

Chapitre III - HYDROCINEMATIQUE

L'hydrocinématique est l'étude du mouvement d'un fluide en utilisant les notions de lignes de courant, de trajectoires et de champ de vitesse. Il consiste en la description du mouvement des particules en terme de déplacement, de vitesse et d'accélération (sans faire intervenir les forces).

1 Mouvement d'un fluide

Il existe deux méthodes principales pour mesurer la vitesse : la méthode lagrangienne et la méthode eulérienne.

1.1) Mesures lagrangiennes de vitesse

Cette méthode consiste à suivre une particule de fluide le long de sa trajectoire.

Joseph Louis, comte de Lagrange (en italien Giuseppe Lodovico de Lagrangia), né à Turin en 1736 et mort à Paris en 1813 (à 77 ans), est un mathématicien, mécanicien et astronome.

Son nom figure partout en mathématiques. On lui doit un cas particulier du théorème auquel on donnera son nom en théorie des groupes, un autre sur les fractions continues, l'équation différentielle de Lagrange. En physique, en précisant le principe de moindre action, avec le calcul des variations, vers 1756, il invente la fonction de Lagrange, qui vérifie les équations de Lagrange, puis développe la mécanique analytique, vers 1788. Il élabore le système métrique avec Lavoisier pendant la Révolution. Il est membre fondateur du Bureau des longitudes (1795) avec, entre autres, Laplace et Jean-Dominique Cassini (Cassini IV). Il participe à l'enseignement de mathématiques de l'École normale et est aussi le fondateur de l'Académie de Turin (1758). En mécanique des fluides, il introduit le concept de **potentiel de vitesse** en 1781, bien en avance sur son temps. Il démontre que le potentiel de vitesse existe pour tout écoulement de fluide réel, pour lequel la résultante des forces dérive d'un potentiel. Dans le même mémoire de 1781, il introduit, en plus, deux notions fondamentales: le concept de la **fondamentales: le concept de la fonction de courant**, pour un fluide incompressible, et le calcul de la célérité d'une petite onde dans un canal peu profond. Rétrospectivement, cet ouvrage marqua une étape décisive dans le développement de la mécanique des fluides moderne.

A l'instant t, la particule est située en x,y et z.

Les variables de Lagrange sont :

$$x = f_1(x_o, y_o, z_o, t)$$

$$y = f_2(x_o, y_o, z_o, t)$$

$$z = f_3(x_o, y_o, z_o, t)$$

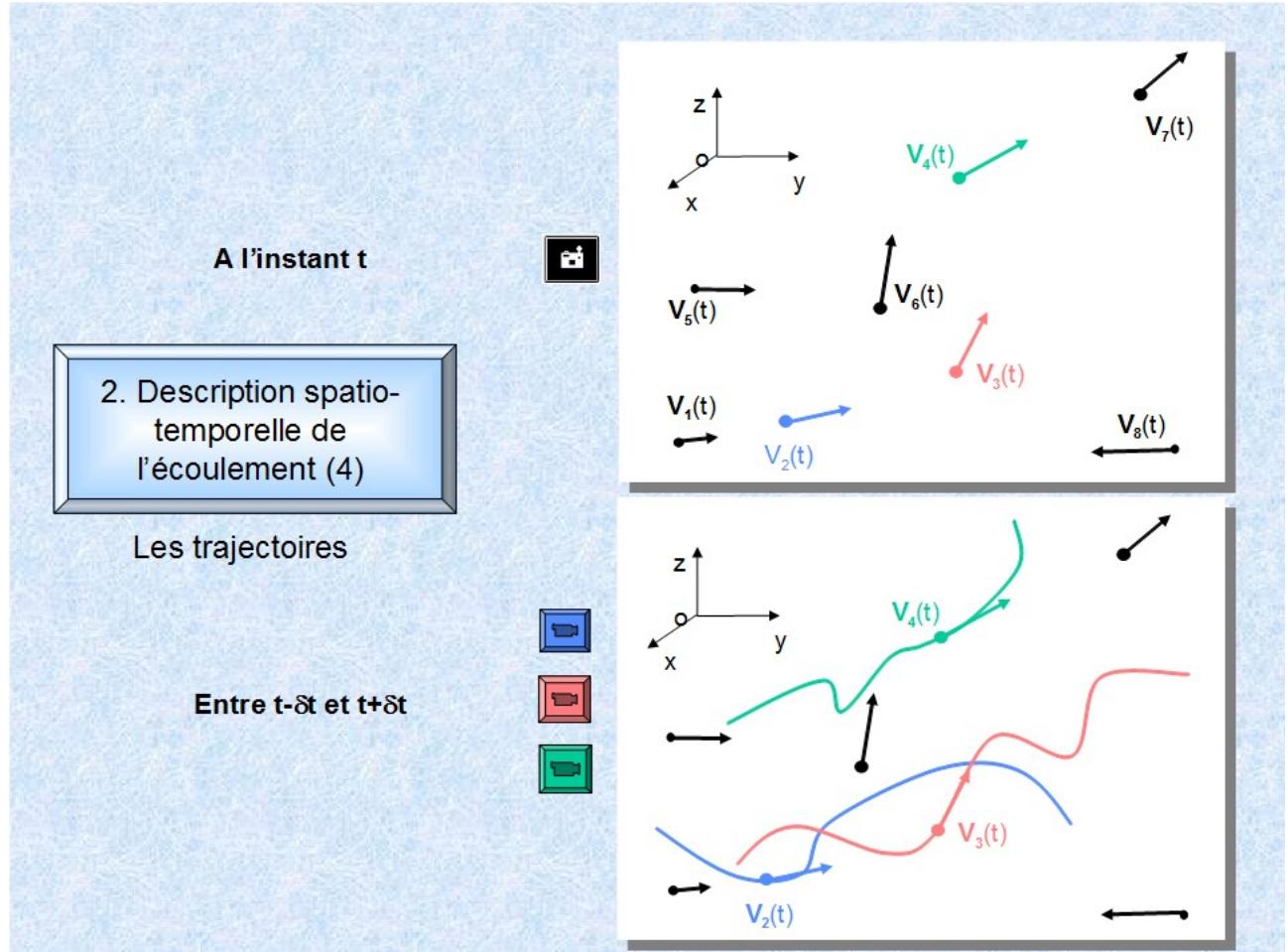
ou x_o, y_o , et z_o correspondent aux coordonnées initiales de la particule fluide à un instant t_o .

Les positions successives de cette particule fluide au cours du temps décrivent une courbe appelée trajectoire.

Les vitesses et accélérations au point P sont :

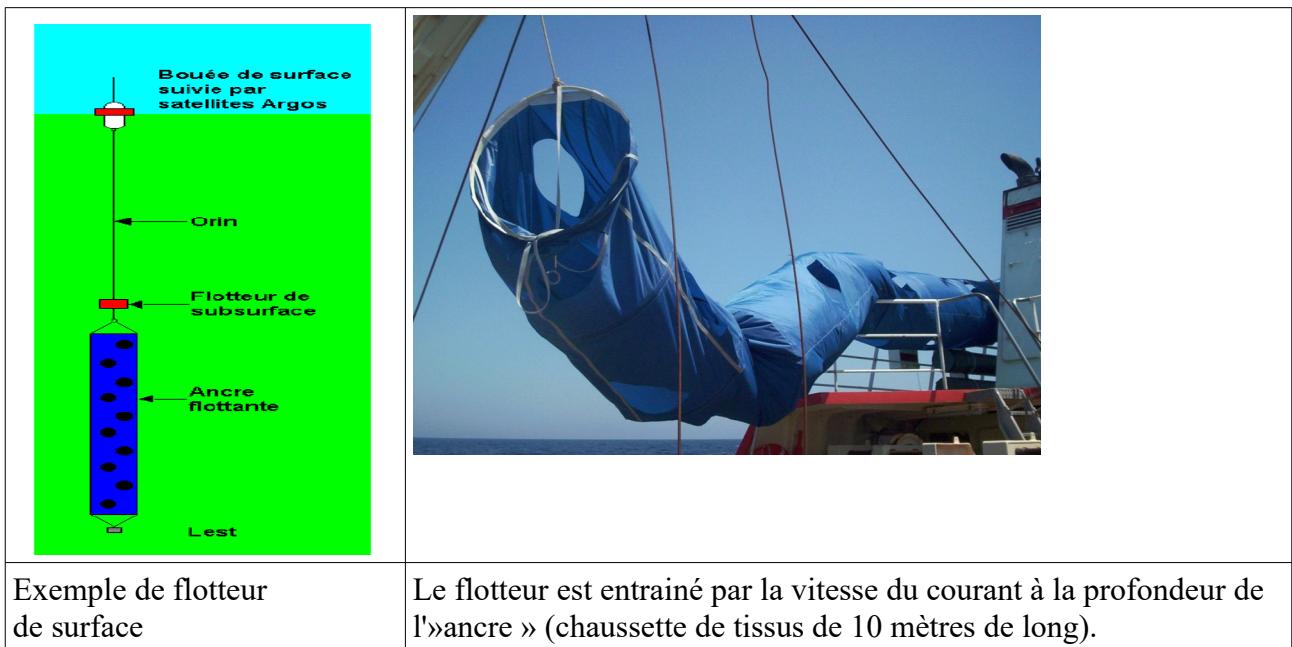
$$u = \frac{\partial x}{\partial t}; v = \frac{\partial y}{\partial t}; w = \frac{\partial z}{\partial t}$$

$$a_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}; a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}; a_z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

