Fonctions à une variable réelle : étude et applications

J.-C. Poggiale - Septembre 2008

1 Généralités

1.1 Exemples

Les fonctions sont couramment utilisées dans l'activité scientifique, dont l'un des objectifs est de mettre en évidence des relations entre différentes grandeurs. Nous donnons une liste très brève d'exemples tirés de la physique (électricité, mécanique) et de la biologie (biologie des organismes, biologie des populations, physiologie). La quantité d'exemples est considérable, nous n'en donnons que quelques - uns, choisis pour introduire quelques notions traitées dans le cours afin de les illustrer dans des cas particuliers pratiques.

1.1.1 Electricité

L'une des premières relations données en électricité est la loi d'Ohm qui relie la tension entre deux bornes d'un cirucuit électrique à l'intensité du courant traversant ce circuit :

$$U(I) = RI$$

où R désigne la résistance du circuit entre les bornes. Cette relation est simple et indique la proportionnalité entre tension et intensité : on dit qu'elle est **linéaire**. Plus l'intensité est élevée, plus la tension augmente et un doublement de l'intensité produit un doublement de la tension. Le graphe de U en fonction de I est une droite, passant par l'origine et de pente R.

1.1.2 Mécanique

Une relation assez simple issue de la cinématique concerne la vitesse d'un corps en chute libre en fonction de la hauteur de chute :

$$v(h) = \sqrt{2gh}$$

Comme dans l'exemple précédent, il s'agit d'une fonction **croissante** (la vitesse v augmente avec h) mais celle-ci est maintenant non linéaire : un doublement de h n'aboutit pas à un doublement de v. Plus h est grand, plus v est grand mais v augmente de moins en moins vite avec h.

1.1.3 Biologie des organismes

Une relation bien connue et qui s'applique à de très nombeuses espèces vivantes est la loi de Von Bertalanffy, qui exprime la taille d'un organisme en fonction de son âge :

$$L(a) = L_e + (L(0) - L_e)\exp(-ra)$$

où $L(0)$ est la taille à la naissance, L_e est la taille adulte et r caractérise la vitesse de croissance de la taille de l'organisme. Il s'agit encore d'une fonction croissante, mais celle-ci est maintenant **bornée** : plus l'âge augmente, plus la taille augmente, mais de moins en moins vite, jusqu'à une taille maximale.

1.1.4 Biologie des populations

L'une des premières équations rencontrées en dynamique de population dans le cas où, à forte densité, les individus entrent en compétition pour une ressource, est l'équation logistique. Celle-ci permet d'établir une relation entre la densité d'une population à un instant t et la variable t. Elle est donnée par l'expression suivante :

$$N(t) = \frac{KN(0)}{N(0) + (K - N(0))\exp(-rt)}$$

Il s'agit à nouveau d'une fonction croissante et bornée. Par contre, celle-ci admet un point d'**inflexion**. Cela signifie que la croissance est d'abord de plus en plus forte à petite densité, puis à partir d'une densité critique, la compétition se fait sentir, puis la croissance est de moins en moins forte et **tend vers** 0.

1.1.5 Physiologie

Le dernier exemple que nous donnerons ici avant de commencer le cours concerne la quantité de ressource qu'un individu ingère par unité de temps en fonction de la disponibilité en ressource.

$$I(R) = \frac{aR}{b+R}$$

Il s'agit également d'une fonction croissante et bornée.

1.2 Définitions

Si la variable y est une fonction de la variable x, on la notera $y = f(x)$ où f désigne la fonction (écrire f pour les exemples précédents). On dit que x a pour image $y = f(x)$ et on le note : $x \mapsto y = f(x)$. Le cours vise à déterminer les propriétés de la fonction f afin de comprendre comment varie y lorsque x augmente. Une fonction est définie sur un domaine. Cela signifie que nous devons commencer par nous poser la question de savoir si nous pouvons déterminer l'image de n'importe quel nombre x ou bien si le nombre x doit être restreint à un sous - ensemble des nombres réels. L'ensemble des nombres réels pour lequel la fonction f peut être définie s'appelle l'ensemble de définition. Afin de simplifier, on supposera dans la suite que la fonction f est définie sur un intervalle $I = [a; b]$ où a et b sont deux nombre réels. Eventuellement, on pourra avoir à traiter des exemples où I est de la forme $[a; +\infty[$, $]-\infty; b]$ ou $]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$.

