CHAPITRE IV – HYDRODYNAMIQUE

1. Equation dynamique des fluides parfaits incompressibles

Le deuxième principe de Newton indique que, dans un référentiel galiléen (fixe), il existe une relation de proportionnalité entre l'accélération $\vec{\gamma}$ d'une particule et la force $\vec{F}$ à laquelle elle est soumise :

$$\vec{F} = m\vec{\gamma}$$

m est un coefficient positif caractéristique de la particule, appelé masse du point matériel.

De-là découle **l'équation d'Euler** (établie par Léonhard Euler en 1755) qui s'applique dans le cas d'un fluide parfait, c'est-à-dire un fluide non visqueux, et sans conductivité thermique:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{\mathrm{dt}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}p + \rho\vec{f}$$

avec la dérivée particulaire suivante (rappel) :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}$$

Cette dérivée est la dérivée particulaire, appelée aussi dérivée lagrangienne ; c'est la dérivée en suivant la particule dans son mouvement par rapport à un repère fixe. (voir Chap III)

Note : Si le mouvement est nul ou uniformément accéléré (voir Chap II), on obtient l'équation fondamentale de l'hydrostatique :

$$-\overrightarrow{grad}p + \rho\vec{f} = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{f} = \vec{0}$$

ATTENTION, il faut choisir un référentiel avant de pouvoir écrire ce champ.

*** Si z est orienté vers le zénith, et que les forces de volume se limitent à la gravité**, alors l'équation d'Euler générale peut s'écrire sous la forme de 3 équations scalaires:

$$\rho\frac{du}{\mathrm{dt}} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$
$$\rho\frac{dv}{\mathrm{dt}} = -\frac{\partial p}{\partial y}$$
$$\rho\frac{dw}{\mathrm{dt}} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g$$

Dans ce cas, on peut dire que $\vec{f}$ dérive du potentiel -gz et écrire : $\vec{f} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(-gz) = \vec{\nabla}(-gz)$

L'équation d'Euler devient donc :

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{f} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{\nabla}(-gz)$$

Si la masse volumique est constante, alors

$$\vec{f} = \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}(-\rho gz) = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}(\rho gz)$$

et l'équation d'Euler peut s'écrire :

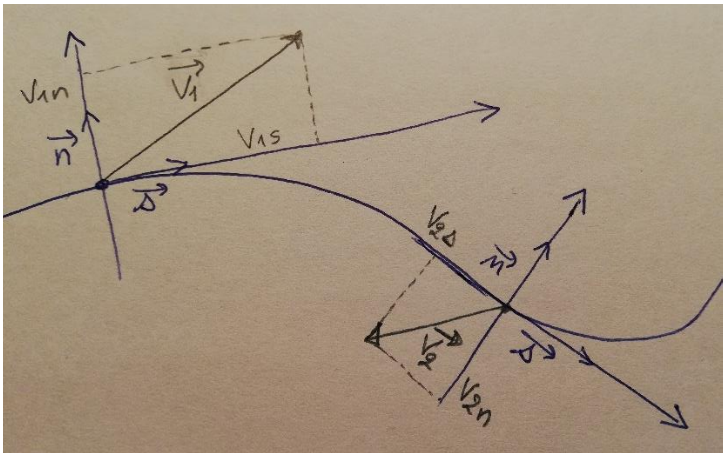
$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}(p + \rho gz)$$

L'écoulement a 4 inconnues : u, v, w et p. L'équation d'Euler fournit 3 équations scalaires. On a donc besoin de l'équation de conservation de la masse (aussi appelée équation de continuité) : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho \vec{V}\right) = 0$ pour pouvoir résoudre le système.

2. Equations intrinsèques

Hypothèses :

- l'écoulement est bidimensionnel dans le plan (xz), z orienté vers le zénith,
- $\vec{f}$ dérive du potentiel -gz (cela sous-entend que le fluide est considéré comme parfait)
- le fluide est parfait et la masse volumique est constante



Soit une ligne courbe quelconque de vecteur unitaire tangent $\vec{s}$ et de vecteur normal $\vec{n}$, si on écrit l'équation d'Euler dans le repère ($\vec{s}$,$\vec{n}$) avec pour vecteur vitesse $\vec{V} = (V_s, V_n)$:

Suivant $\vec{s}$:

$$\frac{dV_s}{dt} = \frac{\partial V_s}{\partial t} + V_s \frac{\partial V_s}{\partial s} + V_n \frac{\partial V_s}{\partial n} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (p + \rho g z)}{\partial s} \qquad 1)$$

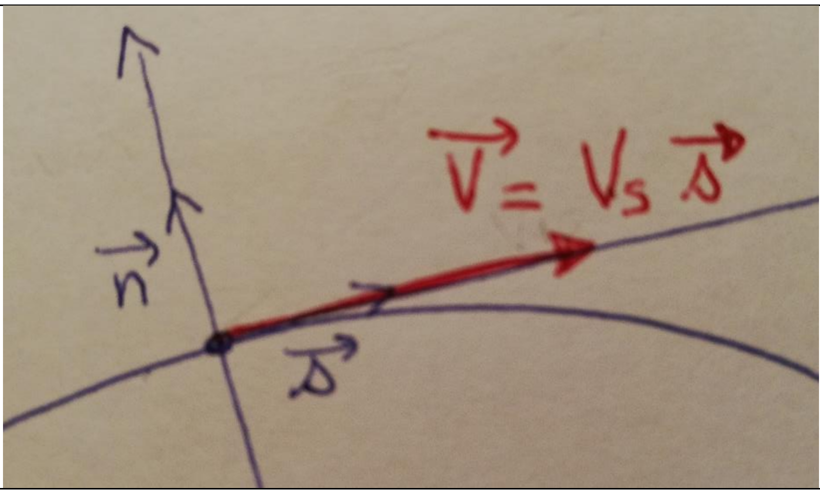
Suivant $\vec{n}$

$$\frac{dV_n}{dt} = \frac{\partial V_n}{\partial t} + V_s \frac{\partial V_n}{\partial s} + V_n \frac{\partial V_n}{\partial n} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (p + \rho g z)}{\partial n} \qquad 2)$$

