Algèbre linéaire

J.-C. Poggiale - Septembre 2008

1 Motivation

1.1 Exemple 1

Considérons une population structurée en trois stades: les oeufs, les larves et les adultes. On note E_t, L_t et A_t les densités respectives d'oeufs, de larves et d'adultes à l'instant t. On suppose que le taux de passage du stade "oeuf" au stade "larve", v_E est constant, ainsi que le taux de passage du stade "larve" au stade "adulte", v_L, le taux de mortalité des oeufs, m_E, des larves, m_L et des adultes m_A et le taux de fécondité f. Un modèle de dynamique de cette population peut être écrit de la manière suivante:

$$\begin{aligned} E_{t+1} &= E_t - m_E E_t - v_E E_t + f A_t \\ L_{t+1} &= L_t + v_E E_t - m_A L_t - v_L L_t \\ A_{t+1} &= A_t + v_L L_t - m_A A_t \end{aligned}$$

Maintenant que nous disposons d'un modèle, il pourrait être intéressant d'en étudier les propriétés et de les exploiter. L'un des objectifs de ce cours est l'étude générale de ce type de modèles (appelés modèles linéaires), quel que soit le nombre de stade, y compris si plusieurs populations interagissent. Nous montrerons notamment comment déterminer des conditions sur les valeurs des paramètres (v_E, v_L, m_E, m_L, m_A et f) pour que la population soit viable ou non. Nous verrons également les méthodes permettant de déterminer directement E_t, L_t et A_t à partir de la connaissance des paramètres et de E_0, L_0 et A_0.

1.2 Exemple 2

Considérons une population dont la dynamique n'est pas décrite par la relation entre la densité à l'instant $t+1$ et la densité à l'instant t, mais par une relation entre la densité à l'instant t et les densités aux dates t, $t-1$, ..., $t-k$. Ceci peut se concevoir si un délai est nécessaire par exemple pour l'accomplissement d'un processus. Si ce délai est de k pas de temps, alors la densité à l'instant $t+1$ peut dépendre de la densité à l'instant $t-k$. Un tel exemple peut être donné par le modèle:

$$X_{t+1} = r_0 X_t + r_1 X_{t-1} + \cdots + r_k X_{t-k}$$

La connaissance de $(X_0, ..., X_k)$ permet de déterminer X_{k+1} qui à son tour permet de trouver X_{k+2} et ainsi de suite. On verra dans ce chapitre les méthodes permettant d'analyser ce type de modèle en étudiant le système:

$$\begin{cases} X_{t-k+1} = X_{t-k+1} \\ X_{t-k+2} = X_{t-k+2} \\ \vdots \\ X_t = X_t \\ X_{t+1} = r_0 X_t + r_1 X_{t-1} + \cdots + r_k X_{t-k} \end{cases}$$

Sous cette forme, même si les toutes les équations à part la dernière semblent inutiles, l'analyse découle directement du contenu de ce chapitre et permet d'écrire directement X_t en fonction de $(X_0, ..., X_k)$, pour tout entier $t > k$.

2 Bases de $\mathbb{R}^n$

2.1 Exemples: $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, tout point M peut être représenté par le couple de réels (x, y) définis de manière unique par:

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$$

$\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples de nombres réels.

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \,/ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

L'écriture $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$ n'est possible que si $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ forment une base dans le plan, c'est - à - dire qu'ils sont non colinéaires. Si les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ étaient colinéaires, tous les vecteurs non colinéaires à $\overrightarrow{i}$ ne pourraient être décomposés sur $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$. Rappelons que la colinéarité entre $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ se traduit par:

$$\overrightarrow{j} = \alpha\,\overrightarrow{i}$$

ce qui équivaut à:

$$\alpha\,\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}$$

Autrement dit, dire que $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont non colinéaires se traduit par:

$$\alpha_1\,\overrightarrow{i} + \alpha_2\,\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

De même, dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, tout point M peut être représenté par le triplet de réels (x, y, z) définis de manière unique par:

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$$

$\mathbb{R}^3$ est l'ensemble des triplets de nombres réels.