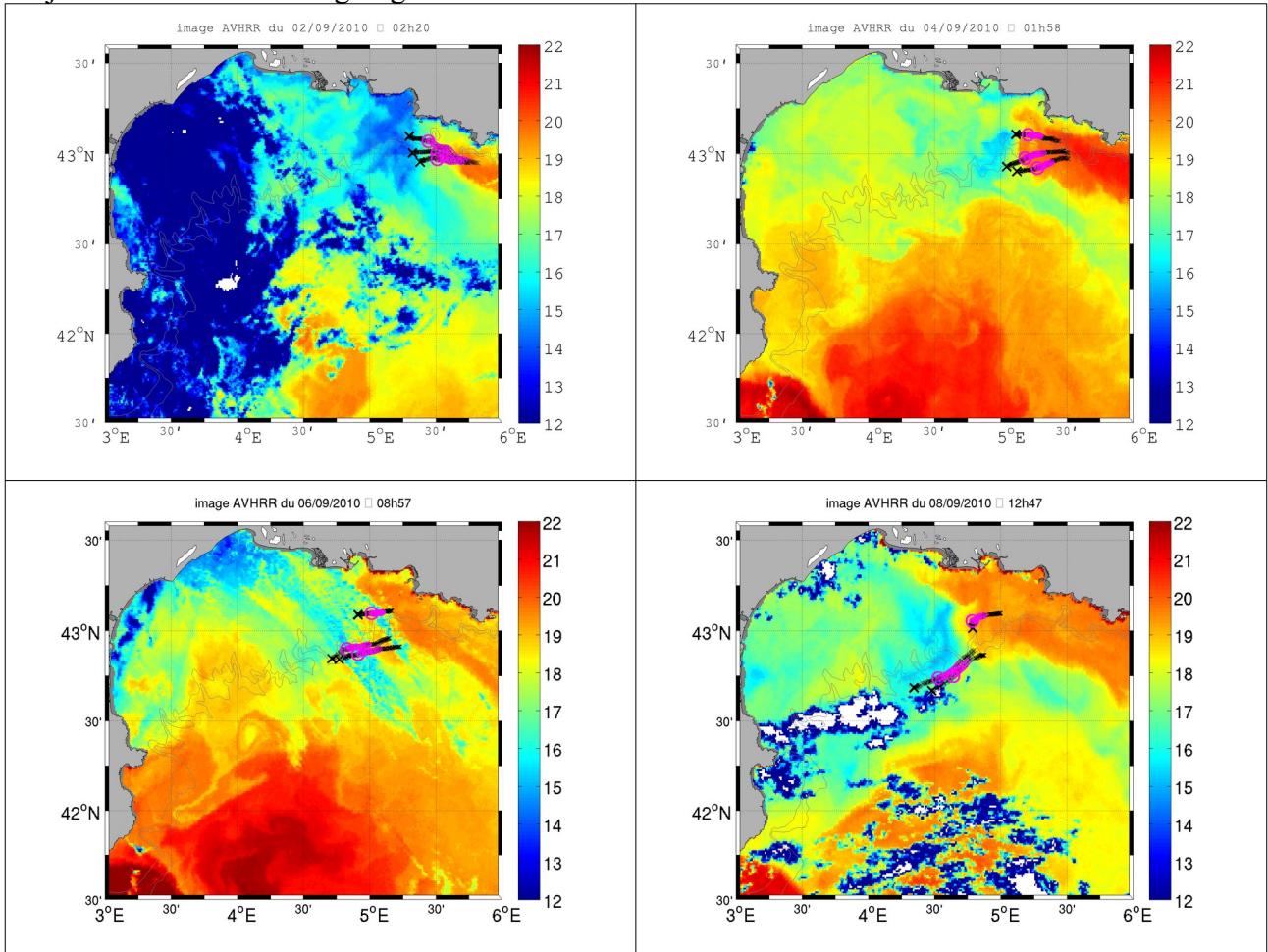


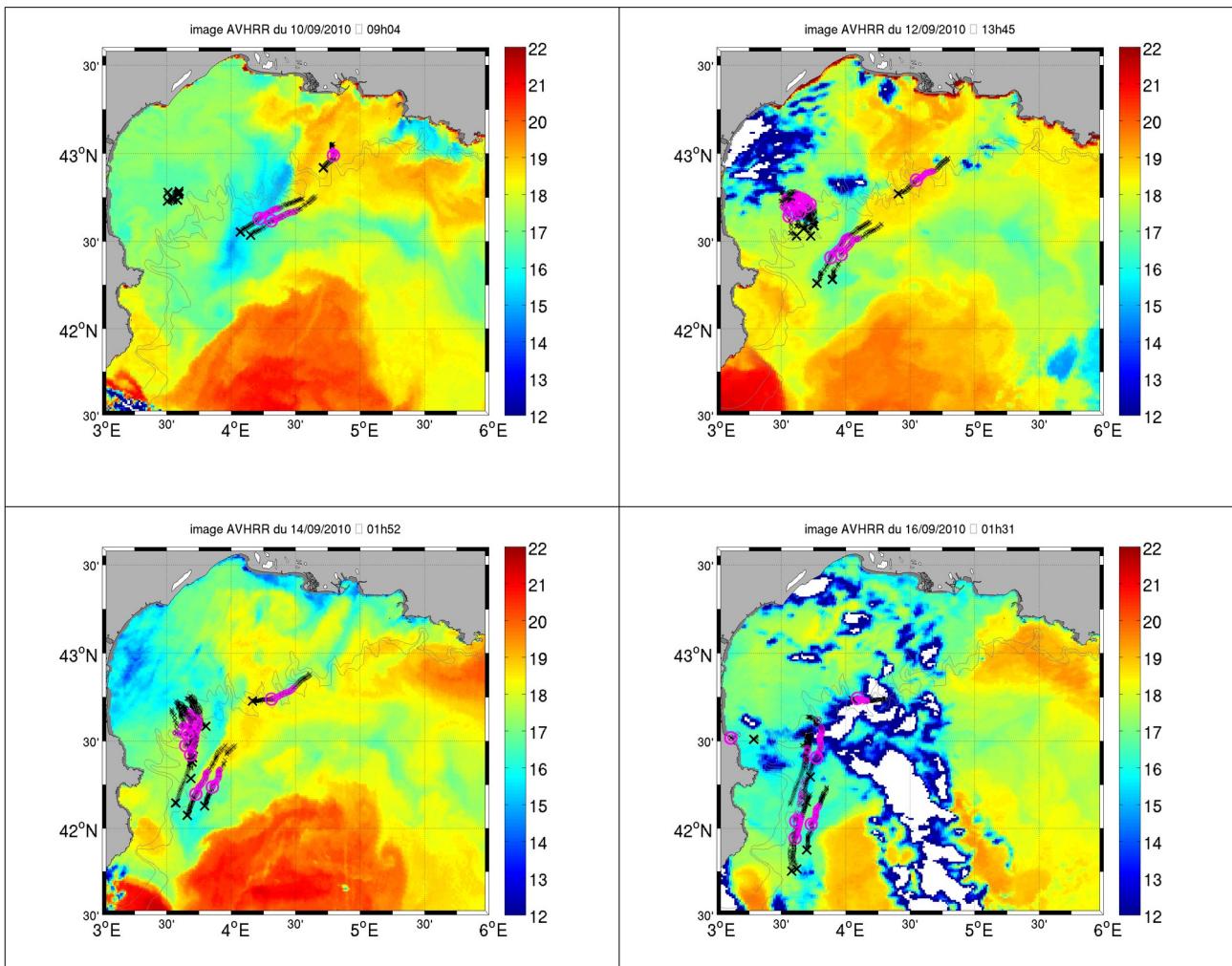
La méthode de Lagrange consiste à étudier chaque particule de fluide individuellement en suivant son mouvement.

Les applications sont nombreuses dans les études atmosphériques ou océanographiques.
Ex flotteurs lagrangiens



Trajectoires de flotteurs lagrangiens





Flotteurs lagrangiens durant LATEX (Lagrangian Transport Experiment ; Pis : A. Petrenko et F. Diaz) en Septembre 2010 ; images AVHRR tous les 2 jours du 2 au 16 septembre. La trajectoire des flotteurs est représentée pendant trois jours (AVHRR-1 en noir, AVHRR en magenta finissant par un cercle magenta plus gros; AVHRR + 1 en noir finissant par une croix noire plus grosse)

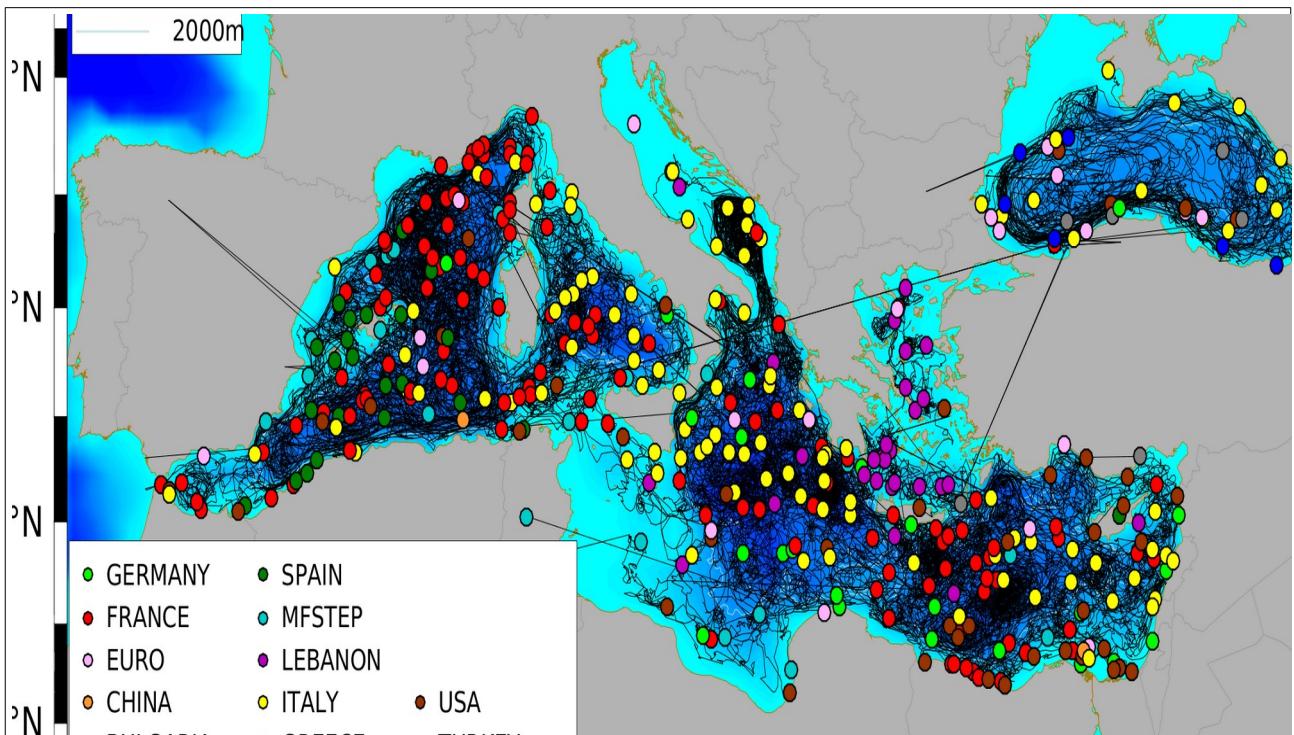


Fig ci-dessus - Toutes les trajectoires de flotteurs en Méditerranée et en Mer Noire disponibles dans la database MedArgo (<http://nettuno.ogs.trieste.it/sire/medargo/trajectories.php>)

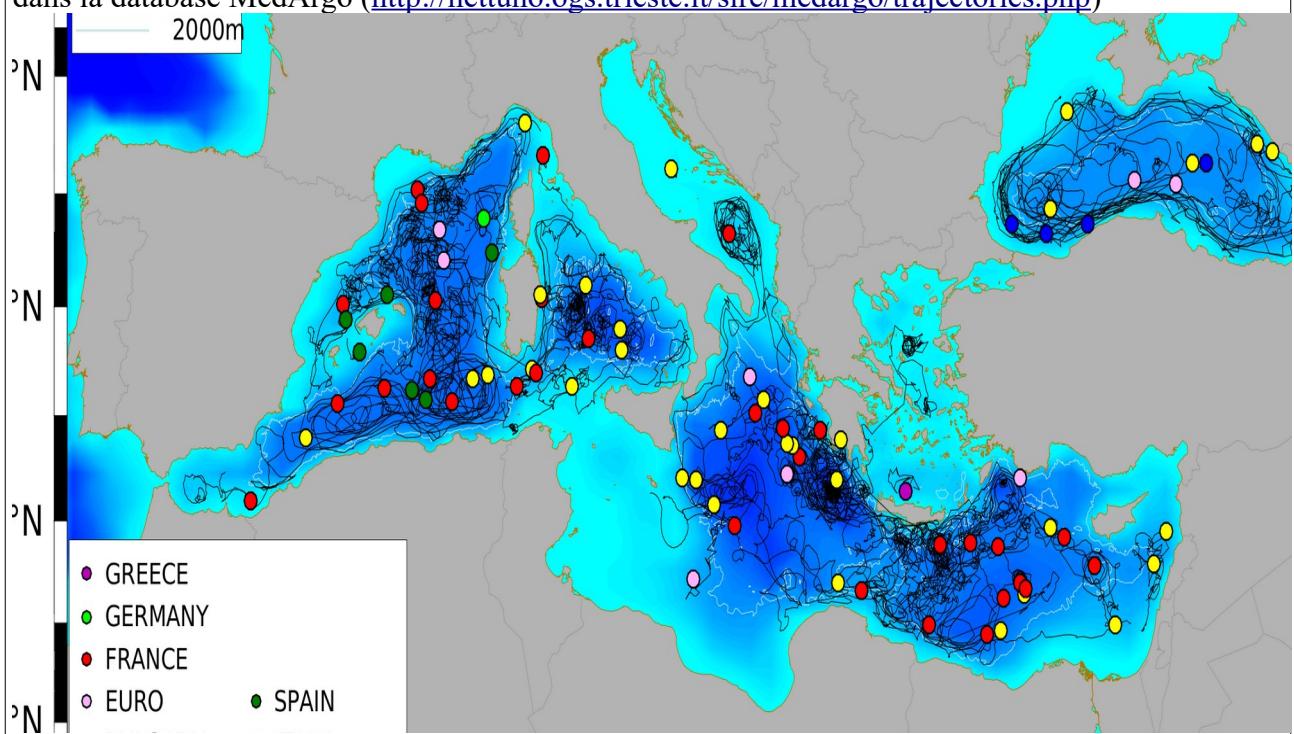


Fig b: Trajectoires entières des flotteurs actifs en ce jour (au-dessus)

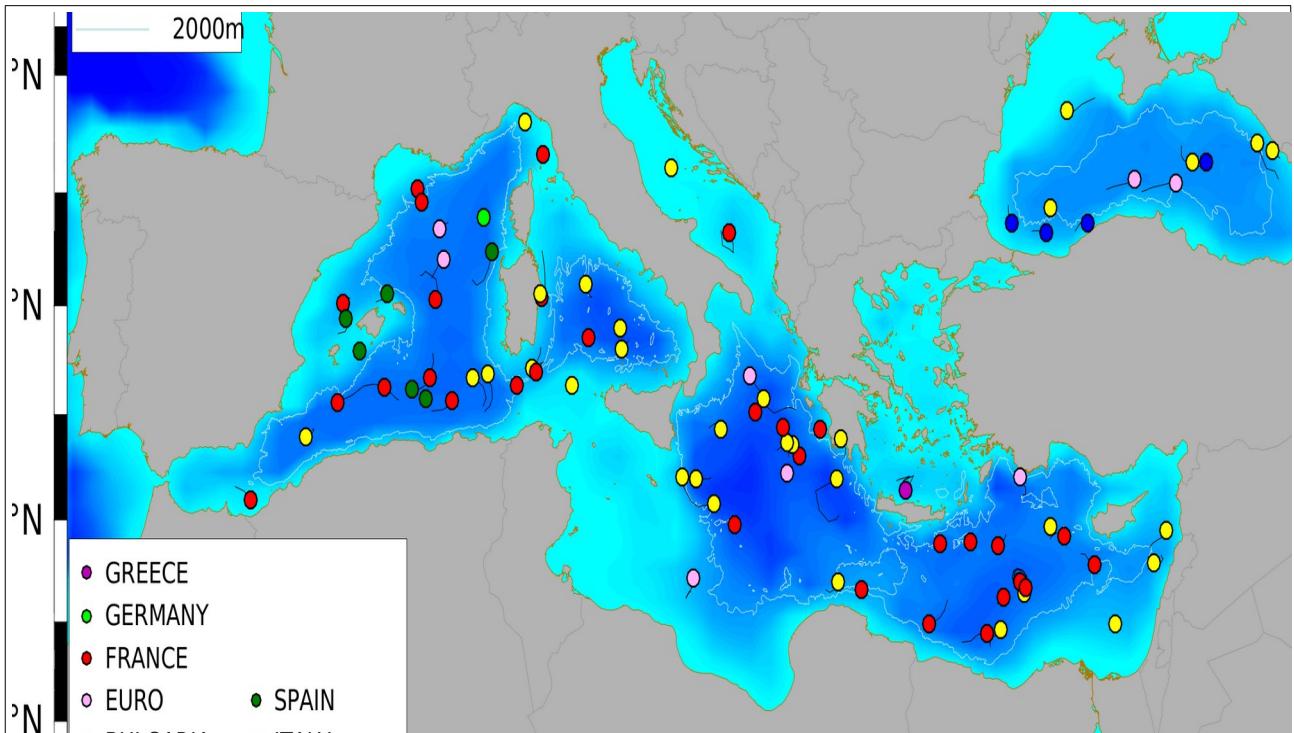


Fig c - Segments de trajectoire (le dernier mois) des flotteurs actifs en ce jour.

Vous pouvez aussi aller vérifier les trajectoires de flotteurs sur le site français Coriolis :
<http://www.coriolis.eu.org/Data-Products/Data-Delivery/Mediterranean-Data-selection>

1.2) Mesures eulériennes de vitesse

Cette méthode consiste à mesurer les courants en un point fixe dans l'espace. Elle est utilisée si on veut connaître les propriétés de l'écoulement en certains points déterminés.

Leonhard Paul Euler, né en 1707 à Bâle (Suisse) et mort à 76 ans en 1783 à Saint-Pétersbourg (Empire russe), est un mathématicien et physicien suisse.

Euler fit d'importantes découvertes dans des domaines aussi variés que le calcul infinitésimal et la théorie des graphes. Il introduisit également une grande partie de la terminologie et de la notation des mathématiques modernes, en particulier pour l'analyse mathématique, comme pour la notion d'une fonction mathématique. Il est également connu pour ses travaux en mécanique, en dynamique des fluides, en optique et en astronomie.

En un point fixe $M(x,y,z)$, la vitesse du fluide $\vec{V}(u, v, w)$ est mesurée.

Les variables d'Euler sont les suivantes :

$$u=g_1(x,y,z,t)$$

$$v=g_2(x,y,z,t)$$

$$w=g_3(x,y,z,t)$$

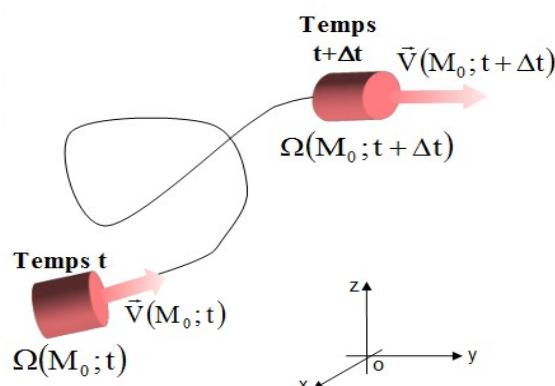
Attention, à chaque instant, on mesure la vitesse de particule de fluide différentes.

