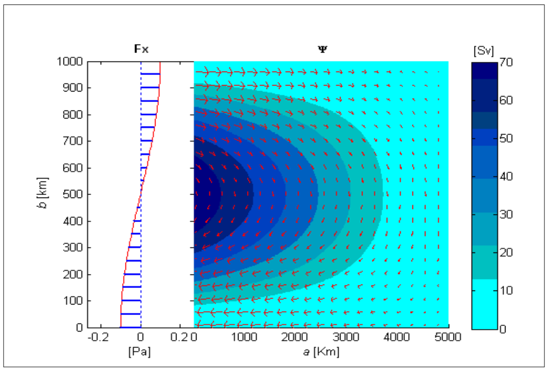
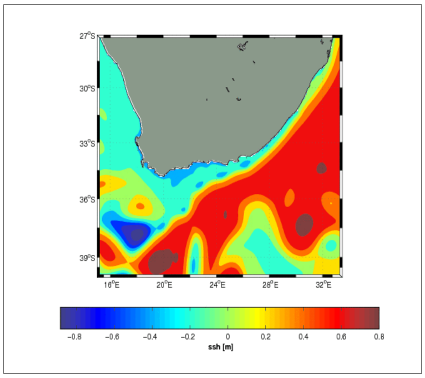
Université d'Aix-Marseille ***Facultés des Sciences***	**Licence de Sciences de la Vie et de la Terre** ***Parcours Mer, 3ème année***

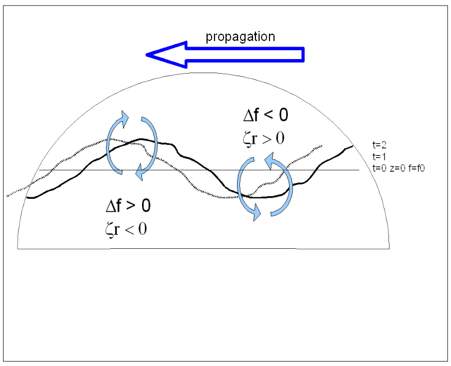
Anne A. Petrenko
Andrea M. Doglioli
Baptiste Néel

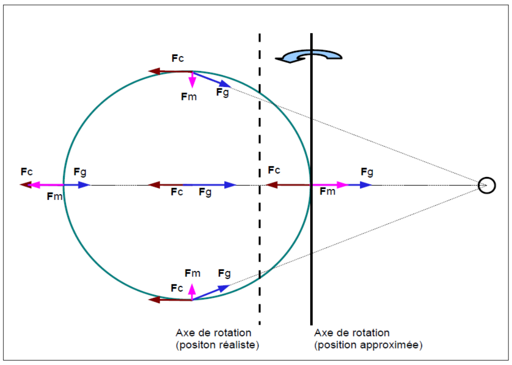
Notes de Cours et Travaux Dirigés de

Dynamique des Océans 1









dernière révision 17 octobre 2025

Remerciements

Nous désirons remercier tous nos étudiants et nos collègues pour leur commentaires, questions, corrections et suggestions.

En particulier, ces polycopies ont bénéficié des contributions de Nicolas Barrier, Nathalie Daniault, Marion Fraysse, Nadia Pinardi, F.Mattioli et Gérard Copin-Montégut, Katixa Lajaunie-Salla, Saïd Benjeddou**.**

Petrenko, A. A.,Doglioli, A. M., , Néel, B. (2025), *Notes de Cours et Travaux Dirigés de Dynamique des Océans 1*, Université d'Aix-Marseille, Marseille, France.
https://people.mio.osupytheas.fr/~petrenko/TEACHING/SM23/DynamiqueOceans1.pdf

Cet ouvrage a été réalisé avec le logiciel https://www.libreoffice.org/

Table des matières

Bibliographie

Anderson J.D. Jr (2005), *Ludwig Prandtl's Boundary Layer*, Physics Today.
http://ccaunam.atmosfcu.unam.mx/jzavala/OceanoAtmosfera/Ludwing.pdf

Coiffier J. (2000), *Un demi-siècle de prévision numérique du temps*. La Météorologie, 30, 11-31.
http://hdl.handle.net/2042/36122

Copin-Montégut G., Le Courant Géostrophique
http://www.obs-vlfr.fr/Enseignement/enseignants/copin/Geostro.pdf

Daniault N. (2005), *Océanographie Physique pour l'École Navale*. Cours en ligne, LPO - Université de Bretagne Occidentale, Brest.
http://stockage.univ-brest.fr/~daniault/oceano_physique.pdf

Fieux, M. (2010, réédité en 2020 ; et version anglaise en 2017), L'océan planétaire, Editions ENSTA (disponible à la BU Luminy)

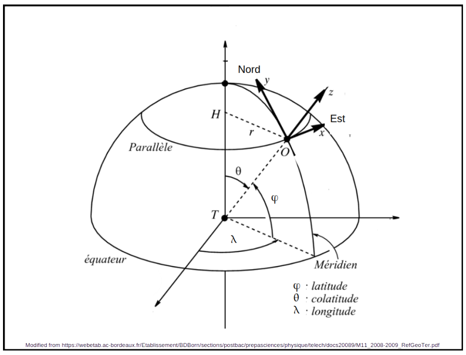
Lynch P. & De Moor G. (2008) *Les origines de la prévision numérique du temps et de la modélisation climatique*. La Météorologie, 63, 14-24.
http://hdl.handle.net/2042/21887

De plus, une partie des formules et explications de ce document sont inspirées de
Mattioli F. (1995) Principi Fisici di Oceanografia e Meteorologia (en Italien)

Des références à des sites web sont explicitement indiquées.

Rappels

Éléments de mathématique (dans un référentiel cartésien)



Scalaire T, S, ρ avec $T \equiv T(x, y, z, t)$
$S \equiv S(x, y, z, t)$
$\rho \equiv \rho(x, y, z, t)$

Vecteur $\vec{v} \equiv (u, v, w)$ avec $u \equiv u(x, y, z, t)$
$v \equiv v(x, y, z, t)$
$w \equiv w(x, y, z, t)$

Dérivée totale $\frac{d}{dx} F$ avec $F \equiv F(x)$ (autre notation $d_x F$)

Dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x} F \quad \frac{\partial}{\partial y} F \quad \frac{\partial}{\partial z} F \quad \frac{\partial}{\partial t} F$ avec $F \equiv F(x, y, z, t)$ (autre notation $\partial_x F$)

Opérateur Nabla $\vec{\nabla} \equiv (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ (autre notation ∇)

Gradient d'un scalaire $\vec{\nabla} T \equiv (\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z})$ (autre notation $\vec{grad}\, T$)

Divergence d'un vecteur $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ (autre notation *div* $div\, \vec{v}$) *NB :c'est un* *<u>vecteur</u>*

Rotationnel d'un vecteur $\vec{\nabla} \times \vec{v} = (\partial_y w - \partial_z v, \partial_z u - \partial_x w, \partial_x v - \partial_y u)$ (autre notation
$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{i}(\partial_y w - \partial_z v) + \vec{j}(\partial_z u - \partial_x w) + \vec{k}(\partial_x v - \partial_y u)$ où $\vec{i} \equiv (1,0,0), \vec{j} \equiv (0,1,0), \vec{k} \equiv (0,0,1)$
ou encore autre notation $rot\, \vec{v}$ *NB :c'est un* *<u>vecteur</u>*)

Gradient d'un vecteur $\nabla \vec{v} = \begin{bmatrix} \partial_x u & \partial_y u & \partial_z u \\ \partial_x v & \partial_y v & \partial_z v \\ \partial_x w & \partial_y w & \partial_z w \end{bmatrix}$ *NB :c'est un* *<u>tenseur</u>*

Dérivée Lagrangienne ou particulaire

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} F = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z}$$ (autres notations $\frac{DF}{Dt}$ $D_t F$ $d_t F$)

Les symboles : les lettres grecques

1	Α α	Alpha	Volume massique
2	Β β	Bêta	coeff. de variation méridionale du paramètre de Coriolis
3	Γ γ	Gamma	accélération ; poids volumique
4	Δ δ	Delta	anomalie de volume
5	Ε ε	Epsilon	
6	Ζ ζ	Zêta	vorticité relative
7	Η η	Êta	surélévation
8	Θ θ ϑ	Thêta	température potentielle
9	Ι ι	Iota	
10	Κ κ	Kappa	
11	Λ λ	Lambda	
12	Μ μ	Mu	coeff. de viscosité (moléculaire) dynamique
13	Ν ν	Nu	coeff. de viscosité (moléculaire) cinématique
14	Ξ ξ	Xi	
15	Ο ο	Omicron	
16	Π π	Pi	
17	Ρ ρ	Rhô	masse volumique
18	Σ σ ς	Sigma	tenseur des contraintes visqueuses moléculaires
19	Τ τ	Tau	tenseur des contraintes visqueuses turbulentes
20	Υ υ ϒ	Upsilon	
21	Φ φ	Phi	latitude / potentiel des vitesses
22	Χ χ	Khi	
23	Ψ ψ	Psi	fonction de courant
24	Ω ω	Oméga	vitesse angulaire de rotation de la Terre

Ὠκεανός = Okeanos, le grand fleuve ou de la mer entourant le disque de la Terre (par opposition à la Méditerranée), d'origine inconnue. Personnifiée comme Oceanus, fils d'Ouranos et de Gaia et époux de Téthys. Dans les temps anciens, lorsque les masses terrestres connues seulement étaient Eurasie et l'Afrique, l'océan était une rivière qui coulait sans fin autour d'eux. Jusqu'à c.1650, communément mer océan, traduction L. *jument oceanum*. Application aux masses d'eau a commencé vers le 14 siècle.

Τηθύς = *Téthys* paléo-océan (et nom d’un navire de la flotte française) à ne pas confondre avec
Θέτις = *Thétis*, nymphe marine, mère d'Achille.

Γαῖα = Gaîa, la Terre

Ουρανός = *Ouranós*, le Ciel
κόσμος=*kósmos*, l’univers dans sa complexité, son ordre naturel et la beauté qu’on en dérive

Les lois du mouvement de Newton

1ère Loi de Newton ou principe d'inertie

Dans un référentiel galiléen ou référentiel inertiel, toute particule isolée, i.e., éloignée de tout objet matériel, reste au repos si elle est initialement au repos, ou décrit un mouvement rectiligne uniforme si son accélération est nulle.

$$\vec{\gamma}=\frac{d\vec{V}}{dt}=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{V}=\frac{d\vec{X}}{dt}=\vec{V}_o \quad \Rightarrow \quad \vec{X}=\vec{V}_o t+\vec{X}_o$$

NB : En physique classique, un référentiel galiléen est définit comme un référentiel pour lequel l'espace est homogène (tous les points sont équivalents) et isotrope (toutes les directions de l'espace sont équivalentes), et le temps uniforme (tous les instants sont équivalents). On peut aussi dire qu'il s'agit d'un référentiel stationnaire ou en mouvement rectiligne uniforme.

2ème Loi de Newton ou principe fondamental de la dynamique

Dans un référentiel galiléen, il existe une relation de proportionnalité entre l'accélération $\vec{\gamma}$ d'une particule et la force $\vec{F}$, ou mieux à l'ensemble des forces, à laquelle elle est soumise :

$$\vec{F}=m\vec{\gamma} \qquad \text{ou} \qquad \sum_i \vec{F}_i=m\vec{\gamma}$$

où *m* est un coefficient positif caractéristique de la particule, appelé masse du point matériel.

3ème Loi de newton ou principe de l'action et de la réaction

Dans un référentiel galiléen, l'action mutuelle de deux particules P_1 et P_2 l'une sur l'autre se traduit par une force $\vec{F}_1$ appliquée à la première particule et une force $\vec{F}_2$ associée à la seconde.

Les deux forces sont :
- portées par la droite P1-P2, qui joint les deux particules
- égales en module mais de sens opposé :

$$\vec{F}_1=-\vec{F}_2$$

Mouvements dans un référentiel en rotation par rapport à un référentiel galiléen

Dans un référentiel galiléen $R=\left(O,\vec{I},\vec{J},\vec{K}\right)$, en suivant une particule fluide de masse *m*, on a :

$$\vec{F}_A=m\vec{\gamma}_A$$

où $\vec{\gamma}_A$ est l'accélération absolue de la particule *P*

et $\vec{F}_A$ est l'<u>ensemble</u> des forces qui agissent sur *P*, dîtes **forces absolues.**

Dans un référentiel en rotation par rapport à un référentiel galiléen (i.e. dans un référentiel non absolu) $R' = (O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, la loi de composition des mouvements permet de calculer accélération absolue (i.e. l'accélération de *m dans R* de la façon suivante :

$$\vec{\gamma}_A = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_E + \vec{\gamma}_C$$

avec

$\vec{\gamma}_r$ l'accélération relative, i.e. l'accélération de la particule dans *R'*

$\vec{\gamma}_E$ l'accélération d'entraînement, i.e. l'accélération qu'aurait la particule dans *R* si elle était fixe dans *R'*

$\vec{\gamma}_C$ l'accélération de Coriolis, i.e. l'accéleration due au mouvement non linéaire du référentiel *R'* lui-même.

Donc les forces absolues sont:

$$\vec{F}_A = m(\vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_E + \vec{\gamma}_C) \;=\; \vec{F}_r + m(\vec{\gamma}_E + \vec{\gamma}_C)$$

Les forces relatives sont :

$$\vec{F}_r \;=\; \vec{F}_A - m\,\vec{\gamma}_E - m\,\vec{\gamma}_C$$

Puisque, par définition le forces relatives sont aussi égales à la somme des forces en jeu :

$$\vec{F}_r \;=\; \vec{F}_A + \vec{F}_E + \vec{F}_C$$

on en découle que, les forces d'entraînement et de Coriolis sont respectivement égales à

$$\vec{F}_E = -m\,\vec{\gamma}_E \quad \text{et} \quad \vec{F}_C = -m\,\vec{\gamma}_C \quad .$$

Les forces d'entraînement et de Coriolis sont appelées aussi pseudo-forces

$$\vec{F}_{pseudo} \;=\; \vec{F}_E + \vec{F}_C$$

ou forces fictives, car elles ne découlent pas de véritables interactions entre objets, mais sont seulement la conséquence d'un choix de référentiel. Elles sont introduites pour généraliser la deuxième lois de Newton aux référentiels non inertiels.