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \,/ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$$

L'écriture $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$ n'est possible que si $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ forment une base dans l'espace, c'est - à - dire qu'ils sont non coplanaires. Si les vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ étaient coplanaires, tous les vecteurs non coplanaires à $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ ne pourraient être décomposés sur $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$. Rappelons que la coplanarité entre $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ se traduit par:

$$\overrightarrow{k} = \alpha\,\overrightarrow{i} + \beta\,\overrightarrow{j}$$

ce qui équivaut à:

$$\alpha\,\overrightarrow{i} + \beta\,\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$$

Autrement dit, dire que $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont non coplanaires se traduit par:

$$\alpha_1\,\overrightarrow{i} + \alpha_2\,\overrightarrow{j} + \alpha_3\,\overrightarrow{k} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

2.2 Systèmes libres (ou indépendants) - Bases de $\mathbb{R}^n$

Comme nous l'avons mentionné rapidement dans la première section, nous serons amenés à manipuler des vecteurs de dimensions quelconques, c'est - à - dire à travailler dans $\mathbb{R}^n$ pour toute valeur de n. Pour ce faire, nous devons généraliser la notion de bases vues dans les exemples précédents. Ceux-ci nous ont montré que les notions de non colinéarité ou non coplanarité sont essentielles et ce sont ces notions que nous commençons par généraliser, à l'aide du concept de systèmes libres (ou indépendants). On considère un système de p vecteurs $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, ..., $\overrightarrow{e_p}$ dans $\mathbb{R}^n$, qu'on notera:

$$(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_p})$$

Définition: ce système est dit *libre* si

$$\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{0}\right) \Rightarrow (\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_p = 0)$$

Quand $n = 2$, cette définition correspond à deux vecteurs non colinéaires. Lorsque $n = 3$, elle correspond à trois vecteurs non coplanaires.

Définition: un système de p vecteurs $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, ..., $\overrightarrow{e_p}$ dans $\mathbb{R}^n$ est une base de $\mathbb{R}^n$ si:

- $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_p})$ est libre
- $p = n$

2.3 Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

Définition: un *sous-espace* vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie les trois propriétés suivantes:

a) $0 \in E$.

b) si $\overrightarrow{u} \in E$ et $\overrightarrow{v} \in E$ alors $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in E$.

c) si $\overrightarrow{u} \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\alpha.\overrightarrow{u} \in E$.

Définition: Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. La *dimension* de E est le plus grand nombre p tel que le système de vecteurs $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_p})$ soit libre où $\overrightarrow{u_i} \in E$. On la notera $\dim(E)$.

3 Applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$

Dans l'exemple présenté dans la première section, il s'agit d'un modèle qui permet de passer du vecteur de coordonnées (E_t, L_t, A_t) au vecteur de coordonnées $(E_{t+1}, L_{t+1}, A_{t+1})$. Cette transformation d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$ en un autre vecteur de $\mathbb{R}^3$ s'appelle application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ et dans cet exemple, elle est linéaire. Ce chapitre place cet exemple dans un contexte général pour en comprendre les propriétés.

3.1 Définition - Propriétés générales

On considère une application f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

Définition: cette application est linéaire si elle vérifie les deux propriétés suivantes:

a - pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^n$, $f\left(\overrightarrow{u+v}\right) = f\left(\overrightarrow{u}\right) + f\left(\overrightarrow{v}\right)$

b - pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et tout réel α, $f\left(\alpha.\overrightarrow{u}\right) = \alpha.f\left(\overrightarrow{u}\right)$

Propriété (image du vecteur nul):

$$f\left(\overrightarrow{0}\right) = \overrightarrow{0}$$

Preuve: $f\left(\overrightarrow{0}\right) = f\left(2.\overrightarrow{0}\right) = 2.f\left(\overrightarrow{0}\right)$ donc $f\left(\overrightarrow{0}\right) = \overrightarrow{0}$.