2. Description spatio-temporelle du fluide (2)

Comment repérer une « particule fluide »?

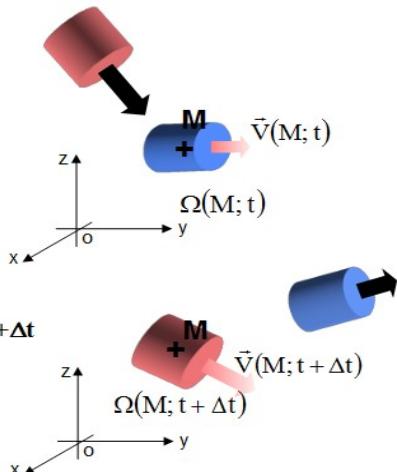
2 points de vue:

Lagrangien



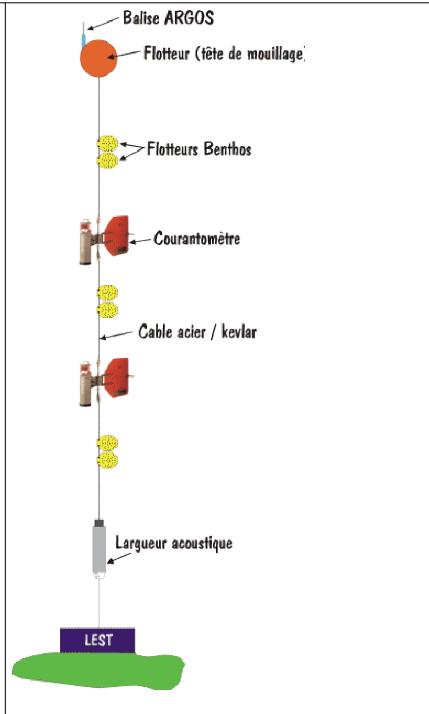
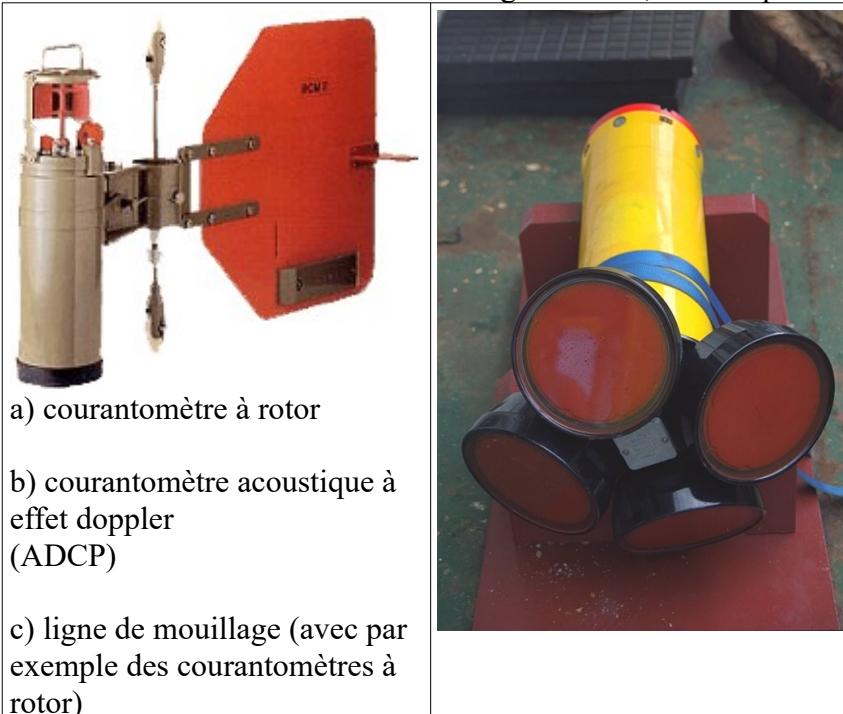
Gauche CAMERA

Eulérien



Droite : 2 INSTANTANES

Les applications consistent en des instruments en des lieux fixes : ex courantomètres fixés sur un mouillage de fond ; sur une plateforme.



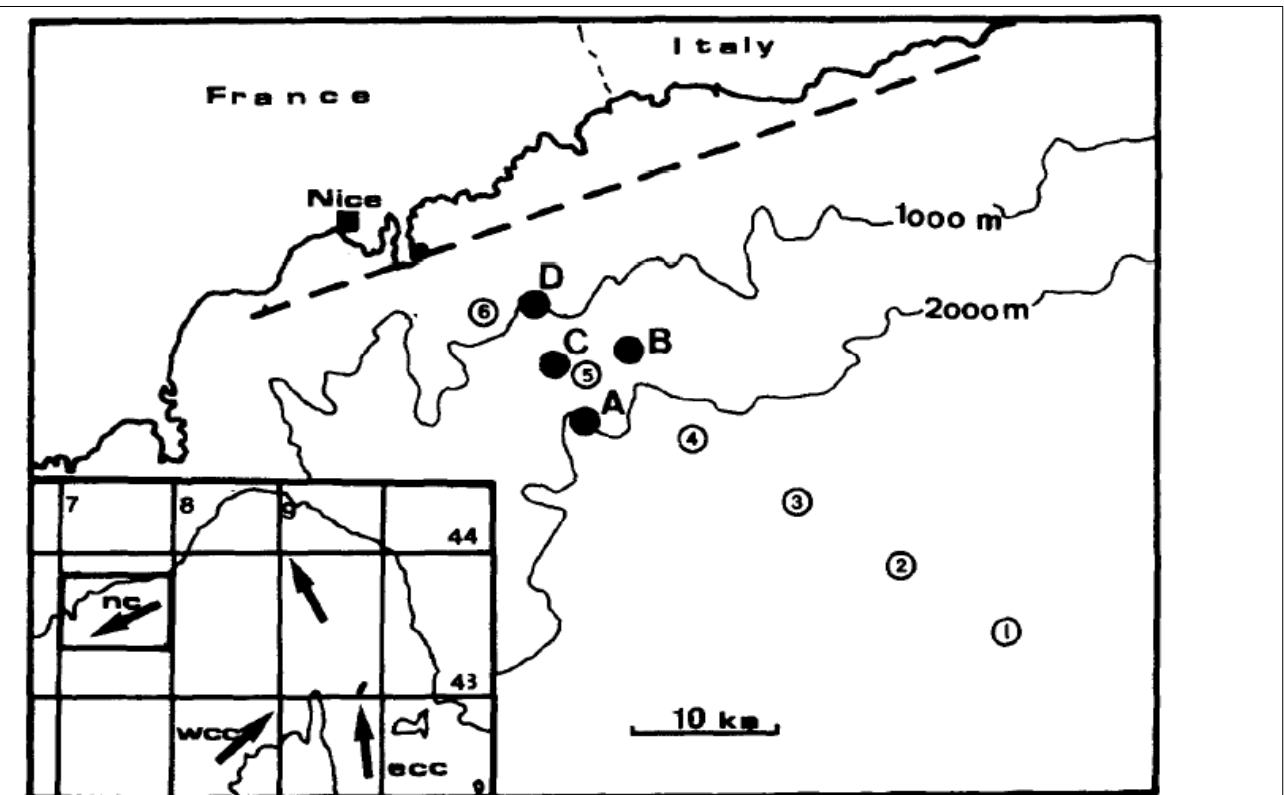


Fig. 1. Locations of the PROLIG-2 moorings (●) and PROS-6 hydrological stations (○). The dashed line represents the effective coastline. The inset shows the Western and Eastern Corsican Currents (wcc, ecc) flowing on both sides of Corsica and then around the Ligurian Sea as the Northern Current (nc).

Extrait de :

C. Sammari, C. Millot, L. Prieur, « Aspects of the seasonal and mesoscale variabilities of the Northern Current in the western Mediterranean Sea inferred from the PROLIG-2 and PROS-6 experiments Original », Deep Sea Research Part I: Oceanographic Research Papers, Volume 42, Issue 6, June 1995, Pages 893-917

Exemples de séries temporelles de mesures de courants horizontaux

Note sur la figure 2 (ci-après) - la graduation des 2 graphes supérieurs est de 10 cm/s, celle de A à 250 m est de 5 cm/s ; celle des 4 graphes inférieurs est de 7,5 cm/s. Les courants sont mesurés à travers le Courant Nord Méditerranéen (Voir Figure 1).

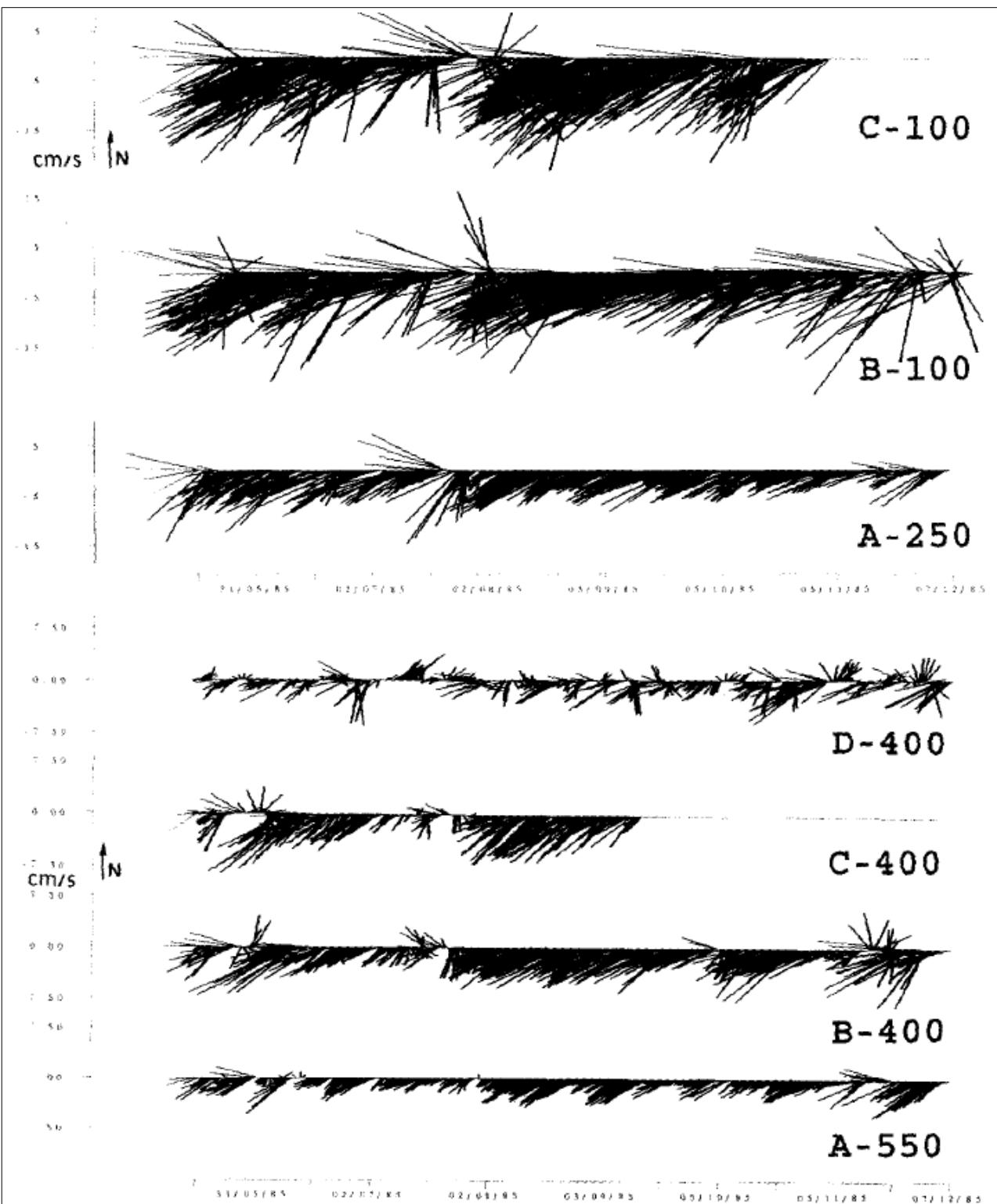


Fig. 2. Daily currents at the (a) upper, (b) intermediate and (c) lower levels of moorings A-D. The sticks are plotted in an order corresponding to their location from the coastline and with north upwards.

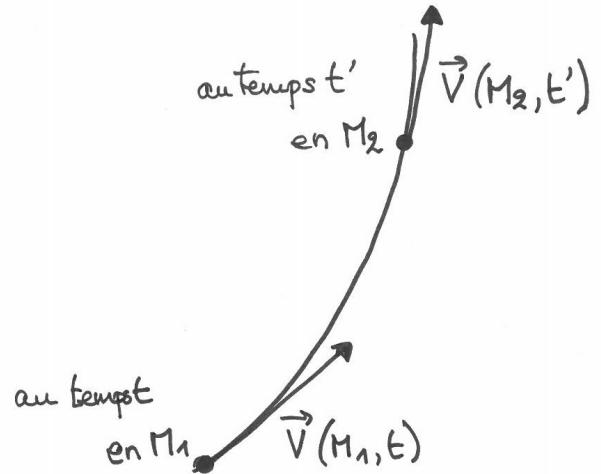
1.3) Accélération d'une particule de fluide

Une particule P est située en $M_1(x_1, y_1, z_1, t)$ au temps t et en $M_2(x_2, y_2, z_2, t')$ au temps $t' = t + \delta t$

Cette particule a pour vitesse
 $u = h_1(x(t), y(t), z(t), t)$

$$v = h_2(x(t), y(t), z(t), t)$$

$$w = h_3(x(t), y(t), z(t), t)$$



L'accélération selon x est égale à :

$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}(h_1(x(t), y(t), z(t), t))$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial h_1}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial h_1}{\partial t} \frac{dt}{dt}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial h_1}{\partial x} u + \frac{\partial h_1}{\partial y} v + \frac{\partial h_1}{\partial z} w + \frac{\partial h_1}{\partial t}$$

$$\frac{du}{dt} = (u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}) h_1 = (u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}) u$$

c'est la même chose selon y et z ; du coup l'accélération totale s'écrit :

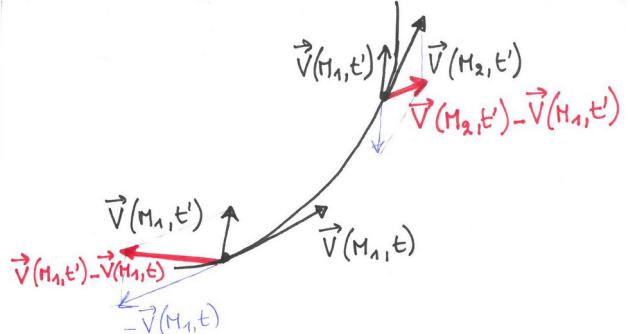
$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} \quad \text{Ou} \quad \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \quad (\text{nabla} = \text{opérateur gradient})$$

Cette dérivée est la dérivée particulaire, appelée aussi dérivée lagrangienne ; c'est la dérivée en suivant la particule dans son mouvement par rapport à un repère fixe.