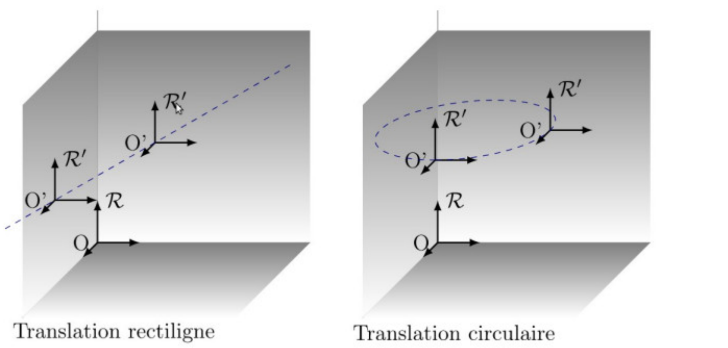


Figure tirée de FEMTO - Cours de mécanique classique. ©J.ROUSSEL - article sous licence Creative Commons.

Figure tirée de FEMTO - Cours de mécanique classique. ©J.ROUSSEL - article sous licence Creative Commons.

1. Équations de l'hydrodynamique

1.1. Lois de conservation

Les lois qui régissent les mouvements de l'océan sont les lois de conservation de la masse, de la chaleur, du sel et de la quantité de mouvement.

La loi de conservation d'une quantité générique de densité λ s'écrit

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \nabla \cdot (\lambda \vec{v}) = \xi$$

avec ξ à representer le terme des sources et des puits de λ et $\vec{v} \equiv (u, v, w)$ vitesse des particules d'eau.

La **loi de conservation de la masse** (ou équation de continuité) s'obtient en remplaçant λ par la masse volumique[1] ρ et on considerant comme nul le terme sources/puits :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

Si on ajoute la condition d'incompressibilité qui dit que la masse volumique de chaque particule océanique ne varie pas le long de sa trajectoire[2] :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\rho = 0$$

l'équation de la continuité se simplifie et devient :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad .$$

La **loi de conservation de la chaleur** s'obtient en remplaçant λ par ρT avec T température de l'eau de mer[3] et on considérant le terme sources/puits égale au réchauffement du à la radiation solaire χ :

$$\frac{\partial (\rho T)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho T \vec{v}) = \chi \quad .$$

Si on applique la loi de conservation de la masse, on peut reécrire cette loi sous la forme :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T = \frac{\chi}{\rho} \quad .$$

1 En océanographie, la masse volumique se mesure habituellement en [kg m^{-3}].
2 Il faut noter que **la condition d'incompressibilité n'impose pas que que la masse volumique soit constante dans le temps et dans l'espace**, parce que sinon on serait obligé à considérer l'océan comme perpétuellement homogène !
3 En océanographie, la température se mesure habituellement en [ºC] .

La **loi de conservation du sel** s'obtient en remplaçant λ par ρS avec S salinité[4] et on considérant le terme sources/puits égale au bilan entre évaporation *E,* pluie *P* et apports des rivières *R* :

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho S\vec{v}) = E-P-R \quad .$$

Si on applique la loi de conservation de la masse, on peut reécrire cette loi sous la forme :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla S = \frac{(E-P-R)}{\rho} \quad .$$

Enfin, en remplaçant λ par $\rho\vec{v}$ quantité de mouvement on obtient la **loi de conservation de la quantité de mouvement** où le terme sources/puits représente le bilan des forces qui agissent sur chaque particule océanique :

$$\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{v}\cdot\vec{v}) = \vec{F} \quad .$$

Si on applique la condition d'incompressibilité on peut reécrire :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = \frac{\vec{F}}{\rho} \quad .$$

Cette formulation mets en évidence que cette équation exprime la deuxième loi de Newton appliquée à une particule de volume unitaire.
Cette équation est connue, ou bien -étant *v* un vecteur à trois composantes- ces équations sont connues sous différents noms :

- équations d'Euler, quand décrivent les mouvement des fluides parfaits avec viscosité nulle, en prenant donc en considération dans le bilan des forces la force de la pression $p\equiv p(x,y,z)$ et la force de gravité $\vec{g}\equiv(0,0,g)$:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g}$$

- équations de Navier-Stokes (d'après deux physiciens du XIXe siècle, Claude Navier et George Stokes), quand décrivent les mouvements des fluides réels avec viscosité non nulle, en prenant donc en considération dans le bilan des forces aussi la force due aux contraintes visqueuses, représentées par le tenseur $\overline{\overline{\sigma}}$:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} - \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\overline{\overline{\sigma}}$$

- RANS equations, acronyme anglais pour **Reynolds-Averaged Navier-Stokes** (d'après Osborn Reynold, 1842-1912, mathématicien spécialiste de la turbulence) ; elles décrivent les mouvements des fluides réels en écoulement turbulent, en considerant une vitesse moyennée sur une periode de

4 En océanographie, la salinité se mesure habituellement en [gr kg^{-1}]

temps suffisamment longue pour s'affranchir de la variabilité due à la turbulence et en prenant compte ainsi dans le bilan des forces la force due aux contraintes visqueuses dues à la turbulence, représentées par le tenseur $\bar{\bar{\tau}}$:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} - \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\bar{\bar{\sigma}} - \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\bar{\bar{\tau}}$$

Afin d'appliquer la lois de conservation de la quantité de mouvement à la dynamique des océans (ou de l'atmosphère) on choisi un référentiel terrestre local où les composantes de la vitesse $\vec{v}$ sont : *u* vitesse zonale (ouest – est, positive vers l'est), *v* vitesse méridienne (sud-nord, positive vers le nord) et *w* vitesse verticale (positive vers le zénith). Étant ce type de référentiel non inertiel parce que la Terre tourne avec une vitesse angulaire $\vec{\Omega}$, il faut ajouter une dernier terme à nos équations, celui de la force de Coriolis (habituellement positionné avant les contraintes visqueuses) :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} - 2\vec{\Omega}\times\vec{v} - \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\bar{\bar{\sigma}} - \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\bar{\bar{\tau}}$$

L'ensemble des 4 lois de conservation donne un système de 6 équations pour 7 inconnues (ρ *, T, S, u, v, w* et *P*), donc pour fermer le système on ajoute l'équation d'etat de l'eau de mer TEOS10 (voir cours d'Introduction à l'Océanographie du L2).
Ces équations sont des équations différentielles non-linéaires très compliquées à résoudre. On a des solutions analytiques seulement en apportant des très fortes simplifications (voir Chapitres 3, 4 et 5). Partiellement simplifiées et discrétisées, elles peuvent être résolues par simulation numérique (voir Chapitre 6).

Dans la suite de ce chapitre on verra dans le détail chacune des forces qui apparaissent dans le terme à droite de l'équation et son expression mathématique selon les différentes approximations appliquées.

1.2 Forces agissant sur le milieu marin

Différentes forces s'exercent :
<u>les forces internes au fluide,</u>
- la force de pression : elle est dirigée des hautes pressions vers les basses pressions ;
- la force de pesanteur (gravité + force d'entraînement axifuge, voir équations en référentiel non inertiel) : elle ne s'exerce que dans la direction verticale et ne peut pas accélérer les courants horizontalement. Elle ne joue un rôle important que pour les mouvements verticaux, par exemple lors des phénomènes de convection.

<u>les forces externes,</u>
- la force génératrice de la marée
- la force d'entraînement due au vent
- les forces liées à la pente de la surface libre (// gradients de pression)

<u>les forces secondaires</u>
- la force de Coriolis liée à la rotation de la Terre s'exerce perpendiculairement au mouvement et est dirigée sur la droite du mouvement dans l'hémisphère Nord
- les forces de frottement dues à la viscosité (la viscosité mesure la résistance d'un fluide à l'écoulement)

1.2.1 Force de pression

Voir cours SM22 : La résultante des forces de pression (*p*) qui s'exerce sur une « particule élémentaire » de fluide de volume *dv* est :

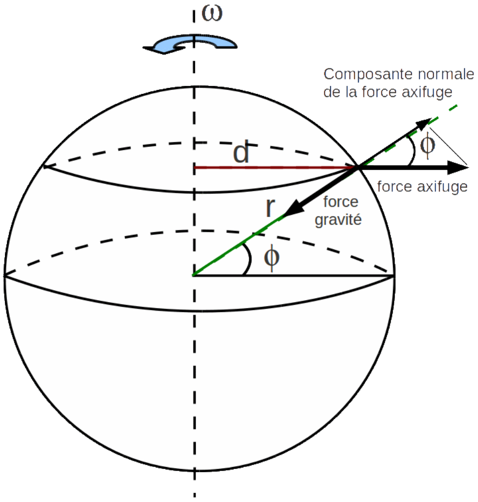
$$\vec{F} = -(\vec{\nabla}\, p)\, dv$$

1.2.2 Champ de pesanteur (gravitation+ force axifuge)

Toute particule de masse *dm* est soumise à une force de pesanteur : $d\vec{F} = dm \cdot \vec{g}$ résultante de :

- la force de gravitation $dm\,\vec{g'}$ due à l'attraction terrestre

- la force axifuge $dm\,\vec{g''}$ due à la rotation de la terre



Attraction terrestre :

$\vec{g'}$ est dirigée du point d'observation vers le centre de la Terre et vaut :

$$g' = \frac{GM}{r^2}$$

où G = 6,67 10^{-11} Nm^2kg^{-2} (ou $m^3s^{-2}kg^{-1}$) - Constante de Gravitation
M = 5,973 6×10^{24} kg - Masse de la Terre
r = distance au centre de la Terre (≈ rayon de la terre en océanographie = 6370 km)

Force axifuge :

$$\vec{g''} = \vec{Fe} = -\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{TM})$$

Si $\vec{u}$ est le vecteur unitaire passant par le point d'observation , perpendiculaire à l'axe des pôles et dirigé vers l'extérieur de la Terre. Si ϕ est la latitude en ce point, cette force d'entraînement peut s'écrire :

$$\vec{g''} = \Omega^2 r \cos\phi\, \vec{u}$$

g'' est maximum à l'équateur où il vaut 0,034 ms^{-2}.

Remarques :

* la droite colinéaire avec $\vec{g}$ définit la verticale du lieu ; c'est la direction du fil à plomb.

* lorsque l'on descend en dessous du niveau de la mer, la valeur de g augmente car g' augmente quand R diminue. Cependant, pour ce cours, en raison de la faible profondeur des océans relativement au rayon terrestre, on fera quand même l'hypothèse que g est une constante égale à 9,81 m $s^{-2.}$

1.2.3 Force génératrice de la marée

On considère que seuls la Lune et le Soleil ont une influence sur la Terre (le Soleil a une très grande masse et la Lune est proche de la Terre). Les autres planètes ou étoiles qui entourent la Terre sont trop éloignées ou de masses trop faibles pour être prises en considération. Les océans sont soumis à deux forces opposées :

- l'attraction gravitationnelle, dont l'intensité dépend de la distance à l'astre (Lune ou Soleil) : plus un point est proche de l'astre, plus l'attraction est forte.
- la force axifuge sur la surface de la terre due à la rotation du système Terre-Lune autour de son barycentre. Elle ett constante en point de la surface.

NB: La force axifuge est une force fictive qui apparaît dans les systèmes non inertiels (ici on est en rotation) due au fait que quand une masse dans son mouvement ne suit pas une trajectoire rectiligne, il faut une force fictive pour en expliquer la trajectoire, tout en respectant le I[er] principe de Newton (ou principe d'inertie).

Pour la Terre en rotation autour du centre de gravité du système Terre-Lune, cette force **au centre de la Terre** aura la même intensité, mais de direction opposée, que la force d'attraction gravitationnelle de la Lune, qui fait que les deux corps en rotation ne s'éloignent pas.

Par contre **sur** la surface de la Terre, comme l'attraction gravitationnelle n'est pas la même suivant ou l'on se trouve, c'est la différence entre cette force gravitationnelle variable et la force axifuge constante qui crée la force de marée.

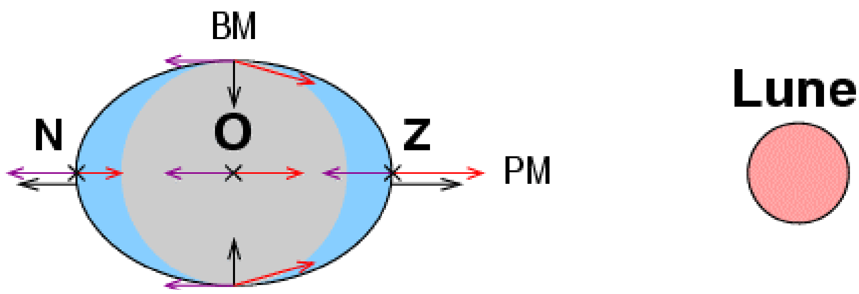


Schéma du système Terre-Lune

La résultante des deux forces (en noir) dépend donc de sa position sur la Terre, elle est :
- nulle au centre de la Terre (point O)
- dirigée vers la Lune au zénith (point Z)
- dirigée à l'opposée de la Lune au nadir (point N)
- dirigée plus ou moins vers le centre de la Terre pour les points situés perpendiculairement à l'axe ZN.

Lorsque la force résultante est dirigée vers le centre de la Terre, la surface des océans a tendance à baisser créant une basse-mer (BM) et à l'inverse lorsque la force est dirigée vers le ciel (au zénith et au nadir) la surface des océans à tendance à monter créant une pleine-mer (PM).

Les forces en jeu sont extrêmement faibles et induisent des variations de niveau généralement

inférieures au mètre dès que l'on s'éloigne des continents. A l'approche des côtes, l'onde de marée peut être considérablement amplifiée par la faible profondeur des eaux et le marnage peut parfois dépasser 10 mètres (17 m en baie de Fundy au Canada et 14.50 m à Granville en Normandie).
Si l'océan était en équilibre avec la force génératrice de la marée, sa surface prendrait la forme d'une ellipse de révolution dont le grand axe serait dirigé vers l'astre. Ce phénomène a reçu le nom de marée statique.