Considérons un point particulier x_0 dans l'intervalle de définition de la fonction f.

Définition : une fonction f est continue au point x_0 si son graphe ne présente pas de "cassure" au point x_0. Cette notion peut s'écrire évidemment de manière plus formelle pour être manipulée plus rigoureusement. Cette formalisation exprime le fait que si "x se rapproche de x_0" alors "$f(x)$ se rapproche de $f(x_0)$". Comme l'expression "se rapproche" n'est pas une notion très précise, on l'exprime ainsi : fixons un petit voisinage autour de $f(x_0)$ (se rapprocher de $f(x_0)$ se traduira par entrer dans ce voisinage). Alors, si x est dans un voisinage assez petit de x_0 (cela signifie que x se rapproche de x_0), alors $f(x)$ est dans le voisinage de $f(x_0)$ que l'on s'est fixé initialement ($f(x)$ est proche de $f(x_0)$). L'écriture formelle est la suivante :

$$\forall A > 0, \exists B > 0; |x - x_0| < B \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < A$$

et elle se lit :

fixons une distance maximale $A > 0$ (autour de $f(x_0)$), il existe une distance $B > 0$ autour de x_0 telle que si la distance entre x et x_0 (notée par $|x - x_0|$) est assez petite (inférieure à B) alors la distance entre $f(x)$ et $f(x_0)$ est petite (inférieure à A). Noter que généralement, B dépend de A.

Exercice : Tracer un graphe continu en un point x_0. Définissez un A arbitraire et construisez un B qui respecte la définition de la continuité.

Dans les explications précédentes, nous avons utilisé l'expression "x se rapproche de x_0". Il existe une notion mathématique qui permet de formaliser proprement cette idée, c'est la notion de limite. La continuité en x_0 correspond au fait que la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0 est $f(x_0)$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Autrement dit, quand x tend vers x_0, $f(x) - f(x_0)$ tend vers 0.

Exercice :

1) Déterminer la limite de la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 + 3$ quand x tend vers 1.
2) Même exercice pour $f(x) = x^2$ quand x tend vers x_0.
3) Même exercice pour la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0}$ quand x tend vers x_0.

Definition : une fonction f est dite croissante au point x_0 si au voisinage de ce point le graphe de f monte. Cela se traduit par le fait que si x est assez proche de x_0 et si $x > x_0$ alors $f(x) > f(x_0)$. Par contre, si x est assez proche de x_0 et si $x < x_0$ alors $f(x) < f(x_0)$.

De la même manière, on peut définir une fonction décroissante en x_0 (son graphe descend).

Etant donnée une fonction f continue en x_0. Afin de déterminer son sens de variation (croissante ou décroissante) au point x_0, on peut utiliser l'outil suivant, appelé taux d'accroissement de f entre x et x_0 :

$$T_f(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Remarque : la limite de $T_f(x, x_0)$ quand x tend vers x_0 est une forme indéterminée (le vérifier).

Le taux de variation de f entre x et x_0 représente la pente de la droite passant par les points de coordonnées $(x_0; f(x_0))$ et $(x; f(x))$. Si x est assez proche de x_0, le sens de variation de f en x_0 est donné par celui de la droite définie précédemment. Donc f est croissante en x_0 dès que le taux de croissance de f entre x et x_0, pour x assez proche de x_0, est positif. S'il est négatif, la fonction est décroissante en x_0.

Définition : Si la limite quand x tend vers $x_0$du taux d'accroissement existe, on appelle nombre dérivé la limite obtenue et on le note $f'(x_0)$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

En posant $h = x - x_0$, l'expression précédente devient :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

$f'(x_0)$ est la pente de la tangente au graphe de f en x_0.

Définition : Si $f'(x_0)$ existe, on dit que la fonction f est dérivable en x_0.

Définition : si une fonction f est dérivable en tout x d'un intervalle I, on dit qu'elle est dérivable sur I et la fonction qui à x associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée dérivée de f.

