Systèmes différentiels linéaires

J.-C. Poggiale - Septembre 2016

1 Rappel sur les équations différentielles linéaires d'ordre 1

Les équations différentielles sont des représentations mathématiques qui permettent de décrire des lois d'évolution de nombreux processus dans de très nombreux domaines (physique, chimie, biologie, économie, sociologie, etc.). Cette brève introduction ne contient que quelques éléments indispensables à une lecture de documents (rapports, articles, ouvrages) dans le domaine des sciences de l'environnement.

1.1 Equations différentielles linéaires homogènes d'ordre 1

Une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 est une expression de la forme suivante :

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = 0 \tag{1}$$

où y est une fonction dérivable de x et a est une fonction continue de x sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. La notation $\frac{dy}{dx}$ désigne la dérivée de la fonction y par rapport à sa variable x.

Résoudre cette équation sur I, c'est chercher une fonction f qui vérifie l'égalité :

$$\frac{df}{dx}(x) + a(x)f(x) = 0$$

pour tout $x \in I$.

Théorème 1 *Les solutions de l'équation (1) sont données par :*

$$f(x) = C\exp(-A(x)) \tag{2}$$

où C est une constante réelle et A est une fonction primitive de a.

Comment obtient - on ce résultat ? Une méthode consiste à reprendre l'équation (1) et à la transformer par des règles de calcul élémentaires de telle sorte à séparer x et y de chaque côté du signe "égal". L'équation (1) peut ainsi se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx$$

On en déduit l'égalité suivante :

$$\int \frac{dy}{y} = \int a(x)dx$$

Le terme de gauche est une primitive de la fonction "inverse" $x \mapsto \frac{1}{x}$, et à droite du signe "égal", on a une primitive de la fonction $-a$. Les primitives sont définies à une constante près, on a donc :

$$\log(y) = -A(x) + c_0$$

où c_0 est une constante réelle.

Remarque 2 *Dans l'expression précédente, nous faisons tacitement l'hypothèse que la fonction y est positive puisque nous prenons sont logarithme. Dans de nombreuses applications, la fonction y représente une quantité d'une grandeur physique, donc elle sera positive. Pour le cas général, si la fonction y est négative, il faut mettre $-y$ dans l'expression précédente et continuer la procédure de la même manière.*

Ensuite, pour obtenir la solution y, on applique la fonction exponentielle de chaque côté de l'égalité, d'où :

$$y(x) = \exp(-A(x) + c_0) = \exp(-A(x))\exp(c_0) = C\exp(-A(x))$$

où $C = \exp(c_0)$.

Remarque 3 *C étant une exponentielle, c'est une constante positive. Avec cette expression, on trouve bien une fonction y positive. Si la solution cherchée était négative, comme indiqué dans la remarque précédente, il aurait fallu mettre $-y$ au lieu de y, on aurait donc : $y(x) = -C\exp(-A(x))$ où C est définie comme précédemment.*

Remarque 4 *La fonction y définie par l'équation (1) ne peut pas s'annuler, sauf si elle est identiquement nulle.*

1.2 Equations différentielles linéaires non homogènes d'ordre 1

Une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 est une expression de la forme suivante :

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = b(x) \tag{3}$$

où y est une fonction dérivable de x, a et b sont des fonctions continues de x sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. La notation $\frac{dy}{dx}$ désigne la dérivée de la fonction y par rapport à sa variable x.

La méthode de résolution que nous présentons est appelée méthode de variation de la constante (ou méthode de Lagrange [1]). Cette méthode consiste à chercher une solution sous une forme particulière. Elle s'appuie sur deux étapes. Dans la première étape, qu'on appellera "Equation sans second membre (ESSM)", car elle consiste à remplacer $b(x)$ par 0 dans (3), on trouve une forme particulière pour la solution. La seconde étape, appelée "Variation de la constante", consistera à trouver la solution explicitement.

Théorème 5 *Les solutions de l'équation (3) sont données par :*

$$y(x) = K(x)\exp(-A(x)) \tag{4}$$

où A est une primitive de a et K est une primitive de $x \mapsto b(x)\exp(A(x))$.

