Chapitre 2 HYDROSTATIQUE

Hypothèse : dans un référentiel absolu = fixe = galiléen = inertiel (termes équivalents)

L'hydrostatique est un cas particulier de l'hydrodynamique.

Conditions d'équilibre des liquides
- soit au repos
- soit accélérés en bloc (tout le système subit une accélération constante)

Forces de volume inertie = nulle (au repos)
pesanteur
Forces de surface normales* = orthogonales* = forces de pression
tangentielles = nulles (pas de mouvement relatif entre les particules)

* Comme l'avait compris Blaise Pascal au XVIIème siècle, si des forces tangentielles étaient présentes, le fluide -par définition- bougerait à cause de ces forces et donc ne serait plus « statique ». En statique, les forces ne peuvent donc être qu'orthogonales aux surfaces frontières du fluide.

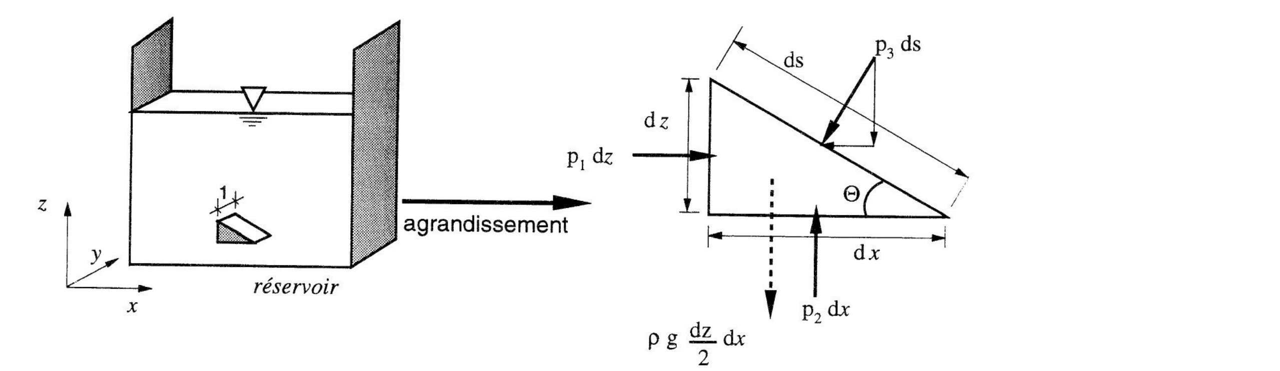
ST .1 PRESSION EN UN POINT D'UN FLUIDE

La pression est une quantité scalaire: p.

L'intensité de la force de pression qui agit sur une surface S est donnée par:

$$F=\int_S p\,dS \quad \text{ou} \quad p=\frac{dF}{dS}$$

Soit un petit prisme triangulaire d'eau d'épaisseur dy=1 *au repos* (voir Fig. ST.I), avec les relations géométriques suivantes: $dx = dl \cos \theta$ et $dz = dl \sin\theta$ (eq.1)



Note : Attention sur la figure l'épaisseur dy est indiquée par un 1 et la longueur oblique dl par ds
En fait ds=dl*dy ; ici dans ce cas particulier ds=dl mais dl est en mètre et ds est en mètre carré. Dans les équations on gardera les notations dy et dl (on préfère utiliser dl que ds pour éviter des confusions entre surface et longueur ; attention à ne pas se mélanger avec la terminologie des équations intrinsèques, voir hydrodynamique, lors des révisions).

Avec le référentiel choisi, les forces en présence sont:
- le poids du fluide contenu dans le prisme est: Pg = (ρ g dx dy dz)/2
$\vec{P_g} = -\rho\, g\, dx\, dy\, dz/2\, \vec{k} = -P_g \vec{k}$

- les forces de pression
Chaque force de pression $\vec{F}$ est une quantité vectorielle s'appliquant nécessairement de façon normale à chaque surface du prisme. La pression, p, est une quantité scalaire.

Les forces de pression s'exerçant suivant l'axe j (F4 et F5 non montrées sur la figure car orthogonales à celle-ci) sont égales et se compensent des deux côtés du prisme. On étudie le prisme dans le plan (xz), donc suivant les vecteurs i et k.
On appelle F1, F2, F3 les forces de pression sur les surfaces suivantes:
$\vec{F1}$ = P1 (dz * dy) $\vec{i}$ sur la surface 1 verticale,
$\vec{F2}$ = P2 (dx * dy) $\vec{k}$ sur la surface 2 horizontale et
$\vec{F3}$ = - P3 (dl * dy) $\vec{n}$ sur la surface 3 oblique avec $\vec{n}$ vecteur sortant de la surface

avec $\vec{n} = \sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}$

Les conditions d'équilibre des forces hydrostatiques sont:
$\sum \vec{Forces} = \vec{0}$

$\vec{Pg} + \vec{F}1 + \vec{F}2 + \vec{F}3 + \vec{F}4 + \vec{F}5 = \vec{0}$

Les composantes de cette équation sur les 3 directions sont nulles :

i) dans la direction horizontale: P1 dz dy – P3 dy dl sinθ = 0
d'où, en utilisant la relation géométrique dz=lsin(θ), éqn ST.1 b, on obtient: P1 = P3

ii) dans la direction verticale:
- ρ g dx dy dz/2 +P2 dx dy -P3 dy dl cosθ = 0
d'où P2 = P3 +1/2 ρ g dz (car dx=lcos(θ) et donc on a simplifié par dxdy)

si l'on réduit l'élément de volume à un point, c'est-à-dire dz ~ 0, on obtient : P2 = P3

On en déduit: Pl = P2 = P3 (eq. 2)

iii) Si on prend en compte l 'épaisseur du prisme selon y, le bilan des forces sera nul aussi suivant $\vec{j}$. En introduisant une force de pression des chaque coté du prisme $\vec{F4}$ et $\vec{F5}$, on aura $\vec{F}4 + \vec{F}5 = p4\vec{j} - p5\vec{j} = \vec{0}$ donc P4 = P5.

La pression est un scalaire et elle agit de façon égale dans toutes les directions en un point donné d'un fluide au repos.

$p=\frac{dF}{dS}$ La pression est la même en un point M quelque soit la direction de dS (avec des petits éléments de surface dS égaux).

Par contre pour calculer la force de pression sur une grande surface S, il faut prendre en compte que la force de pression est vectorielle et que son intensité peut varier sur les différents petits éléments dS de la surface.

ST.2 EQUATIONS DE L'HYDROSTATIQUE

Soit un repère $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ avec $\vec{k}$ orienté vers le zénith, on effectue le calcul d'abord dans la direction z. L'établissement des équations pour les autres directions, x et y, se fait de façon analogue.

Dans le référentiel de la figure (Fig. ST.2), soit un petit cylindre d'eau qui ne se déplace pas.
Les forces qui agissent sur cet élément de volume, (dS dz), le long de la verticale sont:

i) les forces de volume: $\vec{P_g}=-\rho\, g\, dz\, dS\, \vec{k}=-P_g\vec{k}$;

ii) les forces de surface: en z: $p(x,y,z)\,dS\,\vec{k}=p\,dS\,\vec{k}$

en z+dz: $-p(x,y,z+dz)\,dS\,\vec{k}$

égale avec la formule des accroissements finis à $-(p(x,y,z)+\frac{\partial p(x,y,z)}{\partial z}dz)\,dS\,\vec{k}$

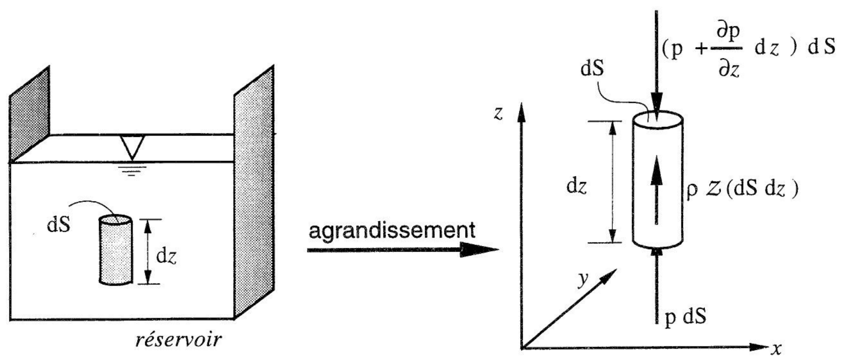


Fig. ST.2

La condition d'équilibre des forces selon z est:

$$p(x,y,z)\,dS-(p(x,y,z)+\frac{\partial p(x,y,z)}{\partial z}dz)\,dS-\rho\, g\, dz\, dS=0$$

Comme p(x,y,z) = p, on peut écrire :

$$pdS-pdS-\frac{\partial p}{\partial z}dz\,dS-\rho\, g\, dz\, dS=0$$

$$\frac{-\partial p}{\partial z}-\rho\, g=0$$

On peut écrire de façon analogue les conditions d'équilibre dans les autres directions x et y (le deuxième terme est nul puisque la gravité ne joue que sur la verticale) :

$\frac{-\partial p}{\partial x}=0$ et $\frac{-\partial p}{\partial y}=0$

et ensuite sous forme vectorielle:

$$\boxed{-\overrightarrow{grad}\, p+\rho\vec{f}=-\nabla p+\rho\vec{f}=\vec{0} \qquad \text{(equ 3)} \qquad \text{ou} \quad \nabla p=\rho\vec{f}}$$

Cette équation vectorielle est l' **équation fondamentale de l'hydrostatique.**

Le premier terme représente les forces de pression par unite de volume et le deuxième les forces de volume par unité de volume. En hydrostatique, on ne considère en général que le champ gravitationnel terrestre:

ATTENTION, il faut choisir un référentiel avant de pouvoir écrire ce champ. Dans la Figure ST2, l'axe des z est vers le zénith. Ce n'est pas toujours le cas en océanographie.

Si z est orienté vers le zénith (alors $\vec{f}=(0,0,-g)$), et que les forces de volume se limitent à la gravité, alors l'équation 3 $\overrightarrow{grad}\, p=\rho\vec{f}$ peut s'écrire sous la forme de 3 équations scalaires :

$$\frac{\partial p}{\partial x}=0$$
$$\frac{\partial p}{\partial y}=0$$
$$\frac{\partial p}{\partial z}=-\rho g=-\gamma$$

La pression est constante dans la direction x et dans la direction y
Par conséquent la pression est constante dans tout plan horizontal.
La pression varie avec z et avec la masse volumique/poids volumique.

ST.3 VARIATION VERTICALE DE LA PRESSION

Grâce à $\nabla p=\rho\vec{f}$ avec un choix de référentiel avec z orienté vers le zénith (alors $\vec{f}=(0,0,-g)$), et les forces de volume se limitant à la gravité.

ST .3.1 Fluide à masse volumique constante

1 ° Pour un fluide **à masse volumique constante** (ρ = Cte), l'intégration de l'éqn ST3 entre deux limites Z1 et Z2, mesurées par rapport au même niveau de référence (PdR), qu'on peut choisir de façon arbitraire donne (voir Fig. ST.3):

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

$$\int_{Z1}^{Z2} \frac{\partial p}{\partial z} dz = -\int_{Z1}^{Z2} \rho g dz$$

comme ρ et g sont constants

$$\int_{Z1}^{Z2} \frac{\partial p}{\partial z} dz = -\rho g \int_{Z1}^{Z2} dz$$

$$p(z_2) - p(z_1) = p_2 - p_1 = -\rho g (z_2 - z_1) \quad \text{(equ 4)}$$

Cette relation signifie que la variation de pression entre les 2 niveaux est proportionnelle à la différence de hauteur entre les deux niveaux; et que cette variation est linéaire.

En général un liquide peut être considéré comme incompressible.

Note: dans le milieu marin, la masse volumique dépend de z et il y a un effet de compressibilité qui ne peut pas être négligé sur des profondeurs importantes. Il faut donc utiliser la formule:

$$\int_{Z1}^{Z2} \frac{\partial p}{\partial z} dz = -g \int_{Z1}^{Z2} \rho\, dz$$

Fluide à masse volumique constante (suite)

L'équation 4 peut être réécrite: $p(z_2) + \rho g\, z_2 = p(z_1) + \rho g\, z_1$

$$p + \rho g z = Cte \quad \text{.(equ 5)}$$

On écrit fréquemment

$$p^* = p + \rho g z = Cte$$

Donc dans tout le champ de pesanteur occupé par un fluide en équilibre, la pression étoilée, p*, reste constante.

Note :
L' interprétation énergétique est que la pression étoilée, p*, représente l'énergie potentielle par unité de volume dans le champ de pesanteur, g, sous la pression, p.

ou $\frac{p^*}{\rho g} = \frac{p}{\rho g} + z$

L'interprétation « ingénieurs » est que p*/(pg) est appelée charge piézométrique (ou ligne piézométrique). Elle reste constante dans un fluide au repos. Le terme p/(ρg) représente la charge due à la pression et z la charge potentielle.

ST .3.2 Pression absolue -pression relative

Dans le cas d'une surface libre (à la hauteur $z_2 = z_a$ par rapport à un plan de référence donné), exposée à la pression atmosphérique, p_a (voir Fig. ST.3), on a $p(z_2)=p_a$ et la pression dans le fluide s'écrit en reprenant d'abord l'équation 4:

$$p(z_2) - p(z_1) = p_2 - p_1 = - \rho g(z_2 - z_1)$$
$$p_a - p_1 = - \rho g(z_a - z_1) \quad = - \rho g\, h$$

donc $p_1 = p_a + \rho g\, h$

La pression p_1 est mesurée par rapport au même plan de référence que la pression atmosphérique, p_a, qui elle-même est donnée par rapport au vide absolu.