Exercice :

1) Déterminer la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = x^2$.

2) Déterminer la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = x^3$ (indication : calculer $(x - x_0)\left(x^2 + xx_0 + x_0^2\right)$).

Comme nous l'avons expliqué pour le taux d'accroissement, le sens de variation de la fonction f est donné par le signe de la dérivée de f en x_0.

1.3 Dérivées usuelles

Nous rappelons ici les formules des dérivées que nous rencontrons fréquemment :

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
$\exp(x)$	$\exp(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$

De plus, si f et g sont deux fonctions dérivables, nous avons les formules suivantes, là où elles sont définies :

1 - $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

2 - $(fg)' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$

3 - $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$

4 - $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Exercice : calculer les dérivées des expressions suivantes :

1 - $f(ax)$

2 - $f^n(x)$

3 - $\exp(f(x))$

Exercice : calculer les dérivées des fonctions définies par les expressions suivantes :

1 - $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

2 - $f(x) = \frac{\exp(3x) - 2x}{x^2 - 4x + 2}$

1.4 Théorème des accroissements finis

Le théorème des accroisssements finis est un théorème essentiel car il est à la base de nombreuses explications dans les applications. Il permet de donner une évaluation de la différence entre deux valeurs de f. Plus précisément, considérons deux valeurs de x, notées x_1 et x_2. Le théorème des accroissements finis permet de contrôler la différence entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$ à partir de la différence entre x_1 et x_2. Il s'énonce comme suit.

Théorème : Considérons une fonction f définie, dérivable et de dérivée continue (on dira de classe C^1) sur un intervalle $I = [a; b]$. Soient deux nombres réels distincts x_1 et x_2 dans l'intervalle I. Alors il existe $c \in]x_1; x_2[$ tel que :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

Ce théorème, autrement dit, exprime le fait que pour toute droite D coupant le graphe de f aux points $p_1 = (x_1; f(x_1))$ et $p_2 = (x_2; f(x_2))$, il existe un point $p = (c; f(c))$ entre p_1 et p_2 tel que la tangente au graphe de f en p est parallèle à D. L'égalité obtenue peut également s'écrire :

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

En posant $x_0 = x_1$ et $x_2 = x_0 + h$, on peut écrire :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(c)\, h$$

L'idée de ce théorème est fondé sur deux résultats préliminaires. Le premier est le théorème des valeurs intermédiaires, qui dit que si une fonction est continue entre deux points x_1 et x_2 alors pour toute valeur y entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$, il existe un réel c entre x_1 et x_2 tel que $f(c) = y$. Le second théorème s'appuie sur le théorème des valeurs intermédiaires et s'énonce comme suit.

Théorème : On considère une fonction f définie, de classe C^1 sur un intervalle $I = [a; b]$. Soient x_1 et x_2 dans I tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Alors il existe $c \in]x_1; x_2[$ tel que $f'(c) = 0$.

La démonstration est une application du théorème des valeurs intermédiaires. Nous ne donnons pas de démonstration rigoureuse, qui s'appuierait sur des notions non vues en cours, mais nous donnons l'idées principale. Celle-ci est fondée sur le fait que si la fonction n'est pas toujours égale à 0 entre x_1 et x_2 (auquel cas le résultat du théorème serait obtenu), cela signifie qu'elle varie, en montant par exemple, sur un sous - intervalle de $]x_1; x_2[$. Mais comme $f(x_1) = f(x_2)$, si le graphe de f monte sur un sous - intervalle de $]x_1; x_2[$, il doit redescendre aussi. Sur la partie où le graphe de f monte, f' est positive et sur la partie où le graphe descend, f' est négative. Entre les deux, comme f' est continue, f' s'annule (valeurs intermédiaires).

La démonstration du théorème des accroissements finis est une application directe de ce résultat.

1.5 Développement limité en x_0 : formule de Taylor

Un développement limité en x_0 d'une fonction f permet d'obtenir une approximation de la fonction f au voisinage du point x_0 par un polynôme de degré n choisi. La formule de Taylor est la suivante :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + (x - x_0)^n E(x) \end{aligned}$$

où la fonction E est telle que $E(x)$ tend vers 0 quand x tend vers x_0.