Décrivons la méthode de résolution.
Etape (a) : **ESSM**

On considère l'équation (3) dans laquelle on remplace b par 0. On retombe donc sur la section précédente avec une équation homogène. Les solutions (positive) vont donc s'écrire sous la forme :

$$y(x) = K\exp(-A(x))$$

Etape (b) : **Variation de la constante**

On reprend le résultat de l'étape (a) dans lequel on remplace la constante K par une fonction $K(x)$ à définir (on fait "varier la constante"). Puisqu'on a :

$$y(x) = K(x)\exp(-A(x))$$

la fonction y se dérive comme un produit et sa dérivée est donc :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx}(x) &= \frac{dK}{dx}(x)\exp(-A(x)) - \frac{dA}{dx}(x)K(x)\exp(-A(x)) \\ &= \frac{dK}{dx}(x)\exp(-A(x)) - a(x)y(x) \end{aligned}$$

Or, d'après (3), on sait que :

$$\frac{dy}{dx}(x) = b(x) - a(x)y(x)$$

Par identification des deux expressions de la dérivée de y, il en découle :

$$\frac{dK}{dx}(x)\exp(-A(x)) = b(x)$$

d'où le résultat.

1. Lagrange était un mathématicien italien, né en 1736 et mort en 1813.

Exemple 6 *On considère un composé dans un milieu, donc la concentration à l'instant t est notée $C(t)$. On suppose qu'à chaque instant, le composé est déversé dans le milieu à un taux I et que ce composé se dégrade avec un taux de dégradation noté k. On peut alors écrire une équation différentielle pour la concentration de ce composé :*

$$\frac{dC}{dt} = I - kC \tag{5}$$

On cherche alors à exprimer $C(t)$. L'équation précédente est une équation différentielle linéaire non homogène d'ordre 1. On va donc la résoudre en utilisant la méthode décrite précédemment.
Etape (a) : ESSM

On considère l'équation $\frac{dC}{dt} = -kC$. La solution est : $C(t) = K\exp(-kt)$.

Etape (b) : Variation de la constante

On suppose maintenant que la concentration s'écrit, d'après l'étape précédente :

$$C(t) = K(t)\exp(-kt)$$

En dérivant chaque membre de cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{dC}{dt} &= \frac{dK}{dt}\exp(-kt) - kK(t)\exp(-kt)\\ &= \frac{dK}{dt}\exp(-kt) - kC\end{aligned}$$

Comme l'expression (5) nous dit que la dérivé de C est $\frac{dC}{dt} = I - kC$, on en déduit que :

$$\frac{dK}{dt}\exp(-kt) = I$$

donc

$$\frac{dK}{dt} = I\exp(kt)$$

Par conséquent, $K(t) = \frac{I}{k}\exp(kt) + \alpha$. où α est une constante réelle. En remplaçant $K(t)$ par son expression dans $C(t) = K(t)\exp(-kt)$, on obtient :

$$C(t) = \frac{I}{k} + \alpha\exp(-kt)$$

Remarque 7 *Dans l'exemple précédent, pour déterminer la valeur de la constante α, on suppose qu'on connait la valeur de C à instant donné, par exemple à $t = 0$. Soit C_0 cette valeur, $C(0) = C_0$. Comme on a obtenu $C(t)$, on remplace t par 0 dans l'expression de $C(t)$, ce qui donne :*

$$C(0) = \frac{I}{k} + \alpha = C_0$$

Donc $\alpha = C_0 - \frac{I}{k}$.