Ainsi, **p_1 est appelée *pression absolue.***

Attention à ne pas mélanger p_a et l'unité de pression du SI: le Pascal: Pa
En effet la pression atmosphérique est généralement de l'ordre de 10^5 Pa.

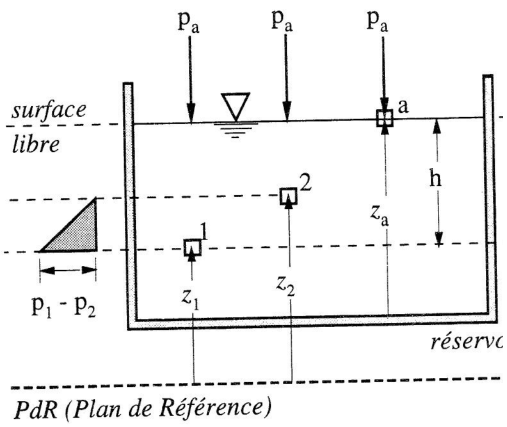


Figure ST3

Dans la pratique, on préfère souvent utiliser des pressions mesurées par rapport à la pression atmosphérique. On utilise alors le terme de pression relative.

$$p'_1 = \rho\, g\, h$$

La relation entre la pression absolue, p_1 et la pression relative, p'_1 s'écrit :

$$p_1 = p'_1 + p_a$$

Si la pression atmosphérique, p_a est la même en deux points 1 et 2, la différence entre les pressions absolues p_2 et p_1 est identique à celle entre les pressions relatives p'_2 et p'_1

$$p_2 - p_1 = p'_2 - p'_1 = - \rho\, g(z_2 - z_1)$$

rappels:

-La pression atmosphérique standard est définie de la manière suivante:

C'est la pression au niveau de la mer qui produit une élévation de 760 mm d'une colonne de mercure, soit une pression de 1.013 x 10^5 Pa, en admettant ρ = 1. 225 kg/m^3 comme masse volumique de l'air et *T=15* °C ou 288,15 K comme température.

Notons que la pression atmosphérique locale est fort probablement différente de la pression atmosphérique standard.

- 1 bar = 10^5 Pa

Vérifiez que si la pression atmosphérique est à peu près d'1 bar, à 20 mètres de profondeur, la pression sera approximativement de 3 bars.

ST .3.3 Fluide de masse volumique non constante

Avec les mêmes hypothèses que précédemment (référentiel avec z vers le zénith) , on a :

$$\frac{dp}{dz}=-\rho g$$

Pour un fluide **de masse volumique non constante**, une relation supplémentaire entre la masse volumique, p, la pression, p, et la température T du fluide est nécessaire. S'il s'agit d'un gaz parfait, :

$$\frac{p}{\rho}=\frac{RT}{M} \quad \text{donc} \quad \rho=\frac{Mp}{RT}$$

où p est la pression absolue, R la constante du gaz parfait et *T* la température absolue et M la masse molaire.

$$\frac{dp}{dz}=-\rho g=-\frac{Mp}{RT}g \quad \text{donc :} \quad \frac{dp}{p}=-\frac{Mg}{RT}dz$$

$$\int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{p}=-\frac{Mg}{RT}\int_{Z_1}^{Z_2}dz$$

$$\ln p_2-\ln p_1=-\frac{Mg}{RT}(Z_2-Z_1) \quad \text{ou} \quad \ln\frac{p_2}{p_1}=-\frac{Mg}{RT}(Z_2-Z_1)$$

$$\frac{p_2}{p_1}=e^{-\frac{Mg}{RT}(Z_2-Z_1)} \quad \text{donc} \quad p_2=p_1 e^{-\frac{Mg}{RT}(Z_2-Z_1)}$$

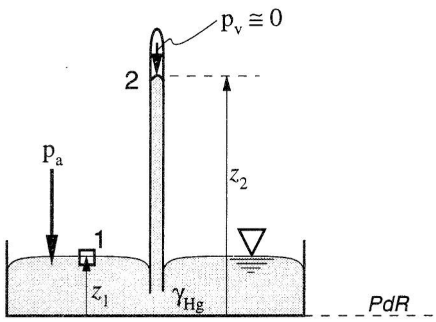
La relation est plus complexe que dans les fluides de masse volumique constante étudiés précédemment.

ST.4 MESURE DE PRESSION

Il existe différentes sortes d'instruments mesurant la pression, ou une différence de pression.
On les classe en général en deux catégories, les uns utilisent le principe de "force hydrostatique en équilibre », les autres le principe de la "déformation d'un élément élastique sous l'action de forces de pression ».

Instruments basés sur le principe de « force hydrostatique en équilibre »:

- **Baromètre à mercure** *(mesure la pression atmosphérique)*
Un tube rempli de mercure, de poids volumique y = 133.42 kN/m^3 Hg et de pression de vapeur Pv=O, est plongé dans un récipient rempli de mercure par son extrémité ouverte. Le niveau du mercure dans le tube se stabilise à une certaine hauteur:

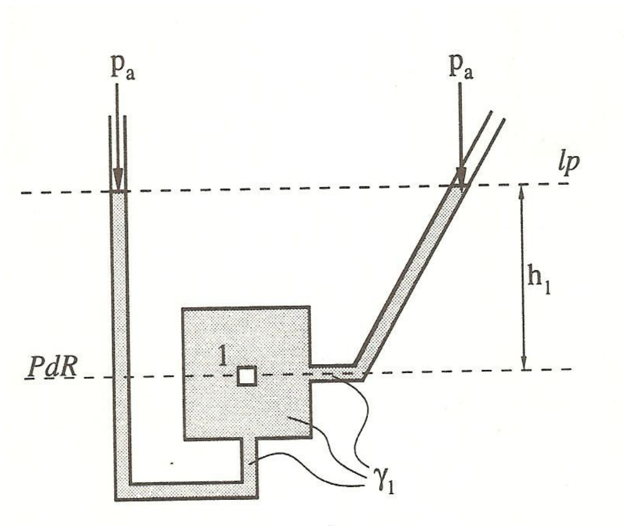


$$p_2 - p_1 = p_v - p_a = -\rho_{Hg}\, g\,(z_2 - z_1)$$

La hauteur du mercure dans le tube, $(z_2 - z_1)$, dépend exclusivement de la pression atmosphérique ambiante donnée par $p_a = \rho_{Hg}\, g\,(z_2 - z_1)$

- **piézomètre** *(mesure la pression relative)*

Le piézomètre est un tube transparent, vertical ou incliné, connecté au fluide considéré; il permet de mesurer la pression. On obtient: **la pression relative,** si l'on mesure seulement h_1 **.** Le piézomètre, s'il est utilisable, est un dispositif simple. Toutefois, on ne peut pas l'utiliser lorsque la pression est très élevée (les dimensions du tube deviennent alors trop importantes), ou très faible (la lecture devient trop imprécise). Il n'est pas utilisable non plus si le fluide est un gaz, qui évidemment s'échapperait du tube.



Note Du grec ancien πιέζω, piézô (« serrer, presser ») ; d'où
piezo : qui se réfère à la pression

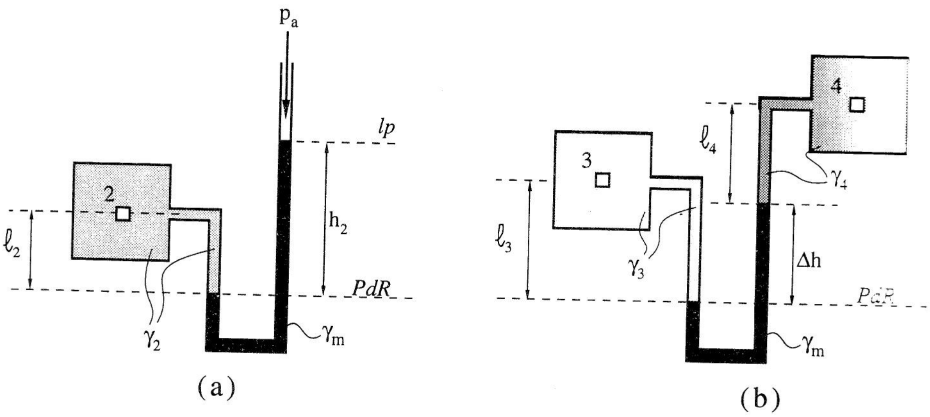
La pression relative dans la conduite (fluide de poids volumique γ_1) est égale à $p = \rho\, g\, h_1$

Applications mesures de la pression dans les nappes phréatiques

note :Si la pression atmosphérique est connue, la pression absolue peut être estimée.

- Manomètre (mesure la pression relative)

Le manomètre est un tube transparent en forme de "U" permettant de mesurer la pression au moyen d'un liquide de manomètre dont le poids volumique γ_m est souvent supérieur à celui du récipient dont on désire mesurer la pression (ici $\gamma_m > \gamma_2$).



Attention en calculant la pression, la masse volumique ou le poids volumique n'est pas égal partout ; il faut choisir un référentiel de référence, puis bien faire attention si les différences de coordonnées Z sont positives et donc peuvent être associées à l (valeur positive) ou négative et alors sont associées à -l (voir Tds).

Démontrez que:

pour (a) $p_2=\rho_m g h_2-\rho_2 g l_2$ pression relative

On obtient la pression absolue si la pression atmosphérique p_a est connue

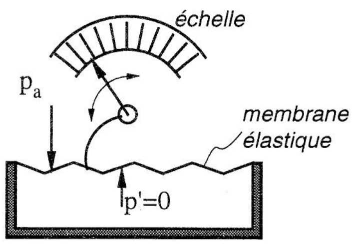
$$p_2=p_a+\gamma_m h_2-\gamma_2 l_2$$

On peut aussi utiliser un manomètre pour mesurer la différence de pression entre deux récipients (ex b). Vérifier que

$$p_3-p_4=\gamma_4 l_4+\gamma_m \Delta h-\gamma_3 l_3$$

Instruments basés sur le principe de la "déformation d'un élément élastique sous l'action de forces de pression »:

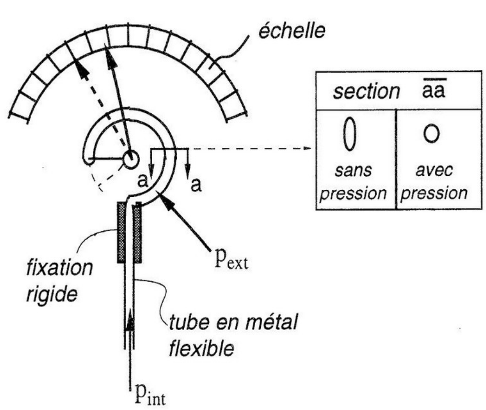
-baromètre anéroïde ou manomètre mécanique (*(mesure la pression atmosphérique)*



Soit un petit réservoir fermé par une membrane flexible, à l'intérieur duquel on fait le vide, p' = 0. De l'extérieur, la pression ambiante s'applique sur la membrane élastique et provoque une déformation. La pression ambiante (généralement la pression atmosphérique) est indiquée sur une échelle par un système mécanique muni d'un indicateur à aiguille étalonné par le fabricant du baromètre.

Wikipédia: « Les manomètres anéroïdes utilisent l'élasticité d'une pièce métallique : sa déformation (déflection d'un diaphragme, variation de courbure d'un tube enroulé, etc.) mesure de manière fidèle la différence de pression appliquée. L'adjectif « anéroïde », qui signifie « sans le truchement d'un fluide », voulait distinguer à l'origine ces manomètres « secs » des manomètres à colonne de liquide. Toutefois, ces manomètres anéroïdes peuvent parfaitement mesurer la pression interne d'un liquide, et ce ne sont pas les seuls capteurs de pression exempts de fluide interne. Pour cette raison, on les qualifie aujourd'hui souvent de manomètres mécaniques. »

- manomètre de Bourdon *(mesure la pression relative)*



Voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Manomètre#Mécanisme_du_manomètre_de_Bourdon

ST 5 Forces hydrostatiques sur des parois

Soit une surface de géométrie quelconque immergée dans un liquide. En général on demande de répondre aux trois questions suivantes

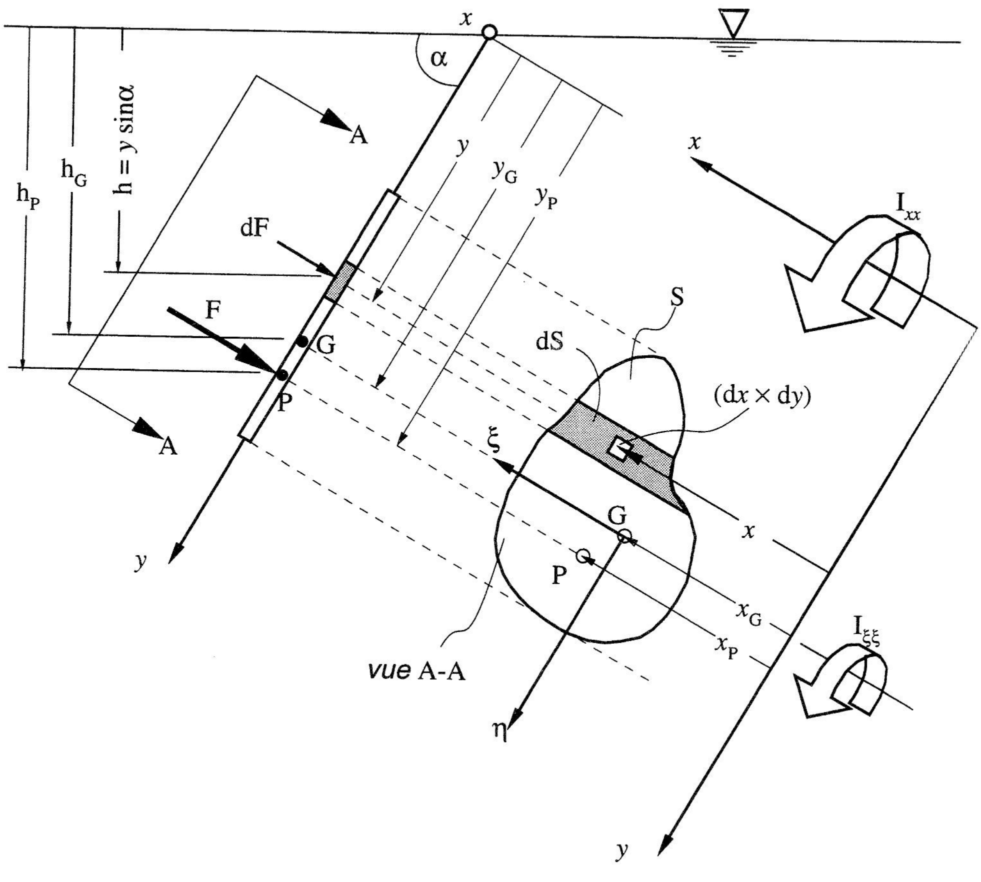
Questions :

- quelle est l'intensité de la force sur une surface ?
- ou est le point d'application P de cette force ?
- quelle est la direction de cette force ?