2 Etude d'une fonction réelle

Nous allons montrer dans cette section le plan d'étude d'une fonction à partir d'un exemple. Considérons la fonction f définie par l'expression :

$$f(x) = \frac{x + 3}{\sqrt{x + 1} - 1}$$

2.0.1 Domaine d'étude

La première chose à faire consiste à déterminer l'ensemble de définition de f, c'est - à - dire l'ensemble des valeurs de la variable réelle x pour lesquelles l'expression ci-dessus a un sens. Il s'agit d'un quotient, le numérateur est toujours défini mais le dénominateur ne doit pas s'annuler. Nous allons donc déterminer les valeurs de x qui annulent le dénominateur et les exclure. Le dénominateur contient une expression avec une racine carrée. Or une racine carrée n'a de sens que si le réel sur lequel elle s'applique est positif (ou nul). Donc déjà on voit que $x \geq -1$. Ensuite, on étudie pour quelles valeurs de x ce dénominateur s'annule :

$$\sqrt{x+1} = 1$$

Cette expression est équivalente à :

$$x + 1 = 1$$

autrement dit $x = 0$. En conclusion le dénominateur s'annule pour $x = 0$, ce réel n'est donc pas dans l'ensemble de définition. Celui-ci est :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}/x \geq -1; x \neq 0\} = [-1; 0[\cup]0; +\infty[$$

Une fois cet ensemble déterminé, on peut se fixer un domaine d'étude, c'est - à - dire un sous-ensemble de D_f où on souhaite étudier f. Dans cet exemple, nous choisissons un domaine d'étude D_E égal au domaine de définition : $D_E = D_f$.

2.1 Sens de variations

L'étape suivante consiste à étudier le sens de variation de la fonction f sur le domaine d'étude. Si la fonction est dérivable, nous utilisons sa dérivée. Notre fonction est une composition de fonction dérivable, elle est donc dérivable sur D_E. La dérivée de f est :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{x+1} - 1 - \frac{x+3}{2\sqrt{x+1}}}{\left(\sqrt{x+1} - 1\right)^2} \\ &= \frac{2\left(x+1-\sqrt{x+1}\right) - x - 3}{2\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2} \\ &= \frac{x - 1 - 2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2} \end{aligned}$$

Le signe du dénominateur de cette expression est positif, donc le signe de la dérivée est le signe du numérateur. Nous allons donc déterminer pour quelle(s) valeur(s) de x le numérateur s'annule, puis en déduire son signe selon les valeurs de x.

$$\begin{aligned} & x - 1 - 2\sqrt{x+1} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x - 1 = 2\sqrt{x+1} \\ \Leftrightarrow \quad & (x-1)^2 = 4(x+1) \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 6x - 3 = 0 \end{aligned}$$

L'expression s'annule pour $x = 3 - 2\sqrt{3}$ et $x = 3 + 2\sqrt{3}$ sur D_E. Si $x \in [-1; 0[\cup]0; 3 - 2\sqrt{3}[$, ou si $x > 3 + 2\sqrt{3}$, le numérateur est positif et si $x \in]3 - 2\sqrt{3}; 3 + 2\sqrt{3}[$, le numérateur est négatif. Donc la fonction est décroissante sur $x \in]3 - 2\sqrt{3}; 3 + 2\sqrt{3}[$, et croissante sur le reste de son ensemble de définition. Nous constatons donc que pour $x = 3 - 2\sqrt{3}$, la fonction atteint un maximum local et pour $x = 3 + 2\sqrt{3}$, elle atteint un minimum local.

2.1.1 Extrêma (minima, maxima) - Points d'inflexion

Dans de nombreuses applications, il est intéressant de déterminer les extrêma ou les points d'inflexion d'une fonction. Ceux-ci sont obtenus par l'analyse des sens de variations de la fonction. En effet, un extrêma ou un point d'inflexion vérifie $f'(x) = 0$. Si la fonction f' est dérivable, on peut discriminer entre les maxima, les minima et les points d'inflexion au moyen de la dérivée seconde. Supposons que x_0 soit solution de $f'(x) = 0$. Si $f''(x_0) > 0$, alors x_0 est un minimum. Si $f''(x_0) < 0$, alors x_0 est un maximum. Si $f''(x_0) = 0$, alors x_0 est un point d'inflexion.