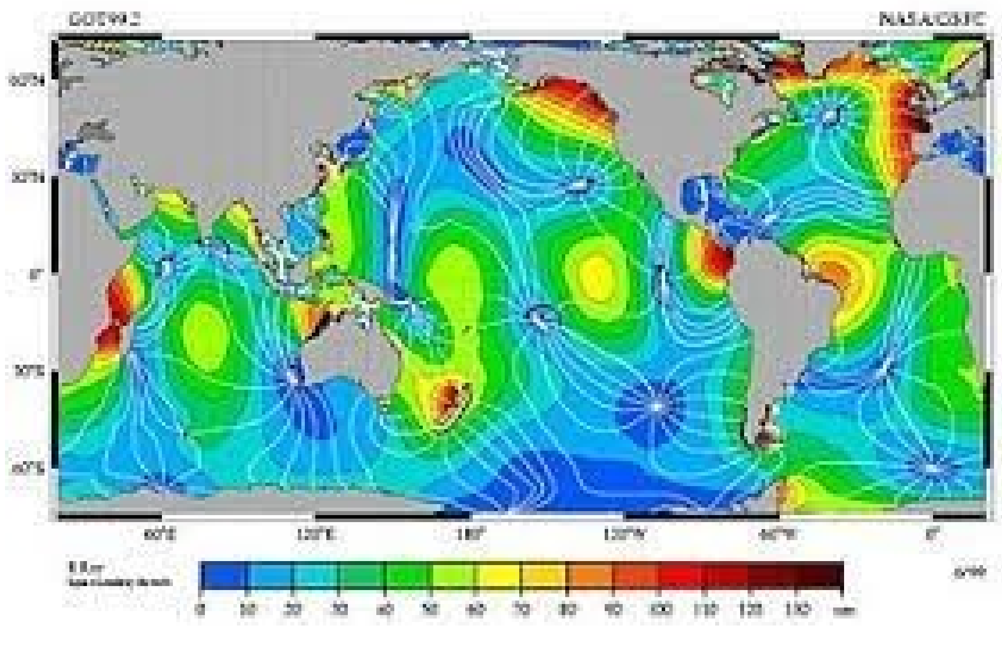
En réalité, la Terre tourne sur elle-même en un jour sidéral. Donc, dans un sytème idéal Terre-Lune, quand la lune est placée dans le plan équatorial de la Terre, le résultat est une **marée semi-diurne.**

De façon très simplifiée, si la lune n'est plus dans le plan équatorial (tilt de l'axe de la Terre par rapport au plan solaire), une **marée diurne** peut être générée (schéma au tableau). Celles-ci se produisent dans le golfe du Mexique, la mer d'Okhotsk, la mer de Chine méridionale, la partie nord-ouest du golfe de Thaïlande et dans la mer de Java.

Dans la réalité, il y a des continents, les ondes de marée se structurent autour de points amphidromiques*. Le résultat est complexe. Il y a **4 cas principaux : marée semi-diurne, marée diurne , marée mixte, marée quasi inexistante** (marée microtidale comme dans une bonne partie de la Méditerranée).

Cependant, les forces en jeu sont extrêmement faibles et induisent des variations de niveau généralement inférieures au mètre dès que l'on s'éloigne des continents. A l'approche des côtes, l'onde de marée peut être considérablement amplifiée par la faible profondeur des eaux et le marnage peut parfois dépasser 10 mètres (17 m en baie de Fundy au Canada et 14.50 m à Granville en Normandie).

Si seulement la marée semi-diurne est représentée, voici ce que cela donne au niveau mondial :



Courtesy NASA

*Un point amphidromique est une zone où l'amplitude de la marée est proche de zéro. Les points amphidromiques sont dus aux phénomènes de résonance qui se produisent dans certains bassins océaniques. L'onde de marée de ces bassins tourne autour d'une zone où l'onde de marée est stationnaire : le point amphidromique.

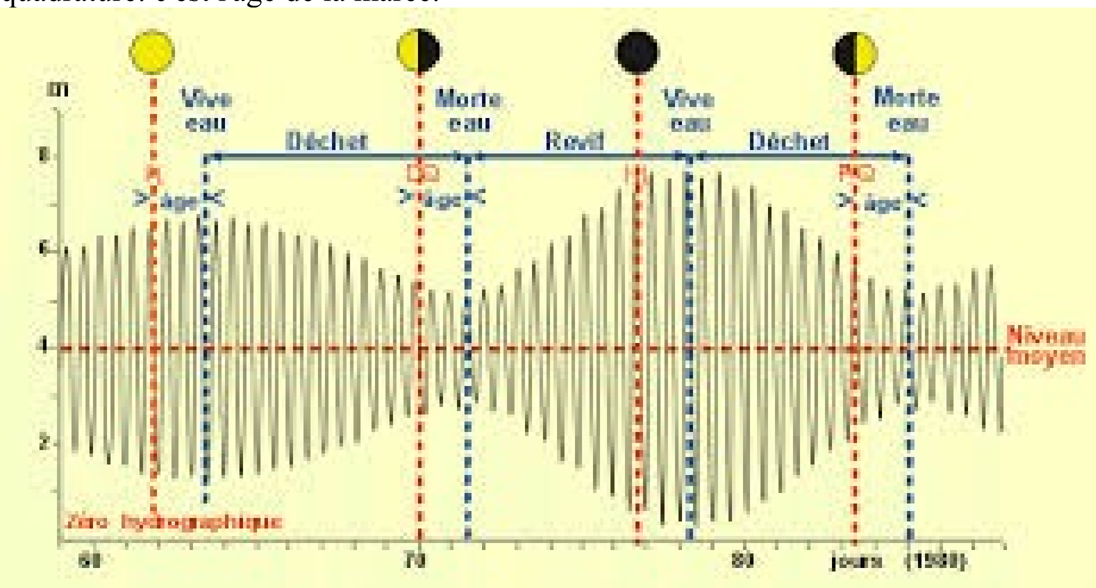
Dans la réalité, la marée est bien plus compliquée, et elle est très bien modélisée en prenant en compte non seulement la lune mais le soleil et les autres astres.

Explication supplémentaire pour le système Terre-Lune- Soleil

La marée lunaire est plus que deux fois plus importante que celle générée par le soleil du fait de la proximité de la lune, compensant sa petite taille.

Si on rajoute le soleil, on a une modulation de la marée :
- marée de vive eau durant les phases de nouvelle et de pleine Lune appelées syzygies, avec un fort marnage quand les trois astres (Terre Lune et Soleil) sont quasi alignés,
- marée de morte eau aux premier et dernier quartiers.

Les marées de vive eau ont donc lieu tous les ~15 jours, ~idem pour les marées de morte eau. En réalite, les vives-eaux et mortes-eaux interviennent avec un retard par rapport aux syzygies et quadrature: c'est l'âge de la marée.



http://astarus.free.fr/les_marees__un_phenomene_g.htm

On peut ajouter une modulation annuelle compte tenu de la position de la terre dans sa rotation autour du soleil. Lors des équinoxes (printemps et automne), le Soleil exerce une attraction plus forte sur la Terre que le reste de l'année, en raison de l'alignement entre le soleil et l'équateur. Par conséquent, la surface de l'eau est plus fortement attirée par le Soleil, ce qui amplifie les marées, on parle alors de **grandes marées.**

1.2.4 Force d'entraînement du vent (rigoureusement : tension)

Le vent soufflant à la surface de l'eau exerce sur la pellicule d'eau superficielle une force de frottement qui dépend de la densité de l'air, la vitesse du vent, de la « rugosité » de la surface de la mer (plus ou moins lisse), de la stratification thermique au voisinage de l'interface (stabilité ou instabilité des masses d'air entraînant une turbulence accrue) et autres causes encore.

Dès 1905, Ekman avait établi qu'une formule, fondée sur des conditions de « dimensions » (voir chapitre suivant), convenait pour une gamme étendue de vitesses :

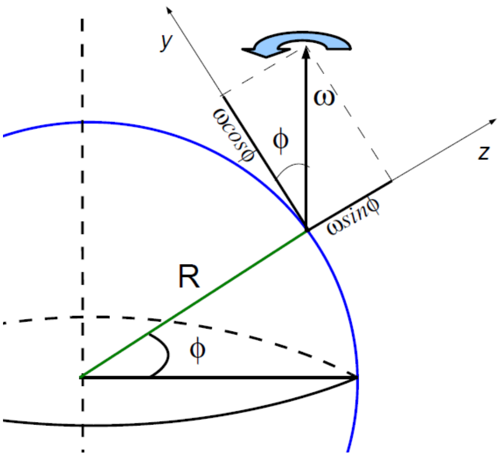
$$\vec{F}=k\,\rho_{air}\,\vec{v}_w\,|\vec{v}_w|$$

avec $\vec{v}_w$ vitesse du vent. Plus rigoureusement, cette formule n'est pas en unité de force [kg.m.s-2] mais en unité de [kg.m-1.s-2] ; en fait c'est une **tension d'entraînement du au vent, qui est une force par unité de surface sur laquelle s'applique le vent.**

Le coefficient *k* dépend de l'intensité du vent et de la hauteur au dessus de l'eau. Généralement, par convention, on se réfère à la vitesse du vent à 10m au-dessus du niveau de l'eau.
L'essentiel de la circulation superficielle est due au vent ; on conçoit l'intérêt d'une étroite collaboration entre météorologistes et océanographes.
Le mouvement provoqué par le vent initialement cantonné à la couche superficielle, se propage vers le bas par viscosité et turbulence.

1.2.5 Force de Coriolis

La force de Coriolis est liée à la rotation de la Terre ; elle s'exerce perpendiculairement au mouvement et est dirigée sur la droite du mouvement dans l'hémisphère Nord.



$$-2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{u} = -2\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \Omega\cos\phi & \Omega\sin\phi \\ u & v & w \end{vmatrix} = \\ = (2\Omega v\sin\phi - 2\Omega w\cos\phi)\,\mathbf{i} - 2\Omega u\sin\phi\,\mathbf{j} + 2\Omega u\cos\phi\,\mathbf{k}$$

L'expression des composantes de la force de Coriolis par unité de masse dans un repère terrestre local (axes liés à la Terre):

sur Ox (vers l'Est) $+2\Omega v\sin\phi\ -2\Omega w\cos\phi$
sur Oy (vers le Nord) $-2\Omega u\sin\phi$
sur Oz (vers le zénith) $+2\Omega u\cos\phi$
avec ω vecteur rotation instantanée du référentiel terrestre (i.e. rotation de la terre), ϕ latitude au point d'observation/étude, et u, v et w composantes du vecteur vitesse.
Rappel : La terre effectue un tour complet (2π radians) vers l'est, en un jour sidéral, soit 86164 secondes (et non 24*3600s = 86 400s). On a donc : Ω=0,729 10^{-4} rad/s.

Les valeurs numériques montrent que la composante verticale (selon Oz) de la force de Coriolis est négligeable devant la pesanteur. On peut en outre négliger généralement les vitesses verticales (w) devant les vitesses horizontales (u et v).
Ces approximations $w \ll u,v$ et $2\Omega\cos\phi\, u \ll g$ sont dites «approximation de mouvements quasi-horizontaux » de telle sorte que les composantes de la force de Coriolis par unité de masse s'écrivent simplement :

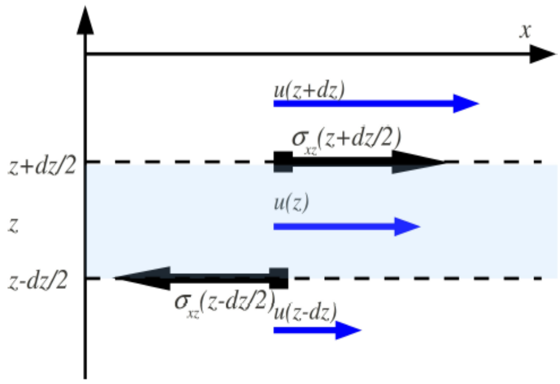
sur O'x' (vers l'Est) : $+2\Omega v \sin\phi \ = \ +f\,v$
sur O'y' (vers le Nord) : $-2\Omega u \sin\phi \ = \ -f\,u$
sur O'z' (vers le zénith) : 0

On pose **f = 2Ωsin ϕ; f est appelé facteur de Coriolis**.
C’est un scalaire, à ne pas confondre avec la force de Coriolis qui est bien evidemment un vecteur.

1.2.6 Forces de frottement dues à la viscosité et équations de Navier-Stokes

La viscosité (ou frottement interne) est une propriété commune à tous les fluides **réels** (c'est à dire « non parfaits »), qui tend à s’opposer aux irrégularités de vitesse dans une masse de fluide en mouvement.
La viscosité mesure la résistance d’un fluide à l’écoulement. Elle est due aux frottements entre les particules fluides en mouvement. Les forces de frottement par unité de surface sont appelées tensions de frottement, ou de cisaillement. Ces forces sont tangentielles, par opposition aux forces de pression qui sont normales aux surfaces considérées.
Parmi les forces extérieures, on a signalé l’action du vent sur la couche superficielle. Ce mouvement va, par viscosité, se transmettre aux couches sous-jacentes de l’eau.

Supposons que le mouvement se fasse rigoureusement par tranches planes, par exemple, horizontales, séparées d'une distance infinitésimale *dz* et animées de vitesses dans la même direction mais inégales en grandeur et ne dépendant que de *z*. On écrit $\sigma_{xz} = \sigma_{xz}(z)$
la contrainte tangentielle dans la direction *x* (indiquée par le premier indice) générée par la viscosité entre les couches superposées sur la verticale (deuxième indice) .



Par le principe d'action et réaction, la force qui s'exerce sur la couche inférieure est égale en intensité et opposée en direction par rapport à la force qui s'exerce sur la couche supérieure. En considérant la couche centrée à la profondeur *z*, la contrainte visqueuse exercée par la couche supérieure sera $\sigma_{xz} = \sigma_{xz}(z + dz/2)\vec{i}$ avec $\vec{i}$ vecteur unitaire en direction *x*, tandis que celle exercée par la couche inférieure sera $-\sigma_{xz}(z - dz/2)\vec{i}$. Le signe positif indique que la couche supérieure tend à entraîner la couche de référence vers les *x* positifs et celle inférieure tend à la freiner .

Il faut noter aussi que, bien que la couche de référence soit sujette à un couple de forces, elle ne tourne pas car elle est bloquée dans sa position par les autres couches qui l'entourent .