On étudiera les cas pour :

- forces hydrostatiques sur une surface plane (inclinée, horizontale ou verticale)
- forces hydrostatiques sur une surface quelconque

5.1 Forces hydrostatiques sur une surface plane inclinée



$h = y \sin\alpha$

la pression en M(x,y) point de la plaque est :

$p_M = \rho g h$

si on néglige la pression atmosphérique

la force agissant sur un élément infinitésimal de surface dS est $dF = p\, dS = \rho g h\, dS$

Comme $h=y\sin\alpha$ alors $dF=p\,dS=\rho g\,h\,dS=\rho g\,y\sin\alpha\,dS$

L'intensité de la force résultante agissant sur la paroi S est :

$$F=\int_S dF=\int_S \rho g\,y\sin\alpha\,dS=\rho g\sin\alpha\int_S y\,dS=\rho g\sin\alpha\,S\,y_G$$

ou G est le centre de gravité de la surface immergée G de coordonnées : x_G, y_G

<u>Rappel</u> Le centre de gravité d'une plaque à deux dimensions est défini par :

$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{p}\int_S p_i\overrightarrow{OG_i}$ ou p est le poids total de la plaque composé de sous-ensembles de poids pi et de centre de gravité Gi

Si la plaque est homogène (poids également réparti), on a :

$S\,x_G=\int_S x\,dS$ et $S\,y_G=\int_S y\,dS$

avec $S\,x_G=\int_S x\,dS=\int_x\int_y x\,dx\,dy$

si x ne dépend pas de y on peut du coup intégrer :

$S\,x_G=\int_S x\,dS=\int_x\int_y x\,dx\,dy=\int_x x\,dx\int_y dy$ (c'est une multiplication entre les 2 intégrales)

Donc l'intensité de la force sur la plaque est égale à

$F=(\rho g\,y_G\sin\alpha)S$

donc :

$$\boxed{F=p_G S \qquad \text{(equation 6)}}$$

L'intensité de la force de pression sur la surface S est égale à la pression agissant au centre de gravité de cette surface multipliée par la surface.

Mais cela ne veut pas dire que la force de pression s'applique au centre de gravité. Elle s'applique en P, appelé centre de poussée, ou centre de pression P de coordonnées : x_P, y_P

<u>Ou se situe P ?</u> (démonstration en supplément)

On peut le calculer en utilisant le moment de la force par rapport aux axes qui a pour propriété :

$\int_S x\,dF=x_P\int_S dF$

$\int_S y\,dF=y_P\int_S dF$

On cherche d'abord l'ordonnée du centre de poussée P

On utilise le fait que $dF=p\,dS=\rho g\,h\,dS$

et on l'inclut dans l'équation pour y :

$\int_S y\,dF=y_P\int_S dF$

comme $h=y\sin\alpha$ le terme de gauche devient $\int_S y^2 \sin\alpha\rho\, g\, dS=\sin\alpha\rho\, g\int_S y^2\, dS$
et celui de droite $y_P\int_S \rho\, g\, h\, dS=y_P\int_S \rho\, g \sin\alpha\, y\, dS=\rho\, g\sin\alpha\, y_P\int_S y\, dS=\rho\, g\sin\alpha\, y_P\, y_G\, S$

Donc en remettant ces deux termes dans l'égalité, on obtient : $\int_S y^2\, dS=y_P\, y_G\, S$
L'ordonnée du centre de poussée est donnée par :

$$y_P=\frac{\int_S y^2\, dS}{y_G\, S}=\frac{I_{xx}}{y_G S} \qquad \text{(équation 7)}$$

$I_{xx}=\int_S y^2\, dS$ est le deuxième moment d'inertie par rapport à l'axe des x passant par 0.

<u>Supplément</u> (niveau difficulté ++, calcul théorique): Si on appelle
$I_{\xi\xi}$ le deuxième moment d'inertie par rapport à l'axe ξ (parallèle à l'axe x) passant par G, centre de gravité de la plaque, et
$I_{\eta\eta}$ le deuxième moment d'inertie par rapport à l'axe η (parallèle à l'axe y) passant par G,
et
$I_{\xi\eta}$ est le produit d'inertie de la surface S dans le plan
les propriétés de ces moments sont :

$$I_{xx}=I_{\xi\xi}+y_G^2 S$$
$$I_{yy}=I_{\eta\eta}+x_G^2 S$$
$$I_{xy}=I_{\xi\eta}+x_G\, y_G\, S$$

Rappels des définitions dans le référentiel (G,ξ,η)

$$I_{\xi\xi}=\int_S \eta\eta\, dS$$
$$I_{\eta\eta}=\int_S \xi\xi\, dS$$
$$I_{\xi\eta}=\int_S \eta\xi\, dS$$

Les moments Ixx, Iyy et Ixy sont dans le référentiel (O,x,y).
Attention les bornes d'intégration ne sont pas les mêmes dans les deux référentiels (voir section 5.2)

Pour savoir ou est positionné P par rapport à G en ordonnée, on calcule y_P-y_G en utilisant l'équation 7 :

$$y_P-y_G=\frac{I_{xx}}{y_G S}-y_G=\frac{I_{xx}-y_G^2 S}{y_G S}=\frac{I_{\xi\xi}}{y_G S}$$

Un moment du deuxième ordre est toujours positif (sommation de carrés), y_G aussi compte tenu des axes choisi et S aussi, donc
$y_P-y_G\geqslant 0$

le centre de pression est toujours situé en dessous du centre de gravité G

On cherche maintenant l'abscisse du centre de poussée P
En reprenant la même démarche que pour y, en utilisant :

$$\int_S x\,dF = x_P \int_S dF$$

et $dF = p\,dS = \rho\, g\, h\, dS = \rho\, g\, y \sin\alpha\, dS$

on obtient :

$$\int_S x\,dF = x_P \int_S dF$$

$$\int_S x\,\rho\, g\, y \sin\alpha\, dS = x_P \int_S \rho\, g\, y \sin\alpha\, dS$$

g, $\sin\alpha$ et ρ étant constants, on peut les sortir des deux côtés de l'équation, on a :

$$\int_S x\, y\, dS = x_P \int_S y\, dS = x_P\, y_G\, S$$

donc : $$x_P = \frac{\int_S x\, y\, dS}{y_G\, S} = \frac{I_{xy}}{y_G\, S}$$ (équation 8)

$I_{xy} = \int_S xy\, dS$ est le produit d'inertie de la surface S dans le plan (0, x, y).

<u>Ou est situé le point P par rapport à G sur l'axe des abscisses ?</u>

En soustrayant x_G à l'équation 8, on obtient :

$$x_P - x_G = \frac{I_{xy}}{y_G\, S} - x_G = \frac{I_{xy} - x_G\, y_G\, S}{y_G\, S} = \frac{I_{\xi\eta}}{y_G\, S}$$

Attention : le produit d'inertie n'est pas forcement positif contrairement au moment d'inertie (qui est une sommation de carrés) donc on ne peut rien dire sur le positionnement de P par rapport à G en abscisse.

<u>Récapitulatif</u> (connaître la formule pour le centre de gravité ; les formules des moments sont à comprendre mais pas à connaître par cœur . Savoir les calculer dans des cas simples, ex voir section 5.2)
Les moments Ixx, Iyy et Ixy sont dans le référentiel (O,x,y).

Rappels :

- G centre de gravité / $\begin{cases} S x_G = \int_S x \, dS \\ S y_G = \int_S y \, dS \end{cases}$

- I_{xx} 2e moment par rapport à l'axe des x
  moment d'inertie ....

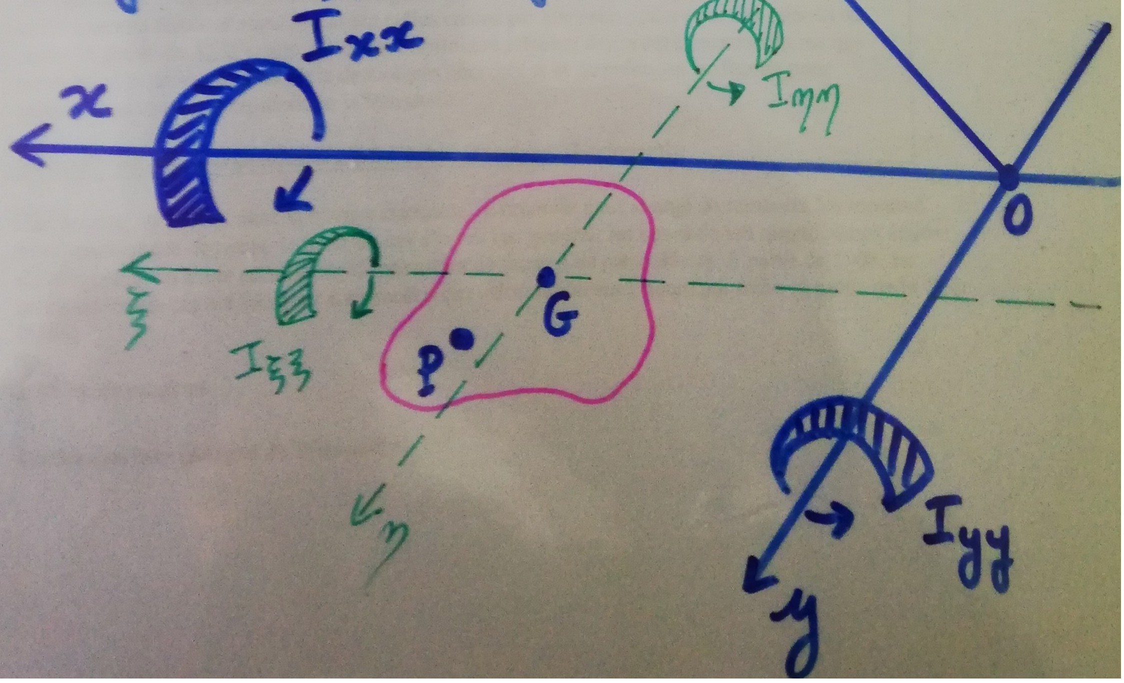
$I_{xx} = \int_S y^2 \, dS$

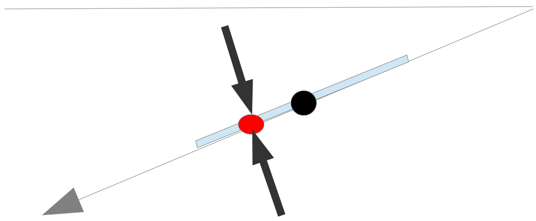
$I_{yy} = \int_S x^2 \, dS$

$I_{xy} = I_{yx} = \int_S xy \, dS$

- $I_{xx} = I_{\xi\xi} + y_G^2 S$

$I_{xy} = I_{\xi\eta} + x_G y_G S$



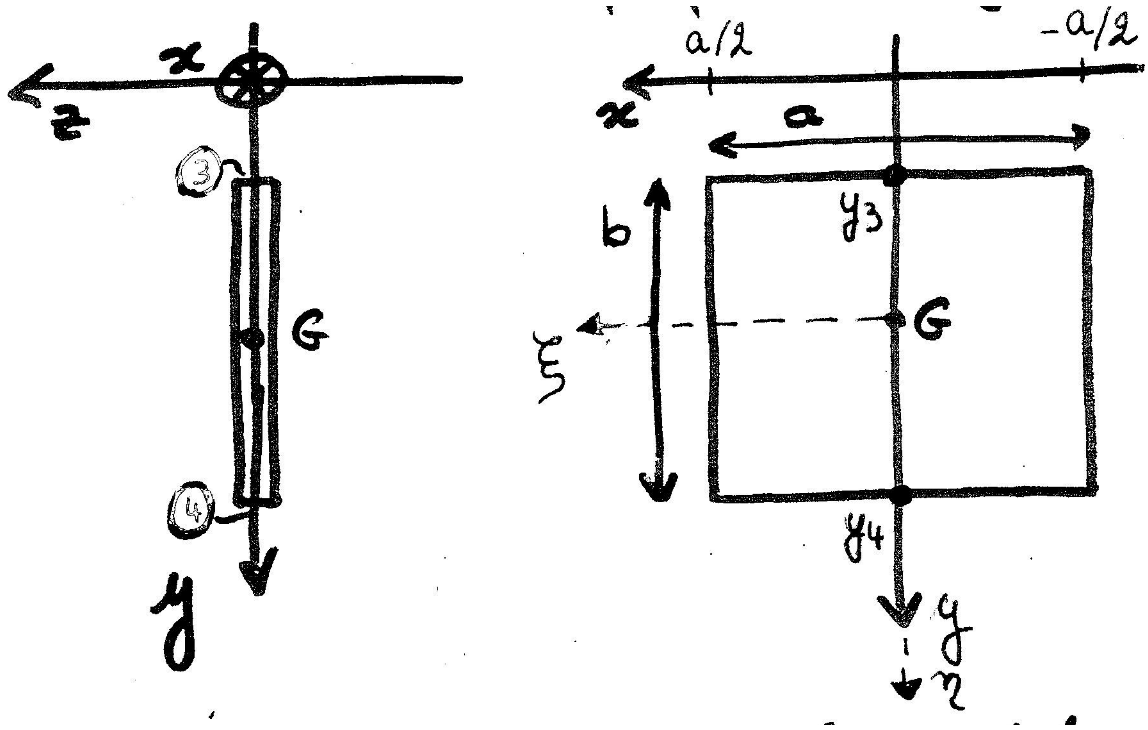


La force $\vec{F}$ et son opposé $-\vec{F}$ s'exercent de chaque côte de la plaque au centre de poussée P (point rouge situé sous le point noir représentant le centre de gravité G)

La direction de la force F est normale à la surface S ; ceci est toujours vrai en hydrostatique.
Une force identique (mais de sens opposé) s'exerce de chaque côté de la plaque (dont l'épaisseur n'est ici pas prise en compte)

5.2 **Forces hydrostatiques sur une surface plane en position verticale**

Considérons une plaque rectangulaire de largeur a (direction x) et longueur b (direction y) ; voir schéma suivant.