3 Intégration

L'objectif principal de cette section est de déterminer la surface comprise entre le graphe d'une fonction f et l'axe des x.

3.1 Primitives

Définition : étant donnée une fonction f définie sur un intervalle $I = [a;b]$, on appelle primitive de f toute fonction F définie sur I telle que la dérivée de F soit f.

Théorème : Si F est une primitive de f, toutes les primitives de f sont de la forme $F + C^{te}$.

En effet, si F et G sont deux primitives de f alors posons $H = F - G$. La dérivée de la fonction H est la fonction nulle. Si H dépend de x, sa dérivée n'est pas constamment nulle, donc H ne dépend pas de x, c'est une constante. Donc $F = G + H = G + C^{te}$.

Si F est une primitive de f et G est une primitive de g, alors $F + G$ est une primitive de $f + g$.

Comme nous l'avons fait pour les dérivées auparavant, nous présentons ici les primitives usuelles.

f	F
a	ax pour tout $x \in \mathbb{R}$
x	$\frac{x^2}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
x^r	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$ pour tout $r \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\log(x)$ pour tout $x > 0$
$\exp(x)$	$\exp(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

3.2 Intégration

Considérons une fonction f continue et positive sur un intervalle $I = [a;b]$. Soit $x \in I$, on note $A(x)$ l'aire comprise entre le graphe de f, l'axe des x et entre a et x. Déterminons sa dérivée. Pour cela, on reprend la définition de la dérivée et on exprime le taux de variation de A entre x_0 et $x_0 + h$:

$$\frac{A(x_0+h) - A(x)}{h}$$

La limite de ce taux de variation quand h tend vers 0 est la dérivée de A en x_0. Si h est petit, la différence de surface entre $A(x_0+h)$ et $A(x)$ est très étroite (largeur h) et la hauteur est approximativement $f(x_0)$. Cette différence de surface est donc approximativement celle d'un rectangle de largeur h et de hauteur $f(x_0)$. On a donc :

$$\frac{A(x_0+h) - A(x)}{h} \simeq f(x_0) \text{ si h est petit}$$

On constate donc que la dérivée de A est f, autrement dit, A est une primitive de f. Déterminer la surface sous le graphe de f consiste donc à chercher une primitive de f. Toutes ces primitives sont égales à une constante près. Or, la surface $A(a)$ est nulle, donc on cherche la primitive qui s'annule en a.

Le résultat précédent peut s'étendre à des fonctions qui ne sont pas positives en affectant par convention le signe $(-)$ aux aires correspondant aux endroits où les courbes sont en dessous de l'axe des x.

L'aire entre a et x est appelée intégrale entre a et x et sera notée :

$$A(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

Cette notation exprime que l'aire sous la courbe "est une somme (le symbole $\int$ est un "s") de surfaces de rectangles de largeur "dx" et de hauteur $f(x)$". Etant donnée une primitive F de f, on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

On a les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f+g)(x)\,dx &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \\
\int_a^b \alpha f(x)\,dx &= \alpha \int_a^b f(x)\,dx \\
\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx &= \int_a^b f(x)\,dx
\end{aligned}$$

3.3 Théorème de la moyenne

Le théorème de la moyenne exprime le fait que l'aire sous le graphe d'une fonction f est obtenue par celle d'un rectangle de hauteur bien choisie.

Théorème : soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a; b]$, il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que :

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

Démonstration (dans le cas où $f(x) \geq 0$ sur I) :
On pose $m = \min(f(x); x \in I)$ et $M = \max(f(x); x \in I)$, on a donc :

$$0 \leq m \leq f(x) \leq M$$

Il en découle les inégalités suivantes :

$$0 \leq m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Autrement dit :

$$0 \leq m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, quel que soit le nombre réel y compris entre m et M, il existe un nombre réel c entre a et b tel que $f(c) = y$. Puisque $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ est compris entre m et M, il existe c tel que :

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

d'où le résultat du théorème.