Avec le début du développement de Taylor d’une fonction, la force visqueuse par unité de volume qui agit sur la couche dans la direction $\vec{i}$ s'écrit :

$$\rho \vec{F}_{v\,\vec{i}} = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}\vec{i} \quad .$$

De quoi dépend la contrainte visqueuse σ_{xz} ? L'hypothèse simple, formulée par Newton, est qu'elle est proportionnelle au cisaillement de la vitesse (en anglais *shear*) :

$$\sigma_{xz} = \mu \frac{\partial u}{\partial z} \quad .$$

avec une constante de proportionnalité μ appelée viscosité moléculaire dynamique (avec unités kg m^{-1} s^{-1} ou Pa s), à estimer empiriquement . La science des fluides non newtoniens s'appelle la rhéologie.
La suite est donc valable pour les **fluides dits newtoniens**.

Finalement, si on remplace σ_{xz} dans la première équation :

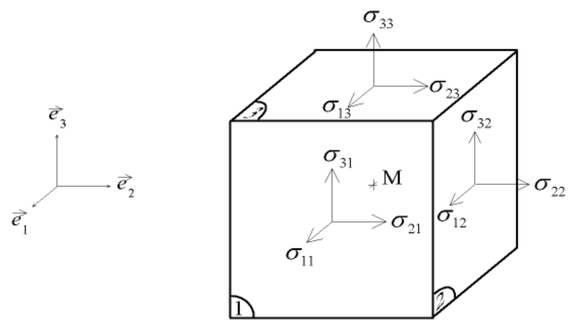
$$\vec{F}_{v\vec{i}} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \vec{i} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \vec{i}$$

avec ν appelée viscosité moléculaire cinématique (avec unités m² s^{-1}).
Pour préciser les forces de frottement dans le cas d'un écoulement tridimensionnel il faut prendre en compte les trois composantes de la force de frottement et, du fait qu'elles agissent sur les trois directions *x*, *y* et *z*, cela conduit à introduire le tenseur des contraintes

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad .$$

Les éléments sur la diagonale σ_{ii} correspondent aux contraintes normales à la surface dS, donc à une force de sur-pression qui s’ajoute à cause de la viscosité.

Les éléments hors de la diagonale σ_{ij} correspondent aux contraintes tangentielles, de frottement ou de cisaillement.



Si de nouveau on utilise l'hypothèse de Newton on peut calculer les éléments du tenseur de la façon suivante:

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \mu \frac{\partial u}{\partial x} & \mu \frac{\partial u}{\partial y} & \mu \frac{\partial u}{\partial z} \\ \mu \frac{\partial v}{\partial x} & \mu \frac{\partial v}{\partial y} & \mu \frac{\partial v}{\partial z} \\ \mu \frac{\partial w}{\partial x} & \mu \frac{\partial w}{\partial y} & \mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad ,$$

Comme dans chaque direction, il y a trois termes, la notation vectorielle pour la force visqueuse devient :

$$\vec{F}_v = \nu \vec{\nabla}^2 \vec{v} = \nu \Delta \vec{v}$$

Il est très important de se rappeler que cette notation est valable **exclusivement** pour un fluide newtonien, i.e. avec viscosité linéaire proportionnelle au cisaillement de la vitesse, et incompressible.

Dans le cas de ces approximations, tout à fait raisonnables pour l'océan, les équations dites de Navier-Stokes s'écrivent sous forme vectorielle

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} - 2\vec{\Omega}\times\vec{v} + \nu\nabla^2\vec{v}$$

Toujours dans le repère terrestre local (non galiléen) utilisé jusqu'à présent, cette équation peut s'écrire sous forme développée ; ce sont les **équations de Navier-Stokes** :

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + fv + \nu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - fu + \nu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right]$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right]$$

Par convention, on définit comme « équations de l'hydrodynamique » le système composé des trois équations précédentes (équations de Navier-Stokes) et de l'équation de continuité en condition d'incompressibilité du fluide, i.e.

$$\nabla\cdot\vec{v} = 0 \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Il y a alors 5 inconnues : les trois composantes de la vitesse *u*, *v*, et *w*, la pression *p* et la masse volumique ρ et il y a 5 équations à résoudre : le système est donc fermé.
Dans la pratique de la modélisation de la circulation océanique, en plus de ces variables, il est possible de déterminer la température et la salinité au sein du fluide avec des équations de transport.

Les forces externes n'interviennent pas directement dans les équations. La force due à la pente de surface libre intervient au niveau du gradient de pression. La force génératrice de la marée est rarement introduite dans les modèles. On utilise plutôt l'impact que la marée a sur l'élévation de surface libre, i.e. une variation temporelle, somme de plusieurs ondes sinusoïdales. Quant aux forces de frottements dues au vent, elles sont prises en compte dans le terme de frottement, au niveau de la surface libre.

<u>Remarque</u>

Une autre classification des forces peut exister, en correspondance avec ce qui a été fait dans la section de rappels. Les forces relatives dans un repère local non galiléen sont composées: des forces absolues (du repère galiléen; i.e. frottement, pression et gravitation), de la force d'entraînement centrifuge et de la force de Coriolis.

<table>
<tr><td colspan="4">Forces relatives = Forces absolues +</td><td colspan="2">Pseudo-forces</td></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td colspan="3">Forces absolues +</td><td rowspan="2">Force d' entraînement axifuge</td><td rowspan="3">+ Force de
Coriolis</td></tr>
<tr><td rowspan="3">frottement

secondaire</td><td>pression</td><td>gravitation</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">pesanteur</td></tr>
<tr><td>interne</td><td>interne</td><td>interne</td><td>secondaire</td></tr>
</table>

En effet, quand on parle de pesanteur, on inclut la gravité, correspondant à une composante des forces absolues, et la force d'entraînement. Quant à la force de Coriolis, elle est désignée comme une force secondaire dans la classification de la présente section.
+ voir note précédente sur les forces externes.

1.3 Écoulement turbulent et équations de Reynolds (voir détails en TD)

La turbulence désigne l'état de l'écoulement d'un fluide, dans lequel la vitesse présente en tout point un caractère tourbillonnaire : tourbillons dont la taille, la localisation et l'orientation varient constamment. Les écoulements turbulents se caractérisent donc par une apparence très désordonnée, un comportement difficilement prévisible et la coexistence de nombreuses échelles spatiales et temporelles. De tels écoulements apparaissent lorsque la source d'énergie cinétique qui met le fluide en mouvement est relativement intense devant les forces de viscosité que le fluide oppose pour se déplacer. À l'inverse, on appelle laminaire le caractère d'un écoulement régulier.
Si on fait plusieurs fois une même expérience pour mesurer la vitesse, on n'obtiendra pas les mêmes valeurs. Alors, plutôt que de rechercher la vitesse instantanée, obtenue avec les équations de Naviers-Stokes vues précédemment, on cherche une vitesse lissée dans le temps, c'est à dire moyennée sur une période de temps dépendant du phénomène étudié et on décompose la vitesse en une partie moyenne et un écart à la moyenne :

$$u=\overline{u}+u' \qquad \text{avec} \quad \overline{u'}=0$$

Cette technique s'appelle **décomposition de Reynolds**.

Pour l'équation de continuité dans le cadre de l'hypothèse d'incompressibilité, on a :

$$\overline{\frac{\partial(\overline{u}+u')}{\partial x}+\frac{\partial(\overline{v}+v')}{\partial y}+\frac{\partial(\overline{w}+w')}{\partial z}} = 0 \quad .$$

On obtient pour les valeurs moyennes et pour les écarts :

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{v}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{w}}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}=0 \quad \text{(par différence } u-\overline{u}\text{)}$$

Pour les équations de Navier-Stokes :

$$\overline{\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial t}+(\bar{u}+u')\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial x}+(\bar{v}+v')\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial y}+(\bar{w}+w')\frac{\partial(\bar{u}+u')}{\partial z}} = \overline{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + f(\bar{v}+v') + \nu\left[\frac{\partial^2(\bar{u}+u')}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(\bar{u}+u')}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(\bar{u}+u')}{\partial z^2}\right]}$$

$$\overline{\frac{\partial(\bar{v}+v')}{\partial t}+(\bar{u}+u')\frac{\partial(\bar{v}+v')}{\partial x}+(\bar{v}+v')\frac{\partial(\bar{v}+v')}{\partial y}+(\bar{w}+w')\frac{\partial(\bar{v}+v')}{\partial z}} = \overline{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - f(\bar{u}+u') + \nu\left[\frac{\partial^2(\bar{v}+v')}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(\bar{v}+v')}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(\bar{v}+v')}{\partial z^2}\right]}$$

$$\overline{\frac{\partial(\bar{w}+w')}{\partial t}+(\bar{u}+u')\frac{\partial(\bar{w}+w')}{\partial x}+(\bar{v}+v')\frac{\partial(\bar{w}+w')}{\partial y}+(\bar{w}+w')\frac{\partial(\bar{w}+w')}{\partial z}} = \overline{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g + \nu\left[\frac{\partial^2(\bar{w}+w')}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(\bar{w}+w')}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(\bar{w}+w')}{\partial z^2}\right]}$$

En TD, il sera démontré qu'en appliquant l'hypothèse que la moyenne des écarts est nulle on obtient $\overline{u\frac{\partial u}{\partial x}} = \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}}$ et de même pour les autres composante y et z. Ainsi les équations deviennent :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}+\overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}}+\overline{v'\frac{\partial u'}{\partial y}}+\overline{w'\frac{\partial u'}{\partial z}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f\bar{v} + \nu\left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}\right]$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}+\overline{u'\frac{\partial v'}{\partial x}}+\overline{v'\frac{\partial v'}{\partial y}}+\overline{w'\frac{\partial v'}{\partial z}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - f\bar{u} + \nu\left[\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2}\right]$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}+\overline{u'\frac{\partial w'}{\partial x}}+\overline{v'\frac{\partial w'}{\partial y}}+\overline{w'\frac{\partial w'}{\partial z}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - g + \nu\left[\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2}\right]$$

Des nouveaux termes apparaissent : ils correspondent aux échanges d'énergie liées à la turbulence. Or, ajoutant à chaque équation la divergence des écarts, qui est nulle, multipliée par l'écart de la composante, les termes tels que $\overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}}$ peuvent s'écrire : $\frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x}$ (voir TD). Les termes $\overline{u'u'}, \overline{u'v'}$ etc.. ne sont pas nuls et sont appelés **tensions de Reynolds**. Ils constituent un tenseur à 9 éléments, dit **tenseur de Reynolds** :

$$\bar{\bar{\tau}} = \begin{bmatrix}\tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\overline{u'u'} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'}\\ \overline{v'u'} & \overline{v'v'} & \overline{v'w'}\\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'w'}\end{bmatrix} .$$

Ce tenseur est très similaire à celui des contraintes dues à la viscosité moléculaire, alors J.V. Boussinesq en s'inspirant de ce que Newton avait proposé pour la viscosité moléculaire, introduisit le concept de *viscosité due à la turbulence* et proposa de relier ces tensions de Reynolds aux composantes du gradient des vitesses moyennes de la façon suivante :

$$\overline{u'u'}=-A_x\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \quad ; \quad \overline{u'v'}=-A_y\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad ; \quad \overline{u'w'}=-A_z\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

$$\overline{v'u'}=-A_x\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \quad ; \quad \overline{v'v'}=-A_y\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \quad ; \quad \overline{v'w'}=-A_z\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}$$

$$\overline{w'u'}=-A_x\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \quad ; \quad \overline{w'v'}=-A_y\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \quad ; \quad \overline{w'w'}=-A_z\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}$$

Contrairement à la viscosité cinématique moléculaire ν , **la viscosité turbulente n'est pas une propriété du fluide, mais de l'écoulement.**

Ainsi les coefficients A (unités $m^2\,s^{-1}$) peuvent varier d'un écoulement à un autre, ou même d'un endroit à l'autre d'un écoulement ; en fait, ils dépendent de l'échelle sur laquelle la « moyenne » a été effectuée ou du phénomène étudié.

Les équations de Navier-Stokes deviennent :

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + f\bar{v} + \nu\left[\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial z^2}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left(A_x\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(A_y\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(A_z\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right),$$
$$\frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - f\bar{u} + \nu\left[\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial z^2}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left(A_x\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(A_y\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(A_z\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right),$$
$$\frac{d\bar{w}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu\left[\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial z^2}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left(A_x\frac{\partial\bar{w}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(A_y\frac{\partial\bar{w}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(A_z\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}\right),$$

qui sont connues aussi comme ***RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) equations*** .

Enfin, en considérant les coefficients de viscosité turbulente comme constants, bien qu'il s'agit d'une très forte approximation, on peut réécrire les équations sous la forme :

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + f\bar{v} + \nu\left[\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial z^2}\right] + A_x\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2} + A_y\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2} + A_z\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial z^2},$$
$$\frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - f\bar{u} + \nu\left[\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial z^2}\right] + A_x\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial x^2} + A_y\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial y^2} + A_z\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial z^2}.,$$
$$\frac{d\bar{w}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu\left[\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial z^2}\right] + A_x\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial x^2} + A_y\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial y^2} + A_z\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial z^2}.$$

1.4 Simplifications

Ces équations peuvent être simplifiées de diverses manières ce qui rend les équations plus faciles à résoudre. Certaines simplifications permettent de trouver des solutions analytiques à des problèmes de dynamique des fluides.

<u>Écoulement stationnaire</u>
Une simplification des équations de la dynamique des fluides est de considérer la vitesse et toutes les propriétés du fluide comme étant constantes dans le temps. $\frac{\partial}{\partial t}=0$

Pour les écoulements turbulents, on peut parler de stationnarité statistique, indiquant que les propriétés statistiques ne varient pas dans le temps et, en particulier, les champs moyens sont constants. Ceci est applicable à de nombreux problèmes diverses, tels que la poussée ou la traînée d'une aile ou un flux traversant un tuyau. Les équations de Navier-Stokes et celles d'Euler deviennent alors plus simples.

<u>Approximation hydrostatique</u>
L'océan est une couche d'eau « peu profonde » par rapport à son étendue horizontale. Du coup, les mouvement verticaux sont généralement très inférieurs à ceux horizontaux. Cela signifie que dans l'équation de Navier-Stokes concernant la composante verticale, on neglige tous les termes où apparaît la vitesse verticale. Cette équation devient alors :

$$0=-\frac{\partial p}{\partial z}-\rho g$$

La vitesse verticale, quant à elle, est déduite de l'équation de continuité. Cela implique aussi qu'on considère que la pression en tout point de l'océan est uniquement et directement proportionnelle au poids de la colonne d'eau au-dessus de ce point et ne varie pas que le fluide soit en mouvement ou au repos.