S = ab
b = y4- y3

L'intensité de la force hydrostatique est : $F = p_G S = \gamma\, y_G S$
Comme la plaque est homogène, l'ordonnée du centre de gravité est donnée par :

$$y_G = y_3 + \frac{(y_4 - y_3)}{2} = \frac{y_3 + y_4}{2}$$

donc

$$F = \gamma \frac{y_3 + y_4}{2} S$$

<u>Ou est le centre de poussée P ?</u>

Les coordonnées de P sont données par

$x_P = x_G + \frac{I_{\xi\eta}}{y_G S}$ et $y_P = y_G + \frac{I_{\xi\xi}}{y_G S}$ avec le moment et le produit calculés dans le repère (G, ξ, η)

Attention à bien repérer les limites des intégrales dans ce repère centré sur G

$$I_{\xi\eta} = \int_S \xi\eta \, dS = \int_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} \xi\eta \, d\xi \, d\eta$$

Comme la plaque est un rectangle, les deux coordonnées ξ *et* η sont indépendantes et on peut donc séparer les deux intégrations en les multipliant entre elles et écrire :

$$I_{\xi\eta} = \int_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} \xi\eta \, d\xi \, d\eta = \int_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}} \xi \, d\xi * \int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} \eta \, d\eta = [\frac{\xi^2}{2}]_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}} * [\frac{\eta^2}{2}]_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}}$$

$$I_{\xi\eta} = (\frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{8}) * (\frac{b^2}{8} - \frac{b^2}{8}) = 0 * 0 = 0$$

Donc $x_P = x_G$ et

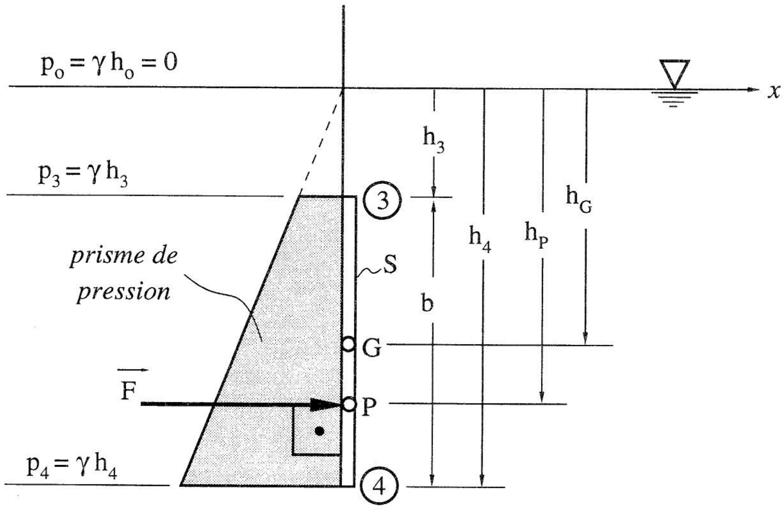
$I_{\xi\xi} = \int_S \eta^2 \, dS = \int_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} \eta^2 \, d\xi \, d\eta$ La aussi, on peut séparer les deux intégrations :

$$I_{\xi\xi} = \int_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} \eta^2 \, d\xi \, d\eta = \int_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}} d\xi * \int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} \eta^2 \, d\eta = [\xi]_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}} * [\frac{\eta^3}{3}]_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}}$$

$$I_{\xi\xi} = \frac{1}{3} a (\frac{b^3}{8} + \frac{b^3}{8}) = \frac{a b^3}{12}$$

Donc :

$$y_P = y_G + \frac{a b^3}{12 \, y_G S}$$



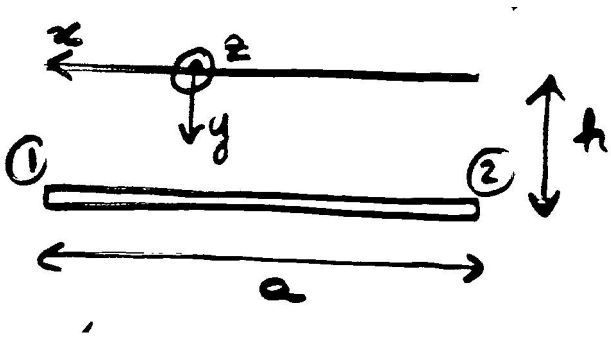
La force $\vec{F}$ s'applique normalement à la surface au point P, situé sous le point de gravité G

Remarquez que la variation de pression est linéaire entre le point 3 et le point 4.

EXERCICE vérifiez que vous trouvez le même résultat en calculant les coordonnées de P avec les formules $x_P = \frac{I_{xy}}{y_G S}$ et $y_P = \frac{I_{xx}}{y_G S}$ avec le moment et le produit calculés dans le repère (0,x,y).

Note : cette fois-ci, le repère est centré sur 0 ; les limites des bornes d'intégration ne seront pas les mêmes.

5.3 **Forces hydrostatiques sur une surface plane en position horizontale**



Tous les points de la plaque ont la même ordonnée (profondeur) y=h .
Les pressions au point 1 et 2 et partout sur la plaque sont égales $p = p_1 = p_2$

$$p = \rho g h = \gamma h$$

L'intensité de la force sur la plaque S=ab est :

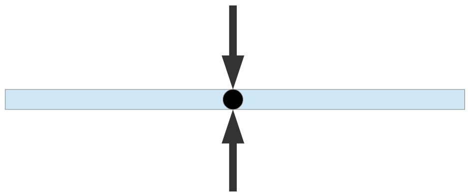
$$F = p_G S = \gamma h a b$$

égale au poids de la colonne d'eau au dessus de la plaque.

Dans le cas particulier d'une plaque horizontale, le point P est confondu avec le centre de gravité

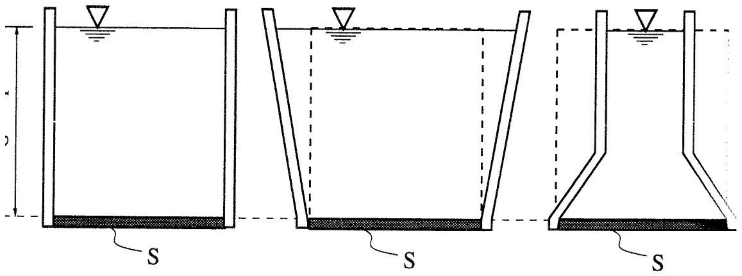
EXERCICE vérifiez que $I_{\xi\eta}$ et $I_{\xi\xi}$ sont nuls.

Représentation graphique :



La force s'applique normalement à la surface au point P (= G).

Note : Quelque soit la forme du réservoir (si ils sont remplis du MEME liquide) rempli à la MEME hauteur h, les fonds de MEME surface sont soumis à la MEME force de pression.



5.4 **Forces hydrostatiques sur une surface quelconque**

La force hydrostatique $\vec{F}$ s'appliquant sur une surface homogène quelconque s'obtient par le calcul de ses composantes horizontales et verticales. Ici avec le référentiel de la figure, on aura : $\vec{F}=-F_h\vec{i}+F_v\vec{j}$ en prenant Fh et Fv les valeurs absolues des composantes horizontales et verticales du vecteur force de pression.

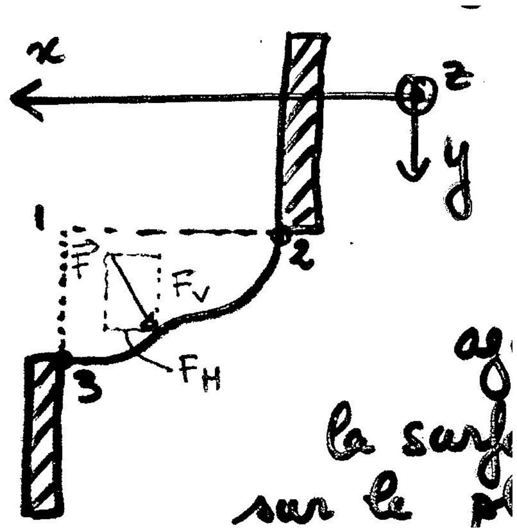
L'intensité de la force $\vec{F}$ est alors

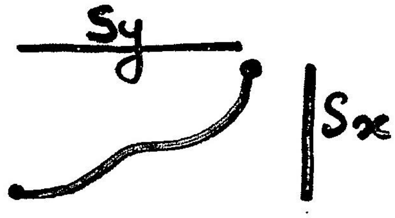
$$F=\int_S dF=\sqrt{Fh^2+Fv^2}$$

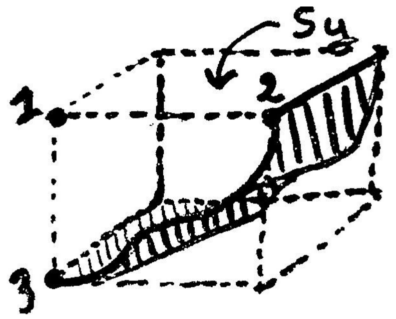
Si la surface ne varie pas suivant l'axe z alors le problème se réduit à 2 dimensions et la composante horizontale est égale à la composante suivant x (Fh = Fx). C'est la force hydrostatique qui agirait sur la projection de la surface S selon l'axe des x sur le plan zy (Sx, qui est une paroi verticale).

$$F_h=\int_{S_x} dF_x=p_{G_x}S_x$$ Si la surface est homogène, alors :

$$F_h=\gamma\frac{1}{2}(y_1+y_3)S_x$$







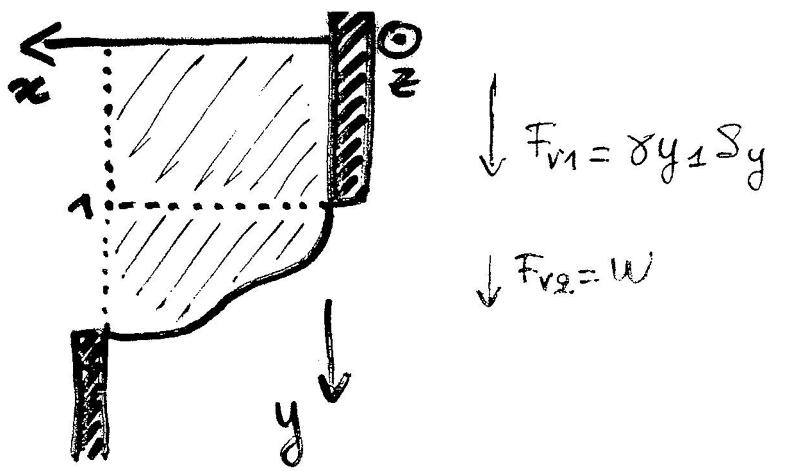
La composante verticale (Fv) correspond au poids de la colonne d'eau au dessus de la surface qui se décompose en deux parties :

1) le poids au dessus de la surface horizontale Sy (projection le long de l'axe y de la surface S sur le plan horizontal passant par les points 1 et 2 qui est une plaque horizontale) ; équivalent au cas de la plaque horizontale $F_{v1}=\gamma\, y_1 S_y$

2) le poids du volume compris entre la surface horizontale Sy et la surface quelconque S :

$$F_{v2}=W$$

celui-ci dépend de la forme de la surface quelconque et doit être calculé dans chaque cas spécifiquement.