Propriété (notion de matrices):

Considérons un vecteur $\overrightarrow{u}$ quelconque dans $\mathbb{R}^n$ muni d'une base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$, ce qui nous permet d'écrire:

$$\overrightarrow{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \overrightarrow{e_i}$$

Nous allons déterminer l'image de ce vecteur par l'application linéaire f:

$$\begin{aligned} f\left(\overrightarrow{u}\right) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} u_i \overrightarrow{e_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f\left(u_i \overrightarrow{e_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} u_i f\left(\overrightarrow{e_i}\right) \end{aligned}$$

Cette dernière écriture montre que l'image d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ quelconque est donnée par les images des vecteurs de base. Or chaque vecteur de base à une image dans $\mathbb{R}^m$, muni d'une base $(\overrightarrow{\varepsilon_1}, ..., \overrightarrow{\varepsilon_m})$, donc il est possible de regrouper les m coordonnées des images de chacun de ces n vecteurs $\overrightarrow{e_i}$ dans un tableau à m lignes et n colonnes. Ce tableau, noté A, sera nommé *matrice* de f: on l'obtient en calculant l'image de chaque vecteur $\overrightarrow{e_j}$, qu'on décompose dans la base $(\overrightarrow{\varepsilon_1}, ..., \overrightarrow{\varepsilon_m})$. Ces coordonnées sont disposées en colonne et forment la colonne j. En d'autres termes, le coefficient a_{ij} de la matrice A, situé sur la ligne numéro i et la colonne numéro j, est la $i$ème coordonnée de $f(\overrightarrow{e_j})$ décomposé dans la base $(\overrightarrow{\varepsilon_1}, ..., \overrightarrow{\varepsilon_m})$. Il faut bien comprendre que la matrice d'une application linéaire dépend du choix des bases $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$ et $(\overrightarrow{\varepsilon_1}, ..., \overrightarrow{\varepsilon_m})$.

3.2 Algèbre sur les matrices

3.2.1 Somme de matrices

Considérons deux applications linéaires f et g de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, munis respectivement des bases $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$ et $(\overrightarrow{\varepsilon_1}, ..., \overrightarrow{\varepsilon_m})$ et notons A et B les matrices associées respectivement à f et g.

L'application $f+g$ est linéaire et sa matrice $C = A + B$ est définie par:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Remarquons que fg n'est pas linéaire, donc on ne peut lui associer de matrice comme précédemment. Le produit de deux matrices, que nous voyons ci-dessous, n'est donc pas la matrice du produit des applications linéaires f et g.

3.2.2 Produit de matrices

On considère deux applications linéaires f :$\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et g $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. L'application $f \circ g$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, définie par

$$f \circ g(\overrightarrow{u}) = f(g(\overrightarrow{u}))$$

On suppose que $\mathbb{R}^n$ est muni d'une base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$, $\mathbb{R}^m$ est muni d'une base $\left(\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, ..., \overrightarrow{e'_m}\right)$ et $\mathbb{R}^p$ est muni d'une base $\left(\overrightarrow{e''_1}, \overrightarrow{e''_2}, ..., \overrightarrow{e''_p}\right)$. Notons A la matrice de f et B la matrice de g. Les coefficients a_{ij} de A sont, comme expliqués précédemment, définis par:

$$f\left(\overrightarrow{e'_k}\right) = \sum_{i=1}^{p} a_{ik} \overrightarrow{e''_i}$$

De même, les coefficients b_{ij} de B sont définis par:

$$g(\overrightarrow{e_j}) = \sum_{k=1}^{m} b_{kj} \overrightarrow{e'_k}$$

On définit la matrice C de $f \circ g$ et on la note $C = A.B$. On sait que:

$$\begin{aligned} f \circ g(\overrightarrow{e_j}) &= f\left(\sum_{k=1}^{m} b_{kj} \overrightarrow{e'_k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{m} f\left(b_{kj} \overrightarrow{e'_k}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{m} b_{kj} f\left(\overrightarrow{e'_k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \overrightarrow{e''_i} \\
&= \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \right) \overrightarrow{e''_i}
\end{aligned}
$$