3. Equation de Bernoulli (1738)

Daniel Bernoulli est un médecin, physicien et mathématicien suisse, né à Groningue le 8 février 1700, et mort à Bâle, le 17 mars 1782. (adapté de https://fr.wikipedia.org/wiki/Daniel_Bernoulli)
Il étudie d'abord la médecine. Mais il s'intéresse aussi aux sciences mathématiques et naturelles, enseigne les mathématiques, l'anatomie, la botanique et la physique.
Ami de Leonhard Euler, il travaille avec lui dans plusieurs domaines des mathématiques et de la physique, et partage avec lui dix fois le prix annuel de l'Académie des sciences de Paris, si bien qu'il s'en fait une sorte de revenu. Les différents problèmes qu'il tente de résoudre (théorie de l'élasticité, mécanisme des marées) le conduisent à s'intéresser et développer des outils mathématiques tels que les équations différentielles ou les séries. Il collabore également avec Jean le Rond d'Alembert dans l'étude des cordes vibrantes. Il fut le premier à utiliser un symbole (A.S.) pour désigner la fonction arc sinus.
(« Bernoulli n'est évidemment pas une nouille », le « i » de son nom est au bout du nom et pas avant les deux l … merci pour sa mémoire).

- 3A – Dérivation de la relation de Bernoulli



Si les hypothèses de la section 2 sont gardées et que la ligne courbe de la section précédente est une ligne de courant, alors

$$\vec{V} = (V_s, V_n) = (V, 0)$$

et les équations d'Euler intrinsèques deviennent :

1) $\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial(p+\rho g z)}{\partial s}$

soit $\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial s} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial(p+\rho g z)}{\partial s}$

2) $0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial(p+\rho g z)}{\partial n}$

soit $p + \rho g z = Constante$ sur toute ligne normale aux lignes de courant

Si on fait l'hypothèse supplémentaire que l'écoulement est stationnaire $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$, alors la première équation 1) devient:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial s} = \frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial s} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial(p+\rho g z)}{\partial s}$$

De plus comme le fluide est parfait, on peut transformer le deuxième terme en :

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial(p+\rho g z)}{\partial s} = -\frac{\partial(p/\rho + g z)}{\partial s}$$

En déplaçant ce terme du côté gauche de l'équation, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho} + g z\right) = 0$$

La relation de Bernoulli :

$\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho} + g z = Constante$ est valable sur toute ligne de courant

si les hypothèses suivantes sont vérifiées:

- l'écoulement est bidimensionnel dans le plan (xz), z orienté vers le zénith,
- $\vec{f}$ dérive du potentiel -gz (cela sous-entend que le fluide est considéré comme parfait)
- le fluide est parfait et la masse volumique est constante
- l'écoulement est permanent.

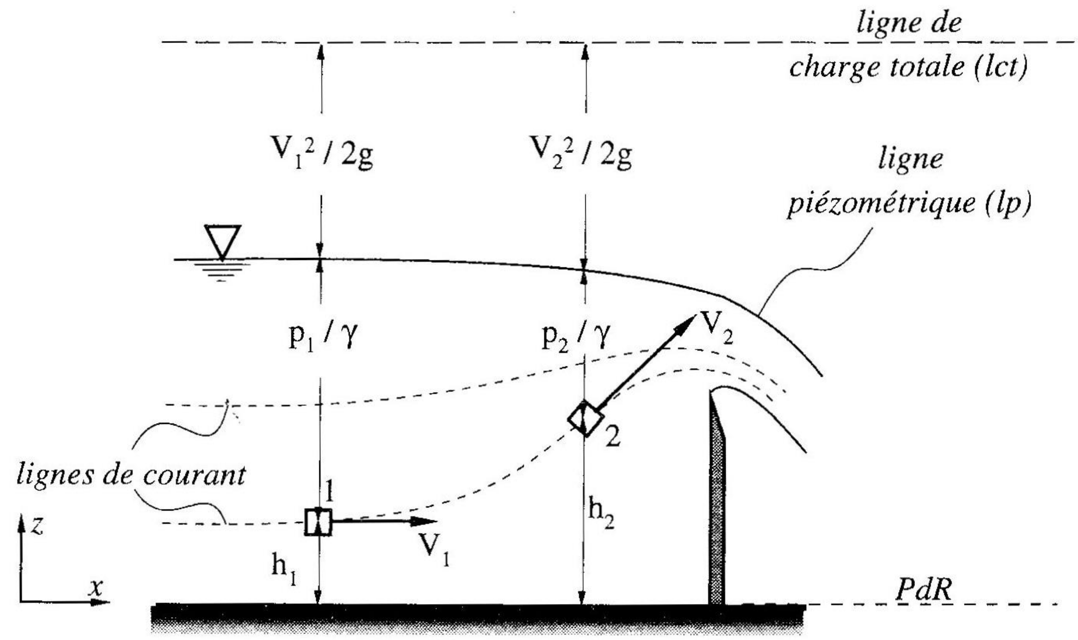
D'un point 1 à un point 2 le long d'une ligne de courant, on a :

$$\frac{1}{2}V_1^2 + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{1}{2}V_2^2 + \frac{p_2}{\rho} + gz_2$$

Interprétation ingénieur (en divisant par g l'équation et en écrivant z=h) :

$$\frac{p^*}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} + h \qquad \text{(HD.1}^-$$

$$\left\{ \begin{matrix} \text{hauteur} \\ \text{piézométrique} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \text{hauteur} \\ \text{due à la} \\ \text{pression} \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \text{cote} \\ \text{du} \\ \text{point} \end{matrix} \right\}$$

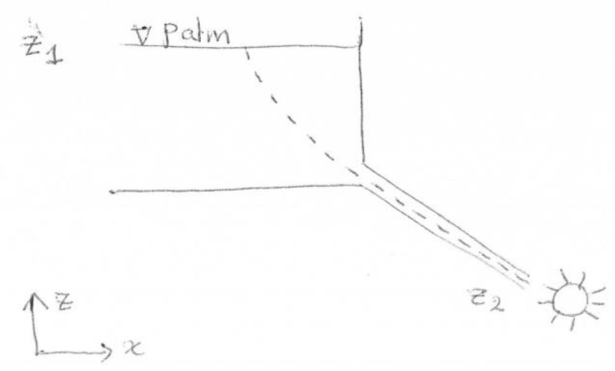


Dans un écoulement à surface libre en contact avec l'atmosphère, la ligne piézométrique se confond avec la surface libre, qui constitue en même temps une ligne de courant.