Au total, la force est égale à : $\vec{F}=-F_h\vec{i}+F_v\vec{j}=-F_h\vec{i}+(F_{v1}+F_{v2})\vec{j}$

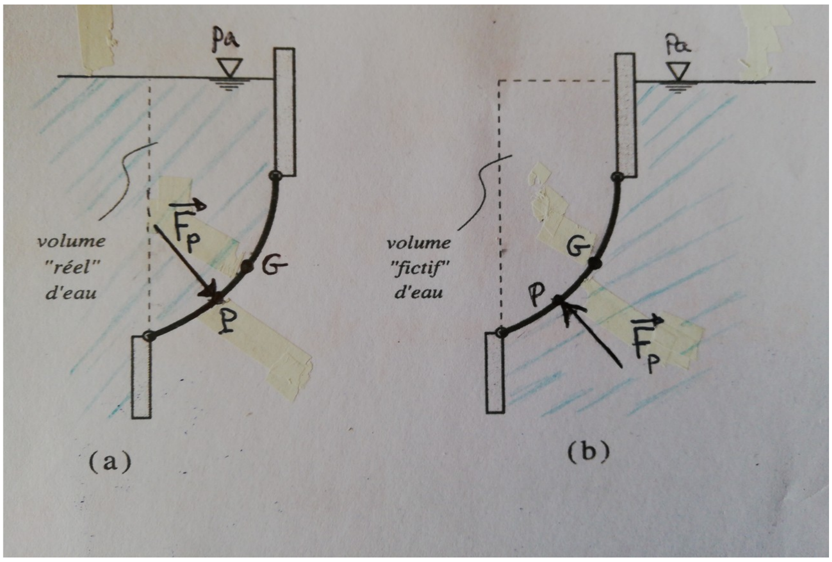
et son intensité est donc égale à :

$$F=\int_S dF=\sqrt{Fh^2+(F_{v1}+F_{v2})^2}$$

Suppléments :

- Suivant la géométrie de la paroi, le centre de poussée P est +/- facile à calculer. Se rappeler que – au centre de poussée- la force est orthogonale à la paroi peut aider à calculer où est P (voir Tds). En effet on peut par exemple calculer l'angle α que fait $\vec{F}$ avec l'horizontale par rapport à ces deux composantes :
$\alpha = Arctg(\frac{F_v}{F_h})$ et en déduire ou est P.

- L'intensité de la force est la même que l'on considère un coté de la paroi (le coté qui fait face à la surface) ou l'autre coté :



Cas de gauche la « piscine » est à gauche avec un hublot regardant vers le bas : on calcule la force de pression de l'eau sur la paroi courbe. La force F s'applique verticalement vers le bas. C'est le poids de la colonne réelle de liquide s'appuyant sur la paroi.

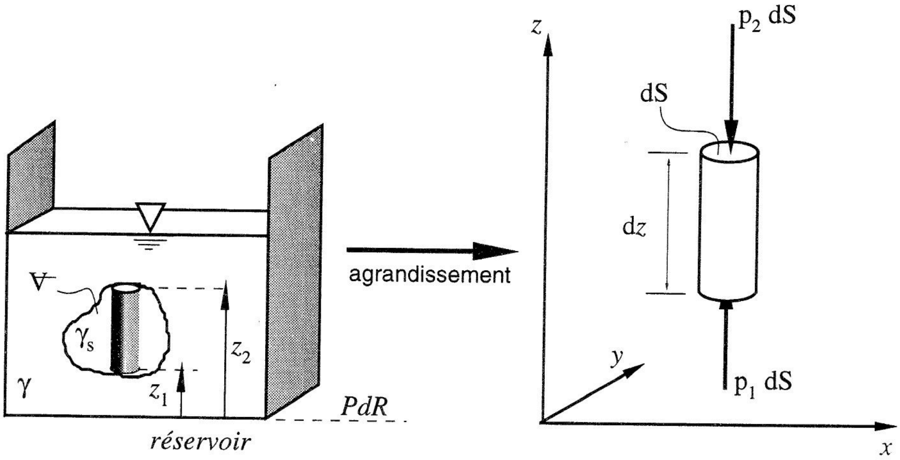
Cas de droite la « piscine » est à droite avec un hublot regardant vers le haut : on calcule la force de pression de l'eau sur la paroi courbe. La force F s'applique verticalement vers le haut. C'est le poids de la colonne « fictive » de liquide s'appuyant sur la paroi.

L'intensité de la force est la même dans les deux cas ; mais la direction change.

ST 6 Forces hydrostatiques sur des corps immergés.

6.1 Force d'Archimède

Supposons qu'un corps solide de poids volumique γ_S et de volume Vs se trouve immergé (entièrement ou partiellement) dans un liquide au repos de poids volumique γ



(sur le dessin à gauche, le corps est complètement immergé ; on considère un mini-cylindre de ce corps qui est zoomé à droite. Sur le dessin à droite, la Force de pression liée à p1 devrait être un peu plus grande que celle liée à p2)

Soit H la hauteur total de fluide dans le récipient (importante ici car le niveau 0 du référentiel est situé en bas du récipient ; il n'interviendrait pas si le niveau était situé à la surface libre)

Le corps est en équilibre hydrostatique. La somme des forces est nulle. La seule force de volume est le poids (W) sur la verticale. On considère une « particule fluide infinitésimale » (le mini-cylindre du dessin de droite), de forme cylindrique selon l'axe des z

dV = dS (z2-z1) = dS dz

Les forces horizontales s'annulent (symétrie cylindrique du mini – cylindre considéré).

En dehors du poids, les forces verticales qui agissent sur l'élément de volume sont dues aux pressions hydrostatiques:

$$dF_z = F_1 - F_2 = (p_a + \rho g (H - z_1)) dS - (p_a + \rho g (H - z_2)) dS = \rho g (z_2 - z_1) dS = \gamma dz\, dS = \gamma\, dV$$

Par intégration sur le volume, Vs, du corps immergé on obtient:

$$F_z = \int_{V_s} dFz = \int_{V_s} \gamma\, dV = \gamma V_s$$

Comme la pression p1 est supérieure à la pression p2, la force totale est dirigée vers le haut.

C'est la **Force d'Archimède** :

$$\boxed{\vec{F_a} = \gamma V_s \vec{k} \qquad \text{(equation 9)}}$$

Elle représente la force nette due à la pression hydrostatique dans la direction verticale, agissant sur le corps solide immergé.

Cette force de portance est égale et directement opposée au poids du liquide déplacé, et est dirigée vers le haut.

$F_a = \gamma V_s = \rho g V_s$

Si l'on considère un volume $V_L = V_s$ du fluide « déplacé » le solide, il aurait pour masse $M_L = \rho V_L = \rho V_s$ donc on peut écrire la force sous la forme :

$F_a = \rho g V_s = M_L g$ $F_a = M_L g$ correspond au poids du liquide déplacé par le solide

Lorsqu'il y a équilibre, cette force est opposée au poids du corps solide (W).

Voir Annexes pour exemples d'application

Il n'y a évidemment pas de force nette dans la direction horizontale. L'équation 9 est valable également pour un corps partiellement immergé. Dans ce cas, on ne considère que le volume de la partie immergée pour calculer la force d'Archimède agissant sur ce corps.

$F_a = \gamma V_{immergé}$

La force d'Archimède est appliquée au centre de gravité du liquide déplacé; on l'appelle *centre de poussée,* P. Pour un corps de poids volumique homogène et entièrement immergé, le centre de gravité du liquide déplacé, **P,** est confondu avec le centre de gravite du corps solide G.

Notes : - il n'en est pas de même pour les corps flottants (partiellement immergés) ou les corps de poids volumique hétérogène.

- vous pouvez -pour vous faciliter la compréhension/ou le retenir - vous dire que :

P est le « centre de gravité » du fluide déplacé sur lequel s'applique la force d'Archimède (vers le haut)

G est le centre de gravité du solide sur lequel s'applique le poids (vers le bas).

Application pratique de la force d'Archimède Comment vérifier si un corps va couler ou flotter ?
Comparer sa masse volumique à la masse volumique du fluide ou l'on va le poser (ou à son poids volumique ; puisque, à la constante près de la pesanteur dans ce cours, c'est équivalent).

Si le fluide récepteur est de l'eau douce, on compare donc la masse volumique du corps à la masse volumique de l'eau douce. Si elle est supérieure, le corps coule ; si elle est inférieure, le corps flotte (voir exemples dans le tableau ci-dessous). Reste alors à étudier l'équilibre de ce corps immergé (voir section 6.2).

Exemples de masse volumique

Corps	Masse volumique ($kg.m^{-3}$)	Est-ce que le corps flotte ou coule ? dans de l'eau douce à 3.98°C (10^3 $kg.m^{-3}$)
Coton	20 - 60	flotte
Compost	500- 600	flotte
Essence	750	flotte
Pierre ponce - volcanique	910	flotte
Argile	1300 - 1700	coule
Aluminium	2700	coule

Ciment	2850-3100	coule
Fer	7860	coule
Or	19300	coule

Attention, bien évidemment, on ne peut utiliser la masse volumique du corps que si il est plein et homogène. Si le corps est creux, sa masse volumique va changer. Par exemple une boule d'aluminium pleine va avoir la masse volumique de l'aluminium et va donc couler dans l'eau ; mais si elle est vide, elle peut flotter voir application en TD.

Notes (qq réponses à des questions d'élèves des formations précédentes) :

Si les 2 masses volumiques sont très différentes, c'est facile; on applique la loi ci-dessus.

Si elles sont proches, il faut calculer le poids -> normalement on a assez d'informations pour le faire (masse volumique et dimensions de l'objet), cela devrait donc être facile

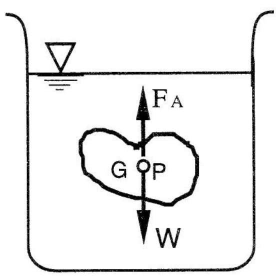
quant à la force d'Archimede -> cela peut être plus difficile car celle-ci depend du volume immergé

Ex pour le cas de la phère creuse en aluminium citée plus haut et utilisée en TD, la sphère ne se retrouve pas forcemment immergée à 50 %. La sphere peut être immergée à n'importe quel pourcentage. Ce pourcentage sera calculé en fonction du poids. Pour un poids donné, il n'y aura qu'un pourcentage de volume immergé pour lequel la force d'Archimede sera égale au poids. Cela permettra du coup d'avoir des informations sur « combien » la sphère d'aluminium est creuse.

6.2 Equilibre des corps immergés.

Le corps immergé est soumis à deux forces : son poids $\vec{W}$ (qui s'applique en G, vers le bas) et la force d'Archimède $\vec{F_a}$ (qui s'applique en P vers le haut).

Si le corps reste statique, donc est en équilibre, c'est que $\vec{W}+\vec{F_a}=\vec{0}$. Le poids et la force d'Archimède, sont égaux et opposés et situés sur la même ligne verticale.



(a) corps immergé

Cas ou P = G (cas généralement rencontré si le corps est homogène)

Si l'une des trois conditions ($\|\vec{W}\| \neq \|\vec{F}_a\|$ ou $\vec{W}$ et $\vec{F}_a$ non opposés ou $\vec{W}$ et $\vec{F}_a$ non colinéaires verticalement) n'est pas satisfaite, il n'y a pas équilibre et il en résulte un mouvement. Par exemple,si la norme du poids est plus importante que la force d'Archimède, le corps coule ; au contraire si la norme du poids est plus faible que celle de fa force d'Archimède, le corps se dirige vers le haut.

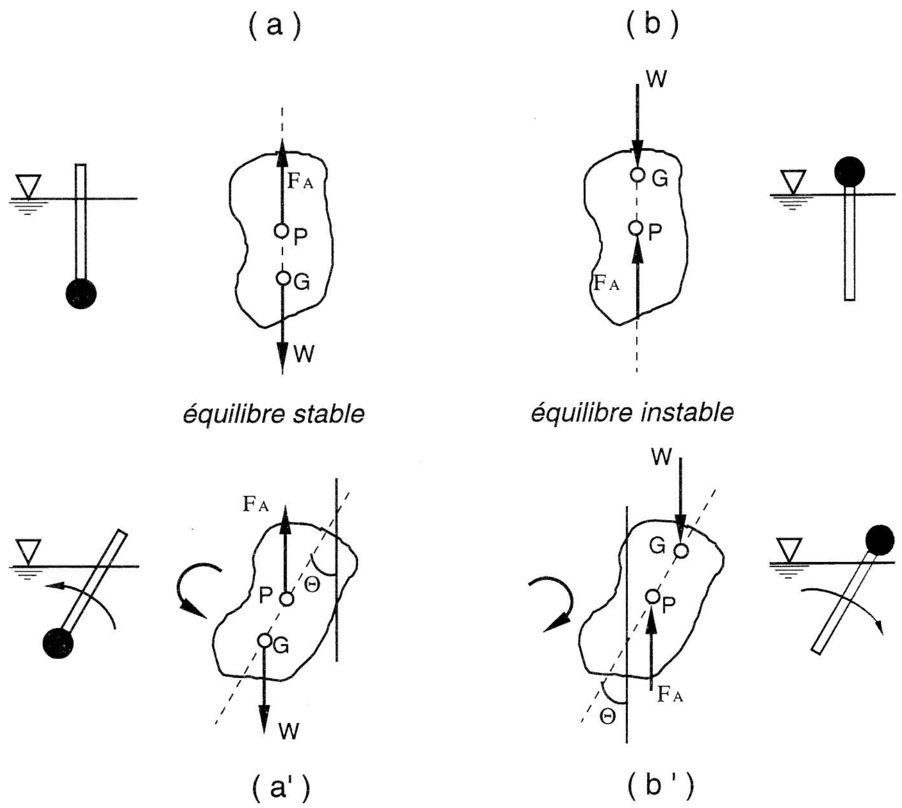
Si il y a équilibre, on peut se demander quelle sorte d'équilibre est-ce ?
Imaginons un corps partiellement ou complètement immergé (figure de droite). La poussée d'Archimède est égale au poids du corps; de plus, le centre de gravité, G, et le centre de poussée, P, sont sur la même verticale.