2 Systèmes différentiels linéaires

Dans cette section, on s'intéressera à des systèmes différentiels. Ce sont des systèmes qui regroupent plusieurs équations différentielles couplées. L'idée qui est derrière l'utilisation de ce formalisme, c'est que dans l'environnement, de nombreuses grandeurs interagissent entre elle, un système ne peut pas se réduire en général à une seule variable. Chacune des grandeurs serait alors la solution d'une équation différentielle qui est définie à partir de l'ensemble des variables. Nous traitons ici le cas où ces interactions sont linéaires. Un système différentiel sera alors défini ici par :

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n && (6)\\
\frac{dy_2}{dx} &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n && (7)\\
\vdots &= \vdots \quad \vdots \quad \vdots && (8)\\
\frac{dy_n}{dx} &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n && (9)
\end{aligned}$$

Les nombres a_{ij} sont des constantes, i est le numéro de la ligne et j correspond à la variable y_j. Les grandeurs y_j dépendent de x.

Supposons que sur chaque ligne i, $a_{ij} = 0$ pour tout $j \neq i$, pour tout $i = 1, ..., n$. Dans ce cas, le système précédent devient :

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= a_{11}y_1\\
\frac{dy_2}{dx} &= a_{22}y_2\\
\vdots &= \vdots \quad \vdots \quad \vdots\\
\frac{dy_n}{dx} &= a_{nn}y_n
\end{aligned}$$

Chaque équation ne dépend ici que d'une fonction y_i, elle se résoud alors en utilisant la section sur les équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 1. Si on note A la matrice dont les coefficients sont les nombres a_{ij}, le cas simple précédent correspond au cas où la matrice est diagonale. Le principe de résolution que nous allons aborder maintenant par de ce principe.

2.1 Résolution d'un système différentiel linéaire quand la matrice associée est diagonalisable dans $\mathbb{R}$

Posons Y le vecteur de coordonnées $(y_1, \ldots, y_n)$, $\frac{dY}{dx}$ désigne le vecteur de coordonnées $(\frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx})$ et enfin, notons A ma matrice dont les coefficients sont a_{ij}. Le système (6) peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\frac{dY}{dx} = AY \tag{10}$$

On suppose que la matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Cela signifie qu'il existe une base de vecteurs propres de A, une matrice de passage P et une matrice diagonale D, constituée des valeurs propres λ_i de A, telles que :

$$D = P^{-1}AP$$

Notons Y' le vecteur Y exprimé dans la nouvelle base, on a :

$$Y' = P^{-1}Y$$

Par conséquent :

$$\frac{dY'}{dx} = P^{-1}\frac{dY}{dx} = P^{-1}AY = P^{-1}APY' = DY'$$

Dans la nouvelle base, le système différentiel s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
\frac{dy'_1}{dx} &= \lambda_1 y'_1\\
\frac{dy'_2}{dx} &= \lambda_2 y'_2\\
\vdots &= \vdots\\
\frac{dy'_n}{dx} &= \lambda_n y'_n
\end{aligned}$$

On peut alors calculer les fonctions y_i' et on obtient :

$$y_i'(x) = C_i \exp(\lambda_i x)$$

Le vecteur Y' étant trouvé, il ne reste plus qu'à écrire $Y = PY'$ pour obtenir Y.

2.2 Résolution d'un système différentiel linéaire quand la matrice associée a des valeurs propres complexes

On considère un système différentiel de la forme :

$$\frac{dX}{dt} = AX$$

où $X \in \mathbb{R}^2$. On suppose que les valeurs propres de la matrice réelle 2x2 A sont complexes. Ses valeurs propres sont :

$$\lambda = \alpha + i\beta \quad \text{et} \quad \bar{\lambda} = \alpha - i\beta$$

On note V et $\bar{V}$ des vecteurs propres associés respectivement à λ et $\bar{\lambda}$. On appelle base de Jordan la base de $\mathbb{R}^2$ constituée des deux vecteurs suivants :

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{V + \bar{V}}{2} \\ V_2 &= \frac{V - \bar{V}}{2i} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} V &= V_1 + iV_2 \\ \bar{V} &= V_1 - iV_2 \end{aligned}$$

Déterminons comment se transforme la matrice A dans la base (V_1, V_2).