Applications :

a) Turbine de Pelton

Quelle est la vitesse de l'eau dans le jet d'une turbine de Pelton ? Si l'on suppose les pertes d'énergie (et donc le frottement) négligeables.



Hypothèse de Bernoulli vérifiées (attention pour la permanence, faire hypothèse d'un grand bassin ou d'une étude sur période courte, voir *).

$$\frac{1}{2}V_1^2 + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{1}{2}V_2^2 + \frac{p_2}{\rho} + gz_2$$

Point 1 à la surface : $V_1=0$, $P_1=p_{atm}$

Point 2 à la turbine : V_2 ? , $P_2=p_{atm}$

donc

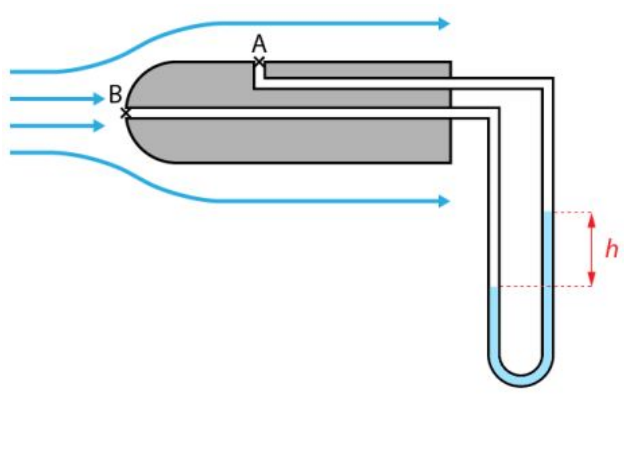
$$V_2^2 = 2g*(z_1 - z_2) \text{ soit } V_2 = \sqrt{2g*(z_1 - z_2)}$$

Cette formule est appelée la **formule de Torricelli** (Evangelista Torricelli (1608-1647), physicien et mathématicien italien).

*L'une des hypothèses de Bernoulli est la stationnarité.
Pourquoi considère-t-on que l'écoulement est permanent alors qu'il y a une sortie d'eau ?
On ne pourra le faire que si l'on mentionne que le bassin/réservoir est très grand et donc que cette sortie d'eau ne fait pas varier la hauteur de son contenu : le niveau z_1 de la surface est considéré comme constant.
De plus il faut noter que l'on dessine une/la ligne de courant sur laquelle on applique Bernoulli partant de la surface (même si on considère que la vitesse V_1 de la particule de fluide y est nulle) et qui descend jusqu'à la conduite menant à la turbine.

b) <u>Tube de Pitot</u> (1732, avant l'équation de Bernoulli !)

L'objectif est de mesurer la vitesse de l'écoulement (si le tube de Pitot est immobile) ou la vitesse relative du Tube de Pitot par rapport à l'écoulement si la plateforme soutenant le tube de Pitot est en mouvement.



Si les hypothèses de Bernoulli sont vérifiées

On choisit une ligne de courant entre le point B (point d'arrêt vB=0) et le point A dans le fluide extérieur de masse volumique (ρ)

La sonde est miniaturisée donc on considère que zA=zB

$\frac{1}{2}\rho V_A^2 + p_A = \frac{1}{2}\rho V_B^2 + p_B$ et donc la vitesse de l 'écoulement est égale à:

$$V_A = \sqrt{\frac{2(p_B - p_A)}{\rho}}$$

Si un manomètre (cf figure ci-dessus à droite) avec un fluide de masse volumique (ρ_2, fluide bleu dans le tube en U) permettait de mesurer la différence de pression, on aurait alors : $V_A = \sqrt{\frac{2\rho_2 g h}{\rho}}$

Annexe :

« Le fonctionnement simple du tube de Pitot se comprend facilement dans un courant d'eau si l'on songe qu'une particule de fluide qui est dotée d'une certaine vitesse dispose, du fait de cette vitesse, d'un élan qui peut lui permettre de monter à une certaine hauteur. De même, toute personne qui lance une pierre verticalement sait que cette pierre montera d'autant plus haut qu'on lui donne une vitesse initiale forte.

Lorsque l'on trempe sa main dans le courant d'un torrent (comme sur l'animation du site : https://fr.wikipedia.org/wiki/Tube_de_Pitot), on observe bien que l'eau monte à une certaine hauteur. Dans la première expérience que Pitot a improvisée avec enthousiasme lorsque lui est venue l'idée de sa "Machine pour mesurer la vitesse des eaux courantes et le sillage des vaisseaux" (1732, https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k35294.image.f543.langFR, *Histoire de l'Académie royale des sciences avec les mémoires de mathématique et de physique tirés des registres de cette Académie*), il a remplacé la main par un simple tuyau de verre coudé face au courant. Les particules d'eau qui montent dans le tube de verre voient très vite leur vitesse s'annuler (après stabilisation de la colonne d'eau en hauteur) : on n'a donc pas à craindre de perte d'énergie par frottement visqueux.