Selon les positions relatives de ces deux centres, deux positions d'équilibre sont possibles (Figure ci-dessous):

i) Le point G est au-dessous du point P (Fig. a)
Le corps est en équilibre stable. La stabilité de ce corps peut être observée en l'inclinant légèrement d'un angle Θ par rapport à la verticale. Le corps est alors soumis à un couple de redressement qui le fait tourner jusqu'à ce qu'il revienne à sa position initiale (Fig a').

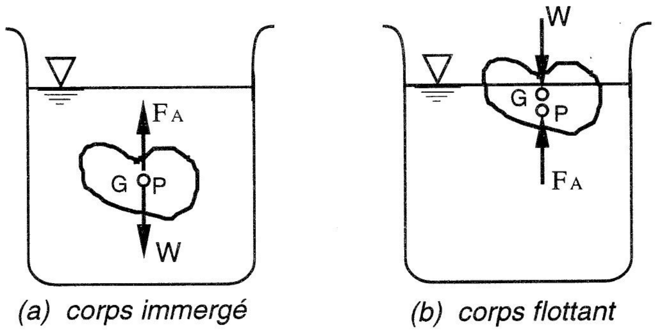
ii) Le point G est au-dessus du point P (Fig. b)
Le corps est (ou semble) en équilibre instable. L'instabilité de ce corps peut être observée en l'inclinant légèrement d'un angle Θ par rapport à la verticale. Le corps est soumis à un couple déstabilisant qui le fait tourner en augmentant encore plus son inclinaison (Fig b'), jusqu'à ce qu'il se retrouve en équilibre stable.

Note: pour faciliter la compréhension de la figure l'exemple du tube lesté est montré en marge.



(a)
(b)
W
FA
P
G
W
G
P
FA
équilibre stable
équilibre instable
FA
P
Θ
G
W
W
G
P
FA
Θ
(a')
(b ')

6.3 Corps flottant

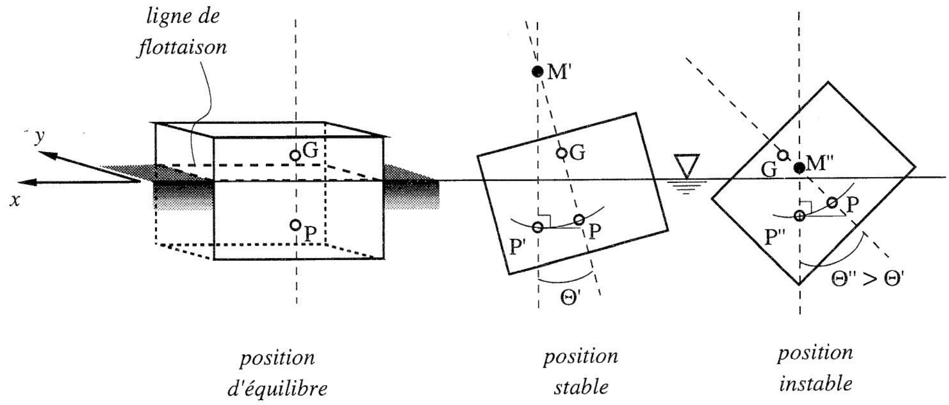


Pour les corps flottants, on peut retrouver les cas précédents du 6.2:

- G=P (si le corps n'est pas homogène) équilibre
- G en dessous de P, équilibre stable
- G au dessus de P **(exemple de la figure de droite)** c'est plus compliqué et pas toujours instable. Cela dépend de l'angle de rotation et il faut introduire la notion de métacentre.

Définition du métacentre

On vient de voir qu'un corps flottant est en équilibre stable si son centre de gravité, G, est situé au-dessous de son centre de poussée. Toutefois, certains corps flottants peuvent être en équilibre même si G est au-dessus de P (Figure suivante).



Soit un corps solide (ex bateau) flottant dans un liquide. Le centre de gravité, G, est au-dessus du centre de poussée, P; mais $\vec{W}=-\vec{F}_a$ le corps est donc en équilibre.

On incline légèrement ce corps d'un angle Θ (on note que la rotation se fait autour de l'axe y, d'ou Iyy dans la définition du métacentre, fin de section). Dans le référentiel relatif au corps, le centre de gravité, G, reste dans la même position, mais le centre de poussée se déplace au point P'. La ligne d'action de la force d'Archimède passant P', coupe la ligne centrale de section du corps solide en un point M, appelé *métacentre.*

Si l'inclinaison, Θ' est faible, le métacentre (M' sur la figure) se situe au dessus du centre de gravité, G. Cette position est stable. Le corps solide revient à sa position d'équilibre initiale.

Si l'inclinaison Θ'' est importante, le métacentre (M" sur la figure) se situe au-dessous du centre de gravité, G. Cette position est instable. Le corps solide se renverse.

La position du métacentre, M, est calculée avec la formule suivante :

$$\overline{MG}=\overline{MP}-\overline{GP}=\frac{I_{yy}}{V}-\overline{GP}$$

Iyy est le second moment, ou moment d'inertie, de la surface délimitée par la ligne de flottaison; V- est le volume du liquide déplacé. La hauteur métacentrique, MG, constitue le critère de stabilité:

$\overline{MG}>0$	le corps est en position stable
$\overline{MG}=0$	le corps est en position neutre
$\overline{MG}<0$	le corps est en position instable

ST 7 Hydrostatique dans d'autres champs de force

L'équation fondamentale de l'hydrostatique est toujours valable :

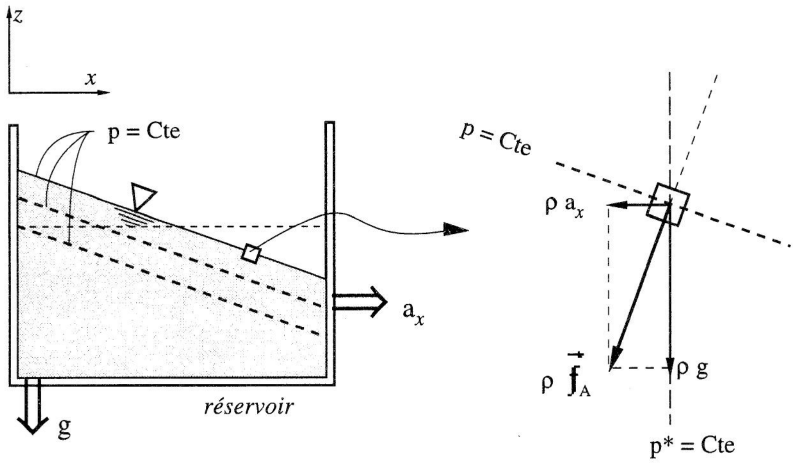
$$-\overrightarrow{grad}\,p+\rho\vec{f}=-\vec{\nabla}p+\rho\vec{f}=\vec{0}$$

avec $\vec{f}$ force de volume par unité de masse
Jusqu'à présent seul le champ de pesanteur était pris en compte dans $\vec{f}$
Sa notation dépend de l'orientation du référentiel choisi. Par exemple si l'axe z est orienté vers le zénith, $\vec{f}=(0,0,-g)$

En hydrostatique, il n'y a pas de mouvement relatif entre les particules du fluide. C'est aussi valide si le fluide est accéléré en bloc, comme un corps solide.

7.1 Champ de pesanteur en accélération constante

Si on choisit un référentiel avec l'axe z allant vers le zénith et qu'un récipient de liquide est soumis à une accélération constante $\vec{a}_x$
Alors $\vec{f}=(-a_x,0,-g)$



Attention sur le dessin, seuls les normes du poids et de l'accélération sont indiqués. Au niveau des vecteurs, cela correspondrait à $\rho\vec{g}$ et à $-\rho\vec{a}_x$. Il y a un signe négatif devant $-\rho\vec{a}_x$ car c'est une pseudo force d'entraînement (due au fait que le récipient est en mouvement donc que son référentiel bouge par rapport au référentiel absolu). [Cours SM23 Dynamique océanique]

$\overrightarrow{grad}\, p=\vec{\nabla}\, p=\rho\,\vec{f}$

est une équation vectorielle qui aboutit à 3 équations scalaires (dans un référentiel avec z vers le haut):

$\frac{\partial p}{\partial x}=-\rho\, a_x$ eq. a

$\frac{\partial p}{\partial y}=0$ eq. b

$\frac{\partial p}{\partial z}=-\rho\, g$ eq. c

Quel est le champ de pression ?

En utilisant eq. a

$\frac{\partial p}{\partial x}=-\rho\, a_x$ donc $p=-\rho\, a_x x+f(y,z)$ eq. d

En utilisant eq. d puis eq. b

$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial f(y,z)}{\partial y}=0$ donc $f(y,z)=f(z)$

En utilisant eq. d puis eq. c

$\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial f(z)}{\partial z}=f'(z)=-\rho\, g$ donc $f(z)=-\rho\, g\, z+C^{ste}$

Donc $$p=-\rho\, a_x x-\rho\, g\, z+C^{ste}$$

Note Attention la démarche à suivre doit TOUJOURS être effectuée ainsi (une seule intégration à la fois) ; même si cela vous paraît inutile quand les intégrales sont « faciles ». Sinon vous prendrez de mauvaises habitudes et vous tromperez plus tard (cas plus complexes avec des dérivées croisées).

Les surfaces isobares (= surfaces d'égale pression) sont telles que :

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = 0$$

ici

$$dp = -\rho a_x dx - \rho g dz = 0$$

$$dz = -\frac{a_x}{g} dx$$

$\frac{a_x}{g}$ est un facteur constant ne variant pas avec x (ni avec z) donc $z = -\frac{a_x}{g} x + C^{ste}$

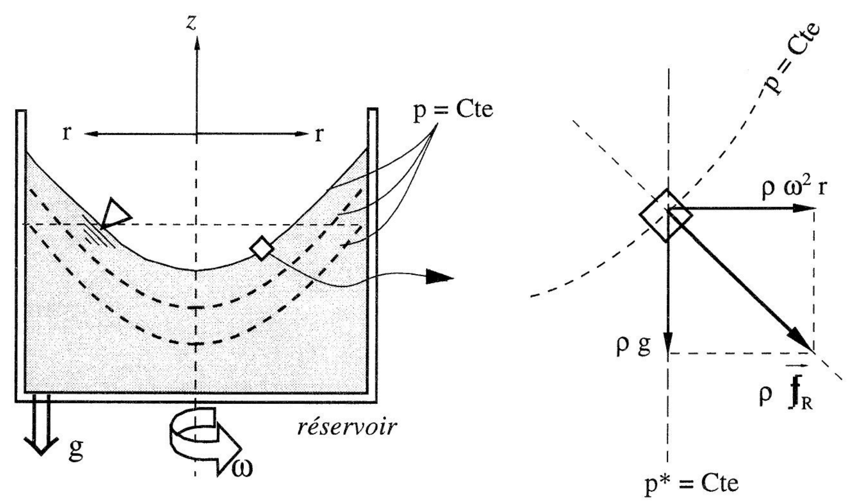
En 2D, les isobares, ou lignes d'égale pression, sont des droites de pente $m = -\frac{a_x}{g}$, orthogonales au vecteur des forces de volumes : $\rho \vec{f}$ (= surface libre et lignes en pointillées sur la figure).

Autre cas : déplacement vertical

Le raisonnement est le même pour une accélération constante et verticale $\vec{a_z}$ alors le vecteur $\vec{f} = (0,0,-g-a_z)$

7.2 Champ de pesanteur avec rotation uniforme

Soit un liquide homogène soumis à une rotation uniforme à vitesse angulaire $\omega = C^{ste}$ autour de l'axe vertical, suivant le schéma suivant :



Comme il y a une symétrie axiale, on se place en coordonnées cylindriques.

Le vecteur $\vec{f}=(\omega^2 r, 0, -g)$

et l'équation de l'hydrostatique $\overrightarrow{grad}\, p=\vec{\nabla}\, p=\rho\,\vec{f}$ deviennent en coordonnées cylindriques :

$\frac{\partial p}{\partial r}=\rho\,\omega^2 r$ a

$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}=0$ b

$\frac{\partial p}{\partial z}=-\rho\, g$ c

En utilisant la même méthode que dans la section précédente, on calcule le champ de pression

a) donne $p=\frac{1}{2}\rho\,\omega^2 r^2+f(\theta,z)$, qui mis dans b) donne :

$\frac{\partial p}{\partial\theta}=\frac{\partial f(\theta,z)}{\partial\theta}=0$ donc $f(\theta,z)=f(z)$, qui mis dans c) donne :

$\frac{\partial p}{\partial z}=f'(z)=-\rho\, g$ donc $f(z)=-\rho\, g\, z+C^{ste}$

et finalement :

$$p=\frac{1}{2}\rho\,\omega^2 r^2-\rho\, g\, z+C^{ste}$$

Les surfaces d'égale pression sont données par dp=0; donc:

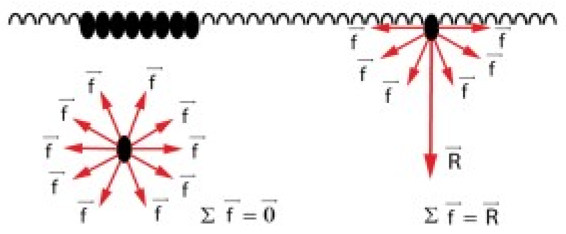
$$\rho\,\omega^2 r\, dr-\rho\, g\, dz=0$$

d'où : $z=\frac{\omega^2}{2g}r^2+C^{ste}$ **les surfaces isobares sont des paraboles, orthogonales au vecteur** $\rho\,\vec{f}$ **, lignes pointillées et surface libre, symétriques par rapport à l'axe de rotation.**

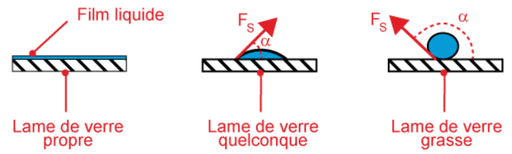
ST 8 Supplément : Tension de surface

(remerciements à http://gpip.cnam.fr/ressources-pedagogiques-ouvertes/hydraulique/co/3grain_tensionSurface.html et https://fr.wikipedia.org/wiki/Ménisque_(physique))

La tension de surface σ (ou tension superficielle) caractérise le contact entre deux fluides, généralement un liquide et un gaz. Une molécule dans un liquide immobile est soumise aux forces d'attraction de ses proches voisines. Si cette molécule est située au sein du liquide, la résultante de ces forces est nulle. Mais si cette molécule est située en surface du liquide, la résultante est une force dirigée vers l'intérieur du liquide (fig T1).