Approximation de Boussinesq

La masse volumique de l'eau de mer varie peu dans l'espace et dans le temps autour d'une valeur moyenne : $\rho = \rho_0 + \rho'(x, y, z, t)$. La masse volumique peu alors être considérée comme constante lorsqu'elle intervient avec les quantités de mouvement, mais sa variation est prise totalement en compte quand elle intervient dans le terme de flottabilité.

Hypothèse d'incompressibilité

La masse volumique du fluide peut varier de particule à particule, donc le fluide n'est pas forcement homogène, mais chaque particule conserve sa propre masse volumique pendant le mouvement, i.e. sa dérivée lagrangienne est nulle :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho = 0 \quad \cdot$$

Avec cette hypothèse l'équation de continuité se simplifie sous la forme :

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

C'est une hypothèse moins contraignante que de considérer le fluide comme homogène et stationnaire (i.e. $\rho(x, y, z, t) = const$).

2. Analyse des ordres de grandeur et nombres sans dimensions

2.1. Analyses des ordres de grandeur des termes des équations de Reynolds

"*Scaling*" est un terme anglais dont la traduction peut être adimensionalisation. Pour l'application océanographique, on regarde l'ordre de grandeur des différents termes des équations du mouvement, pour effectuer des simplifications. On considère les deux cas de la circulation générale et de la circulation de moyenne échelle.

Circulation générale

Pour la circulation générale de grande échelle à l'intérieur des océans, loin des couches limites latérales, de surface et de fond, on a les ordres de grandeur suivants:

L = 1000 km = 10^6 m, H = 1000 m = 10^3 m, U = 10^{-2} ms^{-1}.

La vitesse verticale est estimée à partir de l'équation de continuité:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{W}{H} \simeq \frac{U}{L} \qquad \text{donc} \quad W = \frac{UH}{L} = 10^{-5}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Pour obtenir les ordres de grandeur des coefficients de viscosité turbulente, on impose aux termes de frottement d'être du même ordre de grandeur que les termes non linéaires:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} \simeq A_x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \frac{U^2}{L} = A_x\frac{U}{L^2} \quad , \quad A_x = U\,L = 10^{-2}\,10^{6} = 10^{4}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}} \quad \text{et}$$

$$w\frac{\partial u}{\partial z} \simeq A_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad \frac{W\,U}{H} = A_z\frac{U}{H^2} \quad , \quad A_z = W\,H = 10^{-5}\,10^{3} = 10^{-2}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$$

En supposant le mouvement comme stationnaire, les équations de la quantité de mouvement deviennent alors :

- pour l'horizontale

$$+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+fv+A_x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+A_y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+A_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-fu+A_x\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+A_y\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+A_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

avec ordres de grandeurs

$$\frac{U^2}{L} \quad \frac{U^2}{L} \quad \frac{WU}{H} \quad = \quad ? \quad f_o U \quad A_x\frac{U}{L^2} \quad A_y\frac{U}{L^2} \quad A_z\frac{U}{H^2}$$

en remplaçant

$$10^{-10} \quad 10^{-10} \quad 10^{-10} \quad = \; ? \quad 10^{-6} \quad 10^{-10} \quad 10^{-10} \quad 10^{-10}$$

- pour la verticale

$$+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g+A_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+A_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+A_z\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

avec ordres de grandeurs

$$\frac{UW}{L} \quad \frac{UW}{L} \quad \frac{W^2}{H} \quad = \quad ? \quad g \quad A_x\frac{W}{L^2} \quad A_x\frac{W}{L^2} \quad A_z\frac{W}{H^2}$$

en remplaçant

$$10^{-13} \quad 10^{-13} \quad 10^{-13} \quad = \quad ? \quad 10 \quad 10^{-13} \quad 10^{-13} \quad 10^{-13}$$

En conclusion, le terme de pression, qu'on ne sait pas estimer, doit être du même ordre de grandeur que le terme de Coriolis: c'est l'**équilibre géostrophique sur l'horizontale et l'équilibre hydrostatique sur la verticale**.

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + fv$$
$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - fu$$
$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g$$

Circulation « moyenne échelle »

Pour la circulation « moyenne échelle » les ordres de grandeur sont les suivants :
L = 100 km = 10^5 m, H = 1000 m = 10^3 m, U = 10^{-1} ms^{-1}, $T \simeq 10 jours \simeq$ 10^6 s
La vitesse verticale est estimée à partir de l'équation de continuité:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{W}{H} \simeq \frac{U}{L} \qquad \text{donc} \quad W = \frac{UH}{L} = 10^{-3}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Pour obtenir les ordres de grandeur des coefficients de viscosité turbulente, on impose aux termes de frottement d'être du même ordre de grandeur que les termes non linéaires:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} \simeq A_x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \frac{U^2}{L} = A_x\frac{U}{L^2} \;, \quad A_x = U\,L = 10^{-1}\,10^5 = 10^4\,\mathrm{m^2 s^{-1}} \quad \text{et}$$
$$w\frac{\partial u}{\partial z} \simeq A_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad \frac{W\,U}{H} = A_z\frac{U}{H^2} \;, \quad A_z = W\,H = 10^{-3}\,10^3 = 1\,\mathrm{m^2 s^{-1}}$$

- pour la verticale

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + A_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + A_z\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

avec ordres de grandeurs

$$\frac{W}{T} \quad \frac{UW}{L} \quad \frac{UW}{L} \quad \frac{W^2}{H} \quad = \quad ? \quad g \quad A_x\frac{W}{L^2} \quad A_x\frac{W}{L^2} \quad A_z\frac{W}{H^2}$$

en remplaçant

$$10^{-9} \quad 10^{-9} \quad 10^{-9} \quad 10^{-9} \quad = \quad ? \quad 10 \quad 10^{-9} \quad 10^{-9} \quad 10^{-9}$$

L'équilibre est encore hydrostatique puisque le terme de pression doit équilibrer *g*.

- pour l'horizontale

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z} \;=\; -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+fv+A_x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+A_y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+A_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

avec ordres de grandeurs

$$\frac{U}{T} \quad \frac{U^2}{L} \quad \frac{U^2}{L} \quad \frac{WU}{H} \;=\; ? \quad fU \quad A_x\frac{U}{L^2} \quad A_y\frac{U}{L^2} \quad A_z\frac{U}{H^2}$$

en remplaçant

$$10^{-7}\,10^{-7} \quad 10^{-7} \quad 10^{-7} \;=\; ? \quad 10^{-5} \quad 10^{-7} \quad 10^{-7} \quad 10^{-7}$$

La géostrophie n’est satisfaite qu’à quelques pour-cents près: c’est un équilibre quasi-géostrophique. Du coup il faut garder tous les autres termes.

2.2. Le nombre de Reynolds

Les termes d'advection sont non-linéaires parce qu'ils représentent des dérivées de carrés de vitesse $\left(\text{e.g. } u\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x}\right)$, ou le produit de différentes composantes de la vitesse et de leurs dérivées $\left(\text{e.g. } v\frac{\partial u}{\partial y}\right)$.

Cette équation est instantanée et donc u, v et w présentent des variations (ou perturbations) au cours du temps. A cause de ces termes non-linéaires, une faible perturbation peut induire une grande fluctuation.
Ces termes peuvent engendrer une instabilité quand ils sont « suffisamment grands » comparés aux termes visqueux qui eux ont tendance à homogénéiser ou effacer les différences de vitesse.
Pour estimer ce que signifie « suffisamment grands », considérons le rapport d'un terme non-linéaire à un terme de tension visqueuse:

$$\frac{u\frac{\partial u}{\partial x}}{\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

Si l'on analyse les dimensions, on voit qu'il s'agit d'un nombre sans dimension.
Si l'on considère u et ∂u comme étant de l'ordre de U (échelle de vitesse typique) et ∂x de l'ordre de L (échelle de longueur typique sur laquelle la vitesse U varie) le rapport précédent devient:

$$\frac{\frac{U^2}{L}}{\nu\frac{U}{L^2}} \;=\; \frac{UL}{\nu} \;=\; Re$$

et est appelé nombre de Reynolds pour un écoulement fluide.
Re détermine le caractère laminaire ou turbulent de l'écoulement. Si Re $\geq 10^5$ l'écoulement est turbulent . Pratiquement tous les mouvements océaniques sont des écoulements turbulents. Par

exemple, pour le Gulf Stream on a U= 1m/s, L = 100 km= 10^5 m, ν = 10^{-6} m^2/s donc, Re = 10^{11}.
Les effets non linéaires sont très grands par rapport aux termes moléculaires (visqueux). En fait, en mer ouverte, on peut toujours négliger les effets moléculaires visqueux. Ils deviennent importants au voisinage immédiat de parois solides et, ôtant de l'énergie à l'écoulement turbulent aux petites échelles, l'empêchent de s'amplifier sans limitation. Les effets moléculaires visqueux sont importants pour les faibles valeurs de Re, i.e. pour les faibles valeurs de u et/ou L.

2.3. Nombre de Rossby et nombre d'Ekman

L'importance relative des termes non linéaires par rapport au terme de Coriolis est appelé nombre de Rossby:

$$R_o = \frac{U^2/L}{fU} = \frac{U}{fL}$$

où U, L et f sont les ordres de grandeurs respectifs pour la vitesse horizontale, l'échelle spatiale horizontale et le facteur de Coriolis.

Si $R_o \ll 1$ les termes non linéaires sont négligeables par rapport au terme de Coriolis (géostrophie ou quasi-géostrophie).
Si $R_o \gg 1$ le terme de Coriolis est négligeable par rapport aux termes non linéaires. C'est le cas des mouvements à petites périodes (hautes fréquences) tels que les vagues et la houle.
Si $R_o \simeq 1$ on ne peut rien négliger. C'est le cas des mouvements à période proche de la période d'inertie, tels que le courant d'inertie, la marée, les ondes internes de grand longueur d'onde.

Le nombre d'Ekman vertical compare le terme de frottement vertical au terme de Coriolis:

$$Ek = \frac{\nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}{f\nu} = \frac{\nu \frac{U}{H^2}}{fU} = \frac{\nu}{fH^2}$$

Ce nombre est souvent faible, mais l'importance du frottement est essentielle dans les couches limites.
Il est très important de noter que en océanographie, étant donné que tous les écoulements sont turbulents, dans la définition du nombre de Reynolds et du nombre d'Ekman on remplace la viscosité moléculaire par la viscosité turbulente:

$$Re_h^{turb} = \frac{UL}{A_h} \quad Re_z^{turb} = \frac{UL}{A_z} \quad \text{et} \quad Ek_z^{turb} = \frac{A_z}{fH^2} .$$

Dans ces derniers cas il serait plus correct de parler du nombre de Reynolds turbulent et du nombre d'Ekman turbulent .

3. Courants sans frottement

3.1 L'écoulement géostrophique

La géostrophie traduit l'équilibre entre la force de pression horizontale et la force de Coriolis. On considère donc ici que les courant sont permanents et que la tension du vent et autres termes de frottement peuvent être négligés . C'est la circulation générale . L'écoulement géostrophique est donc défini par ce système d'équations :

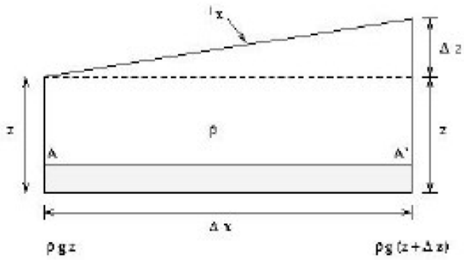
$$
\begin{aligned}
f\,v &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\
f\,u &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\
\frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho g
\end{aligned}
$$

Les deux premières équations traduisent l'équilibre géostrophique, la troisième est l'équation de l'hydrostatique . Ces équations sont obtenues à partir des équations de Navier-Stokes, dans l'approximation de Boussinesq, en supprimant l'accélération et les termes de frottement . Les courants qui satisfont à ce système sont appelés courants géostrophiques .
Tous les grands courants océaniques permanents, tels que le Gulf Stream, le courant Antarctique Circumpolaire, les Grands Courant Equatoriaux sont, en première approximation en équilibre géostrophique .
Et le Courant Nord au large de Marseille, est-il en équilibre géostrophique ? Voir le projet de modélisation de P.Recoules (PDF du rapport et PDF de la presentation)

Imaginons une situation simpliste: de l'eau de mer de masse volumique constante ρ_o occupant un bassin océanique et une pente à la surface de l'eau.

Selon la loi de l'hydrostatique la pression en un point du fluide est simplement la pression due au poids de la colonne d'eau située au dessus de ce point, agissant par unité de surface :

$$P_1=\rho_o g z \quad ; \quad P_2=\rho_o g(z+\Delta z)$$



Le terme de gradient de pression suivant *x* s'écrit :

$$\frac{1}{\rho_o}\frac{\partial p}{\partial x} \simeq \frac{1}{\rho_o}\frac{P_2-P_1}{\Delta x} = \frac{1}{\rho_o}\frac{\rho_o g(z+\Delta z)-\rho_o g z}{\Delta x} = g\frac{\Delta z}{\Delta x}$$

En approximation hydrostatique et pour un fluide homogène le gradient de pression est créé par une différence de niveau de hauteur de la colonne d'eau. On peut ainsi calculer l'intensité du courant en approximation géostrophique

$$
\begin{aligned}
v &\approx +\frac{g}{f}\frac{\Delta z}{\Delta x}\\
u &\approx -\frac{g}{f}\frac{\Delta z}{\Delta y}
\end{aligned}
$$

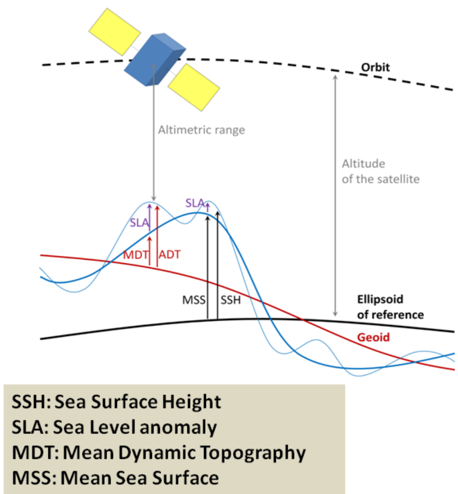
En générale, intégrant l'équation de l'équilibre hydrostatique entre un niveau de référence $-z_o$ et la surface de la mer η on obtient l'expression suivante pour la pression

$$\int_{-z_o}^{\eta} dp \ = \ -\rho_0 g \int_{-z_o}^{\eta} dz$$
$$[p]_{-z_o}^{\eta} = -\rho_0 g [z]_{-z_o}^{\eta}$$
$$p_\eta - p_{-z_o} = -\rho_0 g [\eta + z_o]$$
$$p_{-z_o} = p_\eta + \rho_0 g [\eta + z_o]$$

et, si on remplace dans les termes de gradient horizontal de pression, étant la pression atmosphérique p_η et le niveau de référence z_o des constantes, on obtient

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \ = \ g\frac{\partial \eta}{\partial x}$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \ = \ g\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

avec η la hauteur de la surface de la mer.
Ddans le jargon océanographique on parle aussi de surélévation ou *ssh - sea surface height*), calculée par rapport à l'ellipsoïde.