Et, dans le cas de ce tube de Pitot, la hauteur h atteinte par l'eau dans le tube est bien :

$$h = \frac{V^2}{2g}.$$

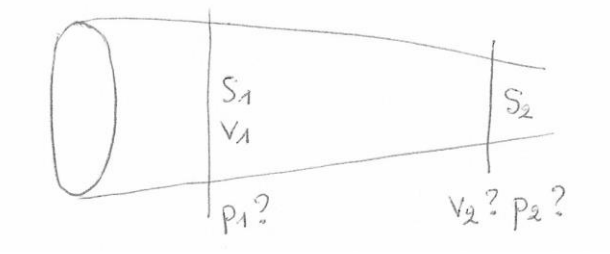
En 1732, entre deux piliers d'un pont sur la Seine à Paris, Pitot utilisa son instrument pour mesurer la vitesse du courant à différentes profondeurs. La présentation de ses résultats à l'Académie, plus tard la même année, revêt une importance considérable. En effet, les théories de l'époque, basées sur l'expérience de quelques ingénieurs italiens, prônaient que la vitesse du courant à une certaine profondeur d'une rivière était proportionnelle à la masse d'eau coulant au-dessus du point de mesure ; donc la vitesse du courant était vue comme augmentant avec la profondeur. Pitot apportait la preuve, grâce à son instrument, qu'en réalité la vitesse du courant diminuait avec la profondeur."

[Source et plus d'informations sur https://fr.wikipedia.org/wiki/Tube_de_Pitot]

c) **Manche à air**

Les aérodynamiciens négligent les forces de masse (le terme $\rho g z$)

$$\frac{1}{2}\rho V_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho V_2^2 + p_2$$

	Conservation de la masse : $S_1 * V_1 = S_2 * V_2$ donc $V_2 = \frac{S_1}{S_2} * V_1$ Si les hypothèses de Bernoulli sont vérifiées Ligne de courant entre le point 1 sur S1 et le point 2 sur S2 $\frac{1}{2}\rho V_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho V_2^2 + p_2$

Il reste deux inconnues P_1 et P_2 et une seule équation...
On prolonge la ligne de courant vers l'extérieur à gauche jusqu'à un point de vitesse nulle (Vo=0 et $P_o=p_{atm}$)
du coup
$p_{atm} = \frac{1}{2}\rho V_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho V_2^2 + p_2$ et on obtient :

$$p_1 = p_{atm} - \frac{1}{2}\rho V_1^2$$
$$p_2 = p_{atm} - \frac{1}{2}\rho V_2^2$$

Evidemment les phénomènes locaux (ex aux changements de courbes) ne sont pas décrits par l'équation de Bernoulli.

Faire AN avec $S_1 = 1 m^2$; $S_2=0,5 m^2$; $V_1= 16$ m/s ; $\rho=1,2$ kg/m^3
Notes par rapport à la solution : comme S_2 est 2 fois plus petite que S_1, du coup forcément V_2 est le double de V_1 (32 m/s) ; si vous prenez une pression atmosphérique nulle, vous obtenez des pressions négatives : ce n'est pas faux, c'est dû au fait que ce sont des **pressions relatives** : elles sont plus petites que la pression atmosphérique.
Ex p_1 = -153,6 Pa; p_2 = -614,4 Pa

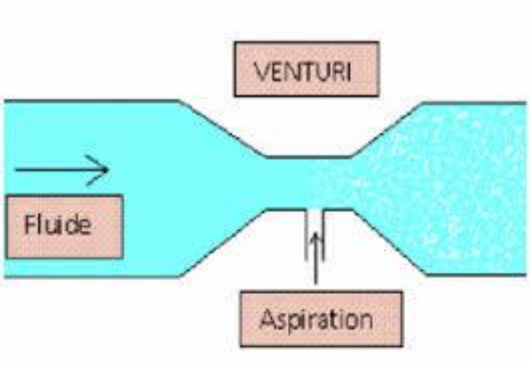
En pression totales p_1 = patm -153,6 Pa = 10^5 -153,6 = 99 846,4 Pa < patm;
p_2 = patm -614,4 Pa On observe qu'on a bien p2 <p1 < patm

d) Effet Venturi (adapté de https://fr.wikipedia.org/wiki/Effet_Venturi)

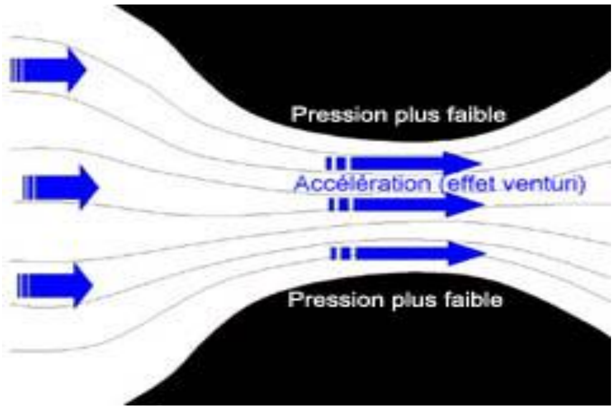
L'effet Venturi, du nom du physicien italien Giovanni Battista Venturi (1746-1822), est le nom donné à un phénomène de la dynamique des fluides où il y a formation d'une dépression dans une zone où les particules de fluides sont accélérées.

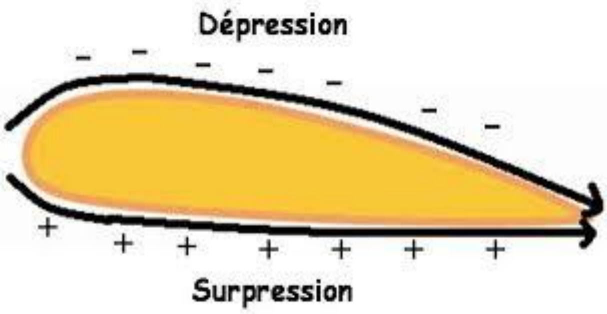
« L'effet est une manifestation du principe de conservation de la masse. Une certaine quantité de matière passe par un orifice en une unité de temps. Si l'orifice voit sa taille réduite et que la quantité de matière en circulation est à la fois constante dans le temps (hyp de permanence de Bernoulli) et dans l'espace (débit), alors la vitesse de passage dans l'orifice augmente pour permettre à la-dite quantité de matière de circuler en totalité pendant la même unité de temps. Du coup la pression diminue et cela fait "appel d'air ou appel de fluide" si il y a un passage vers l'extérieur. »

Cet effet se rencontre dans de nombreuses situations de la vie courante : accélération du vent au passage d'un col de montagne, dans une ruelle ; circulation d'eau dans des canalisations ou rapides d'une rivière ; turbine d'avion ; etc. Dans toutes ces situations, le fluide (air, eau…) est peu ou pas compressible, et évolue en circulation forcée dans une conduite inextensible (flanc de montagne, murs, tuyau ou tubulure rigide, lit de rivière + gravité…). Ils subissent donc l'effet Venturi.