T1. mise en évidence de la tension de surface



T2. mise en évidence de l'angle de raccordement

Ceci explique pourquoi les liquides ont tendance à minimiser leur surface ; ainsi les gouttes sont sphériques, car la sphère présente le plus faible rapport surface / volume. Le travail dW nécessaire pour une augmentation de la surface libre dS du liquide est tel que $dW = \sigma dS$. Le coefficient de proportionnalité σ est appelé *coefficient de tension superficielle*, ou simplement *tension superficielle* ou encore *tension de surface*. La tension de surface a pour dimension M T-2, et est généralement exprimé en N m-1.

Elle est très importante pour les ondes de surface qui sont dues à deux forces de rappel : la gravité et la tension de surface.

On peut donner quelques ordres de grandeur de tension de surface à 20 °C : 0,07 N m-1 pour le système air-eau ; 0,5 N m-1 pour le système air-mercure ; 0,4 N m-1 pour le système eau-mercure.

Surpression dans une goutte :

À l'intérieur d'une goutte, il règne une surpression telle que Pinterne = P externe + 2 σ/R, où R est le rayon de courbure de la goutte. À l'équilibre, cette surpression est compensée par la tension superficielle.

Ainsi dans une goutte d'eau de 1 cm de diamètre, la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur de la goutte est de 14 Pa ; ce qui est plus de 7000 fois plus petit que la pression atmosphérique ordinaire (101325 Pa).

Dans la pratique, **cette surpression est donc complètement négligeable** dans la plupart des cas.

Angle de raccordement
Si l'on dépose une goutte d'eau sur une lame de verre, cette goutte s'étale plus ou moins selon l'état de propreté de la lame, comme illustré ci-dessus (Fig T2). On appelle angle de raccordement, l'angle α formé entre la surface solide et la force de tension superficielle (qui est perpendiculaire à la ligne de contact entre le liquide et le solide et tangente à la surface liquide).

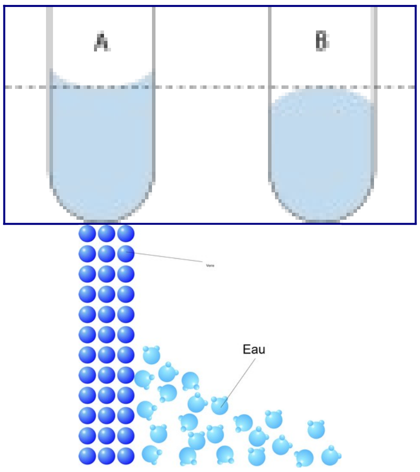
Ménisque :
Le ménisque est la partie courbe de la surface d'un liquide qui apparaît au voisinage de la surface du contenant ou d'un autre objet, souvent solide. Cet angle dépend de la nature chimique du liquide et de celle du solide, ainsi que de la rugosité éventuelle du solide. Il dépend du ratio entre la tension de surface liquide-gaz et la tension de surface liquide-contenant et est déterminé à l'aide de la loi de Young-Dupré.

Il peut donc être convexe ou concave. Voici des règles générales :

- Cas A : un ménisque concave se forme lorsque l'adhésion est supérieure à la cohésion (le fluide a tendance à adhérer à la paroi). Généralement, on observe ce genre de ménisque avec de l'eau ;
- Cas B : un ménisque de forme convexe apparaît, entre autres, avec du mercure, fluide à la tension de surface très élevée qui constituait par exemple les thermomètres. Il se produit lorsque Il se produit lorsque la force de cohésion est supérieure à la force d'adhésion, le fluide n'a donc pas tendance à adhérer à la surface ;

Néanmoins, pour être plus précis, la forme du ménisque dépend à la fois du fluide considéré, et du type de matériau dans lequel on le stocke. Par exemple, l'eau dans le verre crée un ménisque concave, mais si on la mettait dans un tube couvert de feuille de lotus (surface hydrophobe), le ménisque serait convexe.

Quand on fait une mesure, par exemple avec une éprouvette graduée, on doit regarder en face du bas du ménisque pour lire la mesure précisément car c'est ce qui minimise l'erreur de mesure (dans le cas convave) : en effet le volume d'eau non pris en compte reste inférieur au volume d'eau qu'on prendrait faussement en compte si on prenait le haut du ménisque.

	Gauche : A : le ménisque est orienté vers le haut, il est concave (ex eau dans verre ; voir image en dessous) B : le ménisque est orienté vers le bas, il est convexe (ex mercure dans verre) Droite : Un ménisque vu dans une burette d'eau colorée (valeur de volume relevée=20 ml).	

ANNEXE Applications du Théorème d'Archimède

A) le ludion voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Ludion_%28physique%29

(Exemple poids constant, force d’Archimède change)

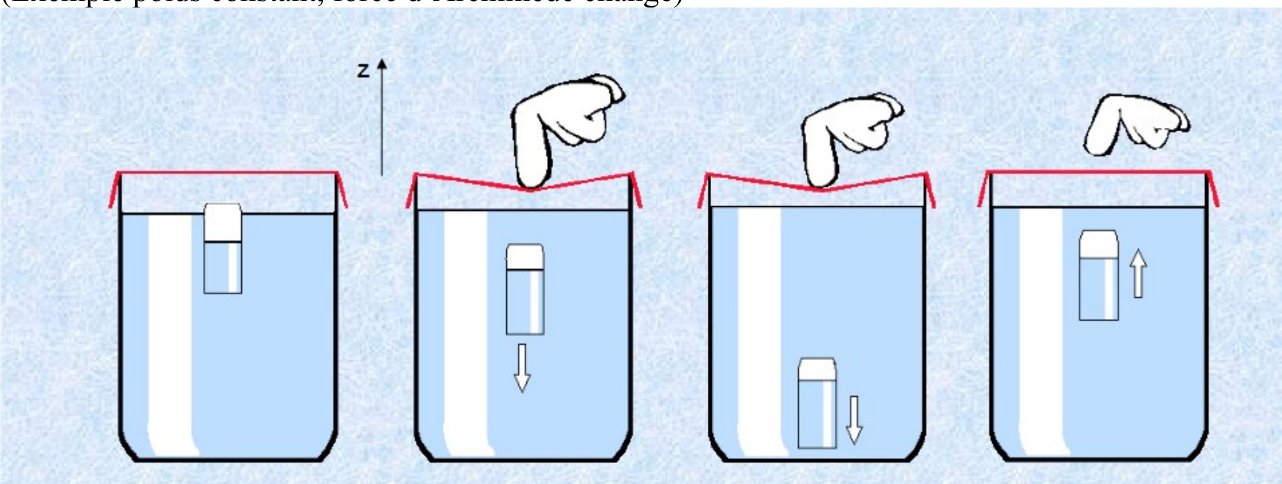


Figure remerciement F. Auclair (POC, Toulouse)

Le ludion est un montage de physique (ou un jouet) illustrant la forte compressibilité de l'air (par rapport à l'eau, très peu compressible) : un objet creux et rempli d'air est immergé dans un récipient fermé par une membrane. L'air qu'il contient sert à le faire flotter. L'apparition d'une pression sur la membrane fait descendre l'objet creux et l'arrêt de la pression le fait remonter.

Intervient en premier lieu la transmission de la pression par le liquide : celui-ci ne pouvant en première approximation pas être comprimé1, il transmet la pression à l'air se trouvant dans l'objet creux. L'air se comprime et son volume diminue. Cet air prend alors moins de place. La place libérée par l'air est alors occupée par le liquide. L'objet descend donc car la poussée d'Archimède qu'il subit diminue par la perte de volume de la bulle d'air qui le fait flotter. Le ludion coule car son accélération prend alors les mêmes directions et sens que ceux de la nouvelle résultante des forces appliquées en son centre de gravité.

C'est le principe du ballast des sous-marins.

B) Sous-marin

(Exemple poids change, force d'Archimède constante)

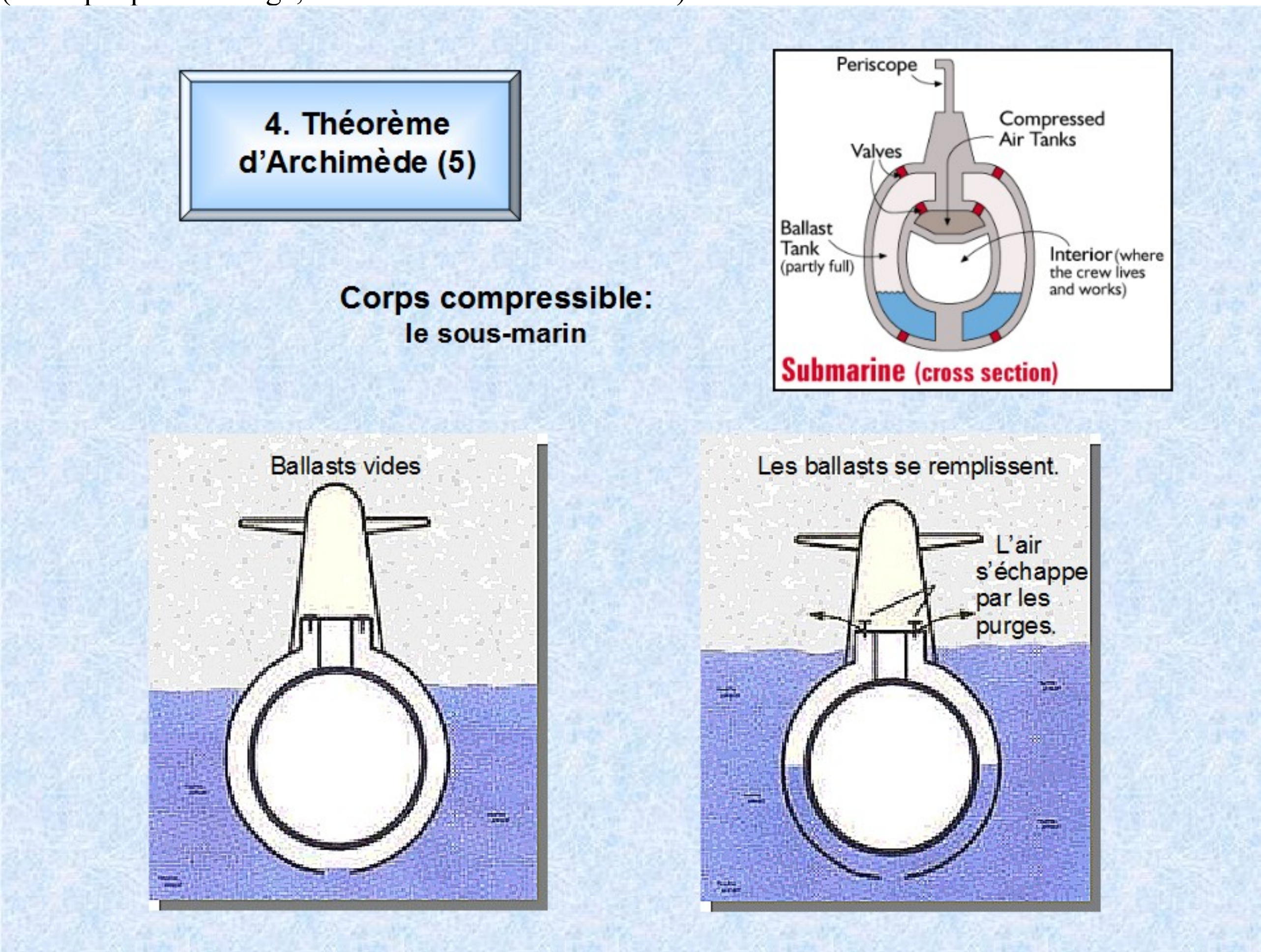


Figure remerciement F. Auclair (POC, Toulouse)

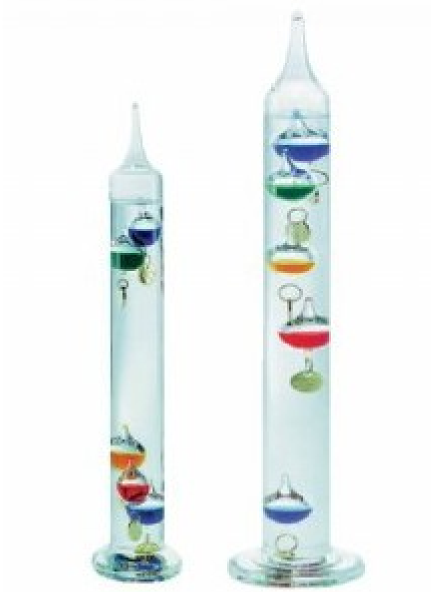
C) Thermomètre de Galilée

(Exemple poids constant, force d'Archimède change)