Le gradient de pression est le même partout à l'intérieur du fluide. Donc si aucune autre force n'agit, le fluide entier doit être accéléré des hautes vers les basses pressions.
En incluant ces formules dans le système d'équations ci-dessus, on obtient un nouveau système de deux équations

$$f v \ = \ g\frac{\partial \eta}{\partial x}$$
$$f u \ = \ -g\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

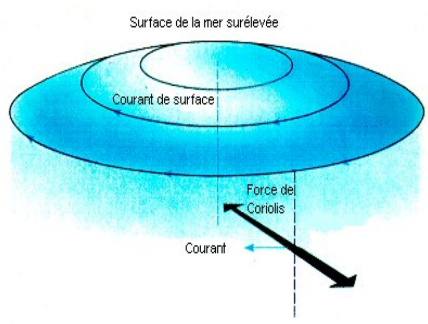
D'autre part en multipliant la première équation par u et la seconde par v et en les retranchant, il vient :

$$u\frac{\partial \eta}{\partial x} + v\frac{\partial \eta}{\partial y} \ = \ 0 \quad \text{i.e.} \quad \vec{v} \cdot \nabla \eta \ = \ 0$$

Il résulte de ceci, d'une part que le fluide ne dévale pas la pente des hautes vers les basses pressions, mais tourne autour du dôme de pression. L'écoulement est parallèle aux isobares (perpendiculaire au gradient de pression), et d'autre part la vitesse du courant est proportionnelle à la pente des isobares .

Dans l'hémisphère Nord une pente de la surface de l'eau orientée de l'Est vers l'Ouest crée une force de gradient de pression dirigée vers l'Ouest .
Cette pente crée à l'origine un mouvement des particules d'eau vers l'Ouest, mais dès que la particule entre en mouvement la force de Coriolis vient agir à droite (dans l'Hémisphère Nord) du mouvement.

L'équilibre est atteint lorsque l'écoulement devient perpendiculaire au gradient de pression, et donc parallèle aux isobares .
Dans l'hémisphère nord l'écoulement se fait dans le sens des aiguilles d'une montre autour des hautes pressions, dans le sens inverse autour des basses pressions . Quand on regarde dans la direction de l'écoulement, les hautes pressions sont à droite dans l'hémisphère Nord, à gauche dans l'Hémisphère Sud .
Ce mouvement peut durer indéfiniment (étant donné qu'on néglige les frottements) contrairement à ce qui se passerait en milieu non tournant où les hautes pressions auraient tendance à combler les basses pressions.



Un schéma très simplifié de la circulation de surface dans l'océan global est celui qui consiste à imaginer dans chaque bassin limité par des continents qu'il y a deux grandes recirculations ou gyres, un subtropical anticyclonique et un subpolaire cyclonique. Ce schéma fonctionne bien pour l'Atlantique Nord et le Pacifique Nord qui sont délimités par des côtes, mais pas au Sud ou aucune côte n'arrête les courants qui sont circumpolaire. C'est-à-dire que l'on peut naviguer sans interruption et à la même latitude au sud des Océans Atlantique, Pacifique et Indien, autour du continent Antarctique.

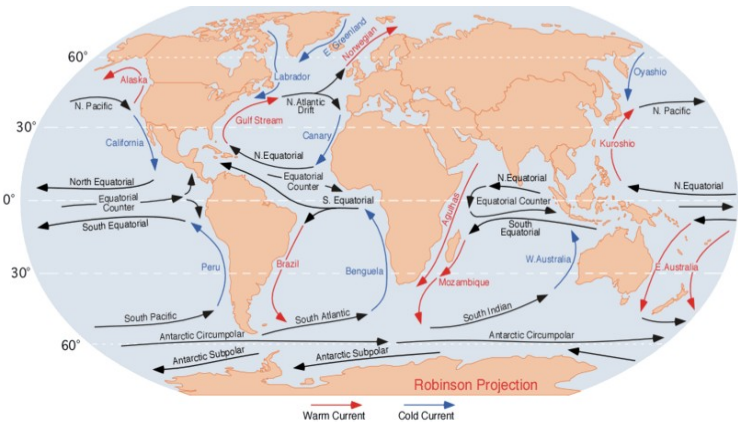
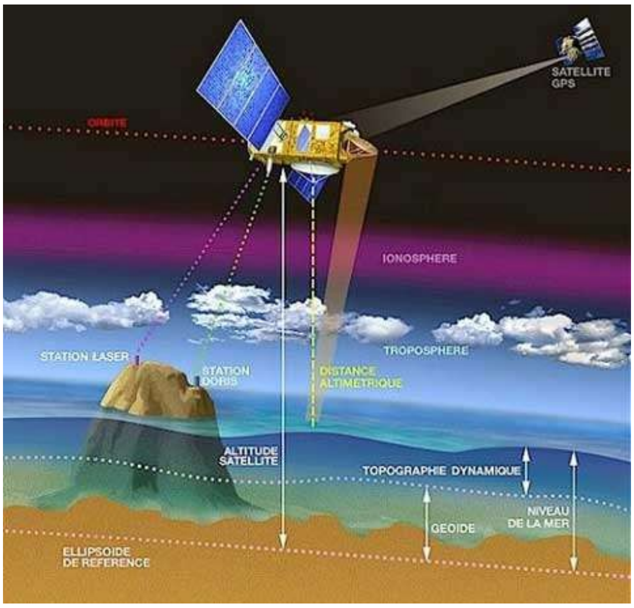


figure tirée de http://en.wikipedia.org/wiki/Ocean_current

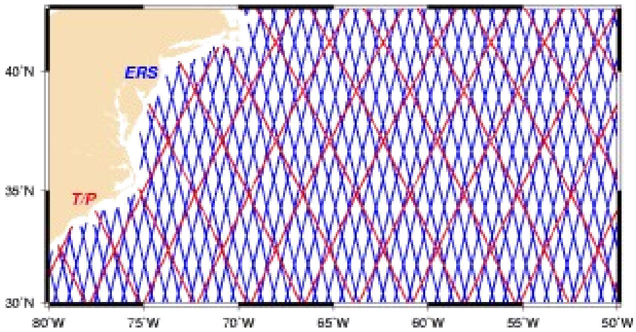
figure tirée de
http://en.wikipedia.org/wiki/Gyre
et modifiée.

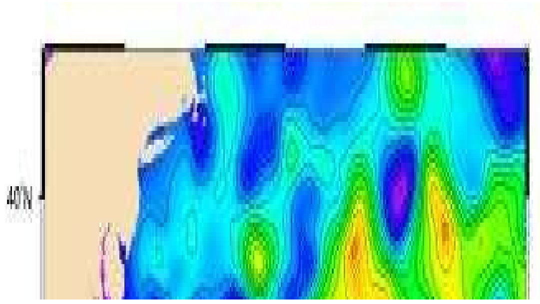
Dans la figure ci-dessous est illustré le principe de fonctionnement de l'altimétrie satellite, qui fournit des cartes de *ssh* pour l'océan globale. Ensuite, en utilisant l'approximation géostrophique on peut aussi estimer par satellite les courants de surface.



Aviso.fr

https://www.futura-sciences.com/sciences/dossiers/astronautique-decouvrir-altimetrie-495/page/5/





3.2 Le courant d'inertie

Si une particule n'est soumise à aucune force extérieure, son accélération dans un repère d'inertie obéit à la II^{ème} loi de Newton . Les équations du mouvement se simplifient de la façon suivante :

$$\frac{du}{dt} = fv$$
$$\frac{dv}{dt} = -fu$$

en résolvant pour *u* et en remplaçant dans la deuxième équation avec *f* constant,

$$v = \frac{1}{f}\frac{du}{dt}$$
$$\frac{1}{f}\frac{d^2u}{dt^2} = -fu \qquad \text{i.e.} \qquad \frac{d^2u}{dt^2} + f^2u = 0$$

La solution générale de cette dernière équation différentielle du deuxième dégrée est notamment :

$$u = +V_o\cos(ft+\psi) \quad \text{et si on remplace dans l'équation pour } v$$
$$v = -V_o\sin(ft+\psi)$$

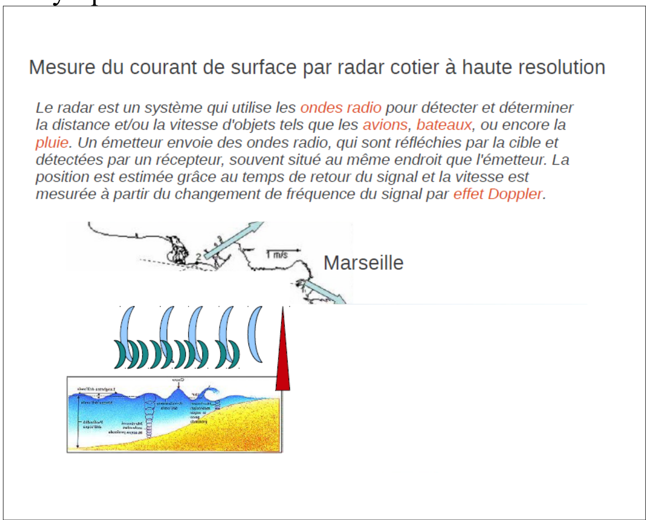
où la vitesse V_o et le déphasage ψ dépendent des conditions initiales .
Ces équations représentent un courant dont la direction tourne en sens des aiguille d'une montre en faisant un tour complet dans une période dite période inertielle $T = \frac{2\pi}{f}$.

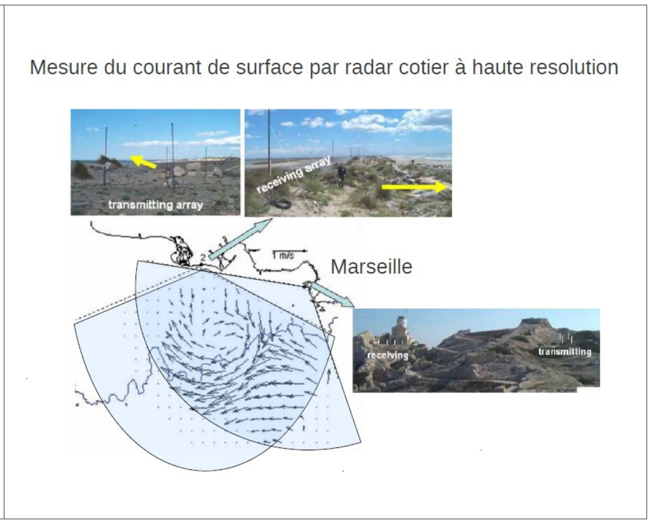
En intégrant de nouveau, avec $u = \frac{dx}{dt}$ et $v = \frac{dy}{dt}$ on obtient la trajectoire :

$$x = x_o + \frac{V_o}{f}\sin(ft+\psi)$$
$$y = y_o + \frac{V_o}{f}\cos(ft+\psi)$$
$$(x-x_o)^2+(y-y_o)^2 = \left(\frac{V_o}{f}\right)^2$$

Cette dernière formule montre que la trajectoire parcourue par une particule fluides « piégée » dans une oscillation d'inertie, est un cercle de centre (x_o,y_o) et de rayon |Vo|/f.

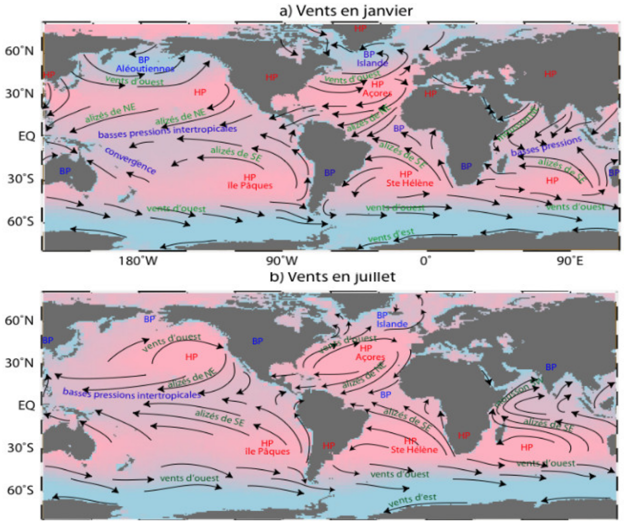
Le mesures effectuées avec un radar côtier par le collègue de l'Université de Toulon confirme ce modèle analytique.