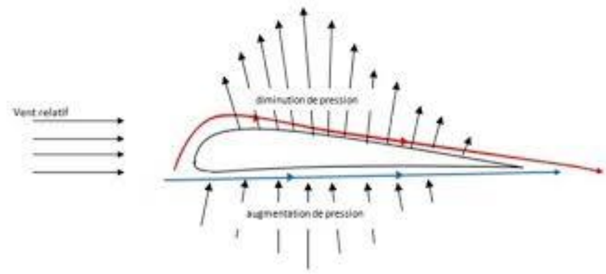


Ecoenergiesolution.com

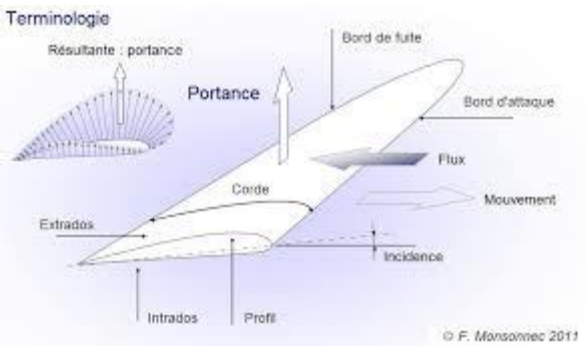




aerodynamismeavion.e-monsite.com



tpeavions.e-monsite.com



foils.worldpress.com

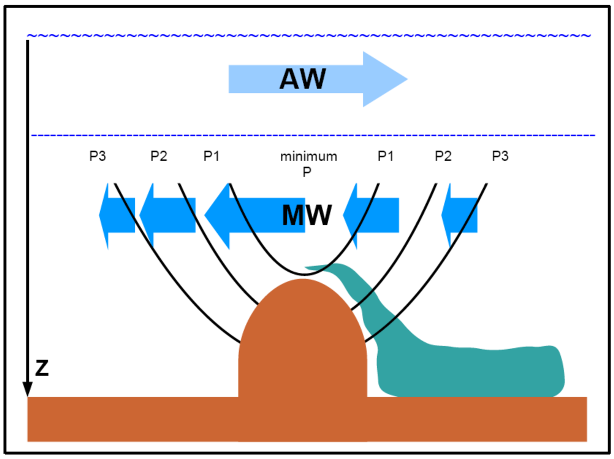


Schéma de l'effet Bernoulli à Gibraltar (Océan Atlantique à gauche -ouest- et mer Méditerranée à droite -est).

<u>Application au Détroit de Gibraltar</u> :
Stommel et al. [1973] avaient émis l'hypothèse que grâce à l'effet Bernoulli, les eaux profondes peuvent être happées par l'écoulement des eaux intermédiaires accélérant vers l'Atlantique.

Kinder et Parilla [87] ont en effet mesurés des valeurs de T et S correspondantes à celles des eaux profondes à l'ouest de Gibraltar.

Millot [2008] propose finalement un schéma complet avec la sortie de plusieurs types d'eaux différentes à Gibraltar.

- 3B – Interprétation énergétique de l'équation de Bernoulli

$$\frac{1}{2}\rho V^2 + (p + \rho g z) = Energie\ mécanique\ totale\ constante$$

L'équation de Bernoulli traduit la conservation de l'énergie mécanique totale par unité de volume au cours du mouvement permanent de ce fluide de masse volumique constante.

$\frac{1}{2}\rho V^2$ représente l'énergie cinétique par unité de volume et $(p + \rho g z)$ l'énergie potentielle par unité de volume.

<u>Attention</u> l'unité classique de l'énergie est le Joule pour le terme classique de l'Energie cinétique écrit comme ½ mv2 (J=N.m = kg.m.s-2.m = kg m2.s-2) ; mais l'unité de l'énergie par unité de volume est le Joule divisé par des m3 (J/m3 =N.m/m3 = N.m-2 = Pa). C'est pour cela que dans l'équation, il y a aussi des termes de pression qui sont de façon classique en Pascal.

- 3C – Ecoulement non permanent d'un fluide parfait de ρ constante
  Le long d'une ligne de courant, on écrirait Bernoulli :

$$\frac{1}{2}V_1^2 + \frac{p_1}{\rho} + g z_1 = \frac{1}{2}V_2^2 + \frac{p_2}{\rho} + g z_2 + \int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t} ds$$

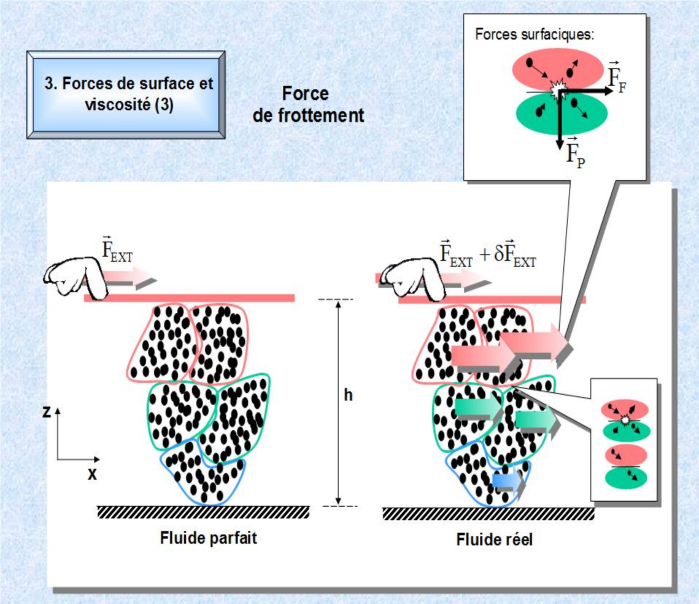
- 3D - Ecoulement permanent d'un fluide parfait de ρ non constante ; force de masse négligeable (cas atmosphérique, on néglige ρ gz