A chaque instant on peut dessiner en chaque point de l'espace le vecteur vitesse correspondant, on obtient le champ de vitesse à cet instant.

Le premier terme du membre de droite est l'accélération locale $\vec{V}(M_1, t') - \vec{V}(M_1, t)$

Le deuxième terme est l'accélération advective $\vec{V}(M_2, t') - \vec{V}(M_1, t')$.



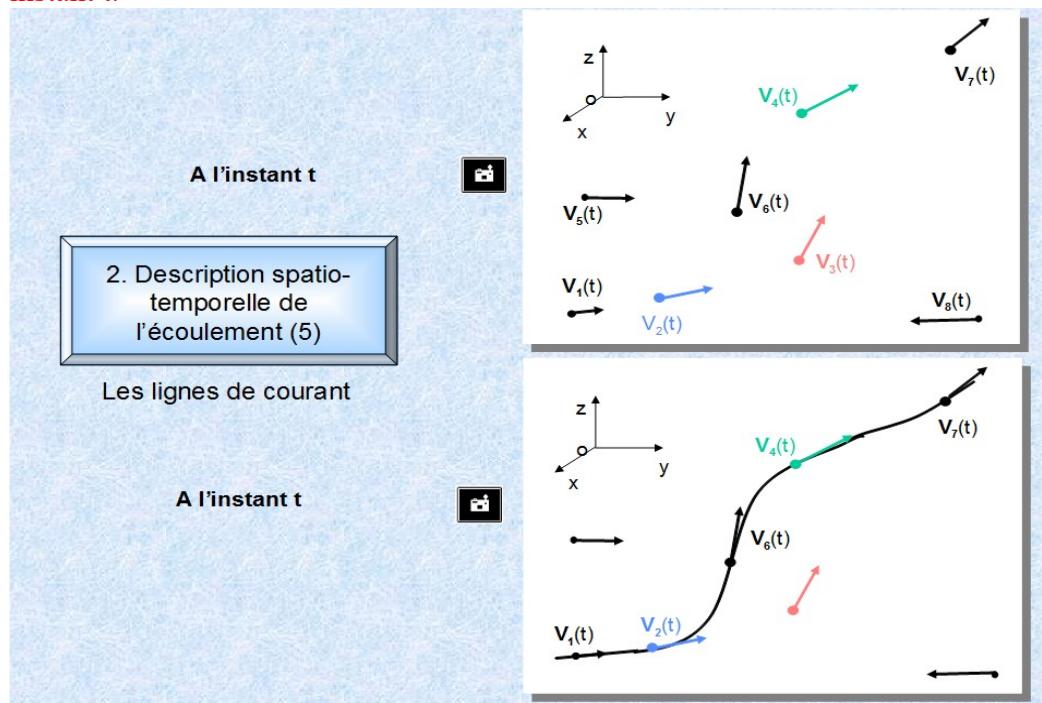
La même formule de dérivée particulière est valable pour des grandeurs scalaires.

Par exemple, la dérivée particulière de la température T est donnée par :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) T$$

1.4) Lignes de courant

Une ligne de courant est une ligne tangente en chacun de ses points au vecteur vitesse du point à un instant t.



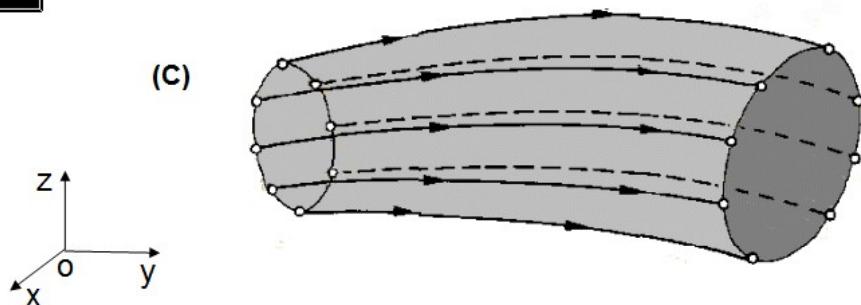
Note : la ligne de courant ne correspond pas forcément au trajet d'une particule de fluide. Elle lie différentes particules dont elle est tangente aux vitesses.

- Les lignes de courant changent de t à t'
- Si l'écoulement est permanent, ces lignes ne varient pas et coïncident avec les trajectoires

- les lignes de courant satisfont aux équations différentielles :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

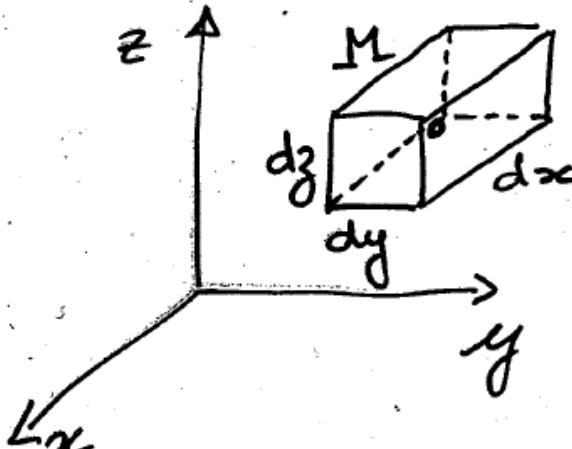
- un volume de fluide limité par des lignes de courant qui s'appuient sur une courbe fermée est un tube de courant (voir figure ci-dessous)



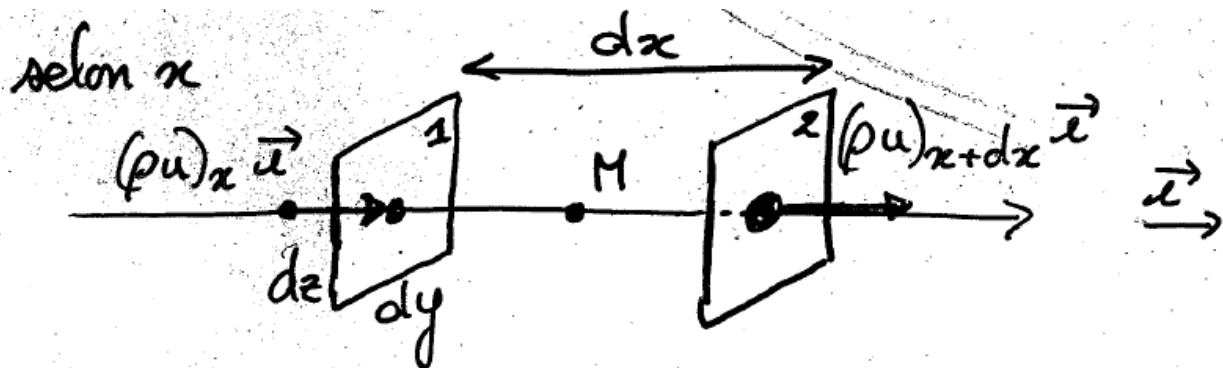
2) Equation de continuité

Une équation fondamentale en mécanique des fluides est le principe de la conservation de la masse. Elle indique que, au cours d'un écoulement conservatif, la masse se conserve.

2.1) Equation

	<p>Soit le parallélépipède centré en M de volume $dV = dx dy dz$</p> <p>Au temps t, la masse contenue dans ce volume est :</p> $M_t = \rho_t dx dy dz$ <p>La masse au temps $t' = t + dt$ est :</p> $M_{t'} = \rho_{(t+dt)} dx dy dz$ <p>la variation de masse pendant dt est :</p> $M_{t'} - M_t = (\rho_{(t+dt)} - \rho_{(t)}) dx dy dz$ $M_{t'} - M_t = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt$
---	--

Mais il faut aussi prendre en compte le **flux entrant (sortant) de masse dans le volume**. En se concentrant d'abord aux échanges selon l'axe x :



la masse algébrique entrant par la face 1 pendant dt est :

$$M_{1x} = (\rho u)_x dy dz dt \quad \text{unité kg*m-3*m*s-1*m2*s = kg}$$

la masse algébrique sortant par la face 2 pendant dt est :

$$M_{2x} = (\rho u)_{(x+dx)} dy dz dt$$

Pendant dt, l'« excès de masse sortante » (algébrique) est :

$$(M_2 - M_1)_x = ((\rho u)_{(x+dx)} - (\rho u)_x) dy dz dt$$

$$(M_2 - M_1)_x = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz dt$$

C'est la même chose selon y et z; donc l'excès de masse total est :

$$M_2 - M_1 = \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) dx dy dz dt$$

$$M_2 - M_1 = \text{divergence}(\rho \vec{V}) dx dy dz dt = \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) dx dy dz dt$$

La variation de la masse prend en compte les deux termes précédents: Mt' – Mt et M₂ -M₁ ce qui donne le résultat global de :

$$\text{variation de masse} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) \right) dx dy dz dt$$

Dans un écoulement conservatif (sans source ni puits), l'équation de conservation de la masse est :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

Notes : * On peut aussi l'écrire avec les formules précédentes :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{(M_2 - M_1)}{dx dy dz dt} = 0$$

si $(M_2 - M_1) > 0$ l'excès de flux est sortant donc on a forcément $\partial \rho < 0$

* exercice : démontrez que $\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = \rho \vec{\nabla} \cdot (\vec{V}) + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \rho$

* Si il existe une source ou un puits dans l'écoulement et que celui-ci n'est plus conservatif, alors l'équation devient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = \rho q_s$$

avec q_s débit de masse par unité de volume (cas d'une source si q_s est positif, d'un puits si q_s est négatif).

Quelle est l'unité de q_s ? 1^{er} terme à gauche kg.m-3.s-1 ; 2e terme à gauche m-1.kg.m-3.m.s-1=kg.m-3.s-1 ; donc à droite : q_s est en s-1

2.2) Autre écriture et cas particuliers

L'équation de conservation de la masse peut aussi s'écrire :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$$

en changeant l'ordre des termes :

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \left(\rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \rho \right) + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$$

L'équation de conservation de la masse peut aussi s'écrire :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$$

Attention à ne pas mélanger les deux écritures !!!

cas particuliers :

- Pour un écoulement conservatif permanent, alors l'équation devient :

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad \text{car} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

- Pour un écoulement conservatif d'un fluide incompressible, l'équation devient :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad \text{car} \quad \frac{D\rho}{Dt} = 0$$

La divergence de la vitesse est nulle.

Supplément : **Théorème de flux-divergence**, appelé aussi **Théorème de Gauss-Ostrogradski** (ou **Ostrogradsky**) ce théorème affirme l'égalité entre l'intégrale de la divergence d'un champ vectoriel sur un volume dans R^3 et le flux de ce champ à travers la frontière du volume (qui est une intégrale de surface).

Note historique

Le théorème a été découvert pour la première fois par Lagrange en 1762, puis redécouvert de façon indépendante par Gauss en 1813, puis par Siméon-Denis Poisson en 1824 et par Ostrogradski, qui a également donné la première preuve du théorème général, en 1826. Il a été encore découvert par Green en 1828, et indépendamment par Frédéric Sarrus toujours en 1828.

Note : Gauss (allemand 1777-1855) – Thm lié à l'électromagnétisme

Ostrogradski (russe-ukrainien 1801-1862)

Green (GB 1793-1841) a publié un THM proche dans son Essai sur l'application de l'analyse mathématique aux théories de l'électricité et du magnétisme paru en 1828.

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{v} dV = \oint_S (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS$$

V volume
 S surface fermée
 \vec{n} unitaire extérieur
 valable pour tout vecteur (\vec{v} : vitesse, ou autre)

Le théorème peut aussi être appliqué de manière équivalente à un scalaire :

$$\iiint_V \frac{\partial q}{\partial x_i} dV = \oint_S q n_i dS \quad (3 \text{ équations})$$

$\vec{v} \cdot \vec{n}$ est la composante de la vitesse qui est orthogonale à la surface du volume

Selon son signe, la divergence exprime la dispersion ou la concentration d'une grandeur (telle une masse par exemple) et le théorème précédent indique qu'une dispersion au sein d'un volume s'accompagne nécessairement d'un flux total équivalent sortant de sa frontière (ou au contraire, concentration implique flux entrant).

Le débit total Q traversant une surface a pour définition :

$$\oint_S (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = Q$$

unité ? $m \cdot s^{-1} \cdot m^2 = m^3 \cdot s^{-1}$

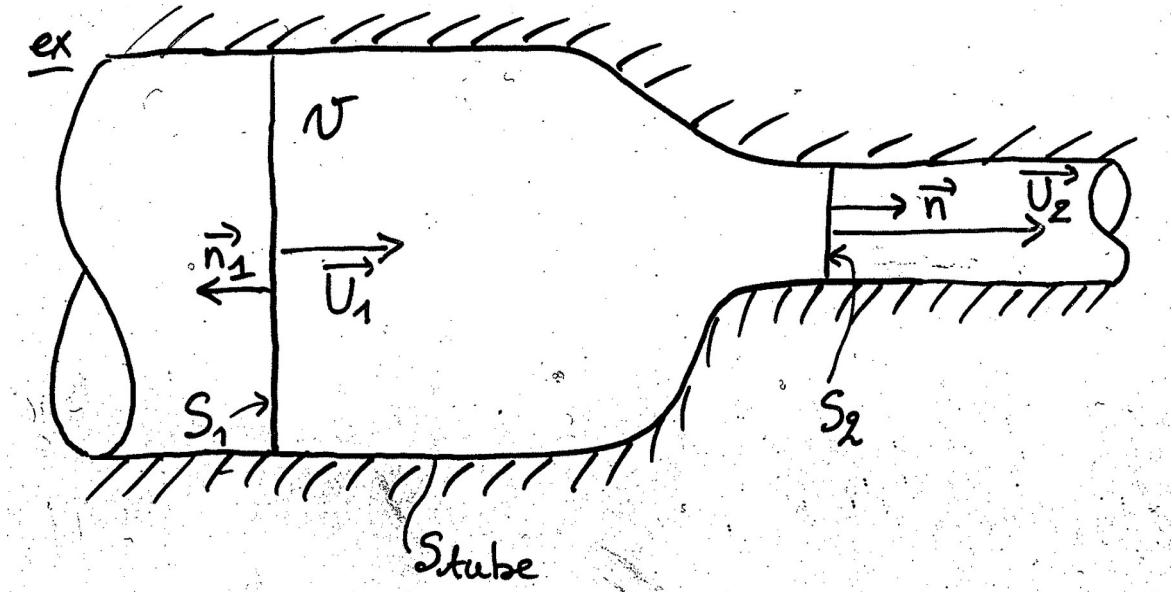
* Si le fluide est incompressible, l'équation de continuité d'un écoulement conservatif se réduit à :
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$

Le théorème de Gauss-Ostrogradski nous indique donc que :

$$\iiint_V \text{div } \vec{V} \, dV = \oint_S (\vec{V} \cdot \vec{n}) \, dS = 0$$

Le débit total à travers toute surface fermée S est nul.

