frac{u_4^2}{2}.$$

$$\Rightarrow \frac{\rho}{4} \cdot u_4^2 = \rho g (z_5 - z_4).$$

$$\Rightarrow u_4 = \sqrt{4g(z_5 - z_4)}$$

$$b) Q = U_4 \cdot S_4 = U_4 \cdot \frac{\pi D_4^2}{4}$$

$$\text{AN: } Q = 15,34 \times \frac{\pi \times (7,5 \cdot 10^{-2})^2}{4}$$

$$Q = 0,0678 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

$$U_3 = \frac{Q}{S_3} = \frac{4Q}{\pi D_3^2} = U_4 \cdot \frac{D_4^2}{D_3^2}$$

$$\text{AN: } U_3 = \frac{0,0678 \times 4}{\pi \times (15 \cdot 10^{-2})^2} = 15,34 \times \frac{7,5^2}{15^2} = 15,34 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$U_3 = \frac{U_4}{4} = 3,835 \text{ m s}^{-1}$$

$$c) P = (P_t)_2 Q \Rightarrow (P_t)_2 = \frac{P}{Q}$$

Entre 1 et 4.

$$(P_t)_4 = (P_t)_1 + \frac{P}{Q}$$

$$\frac{1}{2} \rho U_4^2 + P_4 + \rho g z_4 = \frac{1}{2} \rho U_1^2 + P_1 + \rho g z_1 + \frac{P}{Q} \quad (1)$$

$$\text{avec } \left[\frac{P}{Q} \right] = \frac{\frac{W}{m^3 s^{-1}}}{\frac{m^3 s^{-1}}{m^2}} = \frac{N \cdot m \cdot s^{-1}}{m^2 \cdot s^{-1}} = N \cdot m^{-2} \quad \left. \vphantom{\left[\frac{P}{Q} \right]} \right\} \text{ m unité.}$$

$$\text{or } [Pression] = \frac{\text{Force}}{\text{surface}} = \frac{N}{m^2} = N \cdot m^{-2}$$

d) De manière hydraulique, il faut exprimer l'équation de Bernoulli en hauteur d'eau

$$(1) \Rightarrow \frac{U_4^2}{2g} + z_4 + \frac{P_4}{\rho g} = \frac{U_1^2}{2g} + z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{P}{\rho g Q}$$

e) ⊕ Section 1.

$$p_1^* = \frac{(P_t)_1}{\rho g} \quad \text{car } V_1^d = 0.$$

$$p_1^* = \frac{P_1}{\rho g} + z_1 = \frac{1,3 \cdot 10^5 \times 1,013}{10^3 \times 9,81} + 1,5 = \frac{1,3 \times 1,013 \times 10^5}{9,81 \times 10^3} + 1,5$$

$$p_1^* = 13,4 + 1,5 = 14,9 \text{ m.}$$

$$p_1^* = \frac{P_2}{\rho g} + z_1 = 14,9 \text{ m.}$$

$$H_1 = \frac{(P_t)_1}{\rho g} = p_1^* = 14,9 \text{ m.}$$

⊕ Section 2 (Avant pompe).

$$\text{Pas de pente} \Rightarrow H_2 = H_1 = 14,9 \text{ m.}$$

Bernoulli entre 1 et 2 av

$$\frac{1}{2} \rho U_1^2 + P_1 + \rho g z_1 = \frac{1}{2} \rho U_2^2 + P_2 + \rho g z_2$$

$$\Rightarrow \frac{U_1^2}{2g} + \underbrace{\frac{P_1}{\rho g} + z_1}_{P_1^*} = \frac{U_2^2}{2g} + \underbrace{\frac{P_2}{\rho g} + z_2}_{P_2^*}$$

$$\Rightarrow P_2^* = P_1^* - \frac{U_2^2}{2g}$$

ou conservation débit entre 2 et 3 $\Rightarrow U_2 = U_3$.

$$\text{AN: } P_2^* = 14,9 - \frac{3,835^2}{2 \times 9,81} = 14,9 - 0,75.$$

$$P_2^* = 14,15 \text{ m.}$$

⊕ Section 3 (Idem section 2 après pompe car $U_2 = U_3$ Pas de pente).