Cas d'un écoulement gazeux à grande vitesse ; on néglige la pesanteur.
La loi de Laplace est valide donc $p = k\rho^\gamma$
avec $k = Cste$ et $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ rapport constant des chaleurs spécifiques du gaz
Exercice Exprimer V_2 en fonction de $V_{1,}p_{1,}p_{2,}\gamma, \rho_1$

Solution : $V_2^2 - V_1^2 = \frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_1}{\rho_1}(1 - (\frac{p_2}{p_1})^{\frac{\gamma-1}{\gamma}})$

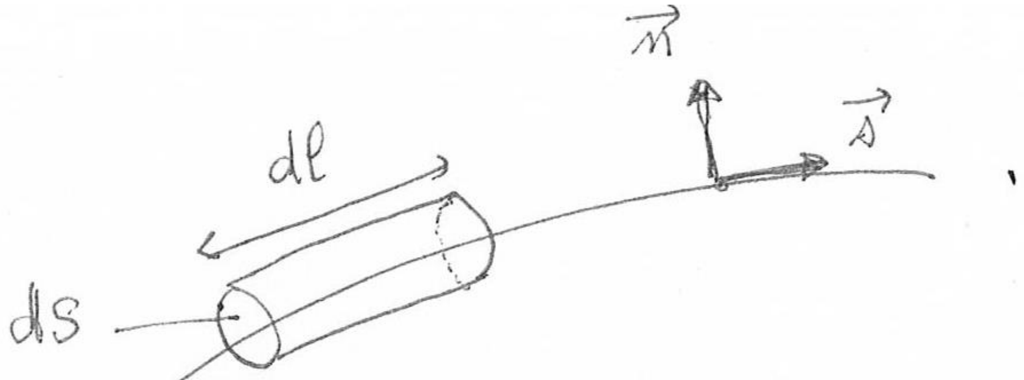
- <u>3E - Ecoulement permanent d'un fluide réel (ou visqueux ; donc non parfait) de ρ constante</u>

La conservation de l'énergie mécanique totale n'est pas vérifiée car il y a du frottement.



(remerciement F. Auclair)

Du coup on considère un mini-cylindre de fluide :



Cylindre longueur dl $[L]$

section dS $[L^2]$

perimètre de la section perim $[L]$

Volume du cylindre $dS \times dl$ $[L^3]$

Surface extérieur cylindre perim $\times dl$ $[L^2]$

La force de frottement par unité de masse, le long du cylindre de périmètre (perim), a pour module $\frac{\tau_0}{\rho}\frac{perim}{dS}$ avec τ_0 la tension de cisaillement en Pascal.

L'équation de Bernoulli devient l'équation de Bernoulli modifiée* :

$$\frac{1}{2}V_1^2+\frac{p_1}{\rho}+gz_1=\frac{1}{2}V_2^2+\frac{p_2}{\rho}+gz_2+\int_1^2\frac{\tau_0}{\rho}\frac{perim}{dS}ds$$

$$\boxed{\frac{1}{2}V_1^2+\frac{p_1}{\rho}+gz_1=\frac{1}{2}V_2^2+\frac{p_2}{\rho}+gz_2+gh_r}$$

le dernier terme peut s'écrire gh_r ou h_r est la perte de charge linéaire, due à l'énergie mécanique perdue, entre 1 et 2, sous forme de chaleur à cause du frottement.

Exemple Une perte de charge linéaire (frottement) est de 20 cm par mètre de tuyau (0,2 en unité SI). Pour un tuyau de longueur L (ex L=10m), le terme h_r est égal à h_r = 0,2*L=0,2*10 = 2m de perte ; donc dans l'équation de Bernoulli modifiée, cela donnerait une perte gh_r de 19,62 m^2/s^2.

> Note *: Cette équation n'est plus réversible, au sens ou l'écoulement va de 1 à 2 ; avec le frottement ayant lieu entre 1 et 2 et le terme de frottement étant donc placé dans la partie « droite » de l'équation, c'est-à-dire du coté 2.

4. **<u>Equation de l'énergie</u>** (retour à Bernoulli classique avec toutes les hypothèses satisfaites pour que celle-ci soit applicable)

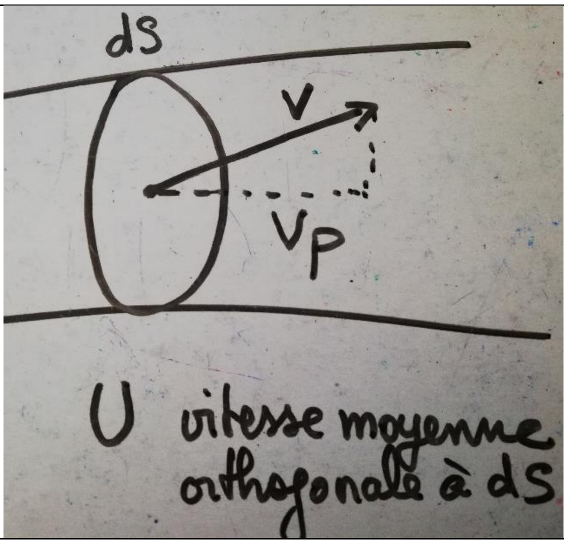
L'équation de Bernoulli est généralisée d'une ligne de courant, avec vitesse V, à un tube de courant, c'est à dire au fluide passant par une surface dS limitée :

$$\alpha\left(\frac{1}{2}\rho V^2\right)+(p+\rho gz)$$
$$= Energie\ mécanique\ totale\ constante$$

avec $\alpha=\frac{1}{S}\int_S\frac{V^2V_p}{U^3}dS$ facteur adimensionnel

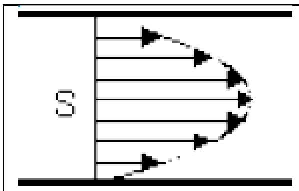
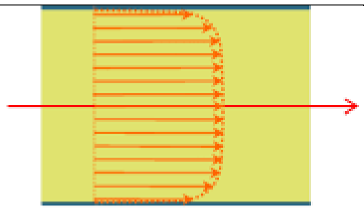
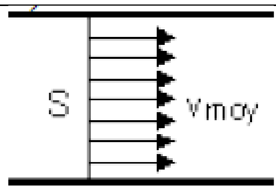
V_p est la composante de la vitesse orthogonale à la section dS du tube de courant