Exemple : Etude de l'écoulement d'un fluide incompressible dans un tuyau de section variable



Si l'on considère un volume enclos dans une surface fermée S ($S = S_1 \cup S_2 \cup S_{tube}$), alors :

$$\oint_S (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = 0 \quad (S = S_1 \cup S_2 \cup S_{\text{tube}})$$

$$\int_{S_1} (\vec{V} \cdot \vec{n}_1) dS + \underbrace{\int_{\text{Tube}} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS}_{=0} + \int_{S_2} (\vec{V} \cdot \vec{n}_2) dS = 0$$

$$-U_1 S_1 + 0 + U_2 S_2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{U_1 S_1 = U_2 S_2}$$

En débit, cela peut s'écrire :

$$Q_{\text{total}} = \oint_S (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = 0$$

$$= -Q_1 + Q_2 = 0 \quad \text{avec } Q_1 = U_1 S_1$$

$$Q_2 = U_2 S_2$$

$$\Rightarrow \boxed{Q_1 = Q_2}$$

3) Fonction de courant

Pour un écoulement plan (i.e., bidimensionnel, par exemple dans le plan xy), avec l'hypothèse que le fluide est **incompressible**, l'équation de continuité se réduit :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

il existe une fonction $\psi = \psi(x, y)$ telle que :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$\psi = \psi(x, y)$ est appelée fonction de courant.

Note : On sait que pour tout vecteur \vec{A} , on a :

$$\text{divergence du rotationnel de } \vec{A} = \nabla \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{A}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

Comme $\nabla \cdot \vec{V} = 0$, on pose le vecteur $\vec{\Psi} = (0, 0, \psi)$
et $\vec{V} = \vec{\omega} \cdot \vec{\Psi} = \nabla \times \vec{\Psi}$

Vérifiez que vous obtenez les formules de la fonction de courant données ci-dessus.

Propriétés des fonctions de courant :

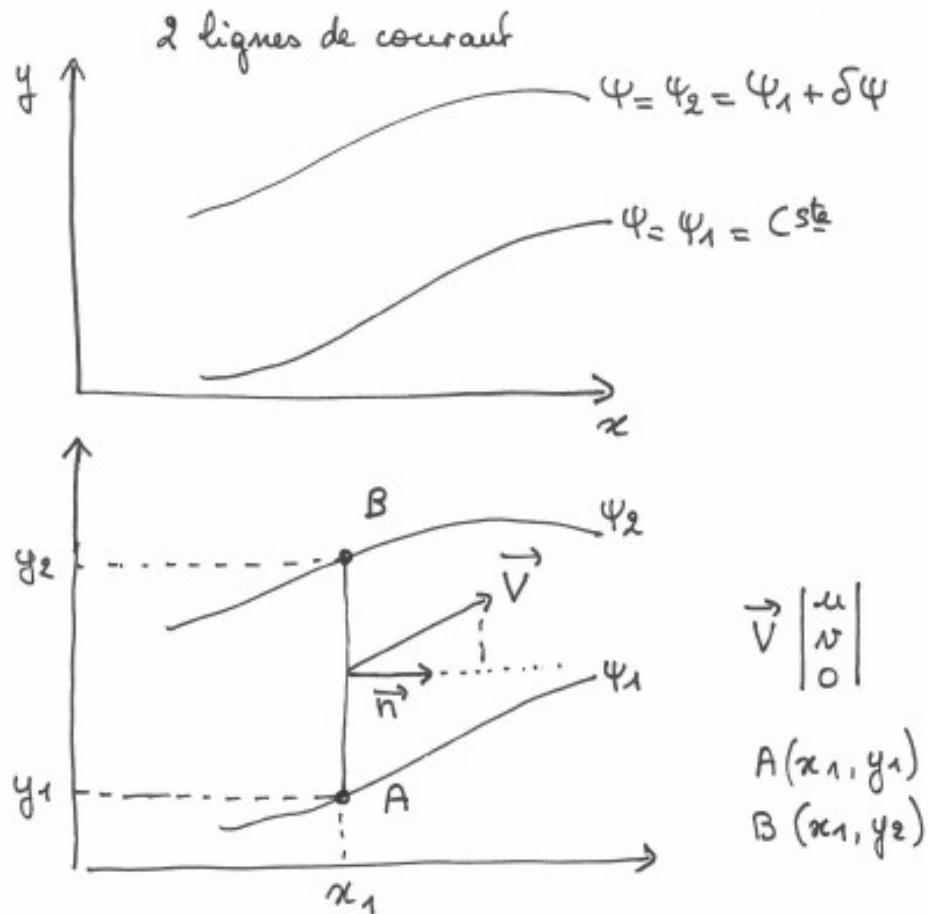
- les lignes $\psi = C^{\text{ste}}$ coïncident avec les lignes de courant

rappel les lignes de courant sont telles que : $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$ donc $-v dx + u dy = 0$

En remplaçant u et v dans cette formule par l'expression en fonction de ψ , on obtient :

$$-v dx + u dy = -\left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) dy = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) dy = d\psi = 0$$

* le long d'une ligne de courant $\psi = C^{\text{ste}}$



Soit Q le débit entre ces deux lignes de courant

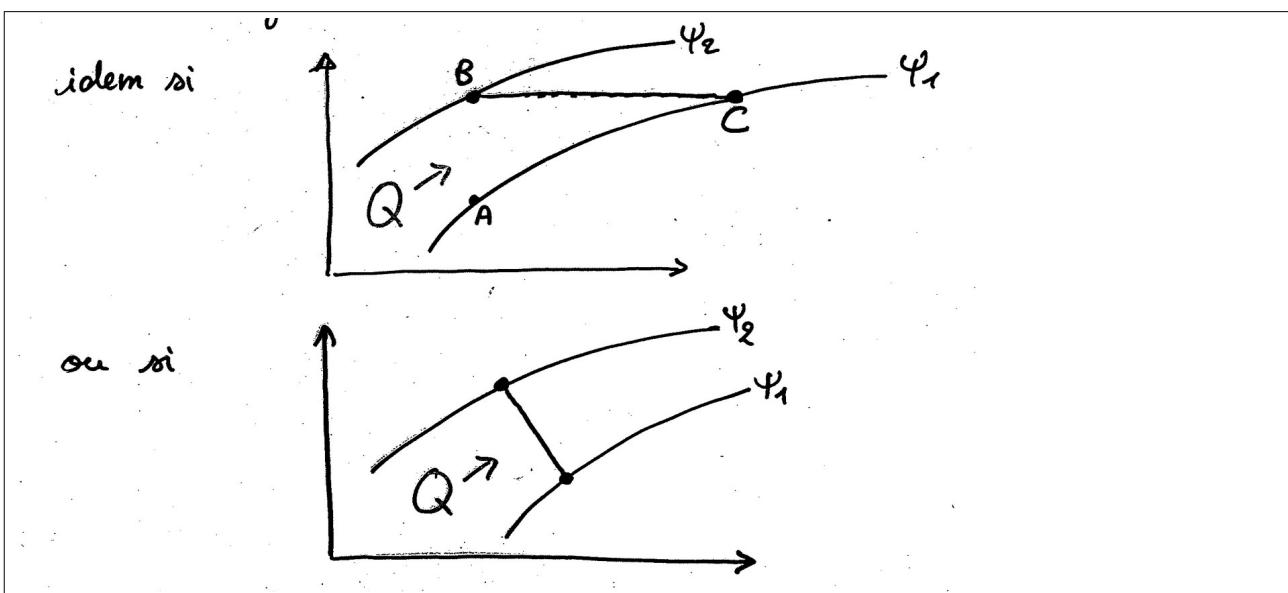
ex $S = AB \times 1$ l'exercice est effectué sur une épaisseur unitaire ($dz=1$)

$$Q = \iint_S (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = \int_{y_1}^{y_2} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dy \times 1$$

$$Q = \int_{y_1}^{y_2} u dy = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy$$

$$\text{or à travers } AB, x = \text{cste} \Rightarrow d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy$$

$$Q = \int_{y_1}^{y_2} d\Psi = \Psi_2 - \Psi_1 = \delta\Psi$$



$$\delta\Psi = \Psi_2 - \Psi_1 = Q \quad \text{Débit (ou flux) entre les deux lignes de courant unité m}^3/\text{s}$$

En océanographie, le Sverdrup, nommé en l'honneur du pionnier océanographique Harald Sverdrup (Norvège 1888-1955), est une unité de mesure du transport de volume, utilisée pour mesurer les débits des courants océaniques. Il est équivalent à $10^6 \text{ m}^3/\text{s}$.

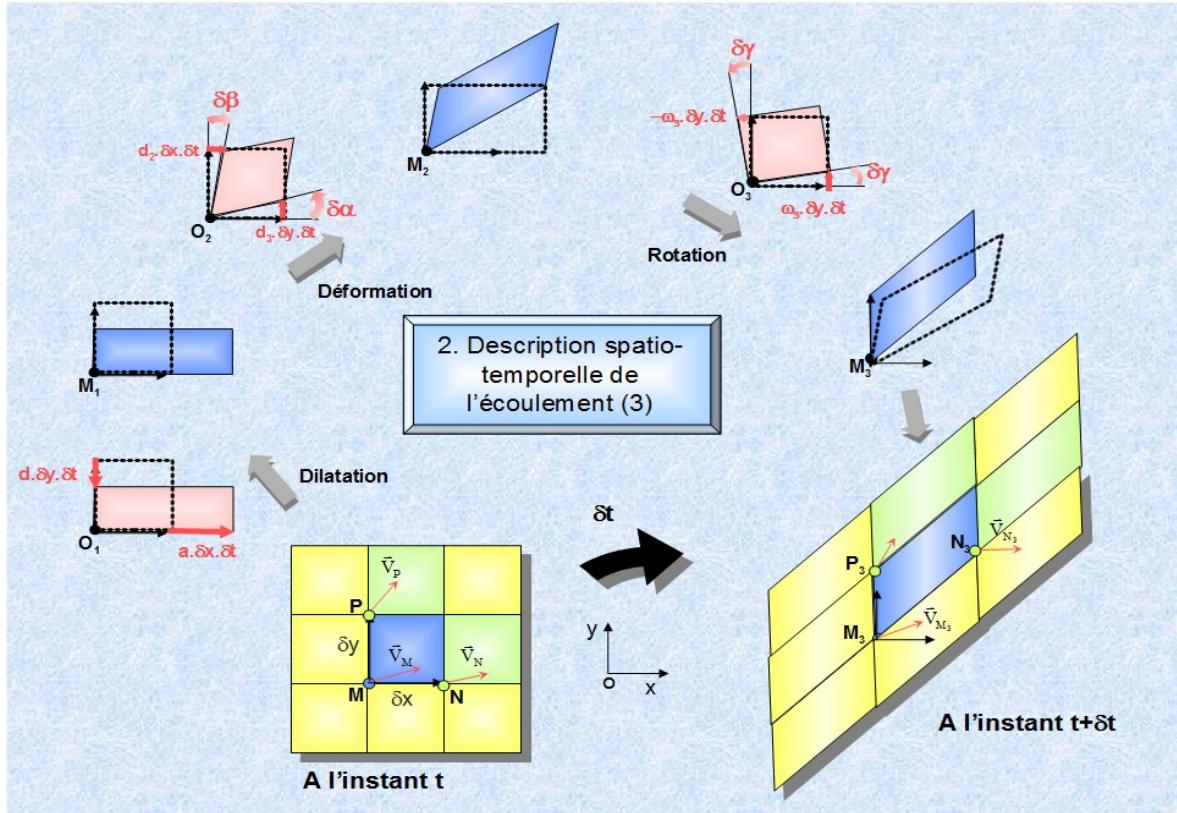
Exemples

Le Gulf Stream transporte environ 30 Sv le long des côtes de Floride, et atteint 100 Sv vers 60°W, alors que les courants passant le détroit de Behring ou le détroit de Gibraltar ne sont que de 1 Sv. Le courant circumpolaire antarctique transporte en moyenne 130 Sv lorsqu'il traverse le passage de Drake au sud de la Terre de Feu (Jean-François Minster, *La machine-océan*, 1997).

EXO : Le Courant Nord a un flux de 1 Sv en moyenne. En été, si on considère que ce courant fait 30km de large, 100 m de profondeur, quelle est sa vitesse moyenne ?

4) Ecoulement irrotationnel

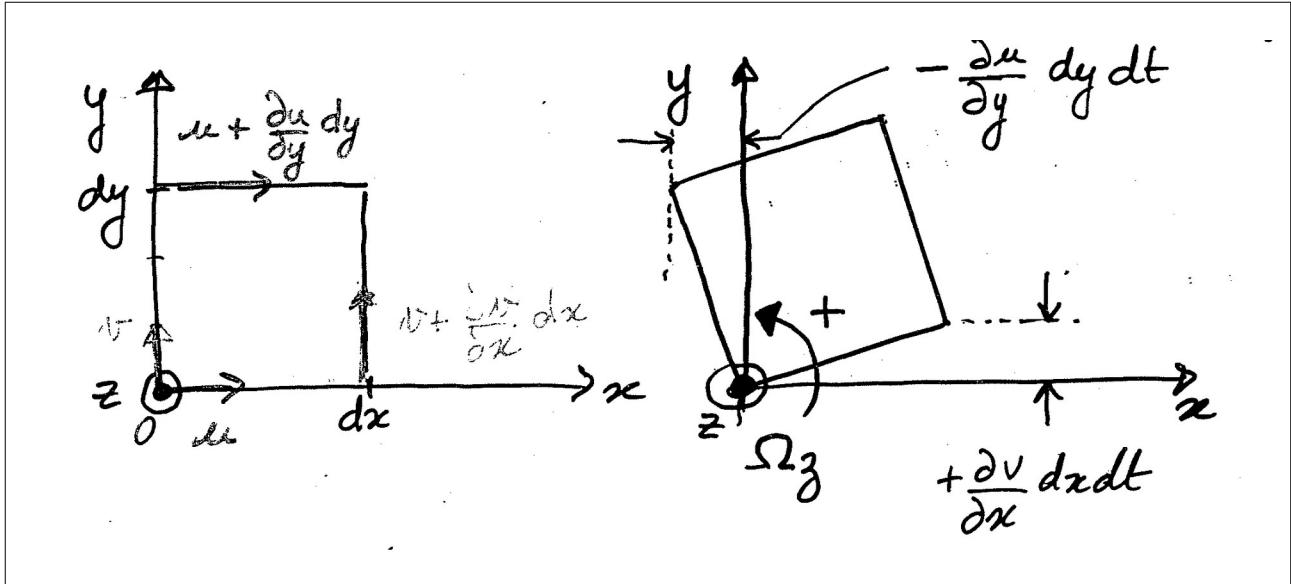
La description spatio-temporelle d'un écoulement plan est :



4.1) Rotation

Le cas simplifié d'un écoulement bidimensionnel dans le plan xy est traité.
On isole un élément fluide de section $dx dy$, qui subit une rotation pendant un temps dt .