$$\begin{aligned} H_3 &= H_1 + \frac{P}{\rho g Q} = 14,9 + \frac{5910}{10^3 \times 9,81 \times 0,0678} \\ &= 14,9 + 8,88 \text{ m} = 23,78 \text{ m.} \end{aligned}$$

⊕ Section 3 (toujours).

$$P_3^* = H_3 - \frac{U_3^2}{2g} = H_3 - 0,75 \text{ m} = 23,78 - 0,75 \\ = 23,03 \text{ m.} \quad \underline{\hspace{10em}}$$
$$\frac{(P_t)_3}{\gamma} - \frac{U_3^2}{2g}$$

* Section 4.

Pas de pertes entre 3 et 4.

$$\Rightarrow \underline{H_4 = H_3 = 23,78 \text{ m.}}$$

$$P_4^* = H_4 - \frac{U_4^2}{2g} \quad \text{or } U_4 = 4U_3 \Rightarrow \frac{U_4^2}{2g} = 16 \frac{U_3^2}{2g}$$

$$P_4^* = H_4 - 16 \times 0,75 = 23,78 - 12$$

$$\underline{P_4^* = 11,78 \text{ m.}}$$

* Section 5.

pas de pertes

$$\Rightarrow \underline{H_5 = H_4 = H_3 = 23,78 \text{ m.}}$$

$$\text{et } P_5^* = H_5 - \frac{U_5^2}{2g} \quad \text{or } U_5 = \frac{U_4}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{U_5^2}{2g} = \frac{U_4^2}{2g} \times \frac{1}{2}$$

$$P_5^* = H_5 - 0,38 \text{ m}$$

$$\underline{P_5^* = 23,78 - 0,38 = 23,4 \text{ m.}}$$

f) la ligne de charge n'est pas constante car la pompe fournit de l'énergie au fluide donc il n'y a pas conservation de l'énergie.

g) on note $L = 2,5$ m la longueur de tuyau entre la pompe et 4.
 $a = 0,05$ la perte de charge linéaire.

Bernoulli modifiée entre 2 (après la pompe) et 4.

$$H_{2ap} = \frac{(P_t)_{2ap}}{\rho} = \frac{1}{2} \rho \frac{U_4^2}{\rho g} + \frac{P_4}{\rho g} + \frac{\rho g}{\rho g} z_4 + h_{\text{cin}}$$

$$(\Rightarrow) H_p = \frac{U_4^2}{2g} + \frac{P_{atm}}{\rho g} + z_4 + aL. \quad \text{avec } H_p = 23,78 \text{ m.}$$

$$\frac{U_4^2}{2g} = H_p - \frac{P_{atm}}{\rho g} - z_4 - aL.$$

$$U_4 = \sqrt{2g \left(H_p - \frac{P_{atm}}{\rho g} - z_4 - aL \right)}$$

$$\underline{\text{AN: } U_4 = 15,23 \text{ m.s}^{-1}}$$

ou :

$$\underbrace{\frac{1}{2} \rho U_{sf}^2}_{\text{sans frottement}} + \cancel{P_{atm}} + \cancel{\rho g z_4} = \underbrace{\frac{1}{2} \rho (U_4)_{of}^2}_{\text{Avec frottement}} + \cancel{P_{atm}} + \cancel{\rho g z_4} + aL \rho g$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \rho U_{sf}^2 = \frac{1}{2} \rho U_{4(f)}^2 + \rho g aL.$$

$$U_{4(f)} = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{1}{2} U_{sf}^2 - g aL \right)} = \sqrt{U_{sf}^2 - 2g aL}$$

$$\underline{\text{AN: } U_{4(f)} = 15,26 \text{ m/s.}}$$

h) $h_{s(sf)} = h_s(f) + aL$

$$\Rightarrow h_s(f) = h_s(sf) - \frac{aL}{2,5 \text{ m.}}$$

$$\Rightarrow h_s(f) = 5,875 \text{ m.} \Rightarrow \text{le jet monte } 12,5 \text{ cm moins haut que sans frottement.}$$

Jet d'eau incliné