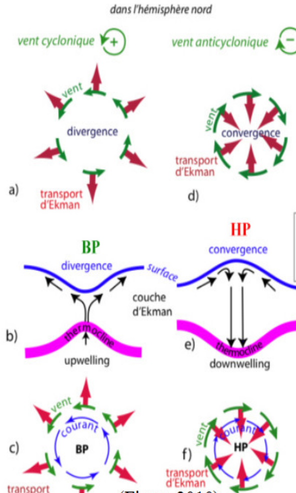




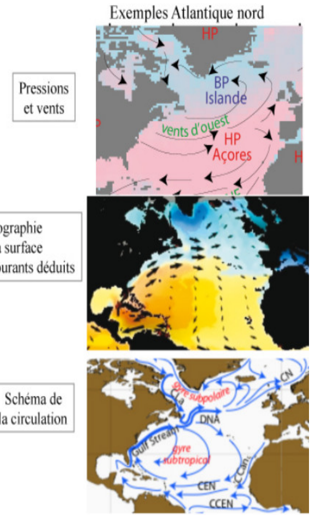
voir animation dans la 4e diapo de:
https://people.mio.osupytheas.fr/~petrenko/TEACHING/SM23/OscillationsInertie.odp

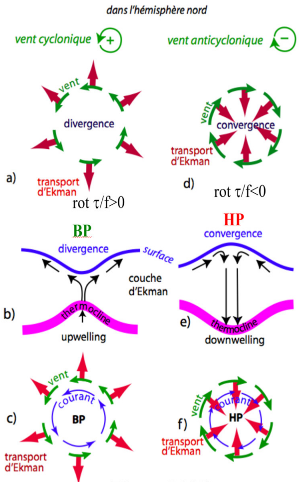
Annexe : Circulation de surface (générée par le vent)





(Fieux, 2010)





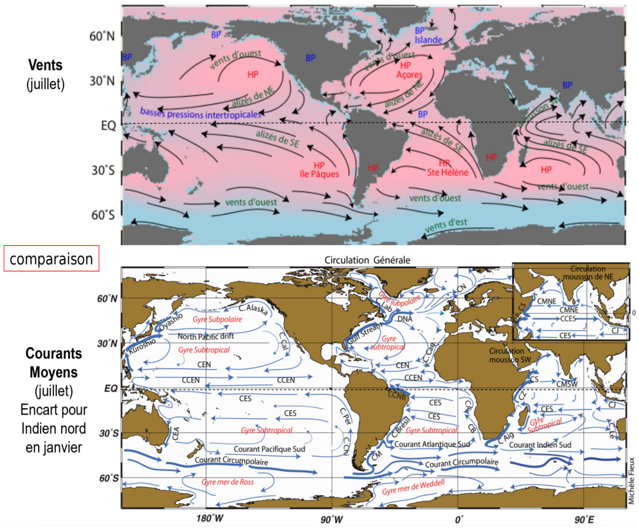
(Fieux, 2010)

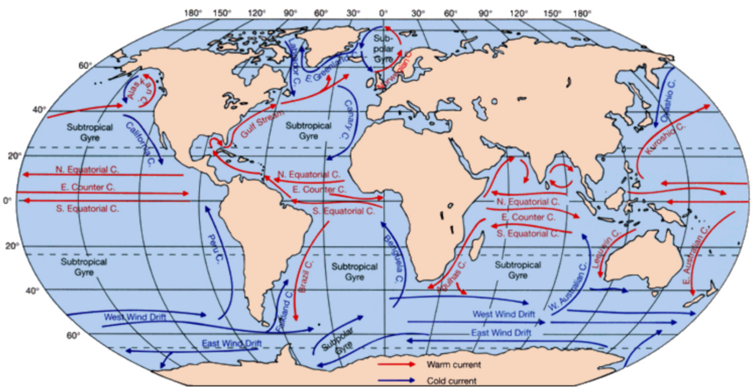
Dans les cas des gyres subpolaires
&
des gyres subtropicales
de l'Atlantique Nord

BILAN FINAL
Ekman courant à droite du vent
+ Géostrophie
=
COURANT dans le même sens
que le VENT INITIAL

Valable pour toutes les circulations
à grande échelle
(gyres subtropicales ou subpolaires)

166





Notez
Les courants rouges chauds : vont de l'équateur vers les pôles
Les courants bleux froids : vont des pôles vers l'équateur

175

Remerciements Figures de M. Fieux, L'océan planétaire 2010

4. Les équations e.p.p. et la vorticité

4.1 Équations en eaux peu profondes

Auparavant on a vu que l'évolution de la vitesse horizontale moyenne (au sens de la turbulence) des particules du fluide géophysique est décrite par les équations de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_o}\frac{\partial P}{\partial x}+f\,v-\frac{\partial\overline{u'u'}}{\partial x}-\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y}-\frac{\partial\overline{u'w'}}{\partial z}\\
\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_o}\frac{\partial P}{\partial y}-f\,u-\frac{\partial\overline{v'u'}}{\partial x}-\frac{\partial\overline{v'v'}}{\partial y}-\frac{\partial\overline{v'w'}}{\partial z}
\end{aligned}$$

u, v et *w* sont les composantes horizontales et verticale non turbulentes ou « moyennes » de la vitesse du mouvement ;
u', v' et *w'* sont les composantes turbulentes de la vitesse du mouvement ;
f est le paramètre de Coriolis ;
P est la pression ;
ρ_o est la densité de référence de l'eau de mer au sens de l'hypothèse de Boussinesq .

Le premier terme correspond à la variation locale de la vitesse en fonction du temps . Dans le deuxième, troisième et quatrième terme sont représentées les advections horizontales . Le cinquième terme est le gradient de pression.

Le sixième terme est le terme de Coriolis, qui rend compte de l'influence de la rotation de la Terre ; si les écoulements sont à une échelle suffisamment réduite, on peut approcher la surface terrestre par son plan tangent et considérer la force de Coriolis i) constante : approximation de plan-*f* , $f=f_o$, dynamique côtière ; ii) variable linéairement avec la coordonnée méridienne : approximation de $\text{plan}-\beta$, $f=f_o+\beta y$, dynamique régionale, mais aussi grande échelle .

Les trois derniers termes sont les termes turbulentes . La théorie dite de la « fermeture Newtonienne » dit que comme pour la viscosité moléculaire, on peut introduire des coefficients de viscosité turbulente et re-écrire les moyennes des produits des composantes turbulentes de la vitesse en terme de vitesse moyennes :

$$\overline{u'u'}=-A_x\frac{\partial u}{\partial x}\quad;\qquad\overline{u'v'}=-A_y\frac{\partial u}{\partial y}\quad;\qquad\overline{u'w'}=-A_z\frac{\partial u}{\partial z}\quad;$$

$$\overline{v'u'}=-A_x\frac{\partial v}{\partial x}\quad;\qquad\overline{v'v'}=-A_y\frac{\partial v}{\partial y}\quad;\qquad\overline{v'w'}=-A_z\frac{\partial v}{\partial z}\quad.$$

Pour les échelles typiques de la plus part des mouvements océaniques, l'équation pour la composante verticale de la vitesse est réduite à l'équation de l'hydrostatique, qui traduit l'équilibre entre la force de pression et la force de pesanteur. Elle fournit la pression:

$$P(z)=P_a+g\int_z^{\eta}\rho\cdot dz$$

où P_a est la pression atmosphérique, *g* est l'accélération de la gravité et η l'élévation de la surface par rapport au zéro de l'axe Oz . $z = \eta(x, y, t)$ constitue ainsi la surface libre de l'océan tandis que $z = -h(x, y)$ repère le fond. ρ est la masse volumique. En utilisant l'approximation de Boussinesq $\rho\equiv\rho_o+\rho'(x,y,z,t)$ avec $\rho'\ll\rho_o$, les dérivées horizontales deviennent

$$\frac{1}{\rho_o}\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\rho_o}\frac{\partial P_a}{\partial x}+g\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{g}{\rho_o}\int_z^{\eta}\frac{\partial \rho'}{\partial x}dz$$
$$\frac{1}{\rho_o}\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{\rho_o}\frac{\partial P_a}{\partial y}+g\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{g}{\rho_o}\int_z^{\eta}\frac{\partial \rho'}{\partial y}dz$$

Le deuxième et le troisième terme de droite des équations ci-dessus sont respectivement les contributions barotrope et barocline au gradient de pression.

Si on néglige la contribution barocline et celle de la pression atmosphérique, le gradient horizontal de pression pourra alors s'exprimer :

$$\nabla_H P = \rho_o g \nabla_H \eta$$

Cette équation dit que le forces qui agissent dans le fluide sont purement horizontales, donc on peut supposer que les <u>composantes horizontales de la vitesse seront indépendantes de z</u>. Ainsi les quatrièmes termes dans les équations de Navier-Stokes sont nuls et le terme de viscosité turbulente verticale est remplacé par les conditions aux bords qui représentent les forçage du vent $\vec{F}\equiv(F_x, F_y)$ et au fond $\vec{B}\equiv(B_x, B_y)$.
Les équations du mouvement deviennent

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x}+f v+A_h\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]+F_x-B_x \quad (1)$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y} = -g\frac{\partial \eta}{\partial y}-f u+A_h\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial y}\right]+F_y-B_y \quad (2)$$

Il y a donc deux équations pour trois inconnues (les deux composantes de la vitesse et la surélévation). Pour fermer le système, il faut ajouter l'équation de continuité écrite en fonction de ces trois variables.
On prend alors l'équation de continuité pour un fluide incompressible :

$$\nabla\cdot\vec{u} = \frac{\partial w}{\partial z} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$$

en intégrant du fond à la surface libre, vu que les vitesses et leurs dérivées sont indépendantes de z on obtient:

$$w_{z=\eta} - w_{z=-h} + (h+\eta)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \quad .$$

À la surface

$$w_{z=\eta} = \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t}+u\frac{\partial \eta}{\partial x}+v\frac{\partial \eta}{\partial y} \quad .$$

Au fond, en considérant que la bathymétrie ne varie pas dans le temps

$$w_{z=-h} = -\frac{dh}{dt} = -u\frac{\partial h}{\partial x}-v\frac{\partial h}{\partial y} \quad .$$

En substituant, on obtient :

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial(Hu)}{\partial x}+\frac{\partial(Hv)}{\partial y} \;=\; 0 \quad \text{avec} \quad H=h+\eta \quad (3)$$

L'ensemble des trois équations (1-3) constitue les équations en eaux peu profondes (e. p. p. ou *shallow water equations*). Elles sont valables, comme pour l'approximation hydrostatique, quand l'eau est très basse par rapport aux échelles horizontales que l'on veux étudier.
Les équations e. p. p. sont utilisées pour étudier, entre autre, les ondes longues de gravité ou gyroscopiques. Pour cela il faut considérer les équation linéarisées, sans viscosité turbulente et faire l'hypothèse $\eta \ll h$.
Par ailleurs, si $h = const, f = 0$ et le mouvement ne dépend que de x (1D) , les équations deviennent:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-g\frac{\partial \eta}{\partial x} \qquad \text{si on dérive par } \partial x \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}=-g\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+h\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad \partial t \qquad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}+h\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

On obtient $\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}-gh\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}=0$

Cette dernière est un équation d'onde qui a pour solution $\eta=F(x-ct)$ avec $c=\sqrt{gh}$.
(Voir Cours « Ondes dans l'océan » en L3 ou « Circulation et dispersion en Eaux Côtières » en M2)

4.2 La vorticité

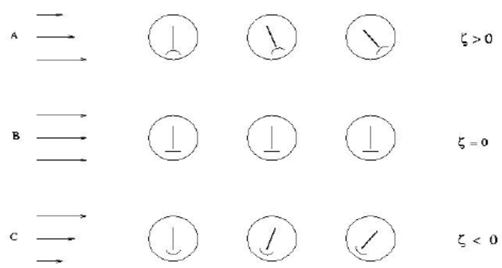
Il existe différents types de vorticité : relative, planétaire, absolue et potentielle .

La vorticité relative
Elle est définie comme la composante verticale du rotationnel de la vitesse

$$\zeta \;=\; \vec{k}(\nabla\times\vec{V}) \;=\; \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$$

La vorticité relative exprime la tendance d'un fluide à tourner. Le signe de ζ peut être illustré avec le schéma ci-contre .

Elle est appelée vorticité relative, car elle est mesurée par rapport à la terre.



La vorticité planétaire

Pour un solide en rotation la vorticité est égale à deux fois sa vitesse angulaire. A la latitude Φ la vitesse angulaire par rapport à l'axe verticale en ce point est $\Omega \sin\Phi$, la vorticité est donc

$$2\Omega\sin\Phi \;=\; f$$

Une colonne d'eau au repos sur la terre en rotation possédera donc une vorticité dite « planétaire » f. La vorticité planétaire correspond au paramètre de Coriolis en approximation dite de « mouvements quasi-horizontaux » (voir TD4) .

La vorticité absolue

On prend les équations de la quantité de mouvement pour les composantes horizontales, en considérant qu'elles ne varient pas sur la verticale. On néglige aussi la viscosité et le frottement (on se positionne donc hors des couches d'Ekman et des couches limites de bords Ouest) :

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-fv = -g\frac{\partial \eta}{\partial x}$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+fu = -g\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

Différence croisée et soustraction $\partial_x(2)-\partial_y(1)$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial f}{\partial y}v-f\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_o}\frac{\partial^2 p}{\partial y\partial x}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x}u+f\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_o}\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial y}$$

conduisent à une seule équation (en se rappelant que $\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+u\frac{\partial f}{\partial x}+v\frac{\partial f}{\partial y}$)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) + u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) + v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{df}{dt}+f\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0$$

qui peut être re-écrite

$$\frac{\partial}{\partial t}\zeta + \frac{\partial u}{\partial x}\zeta + u\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\zeta + v\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{df}{dt}+f\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0$$

en regroupant les termes 1, 3 et 5, qui représentent la dérivée totale de la vorticité relative et aussi les termes 2 et 4

$$\frac{d\zeta}{dt} + \zeta\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{df}{dt}+f\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0$$

et finalement

$$\frac{d(\zeta+f)}{dt} + (\zeta+f)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$$

Cette équation exprime le principe de la conservation de la vorticité absolue $\zeta_{abs} = (\zeta+f)$ pour les écoulements sur terre lorsque le frottement est négligé : le module de la vorticité absolue s'accroît dans un écoulement convergent $(\nabla_H\vec{u} < 0)$ et décroît dans un écoulement divergent $(\nabla_H\vec{u} > 0)$.

La vorticité potentielle

Soit une couche d'épaisseur *D* dans laquelle la densité est supposée homogène.