Donc le coefficient de la ligne numéro i est:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

3.2.3 Matrice identité

Considérons l'application identité sur $\mathbb{R}^n$, qui à tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\mathbb{R}^n$ associe $\overrightarrow{u}$. L'identité est clairement linéaire et sa matrice est:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propriété: pour toute matrice A à n lignes et n colonnes, on a:

$$A.I = I.A = A$$

3.2.4 Matrices inversibles

Définition: on dit que la matrice A à n lignes et n colonnes est inversible, s'il existe une matrice, notée A^{-1} et appelée matrice inverse, telle que:

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$$

4 Changements de bases

Comme nous l'avons remarqué plus haut dans le cours, la définition de matrice d'une application linéaire est fondée sur le choix d'une base. Il en est de même évidemment pour les coordonnées d'un vecteur. Le choix d'une base dans les applications est souvent arbitraire *a priori*. Il est fréquent qu'un changement approprié de base dans les applications permettent de fournir des informations, des explications. Nous analysons dans cette section comment les coordonnées des vecteurs et des matrices sont modifiées lorsqu'un changement de base est effectué.

4.1 Matrice de passage

On considère $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$ une base dans $\mathbb{R}^n$. Sur cet espace, on définit une nouvelle base $\left(\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, ..., \overrightarrow{e'_n}\right)$. Chaque vecteur $\overrightarrow{e'_j}$ se décompose dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$:

$$\overrightarrow{e'_j} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} \overrightarrow{e_i}$$

La matrice:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

est appelée matrice de passage, elle permettra de passer de la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$ à la nouvelle base $\left(\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, ..., \overrightarrow{e'_n}\right)$.

4.2 Effet d'un changement de bases sur les coordonnées des vecteurs

On considère un vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\mathbb{R}^n$. Dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$, on peut écrire:

$$\overrightarrow{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \overrightarrow{e_i}$$

On note $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ la matrice du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans cette base.

Nous définissons alors une nouvelle base $\left(\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, ..., \overrightarrow{e'_n}\right)$, alors:

$$\overrightarrow{u} = \sum_{i=1}^{n} u'_i \overrightarrow{e'_i}$$

Notons $U' = \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ \vdots \\ u'_n \end{pmatrix}$ la matrice du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans cette nouvelle base.

Nous voulons définir la relation entre U et U'. Puisque

$$\overrightarrow{e'_i} = \sum_{j=1}^{n} p_{ji} \overrightarrow{e_j}$$

on en déduit:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} &= \sum_{i=1}^{n} u'_i \sum_{j=1}^{n} p_{ji} \overrightarrow{e_j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ji} u'_i \right) \overrightarrow{e_j}\end{aligned}$$

On en conclut:

$$u_j = \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ji} u'_i \right)$$

Ces égalités, valables pour toute valeur de j entre 1 et n, se résument par la notation matricielle:

$$U = PU'$$

Or la matrice P est une matrice inversible, dont la matrice inverse P^{-1} est la matrice de passage de la base $\left(\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, ..., \overrightarrow{e'_n}\right)$ à la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$. En conséquence:

$$U' = P^{-1}U$$

4.3 Effet d'un changement de bases sur la matrice d'une application linéaire

On considère une application linéaire f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$ et $\mathbb{R}^m$ d'une base $(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, ..., \overrightarrow{\varepsilon_m})$ et on note A la matrice de f dans ces bases. Définissons alors une nouvelle base $\left(\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, ..., \overrightarrow{e'_n}\right)$ sur $\mathbb{R}^n$ et une nouvelle base $\left(\overrightarrow{\varepsilon'_1}, \overrightarrow{\varepsilon'_2}, ..., \overrightarrow{\varepsilon'_m}\right)$ de $\mathbb{R}^m$. On note A' la matrice de f dans ces nouvelles bases, établissons maintenant la relation entre A et A'. On note P la matrice de passage de la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$ à la base $\left(\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, ..., \overrightarrow{e'_n}\right)$ dans $\mathbb{R}^n$ et Q la matrice de passage de la base $(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, ..., \overrightarrow{\varepsilon_m})$ à la base $\left(\overrightarrow{\varepsilon'_1}, \overrightarrow{\varepsilon'_2}, ..., \overrightarrow{\varepsilon'_m}\right)$ dans $\mathbb{R}^m$. On considère un vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\mathbb{R}^n$, on note U sa matrice dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$. On peut écrire:

$$A'P^{-1}U = Q^{-1}AU$$

Comme cette égalité est vraie pour tout $\overrightarrow{u}$, il en découle:

$$A'P^{-1} = Q^{-1}A$$

ce qui équivaut à:

$$A' = Q^{-1}AP$$

5 Déterminant

On considère une matrice $n \times n$ (à n lignes et n colonnes), A.

5.1 Définition

Définition: On définit le déterminant de A, noté $\det(A)$, par récurrence, de la manière suivante:

- si $n = 1$ (c'est-à-dire que A est un nombre), alors $\det(A)$ est le nombre A;

- si $n > 1$, on pose:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+1} a_{i1} \det(A_i)$$

où a_{ij} est le coefficient de A sur la ligne i et la colonne j et A_i est la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en supprimant dans A, la première colonne et la ligne i.

Le déterminant de A est un nombre qui a le sens suivant. Si on considère les n colonnes de A comme la juxtaposition de n vecteurs et qu'on considère le parallélépipède défini par ces vecteurs, le déterminant de A est le volume (au signe près) de ce parallélépipède. S'il est nul, cela signifie que les n vecteurs ne sont pas libres.

5.2 Propriétés

a) Si on permute deux colonnes dans la matrice A, le déterminant de la matrice obtenue est l'opposé de $\det(A)$;

b) Si on remplace une colonne C_i par:

$$C_i + \sum_{j \neq i} C_j$$

le déterminant de la matrice obtenue est $\det(A)$.

c)

$$\det\left({}^tA\right) = \det(A)$$

où ${}^tA$ est la matrice transposée de A, c'est-à-dire la matrice obtenue en remplaçant à partir de A, les colonnes par les lignes de A.

d) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

e) Si A est inversible, alors $\det(A) \neq 0$. En effet, s'il existe A^{-1} telle que $A.A^{-1} = 1$ alors $\det(A)\det\left(A^{-1}\right) = 1$, donc $\det(A) \neq 0$.

6 Diagonalisation de matrices

6.1 Position du problème

Nous avons vu que l'écriture de la matrice d'une application linéaire f sur $\mathbb{R}^n$ dépendait du choix de la base qui munit $\mathbb{R}^n$. Nous allons maintenant essayer de trouver une base dans laquelle l'écriture de la matrice de f soit le plus simple possible pour effectuer les calculs (produits, etc.). La forme cherchée est une écriture sous forme diagonale:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Par définition de la matrice d'une application linéaire, cela signifie que l'on cherche une base $(\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ qui vérifie, pour tout $i = 1, ..., n$:

$$f(\overrightarrow{e_i}) = \lambda_i \overrightarrow{e_i}$$

6.2 Définitions

Définition: Une *valeur propre* de f est un réel λ tel qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ vérifiant:

$$f(\overrightarrow{u}) = \lambda \overrightarrow{u}$$

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est alors appelé *vecteur propre* associé à λ.

Avec cette définition, nous pouvons conclure que la diagonalisation d'une matrice consiste à chercher une base de vecteurs propres. Une matrice sera donc diagonalisable (sur $\mathbb{R}$) s'il existe une base de vecteurs propres (à coordonnées réelles).