U est la vitesse moyenne orthogonale dans la section dS et U = constante

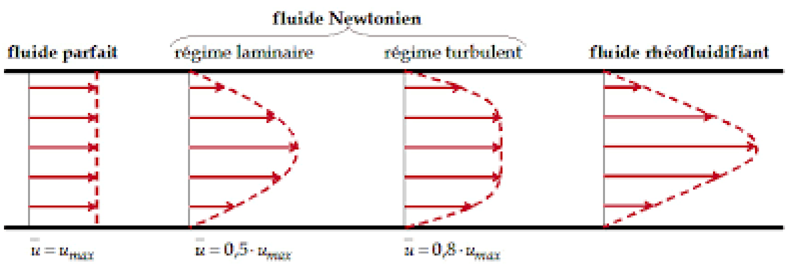


α peut prendre des valeurs entre 1 et 2 :

a) α proche de 2 = l'écoulement est laminaire (écoulement de Poiseuille)
b) α proche de 1.1 = l'écoulement est turbulent (fluide réel)
c) α proche de 1 = l'écoulement est unidimensionnel
(profil de vitesse constant dans la section dS) ; cas d'un fluide parfait.

a) cas laminaire U=Vmax/2	b) écoulement turbulent ex U=0.8 Vmax	c) cas fluide parfait (V=Vp=U)
		

Autre façon d'appréhender ces profils
(en fonction de la relation entre la valeur moyenne U et Vmax)



(Sources : res-nlp.univ-lemans.fr & gpip.cnam.fr)

5. THM d'Euler des quantités de mouvement

Hypothèses :
l'écoulement est permanent
l'écoulement est conservatif

Ce théorème s'énonce :

$$\sum\vec{F} = \int_{S fermée} \vec{V} dQ_m$$

Ce théorème est issu d'une transformation mathématique du principe fondamental de la dynamique $\sum\vec{F} = m\vec{a}$ de façon à énoncer l'accélération sous une forme pratique pour des applications type ingénieur (calcul de forces sur des conduites).

Il s'applique sur un volume (*vol*) entouré par une surface fermée.

rappel : le débit est $dQ = \vec{V} \cdot \vec{n} dS$ avec $\vec{n}$ vecteur unitaire sortant de cette surface.

Le débit massique est défini par :
$dQ_m = \rho dQ = \rho\vec{V} \cdot \vec{n} dS$
donc $\vec{V} dQ_m$ est un débit de quantité de mouvement d'où le nom du théorème.

Si dans une conduite, entre deux sections S1 et S2, les forces agissant sur le fluide sont :

- force de masse $\vec{f} \rho vol$
- forces de pression $-p_1 S_1 \vec{n_1}$ et $-p_2 S_2 \vec{n_2}$
- forces de contact des parois de la conduite sur le fluide $\vec{R}$

et que l'on fait l'hypothèse supplémentaire que ρ est constant alors le THM d'Euler des quantités de mouvement s'écrit:

$$Q_{m1}\overrightarrow{V_1} + Q_{m2}\overrightarrow{V_2} = \vec{R} + \vec{f}\rho vol - p_1 S_1 \overrightarrow{n_1} - p_2 S_2 \overrightarrow{n_2}$$

6. Equations d'Euler , de Navier-Stokes et RANS

Rappel sur l'équation d'Euler
(établie par Léonhard Euler en 1755) s'applique dans le cas d'un fluide parfait,
c'est-à-dire un fluide non visqueux et sans conductivité thermique en écoulement laminaire

$$\rho \frac{d\vec{V}}{\mathrm{dt}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}} p + \rho \vec{f}$$

avec

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}$$

Si on s'occupe uniquement d'un champ de pesanteur $\vec{f} = \vec{g}$ (avec cette écriture vectorielle, on n'impose aucun choix de référentiel)

alors : $$\rho \frac{d\vec{V}}{\mathrm{dt}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}} p + \rho \vec{g} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g}$$

Équation de Navier-Stokes nommée d'après deux scientifiques du XIXe siècle, le mathématicien français, ingénieur des Ponts, Henri Navier (1785-1836 ; https://fr.wikipedia.org/wiki/Henri_Navier) et le physicien George Stokes (1819-1903 ; britannique né en Irlande ; https://fr.wikipedia.org/wiki/George_Gabriel_Stokes).

Le choix de ces deux noms oubliant malheureusement celui du mathématicien et physicien français Adhémar Barré de Saint-Venant (1797-1886 ; https://fr.wikipedia.org/wiki/Adhémar_Barré_de_Saint-Venant), dont le rôle intermédiaire a pourtant été très important.

Les équations de Navier-Stokes s'appliquent pour des fluides visqueux (réels, non parfaits) :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p + \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{V}$$

rappels :

- l'opérateur Laplacien peut s'écrire : $\Delta\vec{V} = \nabla^2\vec{V}$;
- ν est la viscosité moléculaire cinématique (unité m^2/s);

Dans un référentiel tournant, des forces d'entraînement apparaissent (voir cours L3 Dynamique Océanique), l'équation devient :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p + \vec{g} - 2\vec{\Omega} \times \vec{V} + \nu \nabla^2 \vec{V}$$ (unité : accélération)

Ou $$\rho \frac{d\vec{V}}{\mathrm{dt}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}} p + \rho \vec{g} - 2\rho \vec{\Omega} \wedge \vec{V} + \mu \Delta \vec{V}$$ (unité : forces par unité de volume) rappels :

- μ est la viscosité moléculaire dynamique (unité kg /m/s) et $\frac{\mu}{\rho} = \nu$;
- Terme à gauche lié à la vitesse car hydrodynamique ; à droite, les 2 premiers termes (pression et pesanteur*) sont ceux de l'hydrostatique, le troisième terme de la partie de droite est la force de Coriolis avec $\vec{\Omega}$ le vecteur de rotation autour de l'axe terrestre et le quatrième est le terme du aux frottements. (*voir L3, la pesanteur inclut une contribution d'une force d'entrainement)

Équation de Reynolds (ou *RANS- Reynolds Averaged Navier-Stokes equation*) permettent de prendre en compte certains effets dus à la turbulence, en postulant, selon une idée de Joseph Boussinesq, une similitude entre la viscosité moléculaire et un coefficient appelé viscosité turbulente.