$$\begin{aligned} AV_1 &= \frac{AV + A\bar{V}}{2} \\ &= \frac{\lambda V + \bar{\lambda}\bar{V}}{2} \\ &= \frac{\lambda V_1 + i\lambda V_2 + \bar{\lambda}V_1 - i\bar{\lambda}V2}{2} \\ &= \frac{\alpha V_1 + i\beta V_1 + i\alpha V_2 - \beta V_2 + \alpha V_1 - i\beta V_1 - i\alpha V_2 - \beta V_2}{2} \\ &= \frac{\alpha V_1 - \beta V_2 + \alpha V_1 - \beta V_2}{2} \\ &= \alpha V_1 - \beta V_2 \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} AV_2 &= \frac{AV - A\bar{V}}{2i} \\ &= \frac{\lambda V - \bar{\lambda}\bar{V}}{2i} \\ &= \frac{\lambda V_1 + i\lambda V_2 - \bar{\lambda}V_1 + i\bar{\lambda}V2}{2i} \\ &= \frac{\alpha V_1 + i\beta V_1 + i\alpha V_2 - \beta V_2 - \alpha V_1 + i\beta V_1 + i\alpha V_2 + \beta V_2}{2i} \\ &= \frac{i\beta V_1 + i\alpha V_2 + i\beta V_1 + i\alpha V_2}{2i} \\ &= \beta V_1 + \alpha V_2 \end{aligned}$$

En conclusion, la matrice A se transforme dans la base (V_1, V_2) en :

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

J est appelée matrice de Jordan et la base (V_1, V_2) est appelée base de Jordan. Dans cette base, le vecteur X devient X' et si P désigne la matrice de passage de la base initiale à la base de Jordan, on a $X' = P^{-1}X$, qui équivaut à $X = PX'$. On en conclut que :

$$\frac{dX'}{dt} = P^{-1}\frac{dX}{dt} = P^{-1}AX = P^{-1}APX' = JX'$$

Donc dans la base de Jordan, le système différentiel s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= \alpha x' + \beta y' \\ \frac{dy'}{dt} &= -\beta x' + \alpha y' \end{aligned}$$

Posons $z = x' + iy'$, il en découle :

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{dx'}{dt} + i\frac{dy'}{dt} \\ &= \alpha x' + \beta y' - i\beta x' + i\alpha y' \\ &= x'(\alpha - i\beta) + iy'(\alpha - i\beta =) \\ &= \bar{\lambda} z \end{aligned}$$

La solution de l'équation différentielle obtenue en z est : $z(t) = C\exp(-\bar{\lambda}t)$ où C est une constante complexe, $C = C_1 + iC_2$ où C_1 et C_2 sont des constantes réelles. Exprimons les parties réelles et imaginaires de z :

$$\begin{aligned} z(t) &= (C_1 + iC_2)\exp(\alpha t)\exp(-i\beta t) \\ &= \exp(\alpha t)(C_1 + iC_2)(\cos(\beta t) - i\sin(\beta t)) \\ &= \exp(\alpha t)\Big((C_1\cos(\beta t) + C_2\sin(\beta t)) + i\,(C_2\cos(\beta t) - C_1\sin(\beta t))\Big) \end{aligned}$$

Comme $x'(t)$ et $y'(t)$ désignent respectivement les parties réelles et imaginaires de z, on en déduit que :

$$\begin{aligned} x'(t) &= \exp(\alpha t)\,(C_1\cos(\beta t) + C_2\sin(\beta t)) \\ y'(t) &= \exp(\alpha t)\,(C_2\cos(\beta t) - C_1\sin(\beta t)) \end{aligned}$$

Ce sont les coordonnées du vecteur X'. Enfin, la relation $X = PX'$ permet de revenir dans la base initiale et détermine les fonctions $x(t)$ et $y(t)$, coordonnées de X et solutions du système différentiel étudié.

Remarquons que les fonctions sin et cos étant bornées, l'amplitude des fonctions précédentes est uniquement déterminée par le signe de la partie réelle des valeurs propres de A, α. Si $\alpha < 0$, l'amplitude de x et y tend vers 0, elle tend vers l'infini si $\alpha > 0$.