Remarques:

a) Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur propre associé à λ, alors tout vecteur $\overrightarrow{v}$ colinéaire à $\overrightarrow{u}$ est également un vecteur propre associé à λ. En effet, si $\overrightarrow{v} = \alpha \overrightarrow{u}$, alors:

$$f(\overrightarrow{v}) = f(\alpha \overrightarrow{u}) = \alpha f(\overrightarrow{u}) = \alpha \lambda \overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{v}$$

b) Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ est un vecteur propre associé à λ_1 et λ_2 alors $\lambda_1 = \lambda_2$. En effet:

$$f(\overrightarrow{u}) = \lambda_1 \overrightarrow{u} = \lambda_2 \overrightarrow{u}$$

donc

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \overrightarrow{u} = 0$$

Par conséquent, $\lambda_1 = \lambda_2$.

6.3 Calcul des valeurs propres

Nous expliquons dans ce paragraphe comment déterminer les valeurs propres d'une application linéaire (ou d'une matrice). Soit λ une valeur propre de f, il existe un vecteur u non nul tel que:

$$f(u) = \lambda u$$

Il en découle que:

$$f(u) - \lambda u = 0$$

Or, l'application $f - \lambda id$ qui à tout vecteur u associe $f(u) - \lambda u$ est linéaire. Si A est la matrice de f dans une base fixée, $A - \lambda I$ est la matrice de cette application linéaire dans la même base. u et 0 ont la même image par l'application $f - \lambda id$. Cela implique que cette application est non inversible, donc sa matrice a un déterminant nul:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

En résolvant cette équation, nous déterminons les valeurs propres de f.

6.4 Espaces propres

Considérons une valeur propre λ de l'application linéaire f sur $\mathbb{R}^n$. L'ensemble E_λ des vecteurs propres associés à λ est appelé *espace propre* associé à λ.

Propriétés:

a) E_λ est une sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

En effet, $0 \in E_\lambda$ car $f(0) = 0 = \lambda.0$. De plus, si $\overrightarrow{u} \in E_\lambda$ et $\overrightarrow{v} \in E_\lambda$ alors:

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) &= f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v}) \\ &= \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v} \\ &= \lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \end{aligned}$$

Enfin, on a vu dans les propriétés des vecteurs propres que si $\overrightarrow{u} \in E_\lambda$ alors $\alpha\overrightarrow{u} \in E_\lambda$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

En effet, soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de E_{λ_1} et de E_{λ_2} alors $f(\overrightarrow{u}) = \lambda_1\overrightarrow{u} = \lambda_2\overrightarrow{u}$, donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Théorème: une matrice $n \times n$ est diagonalisable si:

$$\sum_{i=1}^{n} \dim(E_{\lambda_i}) = n$$

7 Systèmes linéaires

On considère un système de la forme:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

où les termes a_{ij} et b_i sont des nombres réels. Il s'agit d'un système de m équations linéaires à n inconnues, x_1, ..., x_n. Tout vecteur X de coordonnées x_1, ..., x_n qui satisfait les m équations est appelé une *solution* du système linéaire. Notons A la matrice dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est a_{ij}.

On note également B le vecteur de coordonnées b_1, ...,b_m. Le système linéaire s'écrit également:

$$AX = B$$

Supposons dorénavant que $m = n$, c'est - à - dire que le nombre d'équations soit égal au nombre de variables.

Théorème: les propriétés suivantes sont équivalentes:

a) la matrice A est inversible;
b) pour tout B, le système admet au plus une solution;
c) pour tout B, le système admet au moins une solution;
d) pour tout B, le système admet une et une seule solution;
e) $\det(A) \neq 0$.
f) en prenant $B = 0$, le système n'admet que la solution $X = 0$.

Définition: un système vérifiant l'une des propriétés du théorème précédent s'appelle système de Cramer.

Dans un système de Cramer, la solution du système est:

$$X = A^{-1}B$$