La turbulence désigne l'état de l'écoulement d'un fluide, dans lequel la vitesse présente en tout point un caractère tourbillonnaire : tourbillons dont la taille, la localisation et l'orientation varient constamment. Les écoulements turbulents se caractérisent donc par une apparence très désordonnée, un comportement difficilement prévisible et la coexistence de nombreuses échelles spatiales et temporelles. De tels écoulements apparaissent lorsque la source d'énergie cinétique qui met le fluide en mouvement est relativement intense devant les forces de viscosité que le fluide oppose pour se déplacer. À l'inverse, on appelle laminaire le caractère d'un écoulement régulier.

Si on fait plusieurs fois une même expérience pour mesurer la vitesse, on n'obtiendra pas les mêmes valeurs. Alors, plutôt que de rechercher la vitesse instantanée, obtenue avec les équations de Naviers-Stokes vues précédemment, on cherche une vitesse lissée dans le temps, c'est à dire moyennée sur une période de temps dépendant du phénomène étudié et on décompose la vitesse en une partie moyenne et un écart à la moyenne ; soit pour chaque composante de la vitesse :

$$u = \bar{u} + u'$$

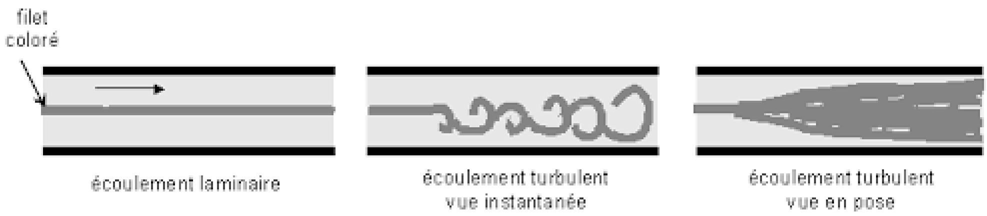


Fig. Expériences de Reynolds sur la turbulence en 1883 (sitelyceejdarc.org)

En effet, dans ce cours, nous avons géré les écoulements comme si ils étaient laminaires (vue du haut) alors que les fluides géophysiques, tels que les masses d'eau océaniques, se comportent comme sur la vue du bas :

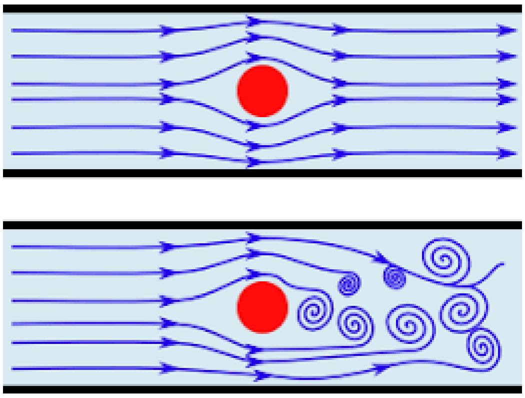


Figure sur le nombre de Reynolds (sciencetonnante.wordpress.com)

Dans l'équation suivante, la vitesse $\vec{v}$ est la partie moyenne de la vitesse et ν_t est la viscosité turbulente, dépendante non pas seulement du fluide mais de l'écoulement (et des échelles des processus étudiés) :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{g} - 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \nu\nabla^2\vec{v} + \nu_t\nabla^2\vec{v}$$

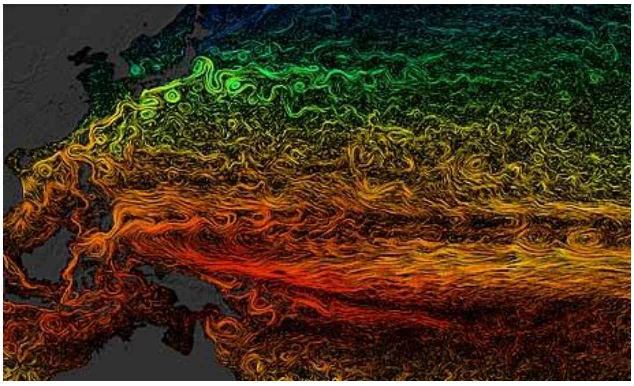
La démarche incluant la mise en place de ce dernier terme $\nu_t\nabla^2\vec{v}$, appelée « fermeture de la turbulence » n'est qu'une possibilité empirique de résolution (une modélisation) des écoulements turbulents et non une « vraie » solution, au sens analytique. En effet, à l'heure actuelle, on n'arrive pas encore à résoudre l'équation RANS dans des milieux turbulents. C'est d'ailleurs un des 7 problèmes de l'an 2000 qui recevront une récompense du Cray Institute si résolu (voir article : https://people.mio.osupytheas.fr/~petrenko/TEACHING/SM22/Unicite_solution_Navier_Stokes.pdf ; cette démonstration s'est avérée inexacte dont le prix est toujours en jeu).

Depuis la moitié du XX siècle les océanographes se sont rendu compte que les mouvements océaniques ont en effet un comportement très turbulent.

Voir la vidéo :
Perpetual Ocean by NASA
http://www.nasa.gov/topics/earth/features/perpetual-ocean.html

mise en ligne en 2012 (modélisation de 2005 à 2007)

et pour la Méditerranée : Facebook Découverte du Vivant ; Courants marins vortex en Méditerranée sur 11 mois



Sea surface current flows visualised by Nasa's Goddard Space Flight Cente