Le taux de rotation de cet élément fluide, $\frac{d\theta}{dt}$, autour d'un axe passant par z, en considérant comme positif le sens des aiguilles d'une montre, peut être exprimé en fonction des vitesses, u et v , et en fonction des variations des vitesses $\frac{\partial u}{\partial y} dy$ et $\frac{\partial v}{\partial x} dx$.



La rotation de la face dx est :

$$\frac{(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx - v) dt}{dx dt} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

La rotation de la face dy est :

$$\frac{-(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy - u) dt}{dy dt} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Le taux net de rotation Ω_z de cet élément fluide, $dxdydz$, autour de l'axe z représente la moyenne de rotation des faces dx et dy ; on le définit alors ainsi :

$$\Omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Si l'écoulement est 3D, le même raisonnement peut être fait pour chaque face du parallélépipède ($dxdydz$) :

$$\Omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad \text{et} \quad \Omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

Le vecteur $\vec{\Omega}$ est appelé vecteur rotation.

Le vecteur tourbillon, lui, est défini comme le rotationnel du champ de vitesse du fluide $\vec{\nabla} \times \vec{V}$.

Le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ est égal à la moitié du vecteur tourbillon $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \times \vec{V})$

4.12) Ecoulement irrotationnel

* Si $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \vec{0}$ en tout point, l'écoulement est irrotationnel.

* Si l'écoulement est plan (dans le plan xy), alors $w=0$ et $\frac{\partial}{\partial z}=0$

$$\Omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0$$

$$\Omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0$$

$$\Omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Pour que l'écoulement soit irrotationnel, il faut et il suffit que cette troisième composante soit aussi nulle.

Un écoulement plan tel que $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$ en tout point est irrotationnel.

5) Potentiel de vitesses

Dans un écoulement irrotationnel, il existe une fonction φ , appelée potentiel des vitesses telle que $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi = \vec{\nabla} \varphi$

$$\text{Soit : } u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} ; \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} ; \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Exercice : vérifiez que quelque soit le scalaire q, on a toujours

$$\vec{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} q) = \vec{\nabla} \times \overrightarrow{\text{grad}} q = \vec{0}$$

d'où l'introduction du potentiel de vitesse pour un écoulement irrotationnel.

Remarques :

- On dit que \vec{V} dérive du potentiel φ

- On parle d'écoulement « potentiel » ou « à potentiel de vitesses »
- les surfaces ou lignes équipotentielles sont telles que φ est constante
 $\varphi(x, y, z) = C^{ste}$ ou $\varphi(x, y) = C^{ste}$
- Si le fluide est incompressible et l'écoulement conservatif (donc $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$) et si \vec{V} dérive du potentiel φ (tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi = \vec{\nabla} \varphi$), alors
 $\vec{\nabla} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \varphi = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varphi = \Delta \varphi = 0$

Un écoulement irrotationnel d'un fluide incompressible est tel que φ satisfait l'équation de Laplace ; i.e. La fonction φ est harmonique.

Exercice Ecrire la formule en x, y et z du Laplacien

6) Ecoulement potentiels plans

6.1 réseau des lignes ψ et φ

Pour un écoulement plan en (xy), incompressible et irrotationnel, le potentiel des vitesses φ et la fonction de courant ψ existent et sont liés par :

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi = \vec{\nabla} \varphi \quad \text{donc} \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} ; \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\psi \quad \text{lignes de courant} \quad \text{donc} \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y} ; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{venant de} \quad \vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{0}$$

$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ sont les conditions de Cauchy-Riemann qui doivent être satisfaites par tout écoulement plan en (xy) et irrotationnel d'un fluide incompressible

Propriétés :

* La condition d'irrotationnalité dans le plan (xy) donne :

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Comme $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$; $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$,

on peut écrire cette condition d'irrotationnalité sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0$$

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{soit} \quad \Delta \psi = 0 \quad \psi \text{ est aussi harmonique}$$

* Nous avons :

$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi = \vec{\nabla} \varphi$ soit les vecteurs \vec{V} et les lignes $\varphi = C^{ste}$ sont orthogonaux et les vecteurs \vec{V} sont tangents aux lignes de courant $\psi = C^{ste}$ donc :

Les lignes équipotentielles $\varphi = C^{ste}$ et les lignes de courant $\psi = C^{ste}$ sont orthogonales et forment un réseau orthogonal.

Si une ligne équipotentielle $\varphi = C^{ste}$ coupe une ligne de courant $\psi = C^{ste}$, elles se coupent orthogonalement. Ces lignes forment un réseau orthogonal.

Note : les frontières – solides ou surfaces libres – représentent des lignes de courant (car il n'y a pas d'écoulement au travers).

6.2 exemples d'écoulements

Toujours dans le plan (xy), pour un fluide incompressible et un écoulement irrotationnel

1) Ecoulement rectiligne uniforme

$$u = U = C^{ste} \quad \text{et} \quad v = 0$$

Déterminer φ et ψ

les conditions de Cauchy-Riemann (CR) donnent :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

du coup, commençons par calculer φ

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = U \quad \text{donc} \quad \varphi = Ux + f(y)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = f'(y)$$

or $v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ donc $f'(y) = 0$ soit $f(y) = C^{ste}$
et l'on a $\varphi = Ux + C^{ste}$

La même démarche est à appliquer pour trouver ψ $v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$

de la deuxième condition de CR, on a :

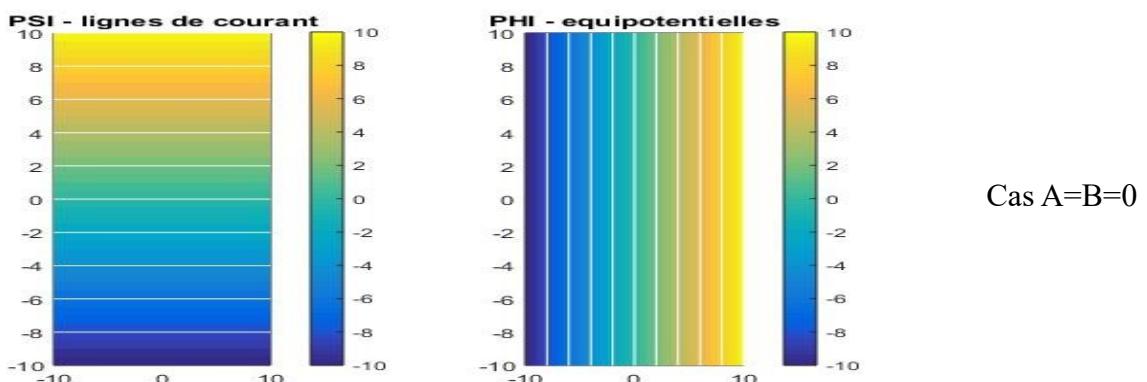
$$-\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{donc} \quad \psi = C^{ste} + g(y)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = g'(y)$$

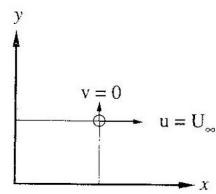
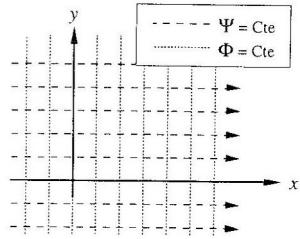
or la première condition de CR donne :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = U \quad \text{donc} \quad \psi = Uy + C^{ste}$$

En résumé, on a $\psi = Uy + B$ et $\varphi = Ux + A$ avec A et B deux constantes données

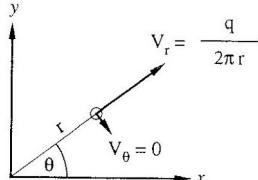
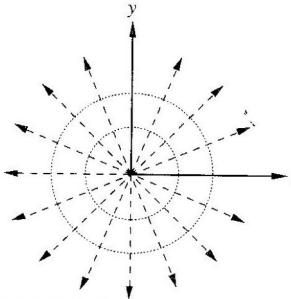


Les lignes de courant Ψ sont des droites horizontales dans le sens du courant U ; les lignes équipotielles φ sont des droites verticales. On vérifie que les lignes équipotielles et les lignes de courant forment bien un réseau orthogonal.

Tableau CN.1 Réseau des lignes Φ et Ψ *Ecoulement rectiligne uniforme*

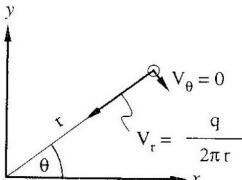
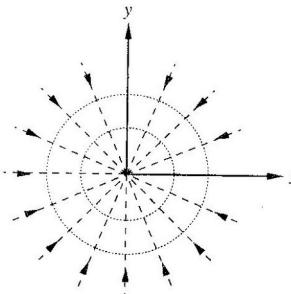
$$\begin{aligned}\Phi &= + U_{\infty} x \\ \Psi &= + U_{\infty} y\end{aligned}$$

avec: $U_{\infty} = \text{Cte}$

Ecoulement radial autour d'une source

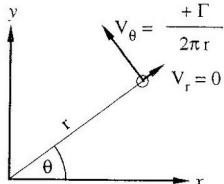
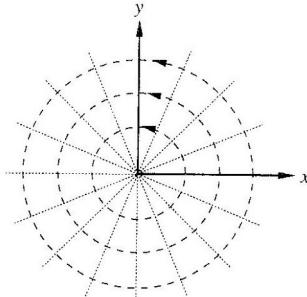
$$\begin{aligned}\Phi &= + C \ln r \\ \Psi &= + C \theta\end{aligned}$$

avec: $C = \frac{q}{2\pi} = V_r r = C \cdot z$

Ecoulement radial autour d'un puits

$$\begin{aligned}\Phi &= - C \ln r \\ \Psi &= - C \theta\end{aligned}$$

avec: $C = \frac{q}{2\pi} = V_r r = C \cdot z$

Ecoulement avec circulation

$$\begin{aligned}\Phi &= - K \theta \\ \Psi &= + K \ln r\end{aligned}$$

avec: $K = - V_{\theta} r = \frac{-\Gamma}{2\pi} = C \cdot z$

(Remerciement pour ce tableau de Graf et Altinakar)

2) Ecoulement radial autour d'une source ou d'un puits

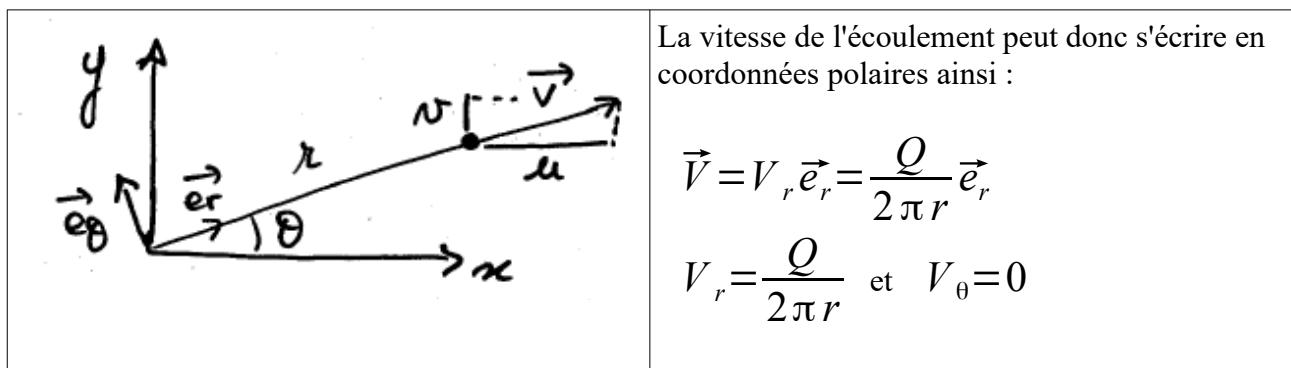
Sur les figures 2 et 3 du Tableau CN-1, on observe une symétrie par rapport à l'axe z donc cet exercice est plus facile à résoudre en coordonnées polaires (r, θ)

Les composantes de la vitesse V sont données, en coordonnées cartésiennes, par :

$$u = V_r \cos \theta \quad V_r \text{ est la vitesse radiale}$$

$$v = V_r \sin \theta \quad \text{avec } Q = V_r (2\pi r) \text{ le débit unitaire}$$

Si Q est positif, il s'agit d'une source ; si Q est négatif, il s'agit d'un puits



Les conditions de CR en coordonnées polaires s'écrivent :

$$V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Comme précédemment, pour chaque fonction, il faut intégrer par rapport à une composante, ex r , puis par rapport à l'autre composante, ex θ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = V_r = \frac{Q}{2\pi r} \quad \text{donc} \quad \varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln(r) + f(\theta)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = f'(\theta) \quad \text{et}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = V_\theta = 0 \quad \text{donc} \quad f'(\theta) = 0 \quad ; \quad f(\theta) = C^{ste} = C_1$$

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln(r) + C_1$$

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{Q}{2\pi r} \text{ donc } \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{Q}{2\pi} \text{ et } \psi = \frac{Q}{2\pi} \theta + g(r)$$

$$\text{or } V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 = -g'(r) \text{ donc } g(r) = C^{ste} = C_2$$

En posant $C = \frac{Q}{2\pi}$, on obtient les fonctions:

$$\varphi = C \ln(r) + C_1 \text{ et } \psi = C \theta + C_2$$

Les lignes de courant Ψ sont des $\frac{1}{2}$ droites issues du point d'origine du repère (0,0) ; les lignes équipotentielles φ sont des cercles concentriques autour de (0,0). On vérifie que les lignes équipotentielles et les lignes de courant forment bien un réseau orthogonal.