L'équation de continuité s'écrit :

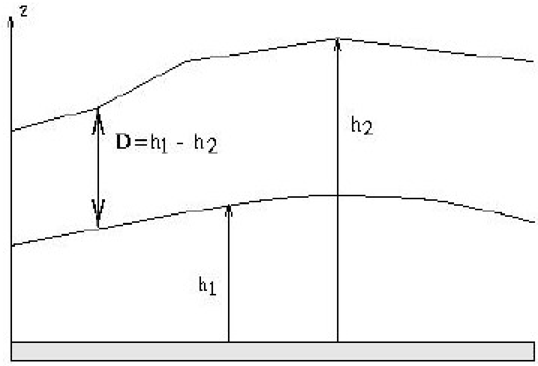
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

on peut écrire que :

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\left(\frac{d h_1}{d t}-\frac{d h_2}{d t}\right)}{(h_1-h_2)} = \frac{1}{D}\frac{d D}{d t}$$

en remplaçant dans l'équation de continuité

$$\frac{1}{D}\frac{d D}{d t} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$



tirée de Daniault (2005), Océanographie Physique

On peut alors remplacer la divergence horizontale dans l'équation de conservation de la vorticité absolue et obtenir

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\zeta+f}{D}\right) = 0}$$

NB : On a utilisé la règle de la dérivé de la division:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\zeta_a}{D}\right)=0 \;\rightarrow\; \left(\frac{d\zeta_a}{d t}D-\zeta_a\frac{dD}{dt}\right)\frac{1}{D^2}=0 \;\rightarrow\; \frac{d\zeta_a}{d t}\frac{1}{D}-\zeta_a\frac{dD}{dt}\frac{1}{D^2}=0 \;\rightarrow\; \frac{d\zeta_a}{d t}-\zeta_a\frac{dD}{dt}\frac{1}{D}=0$$

Si on compare les dimensions de quatre vorticité: relative, planétaire, absolue et potentielle

$$\zeta_{rel} \;:\; \left[\frac{LT^{-1}}{L}\right]=[T^{-1}] \qquad \zeta_{pla} \;:\; [T^{-1}] \qquad \zeta_{abs} \;:\; [T^{-1}] \qquad \zeta_{pot} \;:\; \left[\frac{T^{-1}}{L}\right]=[T^{-1}L^{-1}]$$

on voit que la vorticité potentielle n'a pas les mêmes dimensions que les autres!

NB: Une formulation plus générale de la vorticité potentielle tient compte aussi des effets de la densité, de la température, de la salinité ou autre, et les dimensions dépendent de la grandeur prise en considération

$$\frac{d}{dt}\left(\zeta_{abs}\cdot\frac{\nabla\lambda}{\rho}\right) = 0$$

5.3 La conservation de la vorticité

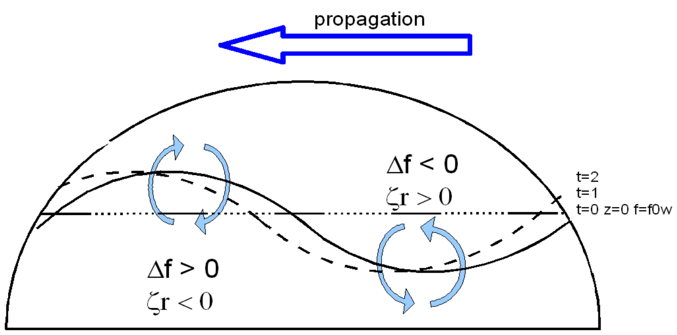
Ci-dessous on explique en terme de conservation de la vorticité absolue et potentielle des phénomènes importants de la circulation océanique et atmosphérique.

Vorticité absolue et Ondes de Rossby

Une série de particules est disposée sur un parallèle (ligne pointillée et continue), et est ensuite déformée par une sinusoïde (ligne continue).

Les particules qui se retrouvent plus au Nord augmentent leur vorticité planétaire et, par conservation de la vorticité absolue, auront une vorticité relative négative (anticyclonique, en sens horaire), qui fera déplacer les

maxima de la sinusoïde vers l'Ouest.
D'une façon similaire les minima bougent aussi vers l'ouest (vorticité relative positive, cyclonique, en sens anti-horaire). Toute l'onde sinusoïdale tends alors à bouger vers l'Ouest: ces types d'ondes sont connue commes Ondes de Rossby, qui les a découvertes en cherchant des solutions analytiques ondulatoires des équations de Navier-Stokes.



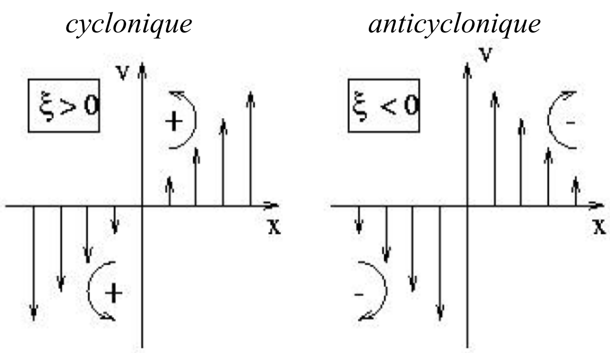
Conservation de la vorticité potentielle

Intensification des courants de bord ouest

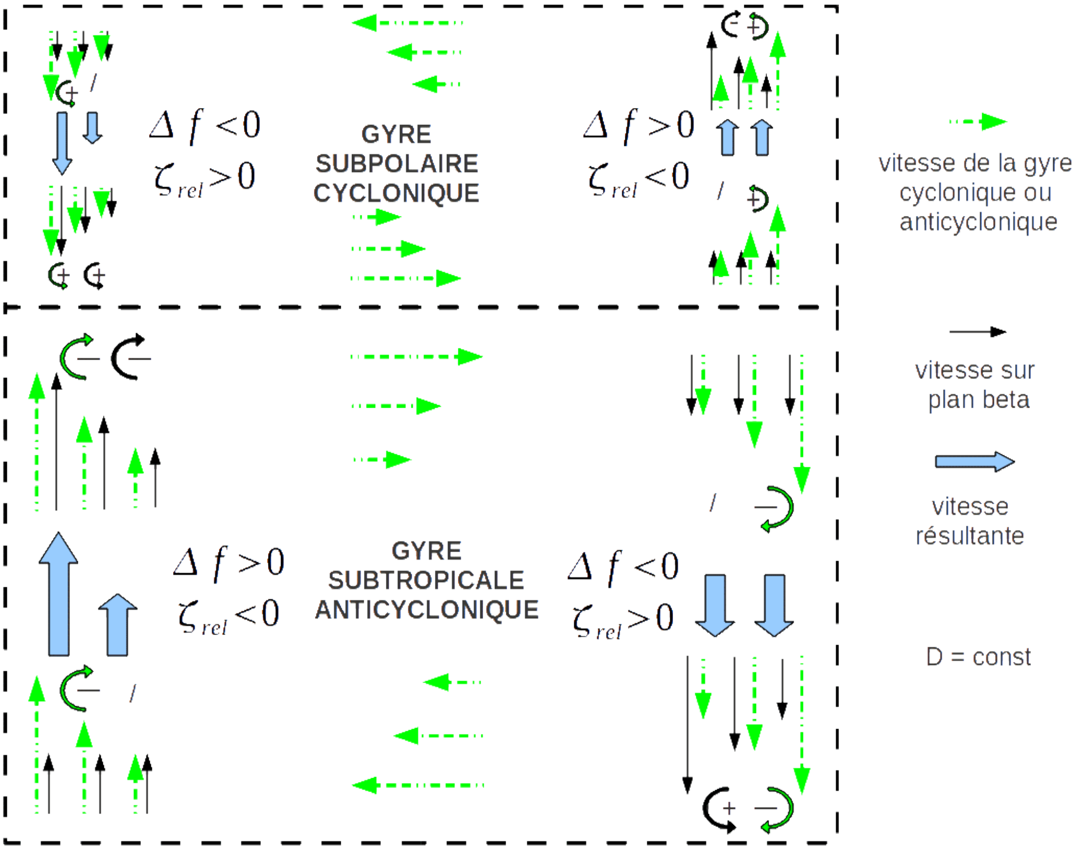
Prenons l'exemple de l'Atlantique Nord. Schématisons la circulation le long des bords par des vitesses uniquement méridiennes, illustrant le gyre subpolaire au nord et subtropicale au sud.

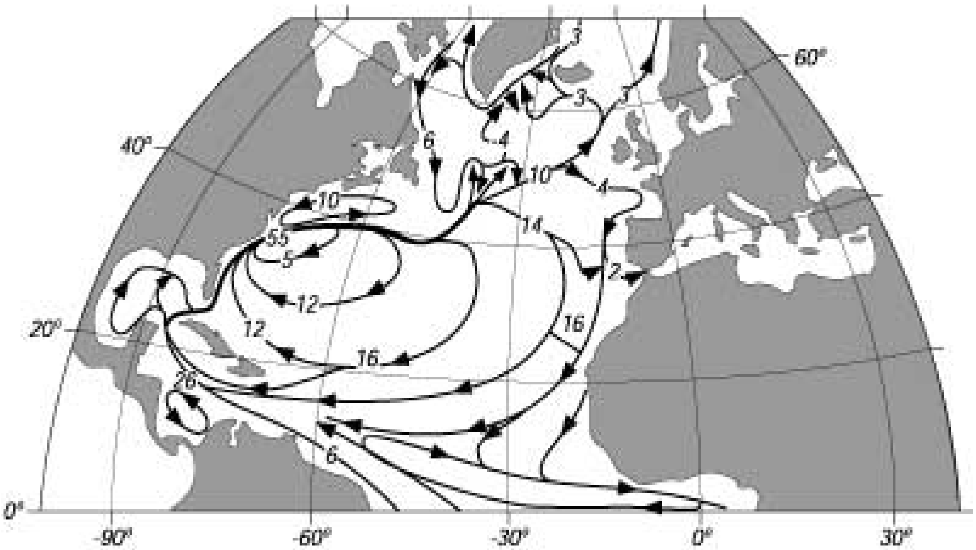
La vorticité relative s'écrit alors :

$$\zeta = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial v}{\partial x}$$



On peut expliquer l'intensification des courants de bord Ouest par la conservation de la vorticité potentielle : si D reste constante le long des frontières océaniques (cette condition n'est pas indispensable, ni forcément vraie mais elle permet une explication plus simpliste), la seule façon de conserver la vorticité potentielle est de diminuer ζ quand l'écoulement est dirigé vers les pôles, et d'augmenter ζ quand l'écoulement est dirigé vers l'équateur. Il en résulte un écoulement plus intense concentré le long des frontières Ouest de l'océan, alors que l'effet inverse s'observe le long des côtes Est.





Sketch of the major surface currents in the North Atlantic. Values are transport in units of $10^6 m^3/s$. From Sverdrup, Johnson, and Fleming (1942: fig. 187).

The figure shows a broad, basin-wide, mid latitude gyre as we expect from Sverdrup's theory. In the west, a western boundary current, the Gulf Stream, completes the gyre. In the north a subpolar gyre includes the Labrador current. An equatorial current system and countercurrent are found at low latitudes with flow similar to that in the Pacific.

Tirée de http://oceanworld.tamu.edu/resources/ocng_textbook/chapter11/chapter11_01.htm

Intensification des tourbillons étirés

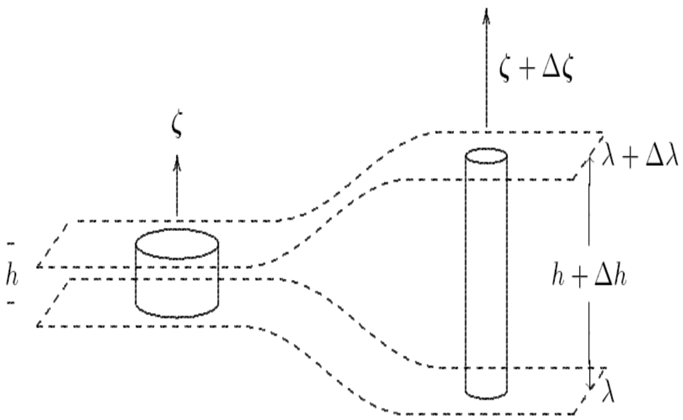
Si on se met sur un plan-f

$$\left(\frac{\zeta}{D}\right) = const$$

alors une colonne d'eau qui bouge entre deux surfaces sur les quelles λ doit être conservée, doit se modifier pour satisfaire les lois de conservation de la masse et du moment angulaire. Plus grande sera la hauteur de la colonne, plus grande devra être la vitesse de rotation de la colonne de fluide.

$$\Delta D > 0 \rightarrow \Delta \zeta > 0$$

$$\Delta D < 0 \rightarrow \Delta \zeta < 0$$



Tirée de Mattioli (1995) Principi Fisici di Oceanografia e Meteorologia, Fig.48.1

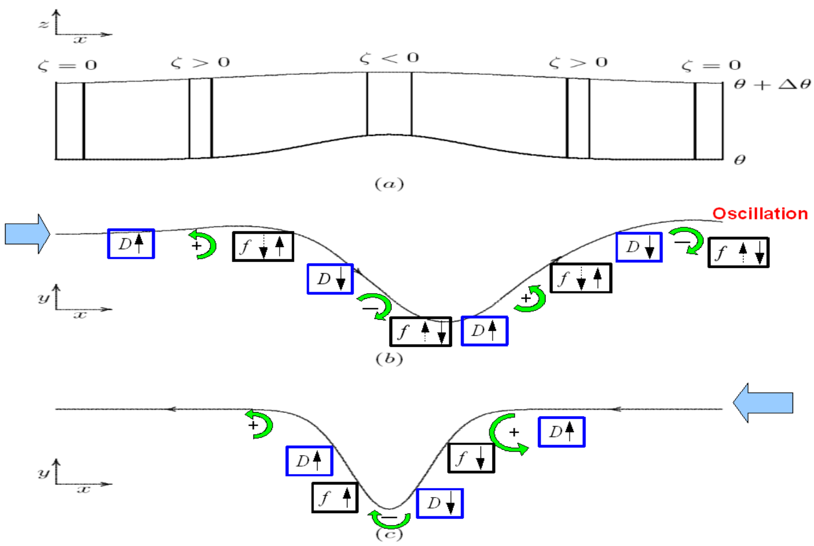
Vent dépassant une chaîne montagneuse

Les isosurfaces de température potentielle tendent à suivre la forme d'un obstacle mais avec des rayons de courbure grandissant avec la hauteur. Il y a une espèce de lissage des obstacles.

Dans un écoulement qui passe au dessus d'une montagne, la colonne d'air comprise entre deux valeurs de température potentielle d'abord s'étire, et ensuite se comprime (partie *a* de la figure ci-dessous).

Pour un écoulement qui vient de l'Ouest (partie *b*), ce fait comporte un mouvement d'abord cyclonique et en suite fortement anticyclonique, qui déclenche des oscillations en aval.

Pour un écoulement qui vient de l'Est (partie *c*), par contre, il y a une déviation symétrique vers le Sud.



Adaptée depuis Fig. 48.2 de Mattioli (1995) Principi Fisici di Oceanografia e Meteorologia