

Les réponses doivent être concises et précises.

Ne pas hésiter à commenter les figures de la feuille et de la joindre en y mettant votre numéro d'étudiant.

Faire les AN après avoir donné les formules

Exercice 1. Hydrostatique : Tube en U (3.5 points)

Soit un tube en U fermé à une extrémité qui contient deux liquides non miscibles.

Entre les surfaces :

- (1) et (2) il s'agit de l'essence de masse volumique $\rho_{\text{essence}} = 700 \text{ kg/m}^3$.

- (2) et (3), il s'agit du mercure de masse volumique $\rho_{\text{mercure}} = 13600 \text{ kg/m}^3$.

La pression au-dessus de la surface libre (1) est $P_1 = P_{\text{atm}} = 1 \text{ bar}$.

L'accélération de la pesanteur est $g=9,8 \text{ m/s}^2$

La branche fermée emprisonne un gaz à une pression P_3 qu'on cherche à calculer.

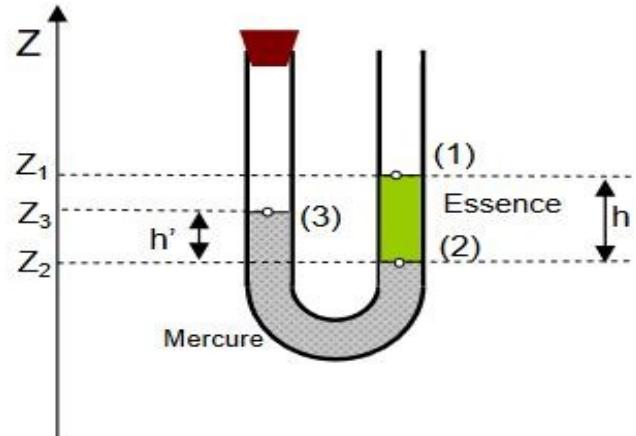


Figure 1.

1) Rappeler la loi de l'hydrostatique et l'appliquer pour calculer la pression P_2 (en mbar) au niveau de la surface de séparation (2) sachant que $h = (Z_1 - Z_2) = 728 \text{ mm}$.

2) De même, pour le mercure, calculer la pression P_3 (en mbar) au niveau de la surface (3) sachant que $h' = (Z_3 - Z_2) = 15 \text{ mm}$.

Exercice 2. Hydocinétique : Caractéristique d'un écoulement (3.5 points)

Pour cet exercice, détailler tous vos calculs.

\vec{e}_x et \vec{e}_y étant les vecteurs unitaires d'une base dans le plan (x,y), où l'on projette le vecteur vitesse \vec{v} .

1. Caractériser (existence et irrotationalité) les écoulements bidimensionnels, permanents, ci-après définis par leur champ de vitesses:

a) $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$ avec v_0 une valeur constante non nulle de vitesse suivant \vec{e}_x

b) $\vec{v} = K(-y \vec{e}_x + x \vec{e}_y)$ avec K une constante réelle, non nulle.

c) $\vec{v} = K \left(\frac{-y \vec{e}_x + x \vec{e}_y}{x^2 + y^2} \right)$ avec K une constante réelle, non nulle.

d) $\vec{v} = y \left(1 - \frac{x}{L} \right) \vec{e}_x + \frac{y^2}{2L} \vec{e}_y$ avec L une constante réelle, non nulle.

2. Pour le champ de vitesse (d), déterminer l'équation des lignes de courant.

Exercice 3. Hydrodynamique : Théorème de Bernoulli (5 points)

Le jet d'eau vertical d'une fontaine atteint une hauteur maximale $H = 25$ m. L'embouchure de la fontaine a un diamètre $d = 5$ cm et elle se trouve au niveau du sol. La pompe qui propulse l'eau est enterrée à une profondeur $h = 3$ m par rapport au niveau du sol (voir figure 2.). La canalisation qui alimente l'embouchure a un diamètre $D = 8$ cm.

Données: masse volumique $\rho = 10^3$ kg/m³; pression atmosphérique : $p_0 = 10^5$ Pa; accélération de pesanteur $g = 10$ m/s²

1) Calculer la vitesse v_1 en utilisant la formule suivante (à ne pas démontrer):

$$v^2 - v_1^2 = -2gH$$

avec, à la hauteur H , la vitesse du jet d'eau est nulle : $v=0$

2) Exprimer et calculer la vitesse v_2 . Comparer v_2 à v_1 . Commenter.

3) Exprimer la pression p_2 à la sortie de la pompe, en fonction de h , H et les autres paramètres du problème. Faire l'application numérique.

4) Calculer l'énergie mécanique totale par unité de volume à la sortie de la pompe

5) Calculer le rendement η de cette pompe, sachant qu'elle consomme 400 KJ d'énergie électrique par unité de volume (soit, par mètre cube d'eau). Commenter la valeur obtenue du point de vue efficacité énergétique de la pompe et proposer une alternative énergétique respectant l'environnement afin d'améliorer ce rendement.

Rappels :

- la puissance est une énergie par unité de temps ;
- le rendement η est égal au rapport entre la puissance utile et la puissance absorbée ;
- la puissance absorbée représente la puissance électrique qui entre dans le moteur de la pompe.

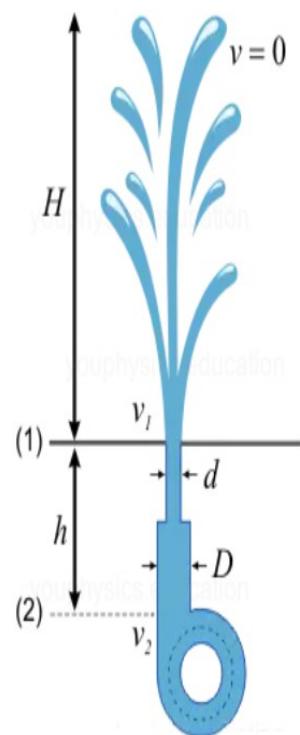


Figure 2.

Questions de cours (8 points)

- 1) Ecrire l'équation de la dérivée lagrangienne (ou particulière) et indiquer le nom des termes. Est-ce une équation scalaire ou vectorielle ?
- 2) Enoncer l'équation de conservation de la masse et une simplification possible (dans quel cas). Est-ce une équation scalaire ou vectorielle ?
- 3) Rappeler les définitions des lignes de courants et des équipotentielles (et hypothèses si présentes); expliciter leur relation par rapport à la vitesse.
- 4) Enoncer l'« équation RANS », la signification de chaque terme et dans quel cadre/hypothèses elle est dérivée. Est-ce une équation scalaire ou vectorielle ?
- 5) Calculer le rotationnel du gradient du scalaire T . Est-ce un scalaire ou un vecteur ?

Bonus : Quelle est la conséquence de ce résultat pour un écoulement irrotationnel ?