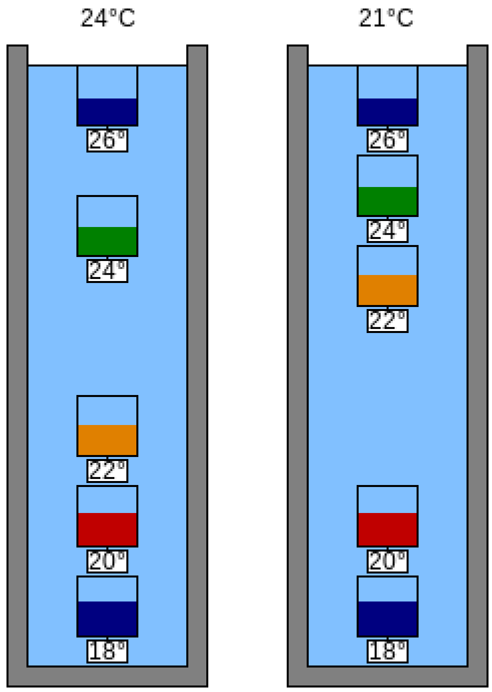
Le thermomètre de Galilée fonctionne en raison du principe de flottabilité, qui détermine si un objet flotte ou bien coule dans un liquide, et fait que même des bateaux en acier peuvent flotter. Le seul facteur qui détermine si un grand objet flotte ou coule dans un liquide est la densité de l'objet par rapport à la densité du liquide dans lequel il est placé :

- si la densité de l'objet est supérieure à la densité du liquide déplacé, l'objet coule ;

- si sa densité est inférieure, l'objet remonte vers la surface;
- si la densité de l'objet est égale à la densité du liquide déplacé, l'objet flotte.



quand il fait plus froid que 18°C, toutes les bulles sont en haut
quand il fait plus chaud que 26°C, toutes les bulles sont en bas



Le thermomètre de Galilée est composé d'un cylindre clos en verre rempli d'un liquide transparent. Les petites ampoules de verre, mises à l'intérieur, sont partiellement remplies d'un autre liquide (de couleur) que le liquide du cylindre. Les volumes des boules sont constants mais pas leur masse, leur densité est également différente. C'est la densité des boules par rapport à celle du liquide dans lequel elles baignent, qui détermine si celles-ci coulent ou flottent! Chaque boule va se placer en une position ou sa densité est égale à celle du milieu dans lequel elle baigne.

<u>Changement de température</u>
Une fois les ampoules scellées, leur densité est ajustée au moyen du métal des petits disques suspendus sous elles. Le chauffage et le refroidissement du liquide coloré, et de l'air qu'elles contiennent, ne modifient ni la masse ni le volume des ampoules, et n'ont pas d'influence sur leur densité.
Le liquide transparent dans lequel baignent les ampoules lui n'est pas de l'eau.
Lorsque la température de la pièce varie, le volume du liquide dans le cylindre va augmenter ou diminuer par dilatation et sa densité va varier, ce qui va faire monter ou descendre les boules.

On peut considérer que le poids respectif de chaque boules est constant ; par contre sa force d'Archimède va varier car la masse volumique du liquide présent dans la colonne varie.

La température de la pièce est approximativement égale à la température écrite sur la boule la plus basse du groupe de boules qui se situe le plus haut dans le cylindre.

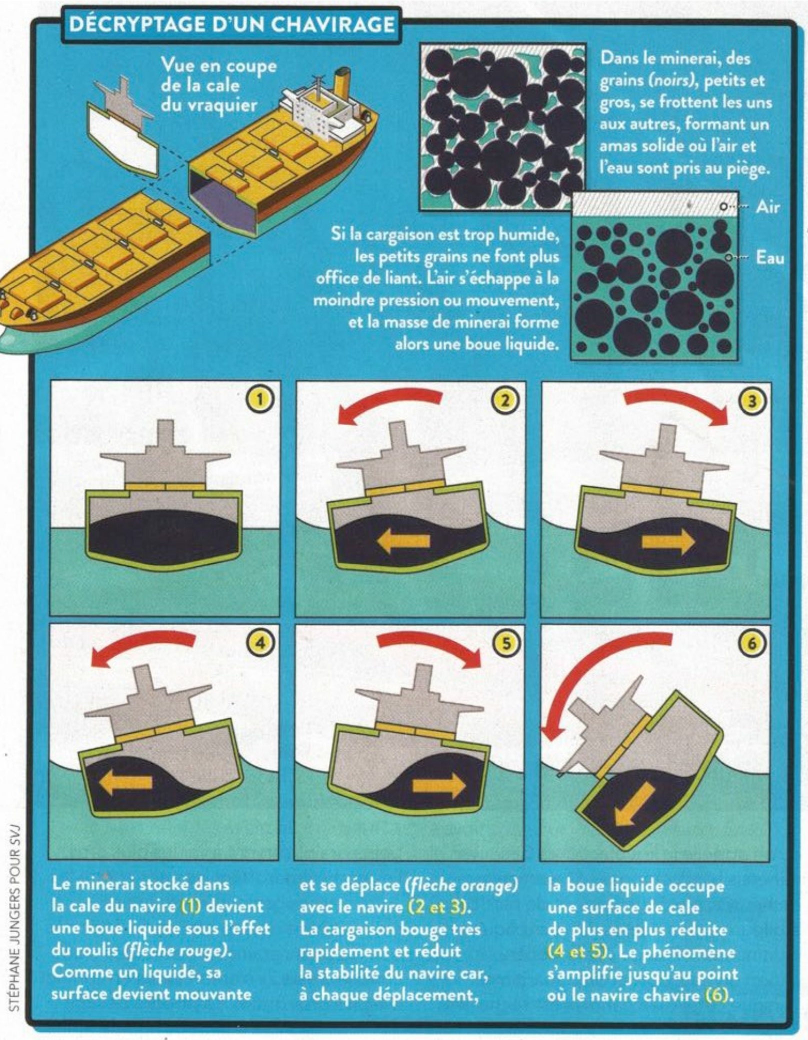
Description des liquides
Les premiers thermomètres de Galilée contenaient de l'alcool plus sensible aux variations de température et moins susceptible de déposer des résidus ou de l'écume sur les ampoules ou dans le vase. Dans les thermomètres de Galilée modernes, il s'agit d'un composé inerte d'hydrocarbures (dont la nature exacte n'est pas divulguée !), probablement choisi parce que sa densité varie avec la température plus que celle de l'eau, ou bien parce que l'eau génère sur les bords du récipient des bulles d'air qui entravent le fonctionnement. **C'est le changement de densité du liquide transparent** (dans la colonne du thermomètre)**, lors des variations de température, qui détermine les mouvements verticaux des ampoules.**
Quand la température monte, la densité/masse volumique du liquide transparent décroît et donc la force d'Archimède de chaque ampoule/bulle décroît aussi. Quand celle-ci devient inférieure à son poids, l' ampoule/bulle coule.

Dans le cas du modèle de thermomètre représenté sur les photographies, gradué de deux en deux degrés Celsius ou de quatre en quatre Fahrenheit, il est précisé par le fabricant que la différence de poids de deux ampoules consécutives est d'environ 6 mg. La température est à lire sur la médaille inférieure du groupe d'ampoules situées en haut, éventuellement minorée d'un degré Celsius (ou de deux Fahrenheit) si une ampoule est en mouvement dans l'intervalle entre les deux groupes haut et bas. La précision de l'ensemble est de l'ordre d'un degré Celsius (ou deux Fahrenheit). Bien entendu, le diamètre des ampoules et celui du tube sont prévus pour éviter tout désordre entre les ampoules qui doivent descendre les unes après les autres dans l'ordre et sans se gêner, à mesure que s'élève la température ambiante. Il faut compter aussi sur un léger retard de réaction du thermomètre aux changements de température.

D) Iceberg ; comment un iceberg flotte :
https://joshdata.me/iceberger.html

en moins d'1 min, vous pouvez dessiner un iceberg et voir comment il flotterait.

E) naufrage de tankers
(Extrait de SVJ – mai 2019 ; avec tous nos remerciements)



››› mettre les canots à la mer, ce qui explique le grand nombre de morts dans ce type de naufrage », se désole le commandant Laffoucrière. Ces décès ont été recensés dans le rapport d'Intercargo en 2018 : sept naufrages de vraquiers, liés à la liquéfaction, ont causé la mort de 101 marins. C'est-à-dire autant de victimes que les quarante-quatre autres accidents de vraquiers liés, eux, à des échouages, des collisions ou des voies d'eau. Tous les naufrages express sont donc dus à un excès d'humidité du « vrac ». Mais d'où vient cette eau en surplus ? « Tout d'abord, on utilise de l'eau lors de l'extraction du nickel et du fer dans la mine ou lors du concassage, détaille Dennis Bryant, expert en sécurité maritime. Ensuite, le nickel, le fer ou la bauxite sont laissés à l'air libre dans les ports, en attendant leur chargement dans le vraquier. Il suffit d'un gros orage pour que ces monticules se gorgent d'eau, les minerais n'étant pas protégés par des bâches. » Et les orages, ce n'est pas ce qui manque en Indonésie, une zone tropicale exposée à de très fortes pluies et où se trouvent la plupart des mines de nickel !

L'avertissement du capitaine

Ainsi, l'enquête sur le naufrage du vraquier *Nasco Diamond* a révélé que le capitaine avait d'abord refusé de prendre la mer, adressant à son armateur un message limpide : « Nous avons constaté que la cargaison de nickel stockée dans des barges est très humide et contient beaucoup d'eau. Nous ne pouvons l'embarquer. » Malgré cela, le vraquier a pris la mer deux jours plus tard avec son chargement. Cinq jours après, il coulait à pic, emportant le capitaine et 21 marins dans la mort. Pourtant, l'officier du *Nasco Diamond* avait eu raison de signaler la liquéfaction du minerai. Car, en principe, les capitaines doivent refuser une marchandise dont le taux d'humidité est trop important. Mais ça, c'est la théorie. Dans la pratique, ils sont souvent forcés par leur armateur de charger le minerai, malgré le risque encouru. Car un navire immobilisé, c'est de l'argent perdu pour son propriétaire. Les capitaines de vraquiers peuvent être soumis à de grosses

> Les minerais sont toujours laissés sans protection avant le chargement, tel ce tas de bauxite sur un quai du port de Fos-sur-Mer (Bouches-du-Rhône).

SVJ

42 356_MAI 2019

pressions, nous confirme le commandant Laffoucrière : « Il y a eu plusieurs cas, au Brésil, où ils ont même été menacés avec des armes pour les obliger à embarquer la cargaison ».
Dans ces conditions, comment faire pour sauver les équipages de ces vraquiers, qui courent un vrai risque ? L'expert Dennis Bryant suggère de modifier la cale dans laquelle est stocké le minerai. « Il faudrait construire une paroi qui la divise en deux dans le sens de la longueur. Ainsi, le déplacement d'une cargaison même liquéfiée ne se ferait pas sur toute la largeur du navire, mais juste sur la moitié. » Ce qui réduirait les risques d'inclinaison, donc de chavirage.

Modifier la forme des cales des bateaux

Pour le commandant François Laffoucrière, la solution passe plutôt par une modification de la forme de la cale. Il faut réduire sa largeur, de façon à ce que la cargaison se retrouve au centre du navire. Cela rend plus stable le vraquier même si le minerai prend plus de place en hauteur. Un premier bâtiment de ce type, le *Jules Garnier II*, a pris la mer en 2012. Depuis, d'autres vraquiers ont été construits sur le même modèle. Mais il faudra attendre encore longtemps avant que toute la flotte mondiale soit renouvelée. La plupart des vraquiers sont récents et ils peuvent naviguer durant vingt ou trente ans. D'ici là, d'autres tragédies comme celle du *Bulk Jupiter* peuvent se produire à tout moment. Sauf si la législation devient plus stricte, au moins dans les pays d'Asie. Aujourd'hui, seul le taux d'humidité du minerai en sortie de mine est mesuré et consigné. Mais bien des intempéries peuvent tremper la roche avant qu'elle soit chargée dans un port ! Il faudrait que les autorités portuaires puissent mesurer ce taux juste avant le chargement et qu'elles aient le pouvoir de bloquer la sortie en mer d'un vraquier en cas de danger pour l'équipage. Ce n'est qu'à cette condition que des vies pourront être sauvées...

MOURA / ALPACA / ANDIA

LONDONPANDI

< En quelques instants, une cargaison de minerai peut prendre l'aspect d'une boue très liquide, comme dans cette cale de vraquier.

POURQUOI AUTANT DE VRAQUIERS COULENT-ILS EN ASI

QUOI D

« Parce qu'on transporte de plus de minerais de fer et de nickel vers la Chine », nous explique le commandant Laffoucrière.
De fait, tous les vraquiers victimes de liquéfaction se rendaient dans ce pays. Ils venaient soit d'Inde (où se trouvent les mines de fer) soit d'Indonésie, des Philippines ou de Nouvelle-Calédonie (où se trouvent les mines de nickel). Les Chinois ont un besoin énorme de ces matières premières qui servent à fabriquer de l'acier, matériau indispensable pour la construction d'immeubles : on en trouve dans les poutres, le béton armé, les ascenseurs ou les façades... Or, le secteur de l'immobilier est en plein boom en Chine, et la demande en acier ne fait que croître. Appâtés par les sommes considérables qu'il y a à gagner, des armateurs de vraquiers, parfois inexpérimentés, se sont lancés dans le transport de minerais sans prendre toutes les précautions nécessaires pour la vie des équipages. Avec les conséquences dramatiques que l'on déplore aujourd'hui.

SVJ

356_MAI 2019 43