Exercice : trouvez les fonctions φ et ψ en utilisant les coordonnées cartésiennes x et y.

3) Ecoulement « tourbillon »

C'est le cas « inverse » de l'écoulement autour d'une source ou d'un puits :

$$\varphi = C \theta + C_1 \text{ et } \psi = C \ln(r) + C_2$$

avec

$$V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \text{ et } V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{C}{r}$$

Les lignes de courant Ψ sont des cercles concentriques autour de (0,0) ; les lignes équipotentielles φ sont des $\frac{1}{2}$ droites issues du point d'origine du repère (0,0).

4) Ecoulement avec un point d'arrêt

Les lignes équipotentielles $\varphi = \frac{A}{2}(x^2 - y^2)$ sont des hyperboles orthogonales aux lignes de courant :

$$\psi = Axy \text{ qui sont des hyperboles équilatères.}$$

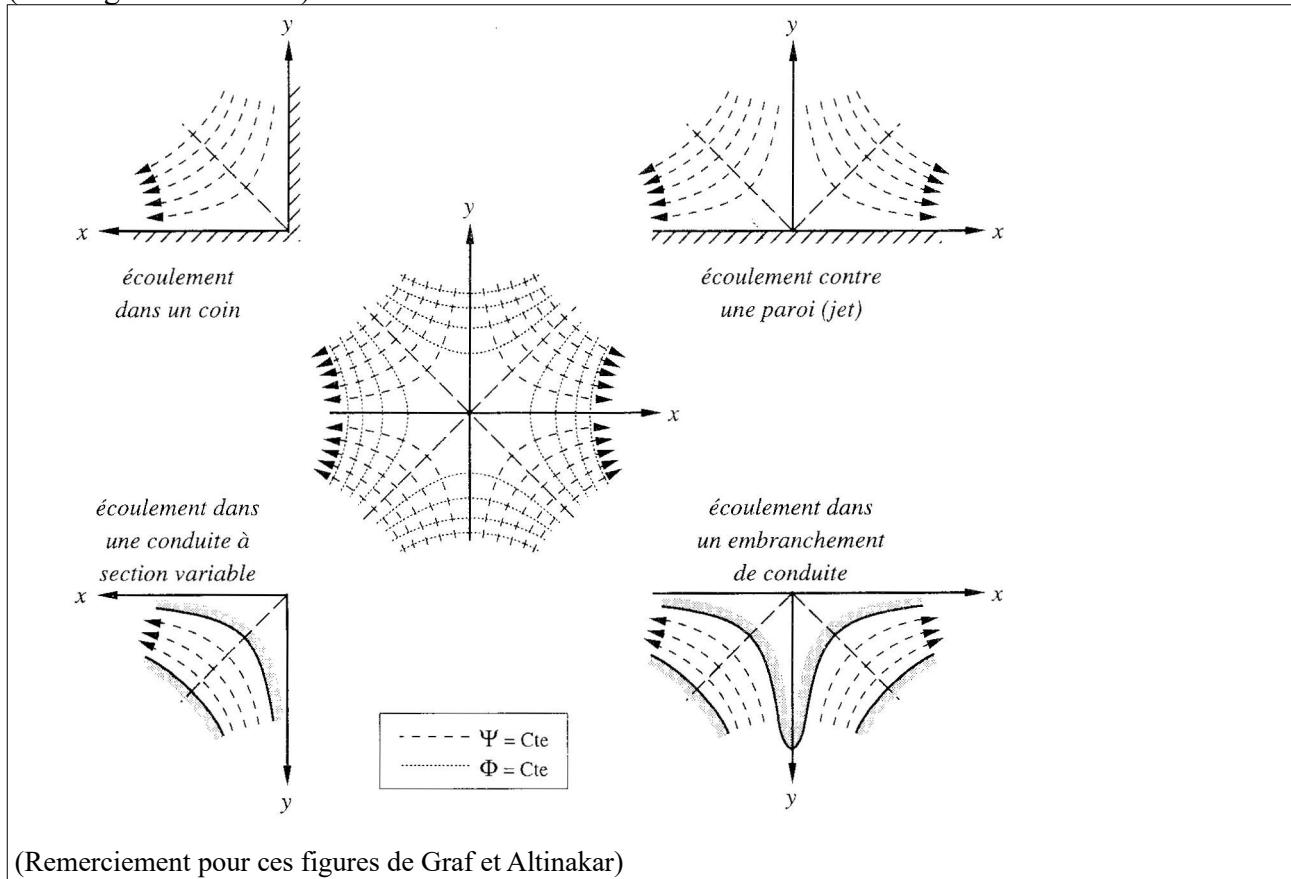
Les composantes de vitesse en un point sont:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = Ax \text{ et } v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -Ay$$

Différents choix de frontières (qui sont des lignes de courant particulières) sont possibles amenant à des écoulements pouvant être définis comme :

- i) Ecoulement dans un coin
- ii) Ecoulement contre une paroi (jet orthogonal à la paroi)
- iii) Ecoulement dans une conduite à section variable
- iv) Ecoulement dans un embranchement de conduite (avec une légère déformation des lignes de courant près de l'embranchement).

(voir Figures suivantes)



(Remerciement pour ces figures de Graf et Altinakar)

5) Ecoulement entre deux parois faisant un angle α

Les fonctions sont définies en coordonnées polaires par :

$$\varphi = \frac{B}{n} r^n \cos(n\theta)$$

$$\psi = \frac{B}{n} r^n \sin(n\theta)$$

B est une constante ainsi que n qui est lié à l'angle α entre les deux parois avec la fonction

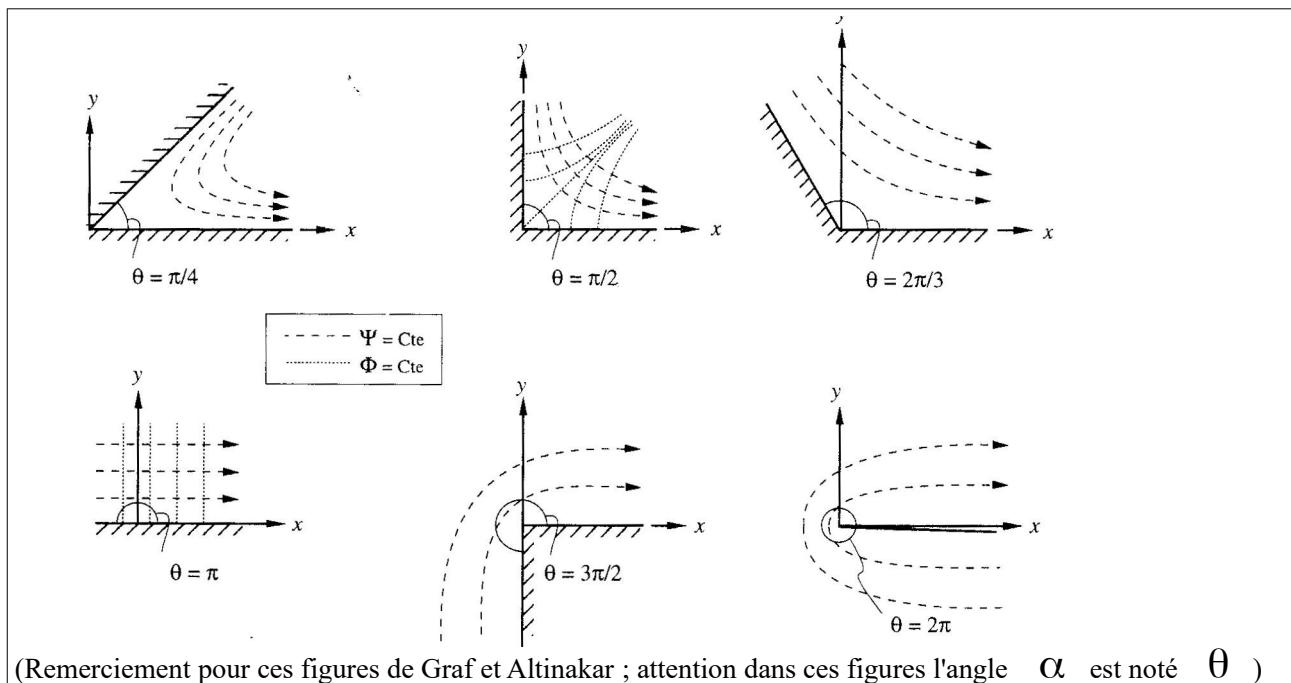
suivante : $\alpha n = \pi$ soit l'angle $\alpha = \frac{\pi}{n}$

Différents cas sont possibles suivant l'angle et sont montrés dans la figure suivante.

Dans le cas d'un angle droit $\alpha = \frac{\pi}{2}$, soit $n=2$, nous pouvons vérifier que nous ré-obtenons le cas de l'écoulement dans un coin obtenu dans la section précédente :

$$\varphi = \frac{B}{2} r^2 \cos(2\theta) = \frac{B}{2} r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = \frac{B}{2} (x^2 - y^2)$$

$$\psi = \frac{B}{2} r^2 \sin(2\theta) = \frac{B}{2} r^2 2\sin \theta \cos \theta = Bxy$$



Exercice : notez les différences des fonctions (entre cette section 5 et la section précédente) dans le cas de l'écoulement le long d'une paroi plane ; et la différence au niveau aussi de l'écoulement dans le plan « entier ».

6) Ecoulements superposés

Rappel : Les fonctions φ et ψ , si elles existent, doivent satisfaire l'équation de Laplace, qui est de forme linéaire :

$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{et} \quad \Delta \psi = 0$$

Donc la somme de plusieurs fonctions $\varphi_1 + \varphi_2$ et/ou $\psi_1 + \psi_2$ satisfait également à

l'équation de Laplace, pour autant que chacune des fonctions séparées satisfasse à l'équation de Laplace.

La somme de deux écoulements plans, incompressibles et irrotationnels est un écoulement plan, incompressible et irrotationnel.

A partir de deux (ou plusieurs) réseaux d'écoulements plans *simples* on obtient un autre réseau d'**écoulement plan superposé**.

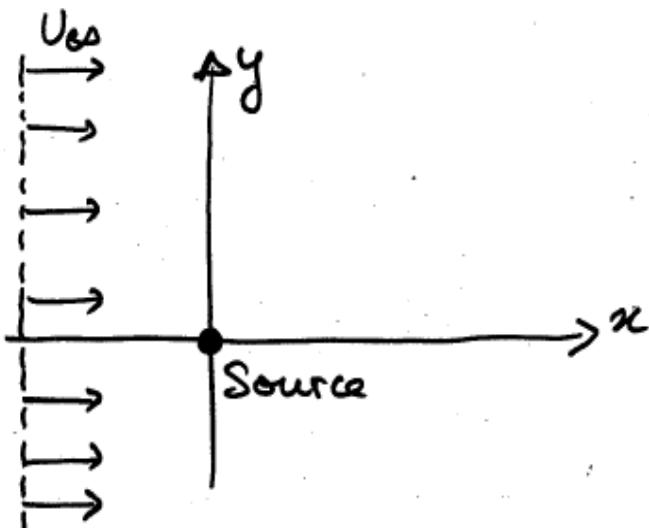
Exemple d'une source dans un écoulement uniforme

Soit un écoulement parallèle à l'axe x , avec une vitesse U_∞ où:

$$\varphi_1 = U_\infty x \quad \text{et} \quad \psi_1 = U_\infty y$$

et un écoulement radial d'une source avec un débit unitaire, où:

$$\varphi_2 = \frac{Q}{4\pi} \ln(x^2 + y^2) \quad \text{et} \quad \psi_2 = \frac{Q}{2\pi} \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$



Objectifs :

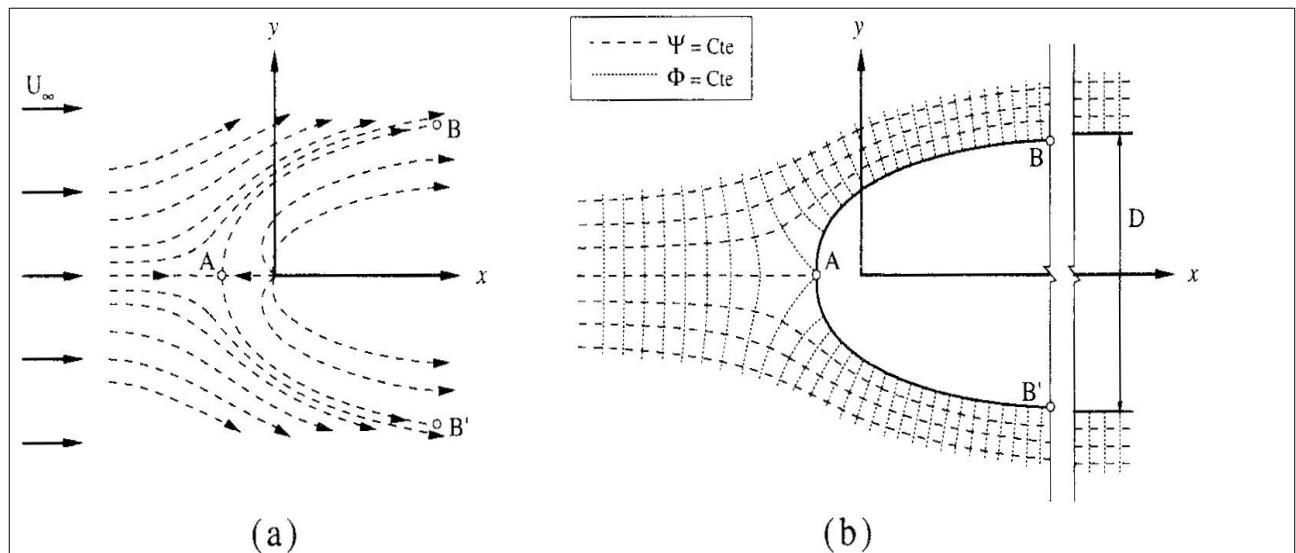
- a) calculez les fonctions φ et ψ associées à cet écoulement superposé
- b) calculez la vitesse en tout point
- c) calculez les coordonnées d'un point d'arrêt A où la vitesse est toujours nulle

a) La superposition de ces deux écoulements donne:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = U_\infty x + \frac{Q}{4\pi} \ln(x^2 + y^2)$$

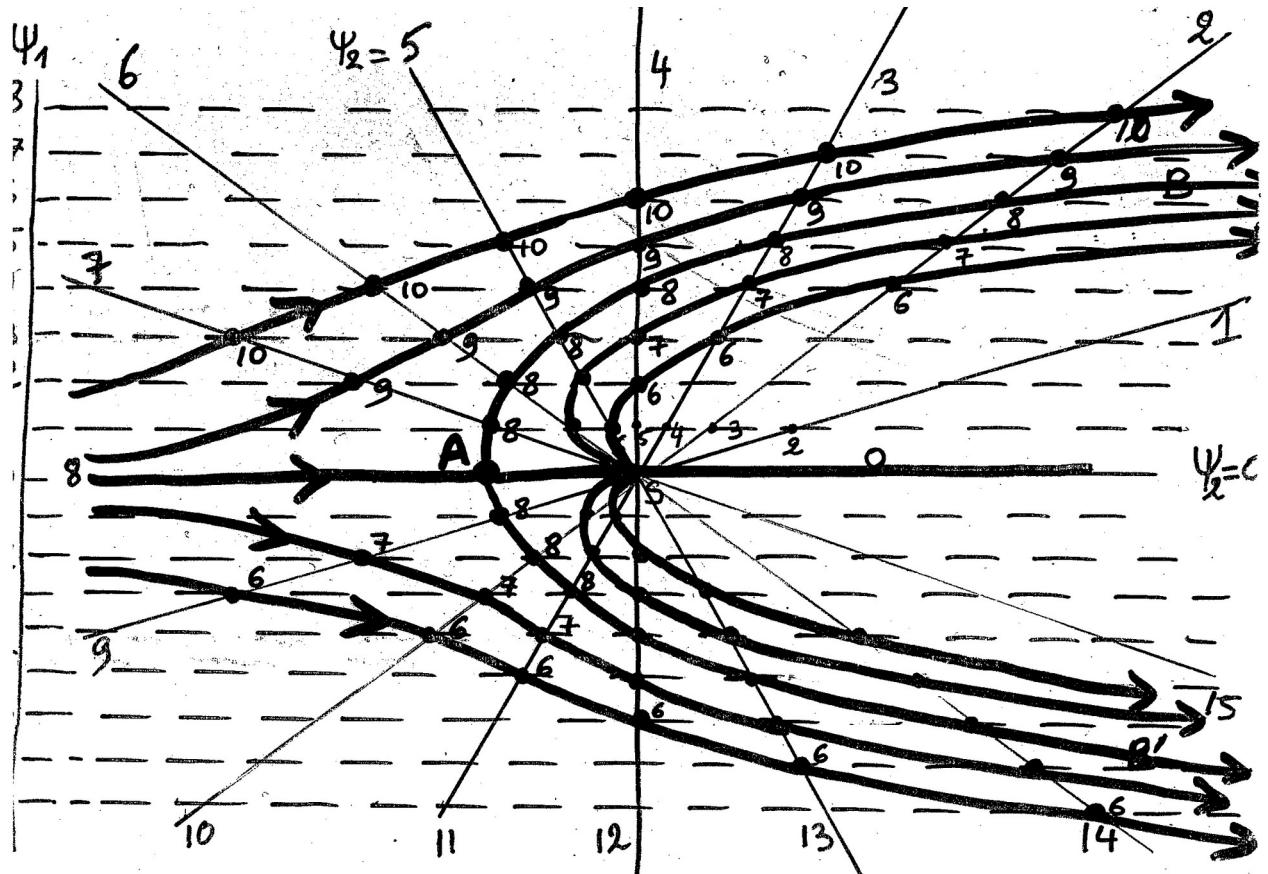
$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = U_\infty y + \frac{Q}{2\pi} \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Les lignes de courant sont tracées ; on peut observer qu' elles se divisent en deux régions. Les lignes provenant de la source restent à l'intérieur de la courbe BAB'. Les lignes issues de l'écoulement uniforme se répartissent à l'extérieur de cette courbe BAB'. (Figure a).



(Remerciement pour ces figures de Graf et Altinakar)

Cela forme ce qui est appelé 1/2 corps de Rankine (ingénieur et physicien écossais 1820-1872).



Exemple de dessin évaluant simplement l'allure des lignes de courant. Cas particulier avec

$U_\infty = 1$ pour dessiner Ψ_1 et $\frac{Q}{2\pi} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = 1$ pour dessiner la « première » ligne de courant de la source Ψ_2 .

b) les composantes de la vitesse en tout point sont données par :

$$u = u_1 + u_2 = U_\infty + \frac{Q}{2\pi} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) \text{ et}$$

$$v = v_1 + v_2 = 0 + \frac{Q}{2\pi} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{Q}{2\pi} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

c) Les coordonnées du point d'arrêt A sont telles que $u_A = v_A = 0$

$$u_A = U_\infty + \frac{Q}{2\pi} \left(\frac{x_A}{x_A^2 + y_A^2} \right) = 0$$

$$v_A = \frac{Q}{2\pi} \left(\frac{y_A}{x_A^2 + y_A^2} \right) = 0 \quad \text{donc} \quad y_A = 0 \quad \text{et} \quad x_A = -\frac{Q}{2\pi U_\infty}$$

Le point d'arrêt est situé sur l'axe de symétrie ($y=0$). On remarque que :

- plus l'écoulement uniforme est fort (U_∞ augmente), plus le point d'arrêt se rapproche de l'origine (la valeur absolue de x_A baisse) ;
- plus la source est forte (Q augmente), plus le point d'arrêt s'éloigne de l'origine (la valeur absolue de x_A augmente).

On peut remplacer chaque ligne de courant par un contour solide. En effet, si l'on suppose solidifié tout le fluide à l'intérieur de cette ligne de courant, l'écoulement à l'extérieur n'est pas modifié. On remplace alors la courbe BAB' par une frontière solide, les lignes de courant représentant donc un écoulement autour d'un solide (demi-corps) placé axi-symétriquement dans un écoulement uniforme (voir Fig. b).

A une grande distance (x tendant vers l'infini $u = U_\infty$), la largeur, D , de ce demi-corps est atteinte, laissant passer tout le débit unitaire ($Q = D * 1 * U_\infty$); on a donc: $D = \frac{Q}{U_\infty}$.

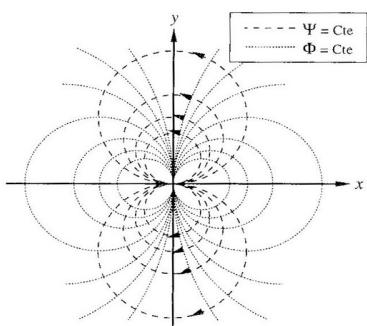


Fig. CN.13

Supplément le cas d'un doublet (et doublet dans un écoulement uniforme) peut être étudié et mis en relation avec les formules des bipoles électriques.

Un doublet est la superposition de deux écoulements radiaux, une source et un puits.

Sur la figure de gauche, les deux sont mis avec leur origine sur l'axe x.

Annexe : Exemple de fonction de courant (figure 2 ci-dessous) calculée avec Ariane (<http://www.univ-brest.fr/lpo/ariane>; Blanke and Raynaud [1997]; Blanke et al. [1999])

Rousselet, L., Doglioli, A.M., Maes, C., Blanke, B., Petrenko, A.A. (2016). *Impacts of mesoscale activity on the water masses and circulation in the Coral Sea*. J. Geophys. Res. Oceans, 121, 7277-7289, doi:[10.1002/2016JC011861](https://doi.org/10.1002/2016JC011861)

(L. Rousselet, en M2 OPB en 2014/15, a débuté sa thèse sous la direction d'A. Petrenko et A. Doglioli en octobre 2015)

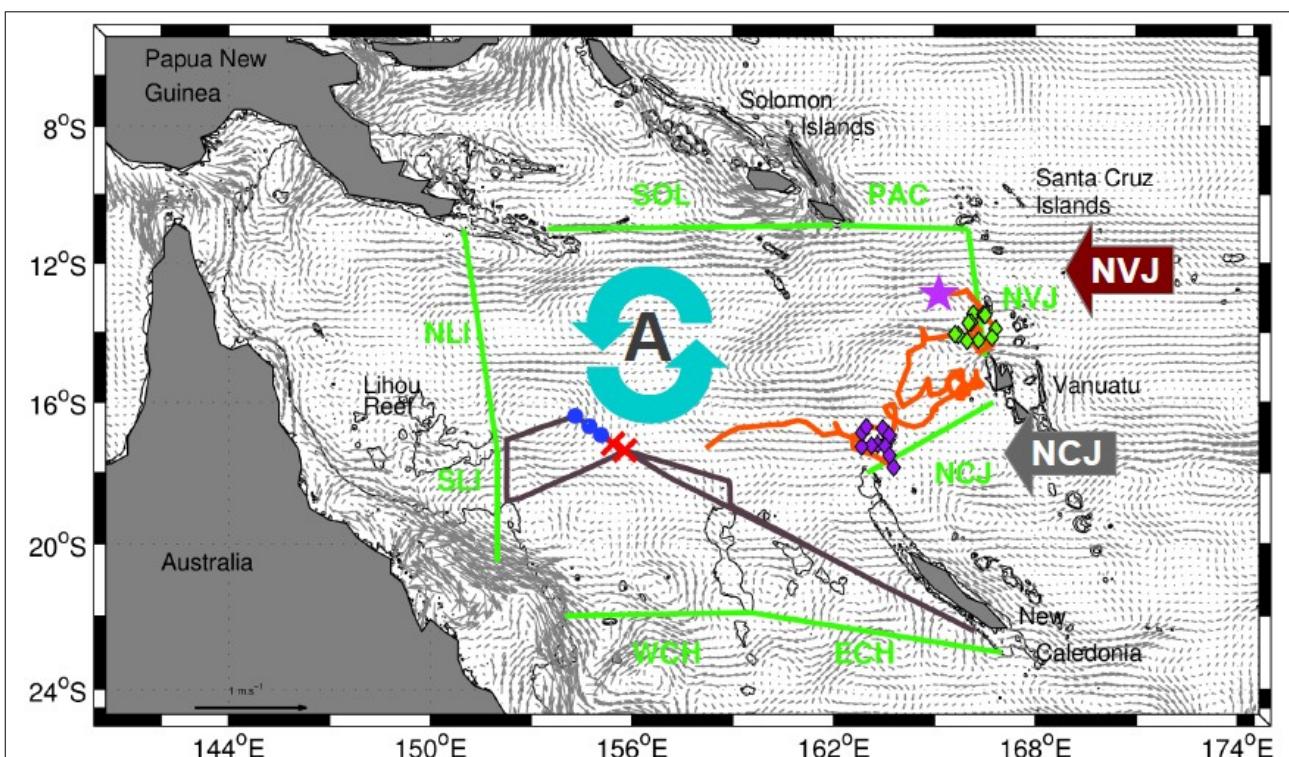


Figure 1 : Annual average of the AVISO velocity field in the Coral Sea (arrows). Route of the Bifurcation cruise (brown). Positions of CTD stations (blue and red). Trajectory and positions of Argo profiles (orange line and diamonds). The approximate position of anticyclonic eddy A is shown with bold blue arrows. The geographical limits of the Lagrangian integrations made with Ariane are drawn in green.

NVJ : North Vanuatu Jet ; NCJ : North Caledonian Jet.

Lagrangian results (Ariane, model)

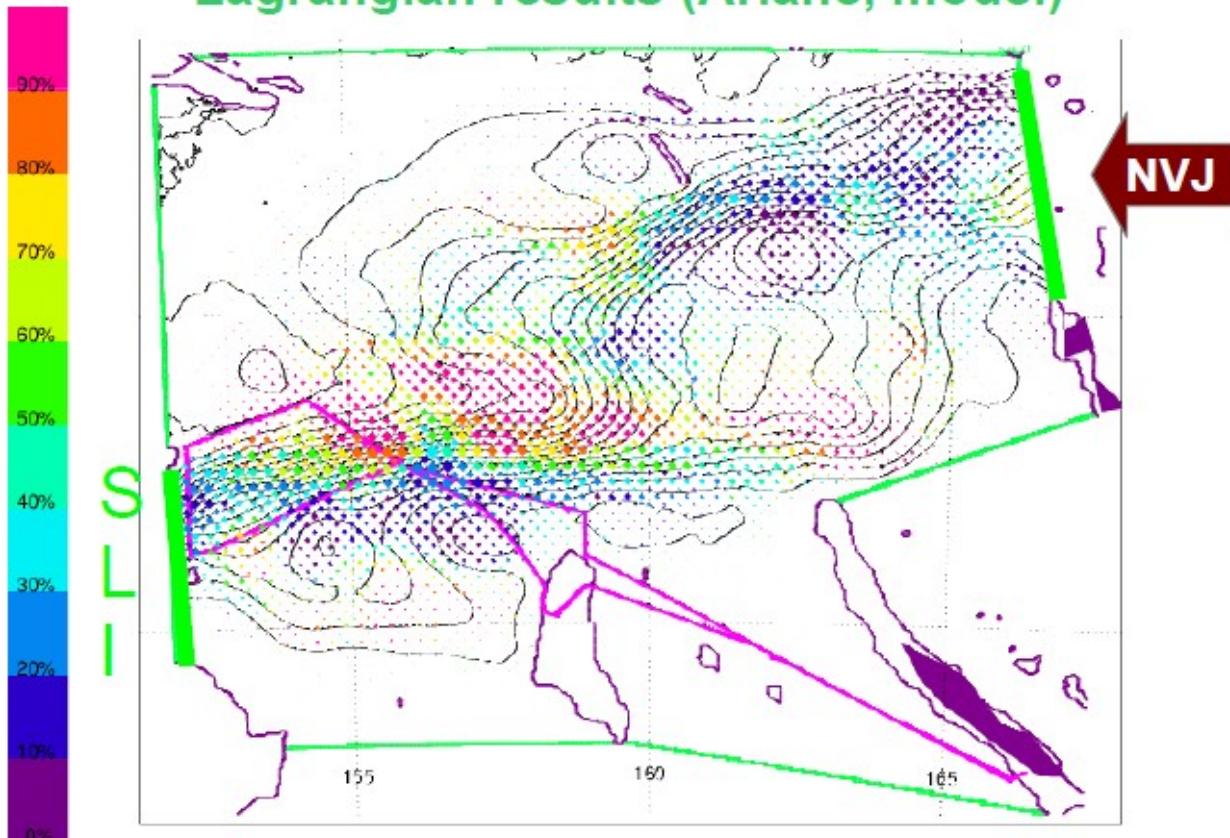


Figure 2 : Black lines : stream function (fonction de courant) showing the full surface circulation that connects the NVJ and SLI sections. A fraction of this connection is achieved by eddies (not shown), and the diamonds show the contribution of anticyclonic eddies to this fraction (colorbar in %).

A Lagrangian analysis using the daily surface velocity from the NLOM model ($1/32^\circ$) highlights the transfer of particles from the NVJ to the NCJ through eddy circulation (3 % of the flow crossing the SLI section). The contribution of anticyclonic eddies to this eddy-induced leakage can reach up to 70-90 %.